



13. naloga

Metoda maksimalne entropije in linearna napoved

MIHA SRDINŠEK

Povzetek

V tej nalogi smo spoznali fourijejevo spektroskopijo v prvem delu. Ogledali smo si različna okna, ki jih lahko uporabimo na diskretni fourijejevi transformaciji na danem signalu. V drugem delu naloge smo spoznavali, kako lahko s pomočjo fourijejeve transformacije iz signala na enostaven način izluščimo konvolucije funkcij, potem pa smo spoznali še wienov algoritem, ki nas nauči čistiti signal zamaknjes s konvucijo prenosne funkcije in dodatnim šumom. V zadnji nalogi smo uporabili metode obravnavane v drugi nalogi, le da bolj splošno. Obdelovali smo namreč sliko, ki je imela vse stolpce na tak način zamazane z neko konvolucijo in šumom.

I. FREKVENČNI SPEKTER Z METODO MAKSIMALNE ENTROPIJE

Najprej moramo rešiti Zoeplitzov sistem iz avtokorelacijskih funkcij, ki za zapišemo kot

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(p-1) \\ R(1) & R(0) & \dots & R(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(p-1) & R(p-1) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(p) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

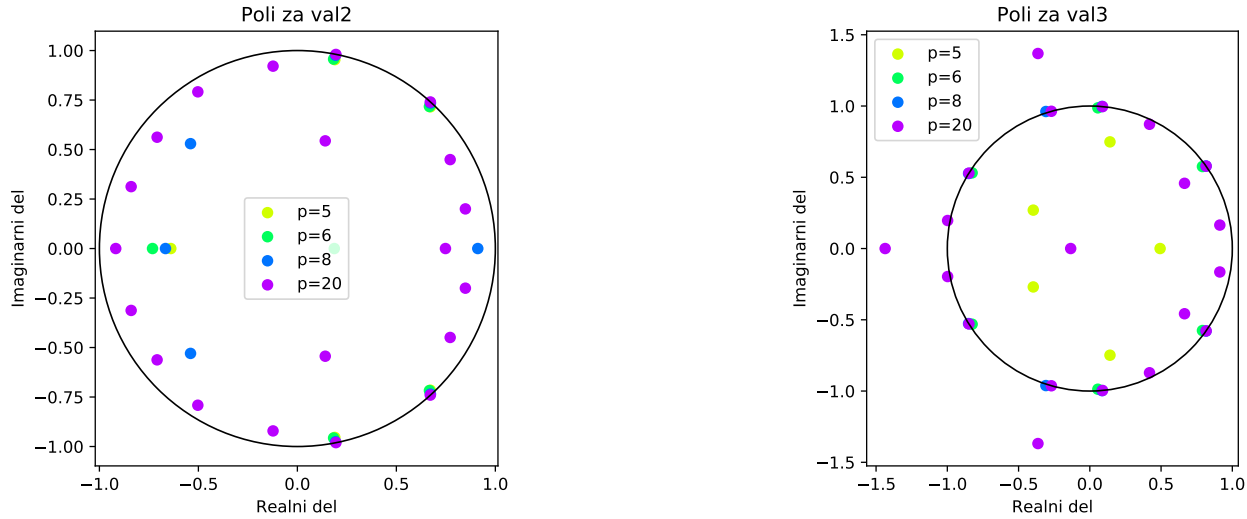
pri čemer so avtokorelacijske funkcije $R()$ podane s predpisom

$$R(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{n=0}^{N-1-i} S_n S_{n+i}, \quad (2)$$

in je S_n točka v signalu in N dolžina signala. Če to rešimo dobimo vrednosti a_k , ki bi morale predstavljati vrhove v spektru. Predstavljajo pravzaprav pole, zato lahko poiščem pole polinoma

$$1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} = 0, \quad (3)$$

ki izgledajo tako, kot vidimo na slikah 1. Opazimo lahko, da poli kdaj pobegnejo ven iz kroga ali pa znotraj kroga. Zato pridejo tudi izračunani spektri iz teh polov drugače, kot bi si želeli. Zato normiramo z in nato z novimi z poiščemo nove a_k . Na tak način dobimo na koncu precej lepši spekter.

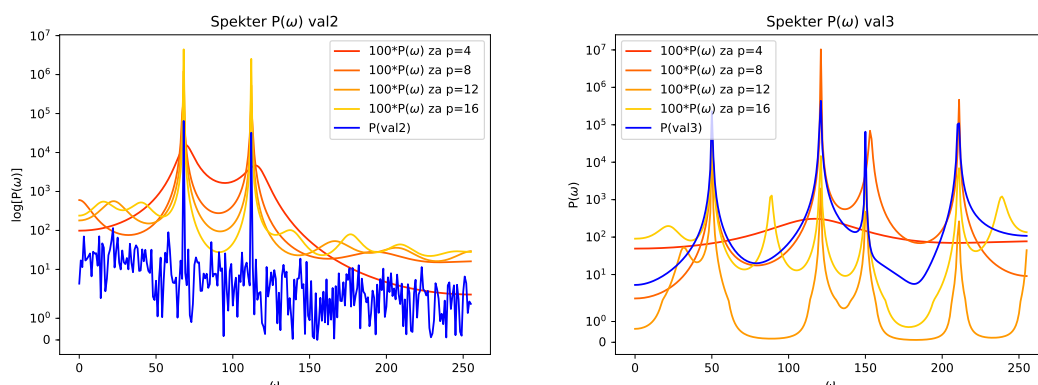


Slika 1: Sliki prikazujeta položae polov polinoma za različne vrednosti p .

Spekter pa luščimo s pomočjo enačbe

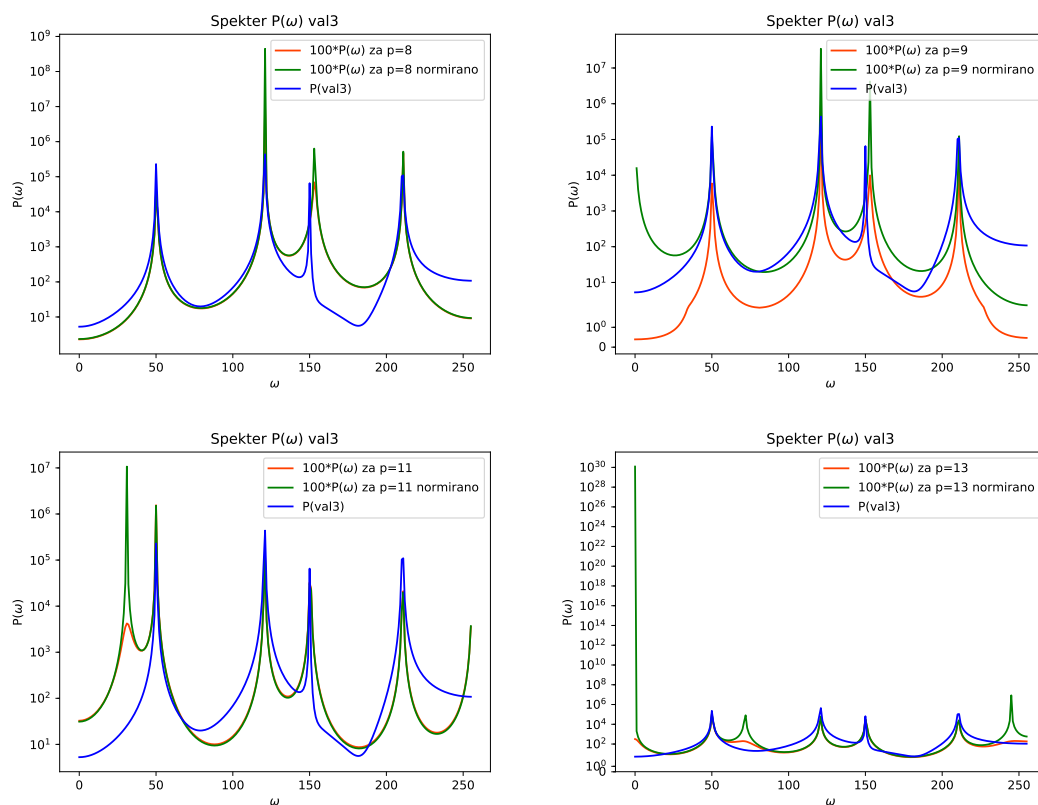
$$P(\omega) = |H(e^{i\omega})|^2 = \frac{G^2 \approx 1}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-i\omega k}|^2}, \quad (4)$$

ki ga bom osedaj primerjali s spektrom dobljenim pri fourijejevi transformaciji.



Slika 2: Sliki prikazujeta izračunane $P(\omega)$ za različne vrednosti p .

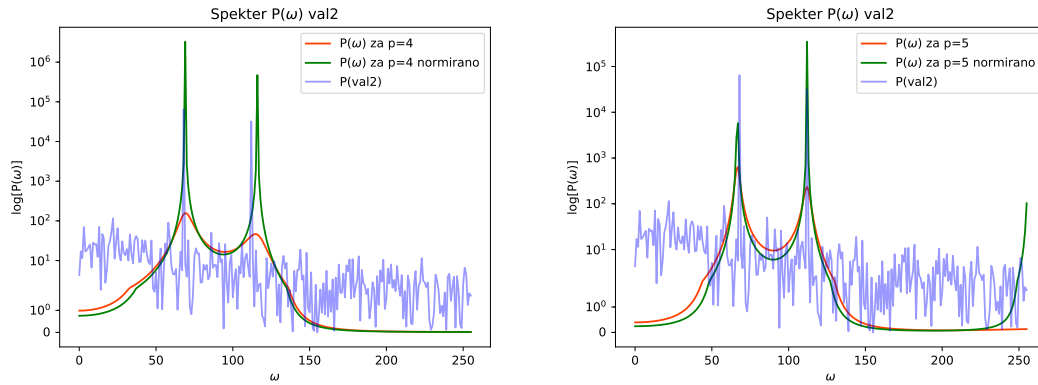
Na sliki 2 vidimo, da za vsak signal dobimo drugo možnost. Načeloma je kar najbolje vzeti Števililo vrhov krat dva. Ampak kot vidimo recimo na levi sliki, je tu bolje vzeti $p = 8$ in pač tvegati to, da nas zmede hribček na levi strani. Na desni pa je zelo lepa $p = 8$, a tudi $p = 12$ ni slaba, ima le dva odvečna vrhova, ki bi nas motila. Zato se nočemo zanašati na tako igrčkanje, temveč raje poskusimo še s trikom z normiranjem. V tem primeru pa dobimo zelo jasne rezultate v obeh primerih. TO vidimo na slikah 3



Slika 3: Sliki prikazujeta izračunane $P(\omega)$ za različne vrednosti p .

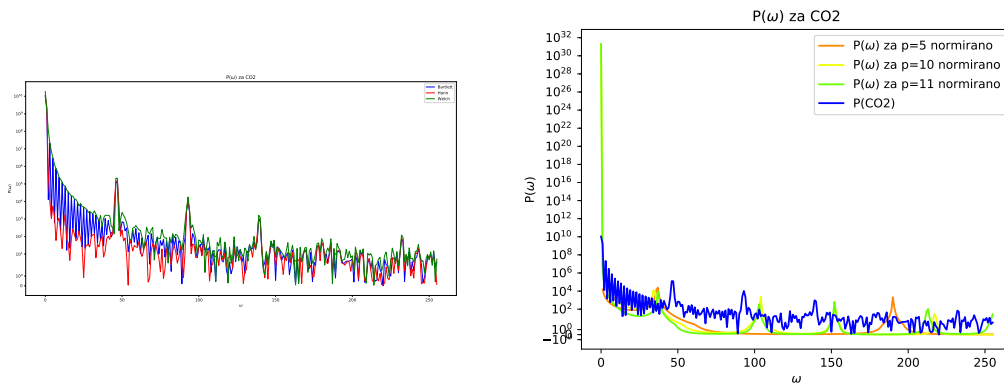
Vidimo, da se recimo $p = 9$, ki je brez normiranja najlepši približek, čisto skorumpira z dodatnimi vrhovi. Tudi ostali se na tak način uničijo. Če se gremo normiranje torej, le po

izberemo $p = 2 * \text{vrhovi}$ in narišemo. Podobno se izkaže tudi pri prvem signalu na slikah 4, kjer vidimo, da sicer dosti boljša $p = 5$ v primeru brez normiranja, postane neprimerna po normiranju zaradi novega vrha. A še vseeno je naključno uporabna. Kljub vsemu je $p = 4$ še vedno dosti boljše izbira.



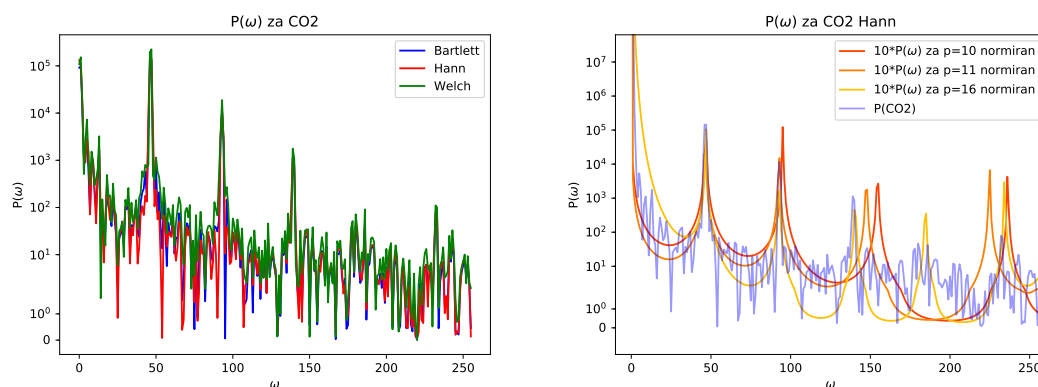
Slika 4: Slike prikazujeta izračunane $P(\omega)$ za različne vrednosti p .

Divje se torej zaženemo v podatke o meritvah koncentracij toplogrednega plina CO_2 v zraku. Hitro naredimo fourijejevo transformacijo in si ogledamo spekter skozi razna okna na sliki 5.



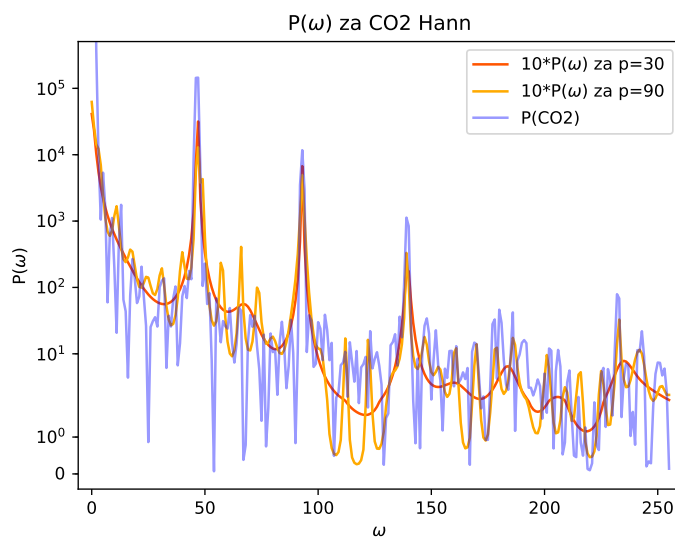
Slika 5: Slike prikazujeta na levi fourijejevo transformacijo skozi razna okna in desno poskus izkanja ekstremov $P(\omega)$.

Igramo se s tem in poskušamo določiti smiselno p , da bi lepo pokrili spekter in dobili enake vrhove, kot jih vidimo tu. Te neuspele poskuse si lahko ogledamo na sliki 5 desno. Nato se spomnimo zelo pomembnega trika. Da bi bilo smiselno od podanih podatkov odšteti očitno trendno črto in konstanto. Ko storimo to, tako da podatki izgledajo takole kot na sliki levo, dobimo lep spekter in tudi precej boljši, a še zdaleč ne idealen fit pri $p = 8$.



Slika 6: Sliki prikazujeta na levi fourijejevo transformacijo skozi razna okna, če od podatkov odštejemo trend in desno poskus iskanje ekstremov $P(\omega)$ skozi okno Hann.

Izkaže se pač, da je še vedno najboljše, če vzamemo kar spekter, ki ga dobimo brez normiranja polov. To lahko vidimo na sliki 7, ki



Slika 7

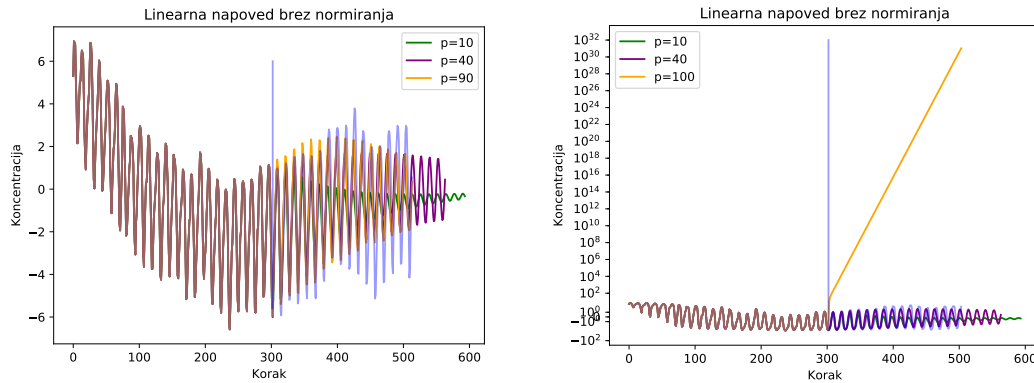
II. LINEARNA NAPOVED

Za linearno napoved uporabimo recept, ki smo ga izvedeli na predavanjih. To je

$$\tilde{S}_n = - \sum_{k=1}^p a_k S_{n-k}, \quad (5)$$

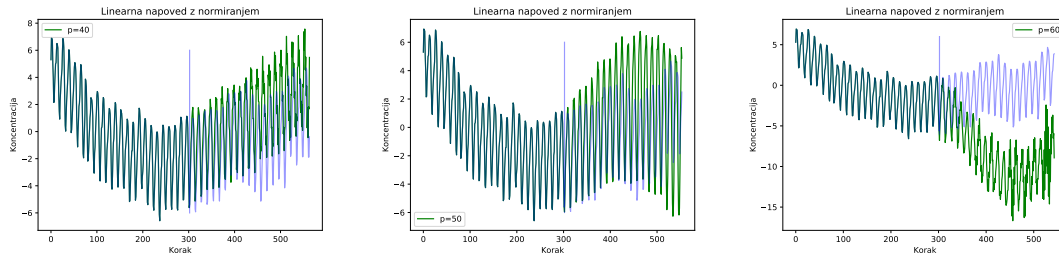
kjer S predstavlja signal, \tilde{S} pa napoved signala. a_k še vedno pomenijo isto kot poprej. Izračunamo a_k jih iz signala pred napovedjo. Vzamemo si recimo prvo polovico signala, na njej pridelamo naše a_k in potem z njimi napovemo nadaljevanje signala. Gre pravzaprav za uteževanje starega signala z našimi a_k . Tako lahko potem napovemo signal za vse možne podatke in pri tem še preizkušamo, če nam normiranje pomaga ali ne.

Če recimo najprej pogledamo kaj se zgodi pri signalu CO_2 , če ga napovedujemo, a brez normiranja polov. To vidimo na slikah 8. Napoved je lahko precej dobra, če izberemo pravo število polov, kot recimo vidimo za $p = 40$, med tem ko lahko pretiravanje pripelje do absurdnosti, kot lahko vidimo na sliki desno. PO mojem mnenju potem preveliko število polov pomeni preveliko vsoto in zato napoved eskalira. Čisto zato, ker je vsota prevelika.



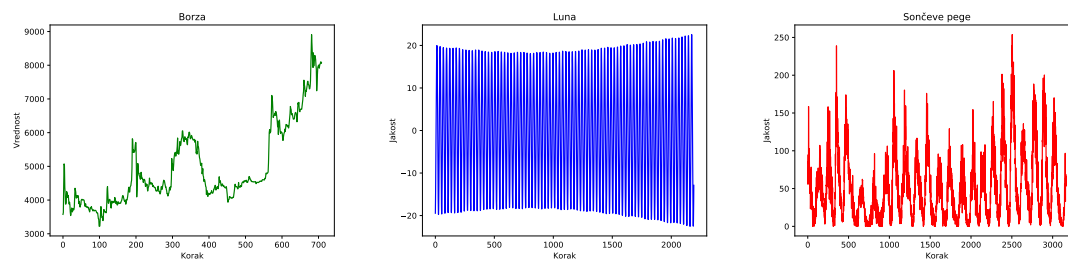
Slika 8: Na slikah napovedujemo od polovice naprej kako se bo obnašal CO_2 . Vidimo kako napoved podivja, če vzamemo prevelik p . Desna slika je v logaritemski skali!

Če pa pole normiramo, dobimo na nek način boljše a na spet drugi način slabšo napoved. To vidimo na slikah 9. Napoved namreč drži smer, a zato tudi bolj falši. Najlepša se zdi napoved pri $p = 50$, ki dobro napove dinamiko. Leva napoved tudi zelo dobro zadane smer in jo potem ohranja. Med tem ko desna napoved poegne, verjetno zato, ker smo vzeli že prevelik p .



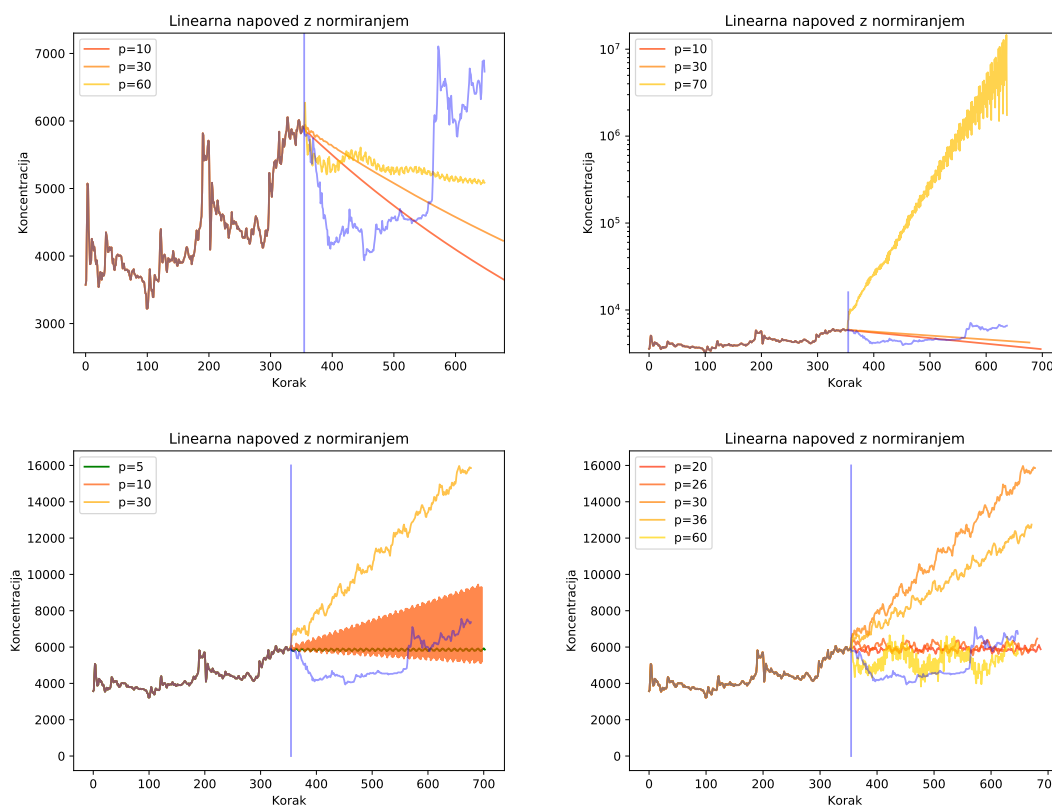
Slika 9: Na slikah napovedujemo od polovice naprej kako se bo obnašal CO_2 , če pri tem normiramo pole. Zopet vidimo kako napoved zgreši, če vzamemo prevelik p .

Na popolnoma identičen način, se potem lotimo še ostalih podanih podatkov, ki so prikazani na slikah 10. Zopet bomo napovedovali od polovice signala, kako se bo odvijal v prihodnje.



Slika 10: Na slikah so prikazani podani signali, ki jih bomo sedaj napovedovali na podlagi njihove zgodovine.

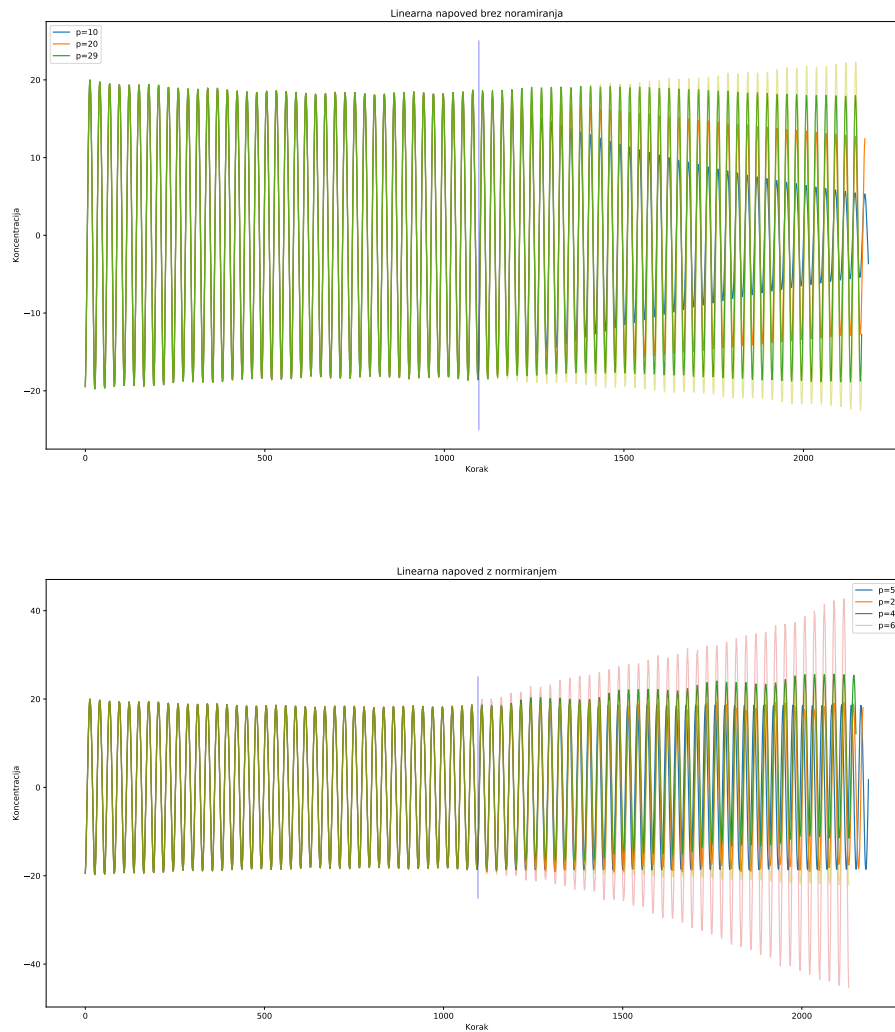
Lahko si najprej pogledamo napoved za borzo od polovice dalje. Dobimo slike prikazane na 11. Vidimo lahko, da je tu napoved brez normiranja polov precej slaba, med tem ko je napoved z normiranjem že nakoliko boljša. Zagotovo je tudi ta slaba, a če si pogledamo sliko spodaj desno vidimo kar lepe napovedi za $p = 60$, med tem ko so lepe tudi napovedi za $p = 30, 36$, kar se tiče dinamike, ne pa kar se tiče amplitude. To tudi pričakujemo, saj borza nebi smela biti napovedljiva. A vseeno se je v zanjem primeru spoved uspela naučiti karakteristične dinamike in izgleda primerna. Najbolj varna pa je napoved za $p = 60$, ker se enostavno razmahne čez skoraj celotni dotedanji interval.



Slika 11: Na zgornjih slikah ne normiramo polov, na spodnjih pa jih.

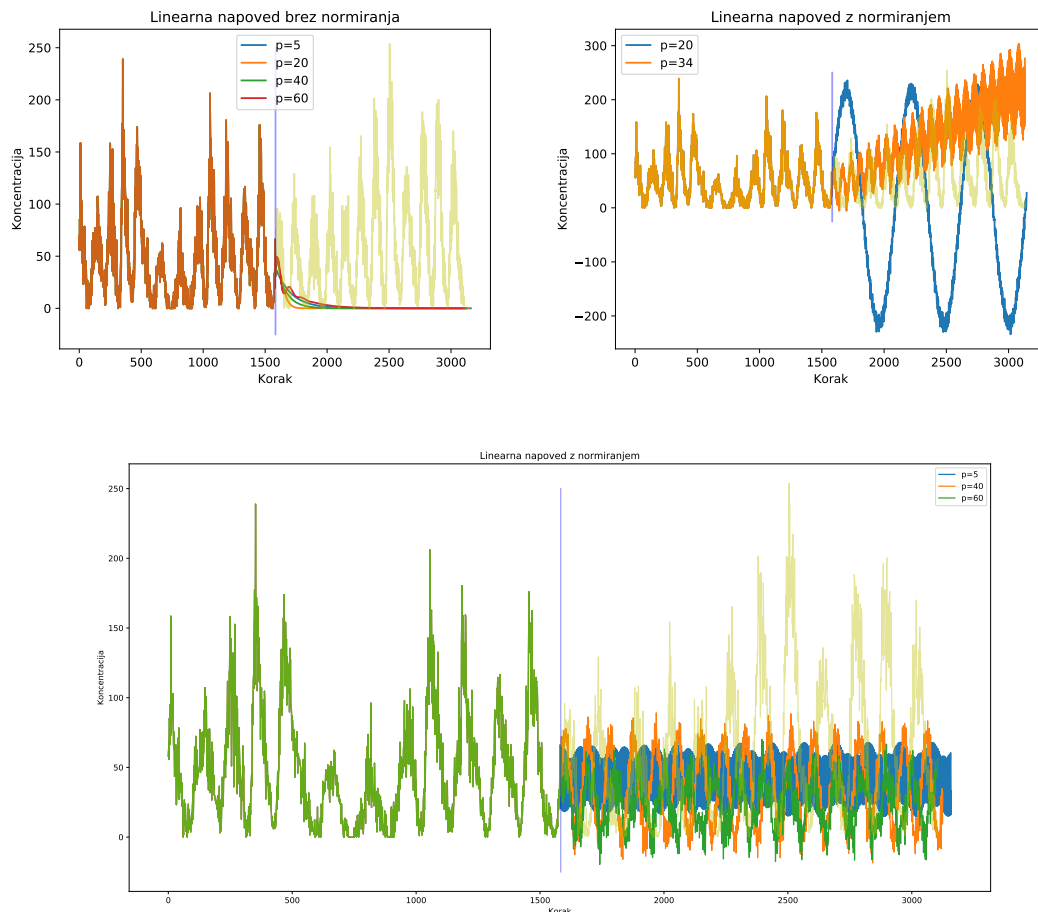
Dalje si lahko pogledamo napovedi za podatke o luni. Tam seveda pričakujemo, da bomo napovedovali zelo dobro, saj izgleda dinamika zelo lepa in napovedljiva. Tudi dejstvo dobimo

dobre napovedi, kot lahko vidimo na slikah 12. Tokrat sta se obe metodi dobro izkazali, a vsaka po svoje. Mislim da je še vedno bolj zanesljiva metoda brez normiranja polov. V vsakem primeru je napoved zelo dobra. Spomnil bi, da je original svetlo rumena črta. Tudi tu se zgodi, da s prevelikimi p napoved divergira. Poiskal sem ravno tisto pred divergenco, sicer preveč poskoči in rabimo logaritemsko skalo.



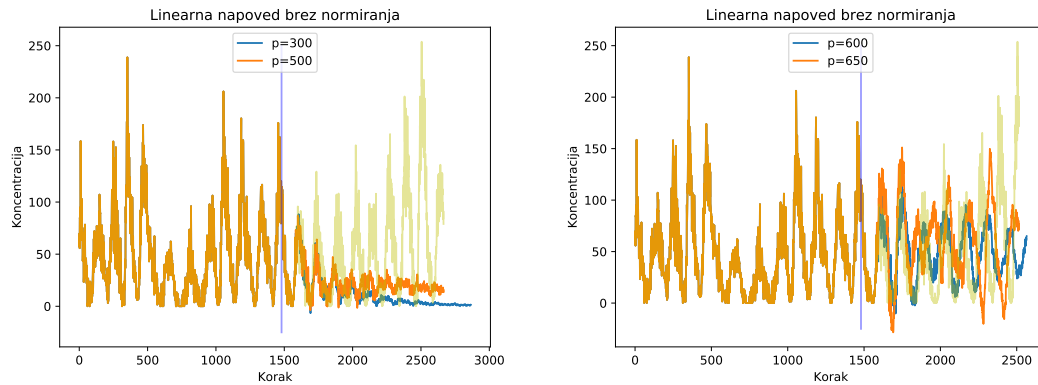
Slika 12: Na zgornji sliki ne normiramo polov, na spodnjih pa jih.

Pa si pogledjmo na koncu še kako bi napovedali dinamiko za zončeve pege. Tu dobimo izredno grd rezultat in nobena metoda se pretirano ne izkaže (slika 13). Vidimo, da brez normiranja ne pridemo nikamor, a tudi z normiranjem ne ravno daleč. Dinamika je očitno neprevedljivo napovedljiva, ker so že same periode isto prepočacne, da bi jih lahko zajeli s tako malim številom predhodnih podatkov. Tako vidimo, da več ali manj vse napovedi zgrešijo, ujamejo le frekvenco, same oblike pa ne uspejo ponavljati.



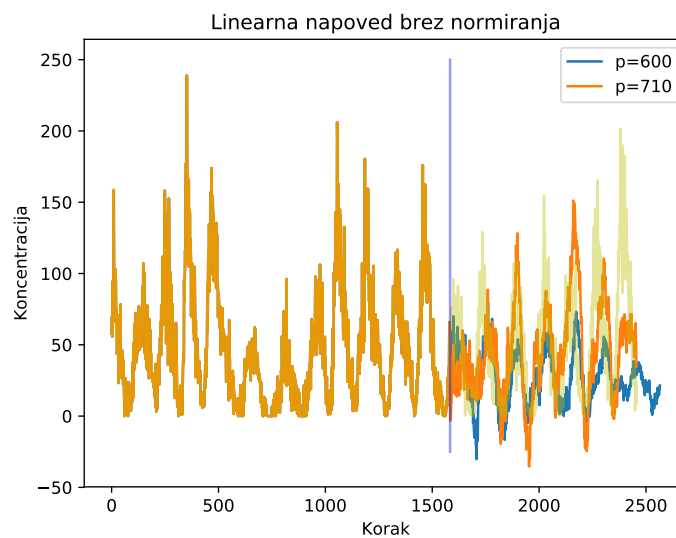
Slika 13: Zgoraj levo je brez normiranja, desno z normiranjem pokazane nenavadne rešitve in spodaj z normiranjem bolj normalne rešitve.

To nam seveda ni všeč, ker si mislimo, da bi verjetno lahko vzeli večji vzorec za nazaj, oziroma več polov. To nam ne uspe, zato si najprej pogledamo, kaj se zgdi če premaknemo začetek spomina v preteklost za nekaj sto korakov, ravno tako da zajahamo vrh. V takem primeru dobimo slike 14.



Slika 14: Sliki prikazujeta napoved brez normiranja, če vzamemo zelo veliko število polov.

To nas izredno opogumi in še enkrat poskusimo s prejšnjim problemom, le da z zelo velikimi p in brez normiranja. V takem primeru dobimo izjemen rezultat prikazan na sliki 15. S tem smo kar precej izboljšali našo napoved. Ne razumem čisto zakaj se je to sploh lahko zgodilo, ampak očitno so bili poli tako majhni in hkrati signal tudi precej majhen. Morda je razlog ravno to. Da na tem sicer dolgem intervalu signal kar nekajkrat doseže vrednost 0 in se potem to ravno tako poklapa, da naša napoved ne divergira. Divergira takoj ko prekoračimo n



Slika 15