



1. naloga

Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

MIHA SRDINŠEK

Povzetek

Varčno vožnjo lahko definiramo s pogojem, da je pospeševanja in zaviranja čim manj. To lahko dosežemo z minimizacijo komulativnega kvadrata pospeška. Iščemo optimalni režim vožnje v situaciji, ko poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč.

I. BREZDIMENZIJSKA OBLIKA

Za začetek si predstavljajmo, da govorimo o semaforjih, ki nam kažejo čas t_0 po katerem se bo prižgala zelena luč in da poznamo razdaljo l_0 od vozila do semaforja. V tem primeru lahko takoj zapišemo pogoj

$$\int_0^{t_0} v(t) dt \leq l_0, \quad (1)$$

kjer $v(t)$ predstavlja hitrost vozila ob času t . Za začetek bomo varčno vožnjo definirali tako kot v navodilu naloge in zato iščemo takšen tir vozila, da bo na koncu integral (oziroma "vsota") kvadrata pospeška po času minimalen

$$\int_0^{t_{koncni}} \dot{v}(t)^2 dt = \min. \quad (2)$$

Kar smo zapisali pa je ravno klasična akcija S . Očitno gre za variacijski problem, ki ga lahko rešimo s pomočjo Euler-Lagrangeovih enačb, pri čemer 1 predstavlja vez, ki jo bomo v Lagrangean zapisali v obliki lagrangejeva multiplikatorja

$$\mathcal{L}(\dot{v}, v) = \dot{v}^2 - \lambda v. \quad (3)$$

Tak problem ima znano rešitev

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0. \quad (4)$$

Prišli smo do točke, ko bi bilo smiselno uvesti brezdimenzijske količine zavoljo splošnosti razultatov. Definirali jih bomo na podlagi karakterističnega časa t_0 in karakteristične dolžine l_0 našega problema. Na tak način lahko definiramo tudi karakteristično hitrost $\frac{l_0}{t_0}$. S tem v mislih si izmislimo nove brezdimenzijske količine

$$\mathcal{T} = \frac{t}{t_0}, \quad \mathcal{X} = \frac{x}{l_0}, \quad \mathcal{V} = \frac{vt_0}{l_0}. \quad (5)$$

V primeru, ko si želimo da do semaforja pridemo ravno ko se tam prižge zelena luč, nova brezdimenzijska količina \mathcal{T} teče od vrednosti 0 k vrednosti 1, ko se luč na semaforju prižge. Identično velja tudi za brezdimenzijsko pot \mathcal{X} . Za brezdimenzijsko hitrost \mathcal{V} pa vidimo da pri vrednosti 1 predstavlja ravno enakomerno gibanje s hitrostjo, ki bo v času t_0 vozilo pripeljalo točno do semaforja. Akcija, če zahtevamo da vozilo v času t_0 prispe do semaforja, v teh enotah izgleda takole

$$S = \int_0^1 \mathcal{L}(\dot{\mathcal{V}}, \mathcal{V}) d\mathcal{T} = \int_0^1 (\dot{\mathcal{V}}^2 - \lambda \mathcal{V}) d\mathcal{T}. \quad (6)$$

Na podlagi enačbe 3 tako dobimo brezdimenzijsko enačbo gibanja oblike

$$\ddot{\mathcal{V}} = -\frac{\lambda}{2}. \quad (7)$$

Enačbo 7 dvakrat integriramo in dobimo ploščino pod krivuljo z dvema neznanimi konstantama A in B

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = -\frac{\lambda}{4} \mathcal{T}^2 + A\mathcal{T} + B. \quad (8)$$

II. ZNANA ZAČETNA IN KONČNA HITROST

Za začetek si pogledajmo zgolj primer, ko imamo znano začetno hitrost

$$\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0, \quad (9)$$

zahtevano končno hitrost

$$\mathcal{V}(1) = \mathcal{V}_k \quad (10)$$

in preoblikovano vez 1 v

$$\int_0^1 \mathcal{V}(\mathcal{T}) d\mathcal{T} = 1. \quad (11)$$

Našteto so potrebni robni pogoji, da določimo vrednosti konstant λ , A in B . Konstanto B določimo s prvim robnim pogojem

$$\mathcal{V}(0) = B = \mathcal{V}_0, \quad (12)$$

rešitev vstavimo nazaj v enačbo in z drugim robnim pogojem določimo konstanto A

$$\mathcal{V}(1) = -\frac{\lambda}{4} + A + \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_k. \quad (13)$$

Iz enačbe 13 izrazimo A in ga s kupaj s B vstavimo v integral tretjega robnega pogoja 11

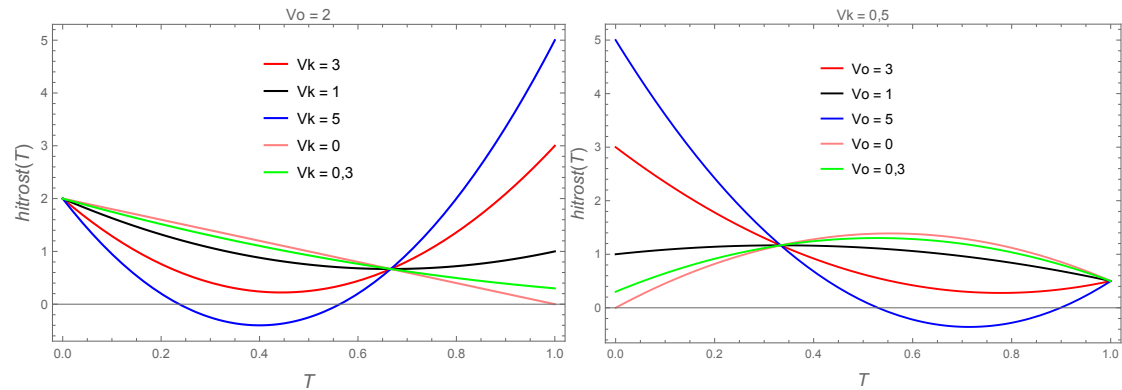
$$1 = \int_0^1 \left(-\frac{\lambda}{4} \mathcal{T}^2 + A \mathcal{T} + B\right) d\mathcal{T} = -\frac{\lambda}{12} + \frac{1}{2}A + B = -\frac{\lambda}{12} + \frac{1}{2}(\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_0) + \frac{1}{2}\lambda + \mathcal{V}_0. \quad (14)$$

Ko iz enačbe 14 sedaj izrazimo λ

$$\lambda = 12(2 - \mathcal{V}_k - \mathcal{V}_0), \quad (15)$$

imamo znane vse konstante in lahko zapišemo rezultat brezdimenzijskega problema pri znani začetni hitrosti, in pogoj, da vozilo prispe do semaforja ob času t_0 , z brezdimenzijsko hitrostjo \mathcal{V}_k

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = -3(2 - \mathcal{V}_k - \mathcal{V}_0)\mathcal{T}^2 - 2(\mathcal{V}_k + 2\mathcal{V}_0 - 3)\mathcal{T} + \mathcal{V}_0. \quad (16)$$



Slika 1: Izrisana enačba 16 za različne vrednosti začetne in končne hitrosti.

Na zgornji sliki 1 vidimo po kakšni poti vozilo doseže zahtevane hitrosti. Če si pogledamo rdečo krivuljo na levi sliki, kjer želimo močno povečati hitrost vozila, vidimo da se mora vmes vozilo upočasniti in potem pospeševati do hitrosti 3. V tako dolgem času ($\delta\mathcal{T} = 1$) bi namreč z začetno hitrostjo 2 dosegel hitrost 3 prekmalu. Povedano drugače - ploščina pod rdečo krivuljo bi bila prevelika, zato mora vozilo zavirati. Kako absurdni so takšni robni pogoji nam še bolj očitno kaže modra krivulja, pri kateri se mora vozilo voziti vzvratno, da sploh lahko doseže tako bizarne zahteve. Druga stvar, ki jo opazimo je, da so vse krivulje pod roza krivuljo, ki ima za cilj ustaviti se pred semaforjem ravno ko se prižge zelena luč, pred presečiščem in vse nad njo po presečišču. To seveda zopet iz istih razlogov kot zgoraj. Ker bodo v drugem delu dosegle dosti višje hitrosti, morajo ploščino pred vzponom neke izgubiti. Naj spomnim da je tudi to

izgubljanje ploščine omejeno s pogojem o minimizaciji pospeškov, kar se odraža v taki paraboli. Druga opazka je seveda ta, da se vse sekajo v isti točki. Če si mislimo, da so to parabole, se med seboj sekajo v dveh točkah in to v točkah, kjer jih seka premica. Gre torej samo za to, da se presečišče mora ohranjati, ker gre za isto parabolo. Slika desno nas privede do enakih komentarjev. kar je zanimivo je edino to, da tu več ne velja, da so vsi pod ali nad premico. Na levi sliki se je to zgodilo, ker nisem izbral negativnih končnih hitrosti kot parameter, sicer bi tudi tam dobili tako oblikovano krivuljo.

III. POLJUBNA KONČNA HITROST

Iz variacijske teorije je znano, da ne rabimo nujno poznati obeh robnih pogojev, temveč zadostuje že en robni pogoj in izpoljena zahteva

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{V}}} |_{\mathcal{T}=1} = 0 \quad (17)$$

na drugi robni točki. Tako kot v poglavju II tudi zdaj uporabimo robna pogoj 9 in vez 11. Nov dinamični robni pogoj pa zapišemo kar tako, da namesto Lagrangejana v enačbo 17 vstavimo 3 v brezdimenzijski obliki

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{V}}} |_{\mathcal{T}=1} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathcal{V}}} (\dot{\mathcal{V}}^2 - \lambda \mathcal{V}) |_{\mathcal{T}=1} = 2\dot{\mathcal{V}} |_{\mathcal{T}=1} = 0. \quad (18)$$

Ker je rešitev Euler-Lagrangejevih enačb enaka, še vedno govorimo o rešitvi 8 in zato zapišemo

$$\dot{\mathcal{V}}(\mathcal{T}) |_{\mathcal{T}=1} = \left(-\frac{\lambda}{2} \mathcal{T} + A \right) |_{\mathcal{T}=1} = -\frac{\lambda}{2} + A = 0, \quad (19)$$

oziroma

$$A = \frac{\lambda}{2}. \quad (20)$$

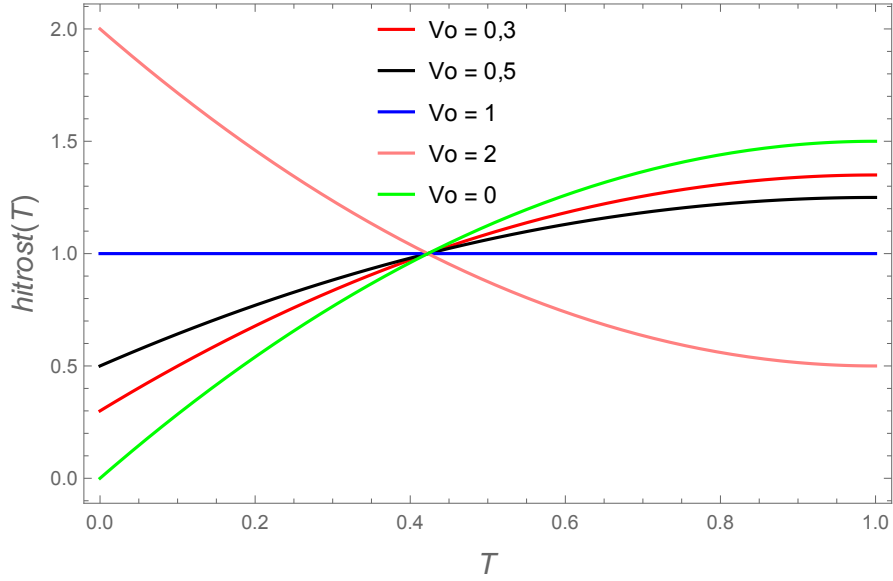
Upoštevamo še preostala robna pogoja in dobimo

$$B = \mathcal{V}_0, \quad \lambda = 6(1 - \mathcal{V}_0), \quad (21)$$

oziroma končni rezultat v primeru ko imamo prost končni robni pogoj

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = 3(1 - \mathcal{V}_0) \left(\mathcal{T} - \frac{1}{2} \mathcal{T}^2 \right) + \mathcal{V}_0 \quad (22)$$

Kar vidimo izrisano spodaj na sliki 2 je precej podobno sliki 1. Situacija je različna le po tem, da ravno ko vozilo doseže semafor doseže tudi maksimum hitrosti $\dot{\mathcal{V}} |_{\mathcal{T}=1} = 0$. Nadaljne posledice tega si bomo ogledali v zadnjem poglavju.



Slika 2: Izrisana enačba 22, za različne začetne hitrosti.

IV. FUNKCIONAL Z VIŠJIMI POTENCAMI POSPEŠKA

Ko smo si izbrali za akcijo integral po kvadratu pospeška smo to naredili zgolj zato, da smo se znebili negativnih prispevkov k integralu in hkrati ustvarili lepo integrabilno funkcijo. A kvadrat ni nujno najboljša izbira, zato si pogledjmo kaj se zgodi, ko si izberemo višje potence tega kvadrata. Za začetek bomo kar zapisali lagrangean s poljubno potenco $p \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{L}(\dot{\mathcal{V}}, \mathcal{V}) = (\dot{\mathcal{V}}^{2p} - \lambda \mathcal{V}) \quad (23)$$

in uporabili identiteto 4, zaradi česar dobimo

$$\frac{d}{dT}(2p\dot{\mathcal{V}}^{2p-1}) + \lambda = 2p(2p-1)\dot{\mathcal{V}}^{2p-2}\ddot{\mathcal{V}} + \lambda = 0. \quad (24)$$

A v resnici smo ta odvod zapisali zgolj zaradi preglednosti. Želimo si namreč poznati hitrost \mathcal{V} in zato bomo lev člen enačbe 24 dvakrat integrirali. Integral je enak

$$\dot{\mathcal{V}} = \left(A - \frac{\lambda}{2p}\mathcal{T}\right)^{\frac{1}{2p-1}}, \quad (25)$$

pri čemer je A neznana konstanta, ki jo bomo določili s pomočjo robnih pogojev. Naslednji integral izvedemo s pomočjo nove spremenljivke g , ki je enaka tistemu v oklepaju

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = -\frac{2p}{\lambda} \int g^{\frac{1}{2p-1}} dg = \frac{2p-1}{\lambda} \left(A - \frac{\lambda}{2p}\mathcal{T}\right)^{\frac{2p}{2p-1}} + B, \quad (26)$$

pri čemer B predstavlja dodatno neznano konstanto. Sedaj pa se lotimo določanja konstant A , B in λ z istimi robnimi pogoji kot v poglavju III. Najprej zapišemo 17

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{V}}} \Big|_{\mathcal{T}=1} = 2p \left(A - \frac{\lambda}{2p}\mathcal{T}\right) \Big|_{\mathcal{T}=1} = 0 \quad (27)$$

pri čemer smo za $\dot{\mathcal{V}}$ uporabili kar rezultat 25. Očitno velja

$$A = \frac{\lambda}{2p}, \quad (28)$$

kar pomeni, da bo prvi člen v hitrosti 26 ob času $\mathcal{T} = 1$ enak nič. Upoštevamo še, da poznamo začetno hitrost \mathcal{V}_0

$$B = \frac{2p-1}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2p} \right)^{\frac{2p}{2p-1}} + \mathcal{V}_0 \quad (29)$$

in to, da mora enačba hitrosti opisati v času $\mathcal{T} = 1$ celotno pot do semaforja

$$\int_0^1 \mathcal{V}(\mathcal{T}) d\mathcal{T} = -2p \frac{(2p-1)^2}{\lambda^2(4p-1)} \left(\frac{\lambda}{2p} \right)^{\frac{4p-1}{2p-1}} + \frac{2p-1}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2p} \right)^{\frac{2p}{2p-1}} + \mathcal{V}_0 = 1. \quad (30)$$

Iz zgornje enačbe lahko izrazimo

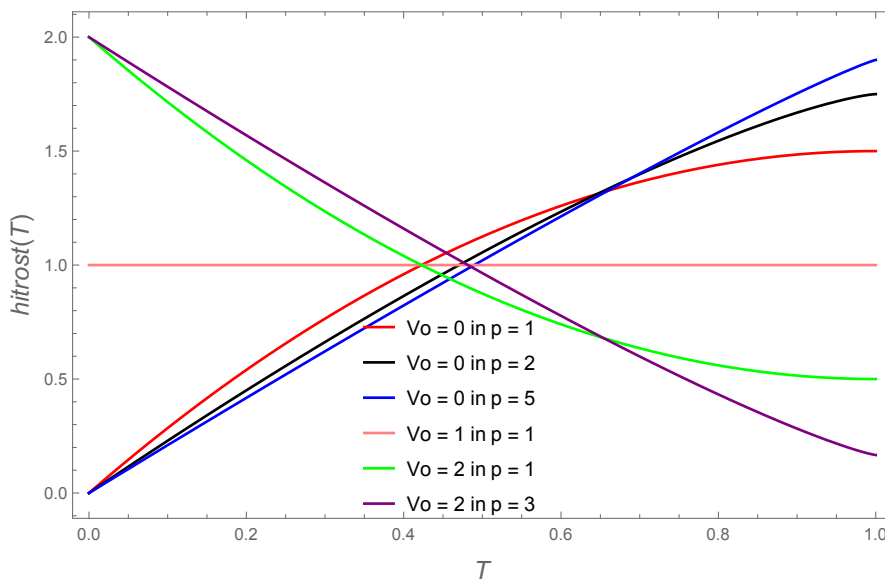
$$\frac{\lambda}{2p}^{\frac{1}{2p-1}} = (1 - \mathcal{V}_0) \frac{4p-1}{2p-1}, \quad (31)$$

kar vstavimo v enačbo za hitrost skupaj s konstantama A in B in dobimo končni rezultat

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \frac{4p-1}{2p} (1 - \mathcal{V}_0) [1 - (1 - \mathcal{T})^{\frac{2p}{2p-1}}] + \mathcal{V}_0. \quad (32)$$

Če si sedaj pogledamo limito, ko gre p proti zelo visokim vrednostim dobimo rezultat

$$\mathcal{V}(p \rightarrow \infty) = 2(1 - \mathcal{V})\mathcal{T} + \mathcal{V}_0. \quad (33)$$



Slika 3: Izrisana enačba 32 za različne vrednosti potence pri treh različnih začetnih hitrostih.

Slika 3 jasno prikazuje, da z višjimi p pridemo do enakomernega približevanja neki končni hitrosti.

V. OMEJITEV HITROSTI

V realnem primeru bi si želeli, da se naše vozilo pokorava tudi prometnim predpisom. Najenostavnejša manifestacija take zahteve je recimo, da omejimo tudi hitrost, kar naredimo tako kot smo omejili pospeške, z minimizacijo kumulativnega kvadrata hitrosti. Nov lagrangean zapišemo kot

$$\mathcal{L}(\dot{\mathcal{V}}, \mathcal{V}) = \dot{\mathcal{V}}^2 + C^2 \mathcal{V}^2 - \lambda \mathcal{V}, \quad (34)$$

pri čemer C predstavlja nek poljubni prefaktor. Takoj vidimo, da lahko razdelimo enačbo na homogeni in trivialen partikularni del, ter zapišemo rešitev kot

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \frac{\lambda}{2C^2} + Ae^{C\mathcal{T}} + Be^{-C\mathcal{T}}, \quad (35)$$

pri tem pa spet naletimo na neznane konstante A , B in λ , ki jim bomo morali določiti vrednosti s pomočjo robnih pogojev. Tako kot smo že navajeni, tu zopet uporabimo takšne robne pogoje kot v poglavju III. Ko zapišemo vse robne pogoje dobimo sistem treh enačb

$$\mathcal{V}(0) = A + B + \frac{\lambda}{2C^2} = \mathcal{V}_0, \quad (36)$$

$$\dot{\mathcal{V}}|_{\mathcal{T}=1} = ACe^C + BCe^{-C} = 0, \quad (37)$$

$$\int_0^1 \mathcal{V}(\mathcal{T}) d\mathcal{T} = \frac{A}{C}(e^C - 1) + \frac{B}{C}(1 - e^{-C}) + \frac{\lambda}{2C^2} = 1. \quad (38)$$

Iz druge enačbe izrazimo pogoj

$$A = Be^{-2C}, \quad (39)$$

ki ga vstavimo v prvo enačbo in iz nje izrazimo B

$$B = (\mathcal{V}_0 - \frac{\lambda}{2C^2}) \frac{1}{(1 + e^{-2C})}. \quad (40)$$

Rezultat 40 nato upoštevajoč rezultat 39 vstavimo v zadnjo enačbo, jo spretno preoblikujemo in dobimo

$$\lambda = 2C^2 \frac{C - \mathcal{V}_0 \tanh(C)}{C - \tanh(C)}. \quad (41)$$

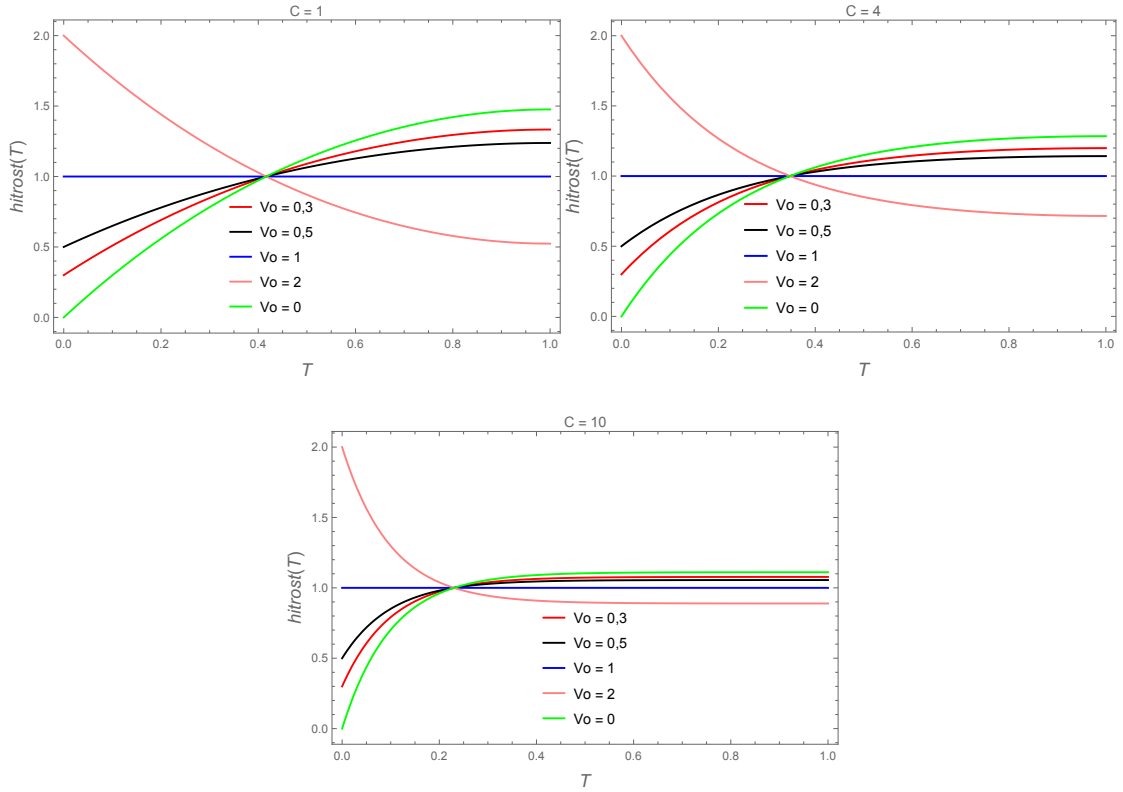
Če uporabimo zgornji rezultat dobimo tudi lepši izraz za B

$$B = \frac{C(\mathcal{V}_0 - 1)}{C - \tanh(C)} \frac{1}{1 + e^{-2C}} \quad (42)$$

in posledično končni rezultat

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \frac{C(\mathcal{V}_0 - 1)}{C - \tanh(C)} \frac{1}{1 + e^{-2C}} (e^{C\mathcal{T}-2C} + e^{-C\mathcal{T}}) + \frac{C - \mathcal{V}_0 \tanh(C)}{C - \tanh(C)}. \quad (43)$$

Če pogledamo slike 4 vidimo, da naš način omejevanja hitrosti le daje prednost hitrosti 1 pred ostalimi vrednostmi. Višja kot je vrednost naše uteži C več časa se bo vozilo vozilo s hitrostjo 1.



Slika 4: Izrisana enačba 43 pri različnih izbirah omejitve C za različne začetne hitrosti.

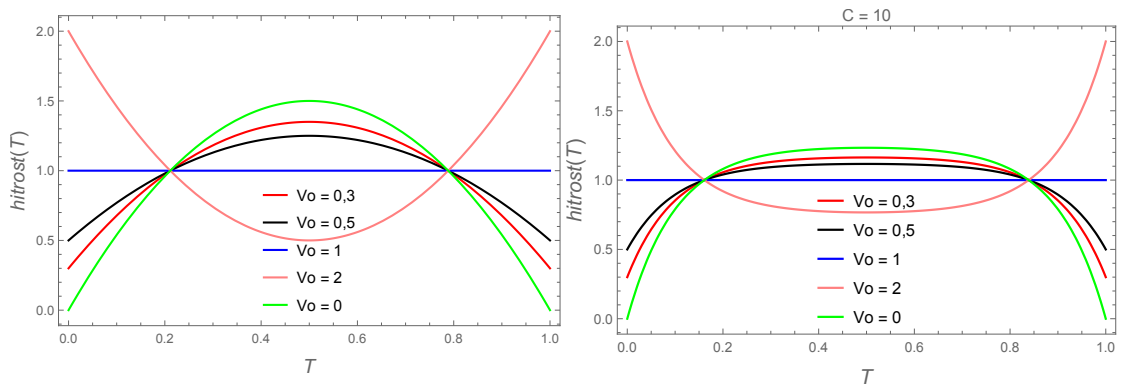
VI. PERIODIČNI ROBNI POGOJ

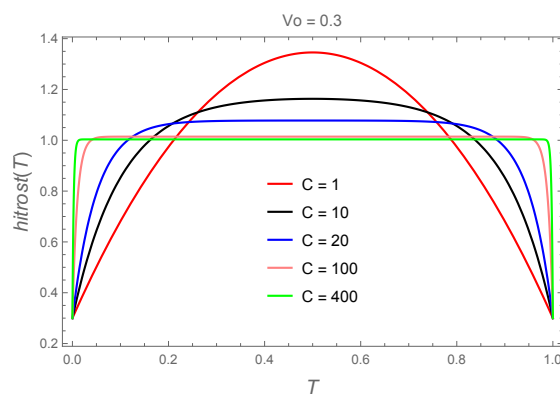
Pogosto se v praksi zgodi, da našemu vozilu pot prekriža več semaforjev. Vprašanje je kako prevoziti takšno zaporedje semaforjev, ne da bi naleteli na zeleno luč. Mogoče nam bo pri tem pomagal enostaven primer, ko zahtevamo, da je na začetku hitrost takšna kot na koncu

$$\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(1) = \mathcal{V}_0. \quad (44)$$

Zaradi enostavnosti uporabimo kar rezultat 8 in upoštevamo da velja $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_k$

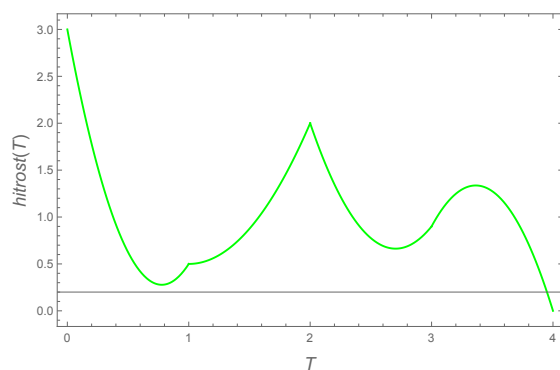
$$\mathcal{V}(T) = 6(1 - \mathcal{V}_0)T(1 - T) + \mathcal{V}_0. \quad (45)$$





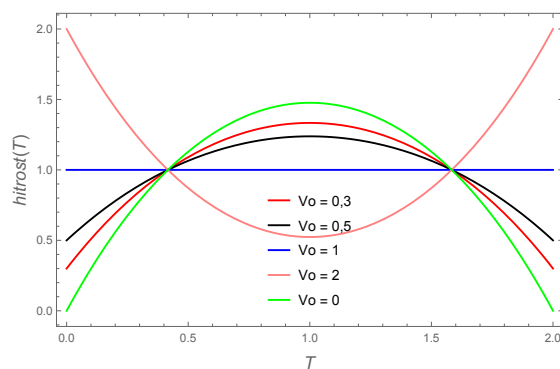
Slika 5

Slike 5 nam zgolj prikazujejo kar smo že diskutirali v poglavju V, le da sedaj zahtevamo, da je končna hitrost enaka začetni. V splošnem so vozila zmožna nezveznega pospeševanja in zato to v praksi sploh ni problem. Le sestavimo poljubno dolgo zaporedje takih dinamik, odvisno od tega koliko semaforjev želimo prevoziti. To sem prikazal na sliki 6.



Slika 6: Skupaj sam prilepil več rešitev iz poglavja II. Tudi pri tretjem semaforju, čeprav izgleda zvezno.

A vseeno nas zanima kako zagotoviti zvezdnost odvoda hitrosti, oziroma zvezno dinamiko, ko se zapeljemo mimo prvega semaforja in lovimo zeleni val. To smo pravzaprav že dosegli v poglavju, kjer smo pustili prosti pogoj za končno hitrost. Če zgolj podaljšamo časovni interval iz $[0, 1]$ na $[0, 2]$ vidimo, da vsaj prvi semafor znamo prepeljati tako, da do drugega pridemo, ko se na njem prižge zelena luč. To sem izrisal na sliki 7.



Slika 7: Rezultat iz poglavja III izrisan na intervalu $[0, 2]$.

Za kakšen večji preboj bi si pa moral vzeti kanček več časa. Ena od možnosti bi bila, da zapišemo z metodo lagrangejevih multiplikatorjev neko poridično vez. Zapisali bi lahko naprimer

$$\mathcal{L}(\dot{\mathcal{V}}, \mathcal{V}) = \dot{\mathcal{V}}^2 - \dot{\mathcal{V}}(Ae^{i\omega\mathcal{T}} + Be^{-i\omega\mathcal{T}}) - \lambda_2 \mathcal{V}, \quad (46)$$

in za periodo vzeli vrednost 1, torej $\omega = 2\pi$. A moram priznati, da o takem postopku še nisem dovolj premislil. Verjetno bi se z neko variacijo podobno temu, dalo doseči želeno. Morda bi bil čisto dovolj nek kosinus. V vsakem primeru bi se takšne enačbe znale precej zakoplicirati. Druga možnost bi bilo reševanje enačb na podoben način kot pri trdni snovi, z uporabo Blochovega teorema.