



9. naloga Integracije z metodo Monte Carlo

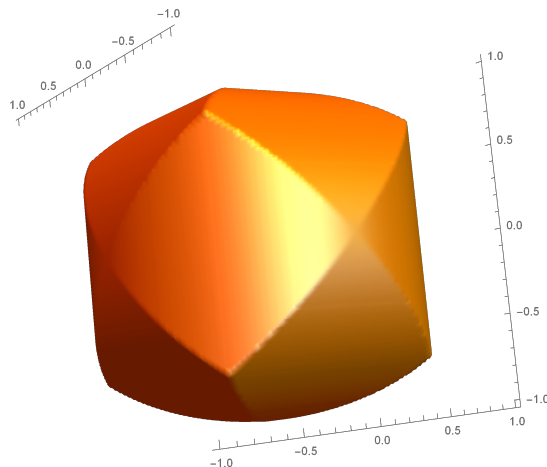
MIHA SRDINŠEK

Povzetek

1. Najprej izračunamo volumen preseka treh valjes s pomočjo metode Monte Carlo. Pri tem se pozabavamo z različnimi načini računanja in jih med seboj primerjamo.
2. Ogledamo si model krogelne porodnišnice in verjetnost pobega gama žarkov. Pogledamo si še odvisnost te verjetnosti od razmerja med povprečno prosto potjo in radijem krogle μ .

I. INTEGRACIJA VOLUMNA

Z metodo Monte Carlo bom izračunal volumen preseka treh valjev. Presek treh valjev je znan primer pod imenom "Steinmetz Solid", in se lahko pojavlja kot presek od dveh do neskončno valjev. Naš primerr izgleda takole, če ga izrišemo v *Mathematici* (slika 1).



Slika 1: Presek treh valjev je takšno telo.

Najprej pa si pogledimo kaj ta metoda sploh je. Gre za metodo pri kateri si pomagamo z naključnimi števili. Tako recimo vrednost integrala določimo tako, da izračunamo povprečje funkcije na nekem intervalu s pomočjo kaključno izžrebanih vrednosti te funkcije na intervalu. V smislu

$$\theta = \int_{\Omega} g(x)f(x)dx \implies \hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i), \quad (1)$$

tako da dobimo rešitev integrala kot

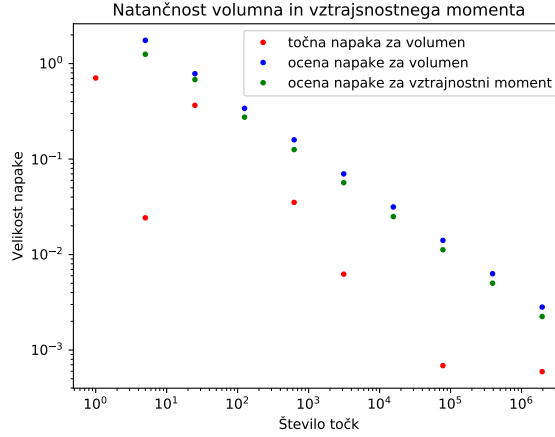
$$\theta = \int_{\Omega} g dV \approx V\hat{\theta} \pm \frac{V}{\sqrt{N}} \sqrt{g^2 - \hat{\theta}^2}. \quad (2)$$

Naredimo torej tako, da žrebamo vrednosti x_i po porazdelitvi $f(x)$ in potem seštevamo vrednosti $g(x_i)$, ter tako izračunamo povprečje. Povprečje, krat interval pa je tako ali tako že integral po definiciji. Za boljše razumevanje bomo rešili to nalogo in na koncu bo povsem jasno kako so tem stvarjem streže. Najprej zato izračunajmo prostornino in vztrajnostni moment tega presega, če je gostota konstantna. To telo določimo tako, da žrebamo naključne spremenljivke x_i, y_i, z_i na intervalu $U[-1, 1]$, kar naredimo s pomočjo $1 - 2\zeta$, kjer je $\zeta \in U[0, 1]$ enakomerno porazdeljeno naključno število. Nahajamo se torej znotraj kvadrata, ki ga določa interval $U[-1, 1]$. Zapišemo torej

$$V = \frac{V_0}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i \quad \text{za} \quad \Delta_i = \{1 \text{ if } x_i^2 + y_i^2 \leq 1, x_i^2 + z_i^2 \leq 1 \text{ in } y_i^2 + z_i^2 \leq 1; 0 \text{ sicer}\}, \quad (3)$$

kjer V_0 predstavlja volumen kocke $V_0 = 2^3 = 8$. Volumen preseka pa znaša $8(2 - \sqrt{2})r^2$, kjer je r radij valjev, torej v našem primeru 1. To smo namreč že izračunali pri Matemati 1 v prvem leniku študija.

Napake, ki jih pridemo pri takem računanju, so prikazane na sliki 2. Na sliki uporabimo oceno napake, ki smo jo napisali v enačbi (2) in pa za volumen, kjer poznamo zgoraj omenjeni točni rezultat, pravo napako. Vidimo, da so ocene napake dobre, saj niso nižje od prave napake, poleg tega pa res lepo korensko padajo, kot bi pričakovali.



Slika 2: Slika prikazuje napake v odvisnosti od števila izžrebanih števil. Ocene so po enačbi (2), natančna, pa po analitičnem rezultatu.

Zapisal bom še rezultat pri $N = 10\,000\,000$:

$$V_{analitice} = 4,6862915010152388 \quad V_{MC} = 4,68628 \pm 0,00125 \quad I_{MC} = 3,059256 \pm 0,00099, \quad (4)$$

Ki nam je seveda zelo všeč, ker zanj nismo porabili veliko časa. Za velikostni red večji N bi že porabili veliko več časa.

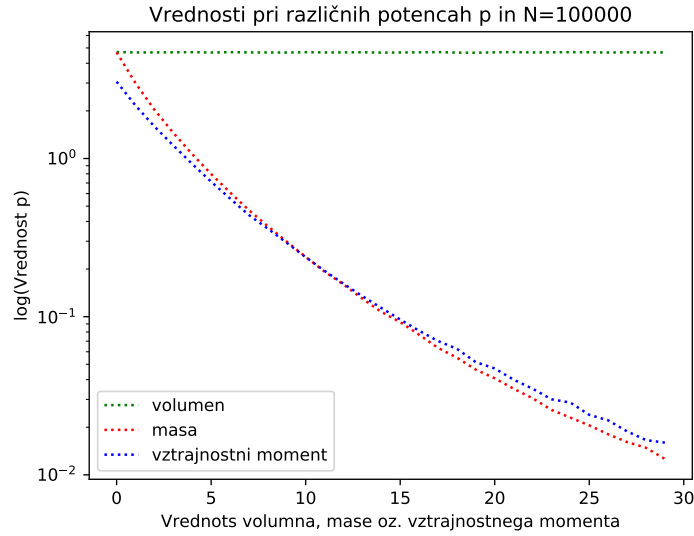
Naloga nas sedaj vodi do vprašanja, kakšne so vrednosti volumna, mase in vztrajnostnega momenta, če gostota ni konstantna, temveč funkcija radija krogle $\rho = (r/r_0)^p$, kjer je r_0 polmer telesu očrtane krogle ($r_0 = \sqrt{3}/2$). Diskretizirano enačbo sprva napišemo kar kot

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^p \quad \text{in} \quad \hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^p r_i^2, \quad (5)$$

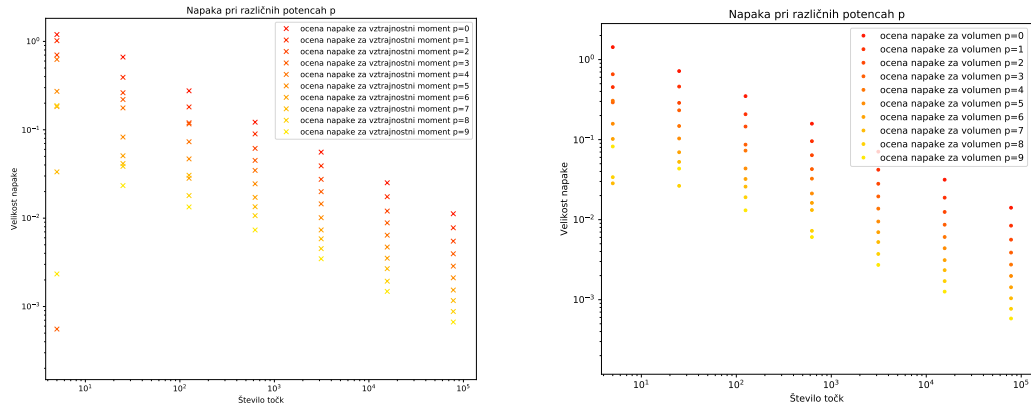
pri čemer je $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ in so vrednosti x_i, y_i, z_i žrebane po enakomerno porazdeljeni porazdelitvi $U[-1, 1]$.

Dobimo rezultate za različne vrednosti p , zato namesto da bi risal tabelo, rišem graf, ki ga lahko vidimo na sliki 3. Vidimo, da s parametrom p obe vrednosti padata in to eksponentno.

Na ta graf nisem risal napak, saj bi bile premajhne, sem pa zato na naslednjih slikah 4 napake narisal posebej za manjše število p -jev, a večje število N -jev. Vidimo, da je odvisnost še vedno ista, le z večjim p se napake majšajo. Lahko bi poskusili še z različnimi $f(x)$.



Slika 3



Slika 4: Sliki prikazujeta kako se napake pri različnih vrednostih p spreminjajo s povečevanjem p . Desna slika prikazuje napake za maso in ne volumen!

Ta metoda se nam seveda zdi na prvi pogled sumljiva, zato jo želimo preveriti z malo drugačnim pristopom, kjer le spreminjamo porazdelitev po kateri žrebamo r_i in tako izračunamo te integrale. Poslužimo se enostavnega izračuna

$$V = \int_0^{r_0} d\phi d(\cos(\theta)) d\left(\frac{r_0^p}{p+3} r^{p+3}\right) = \frac{4\pi}{p+3} r_0^3, \quad (6)$$

iz katerega sledijo pravila za žrebanje naključnih spremenljivk

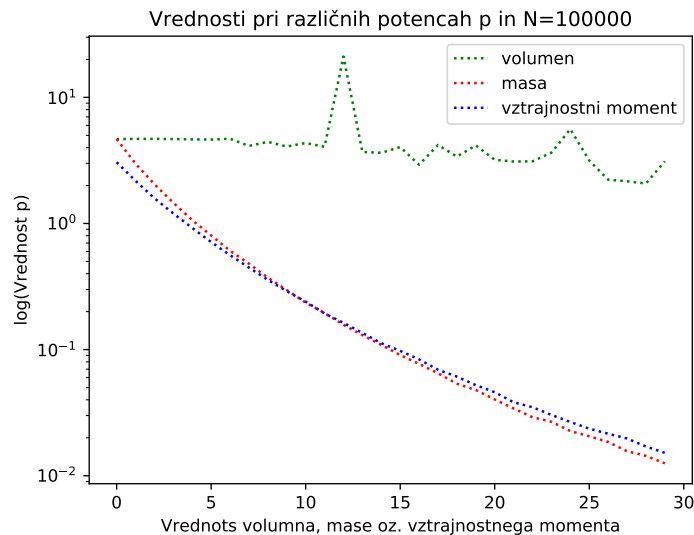
$$\phi = 2\pi x, \theta = \arccos(2y - 1) \text{ in } r = r_0 \sqrt[p+3]{z}, \quad (7)$$

pri čemer so $x, y, z \in U[0, 1]$. Še vedno zavračamo točke po prejšnjem kopitu, le računanje prejšnjih količin se nekoliko spremeni. Sedaj lahko maso in vztrajnostni moment računamo kar tako, kot smo to počeli pri nalogi (3), zakomplicira pa se tokrat pri volumnu. Če želimo

izračunati prostornino moramo sedaj uporabiti postopek

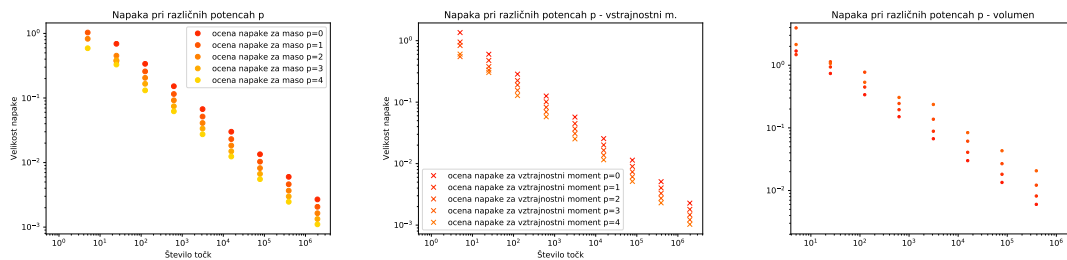
$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^p. \quad (8)$$

Enostavno smo delili z "gostoto" in s tem dobili namesto mase prostornino. Če sedaj izrišemo rezultate dobimo identičen rezultat, ki je prikazan na sliki 5, s to razliko, da je čas računanja izrazito daljši in so s tem veliki N skoraj onemogočeni.



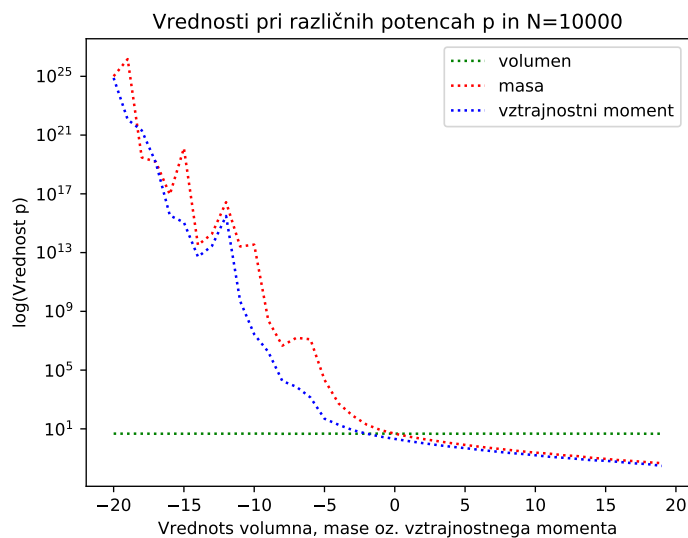
Slika 5

Druga zanimivost je opazovanje napak kot smo to naredili pri prejšnjem načinu reševanja. Zato si pogledamo sliko 6. Iz obojega skupaj vidimo, da nekih bistvenih razlik, razen časovne zatevnosti ni. Če sproti ves čas po omenjenem postopku izračunavamo volumen, s tem pač pridemo ogromno napak, saj je računanje volumna nesmiselno (vidomo recimo, da se pri različnih p , napaka s povečevanjem N ne zmanjšuje z enakimi hitrostmi). Izračunavanje mase pa se vsaj takole na videz ne splača pretirano, saj očitno dobimo skoraj enako velikost napake, kot pri prvem načinu. Zaključil bi z nasvetom, da vse ni tako črno belo in, da je kdaj na videz bolj robusten način lahko boljši način. V tem primeru se časovna zahtevnost verjetno zmanjša v prvem načinu, ker imamo manj zahtevnih računskih operacij kot so recimo potenca na p . Že samo izračunavanje naključnih števil je izredno zahtevno ker moramo štirikrat priklicati funkcije $\sin()$ in $\cos()$.



Slika 6: Sliki prikazujeta kako se napake pri različnih vrednostih p spreminjajo s povečevanjem p .

Čisto tako za zabavo, pa si lahko pogledamo kaj se zgodi če je p negativen. Pričakovali bi, da bo vrednost vztrajnostnega momenta in mase divergirala. To se tudi zgodi, kot vidimo na sliki 7.



Slika 7: Za negativne potence p .

II. KROGLA KOT PORODNIŠNICA ŽARKOV GAMA

Opravka imamo s kroglo v kateri se rojevajo žarki gama. Krogla ni črno telo in ima neničelno prosto pot enako dolžini radija krogle. Zanima nas kolikšen delež fotonov uide iz krogle in kakšna je odvisnost tega deleža od povprečne poti. Za začetek si samo zamislimo, kako bi lahko reševali takšno nalogo. Ideja bi bila, da naključno izžrebamo neko točko v krogli in naključno izžrebamo smer žarka gama v tej točki. V tej točki se žarek rodi. Tako postavljen problem ima zelo lepe simetrije. Za vsak primer je namreč važno le to, kako daleč od jedra se točka nahaja in v katero smer potuje. Vedno si namreč lahko mislimo za vsak izžrebani r , da se nahaja pri nekem nepomembnem ϕ za končni rezultat in pri nekem θ , ki se spet nepomemben za rezultat. To vidimo, če si izberemo zavrnino, ki sega kroglo vzdolž kota ϕ in ima osi zasukane za kot θ . Ker si to lahko mislimo za vsako ravnino in s tem ne spremenimo problema, lahko te podatke iložimo, ter žrebamo le še radij in smer v katero potuje žarek gama, ki jo bom od zdaj naprej označeval s θ . Na tak način bomo izračunali razdaljo d od te točke do roba krogle s pomočjo kosinusnega izreka

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos(\pi - \theta) = r^2 + d^2 + 2rd \cos(\theta), \quad (9)$$

pri čemer je R radij krogle, ki ga bomo mi privzeli za $R = 1$, r izžrebana razdalja do točke, θ pa izžrebana smer žarka gama. Do površja mora torej tak žarek opraviti pot d .

Sedaj bi radi upoštevali še absorpcijo materiala iz katerega je krogla. To bomo naredili na zelo prebrisan način. Izžrebali bomo naključne dolžine porazdeljene po pričakovani povprečni poti. Tako bomo oponašali naradni proces, pri katerem je to povsem naključen in nekoreliran dogodek. Za vse smeri in vse položaje bomo rekli, da je verjetnostna porazdelitev za prosto pot enaka in ima torej naš problem še to simetrijo. Zaradi take predpostavke si lahko dovolimo da ločeno žrebamo tri naključne spremenljivke. Lahko si mislimo, da je končni izid pač odvisen od tega kje se nahajamo in kakno pot imamo do površine in od nekih absorpcijskih procesov, ki so povsod za vse primere enaki in moramo izžrebati še v katerem od možnih procesov, ki so porazdeljeni z neko verjetnostjo, smo se znašli.

Verjetnostno porazdelitev zapišemo kot

$$\frac{dP}{d\tilde{d}} = \frac{1}{\mu} e^{-\tilde{d}/\mu}, \quad (10)$$

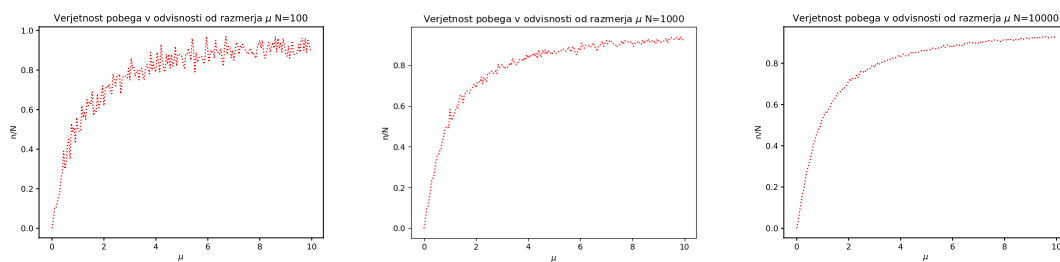
kjer μ predstavlja povprečno prosto pot, \tilde{d} pa spremenljivko, ki jo porazdelitev razporeja. Sedaj izračunamo komulativno porazdelitev in jo normiramo (tako kot je zapisana je že normirana)

$$F(\tilde{d}) = \int_0^{\tilde{d}} \frac{1}{\mu} e^{-\tilde{d}/\mu} d\tilde{d} = 1 - e^{-\tilde{d}/\mu} \quad (11)$$

in končno dobimo

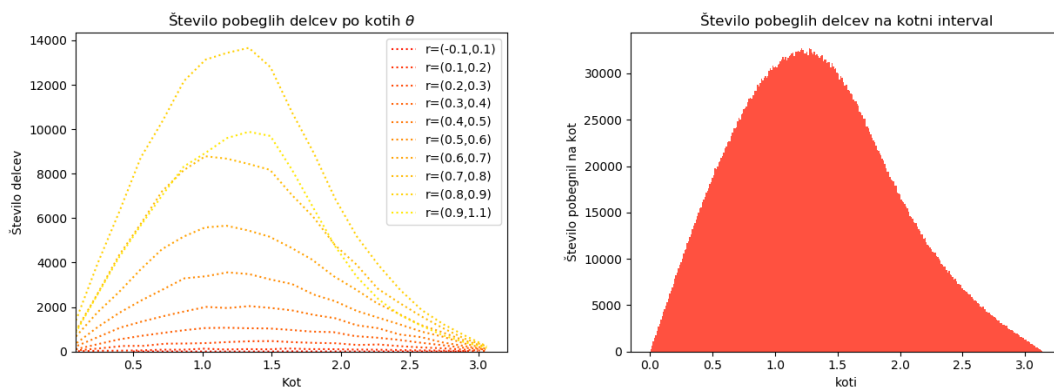
$$\tilde{d} = -\mu \ln(1 - \xi), \quad (12)$$

kjer je ξ porazdeljen enakomerno na intervalu $[0, 1]$ oz drugače povedano $\xi \in U[0, 1]$. Sedaj zapišemo program, ga poženemo in si ogledamo rezultate.



Slika 8: Slike prikazujejo verjetnosti za pobeg v odvisnosti od razmerja μ , pri različnih N .

Zanimivo bi si bilo pogledati še to, pod kakšnimi koti pobegnejo fotoni iz krogle. To vidimo na sliki 9, kjer je prikazana tudi ta kotna porazdelitev glede na različne intervale radijev znotraj krogle. Iz tega je razvidno da se pri manjših radijih ustvari manj fotonov, kar tako ali tako že vemo.



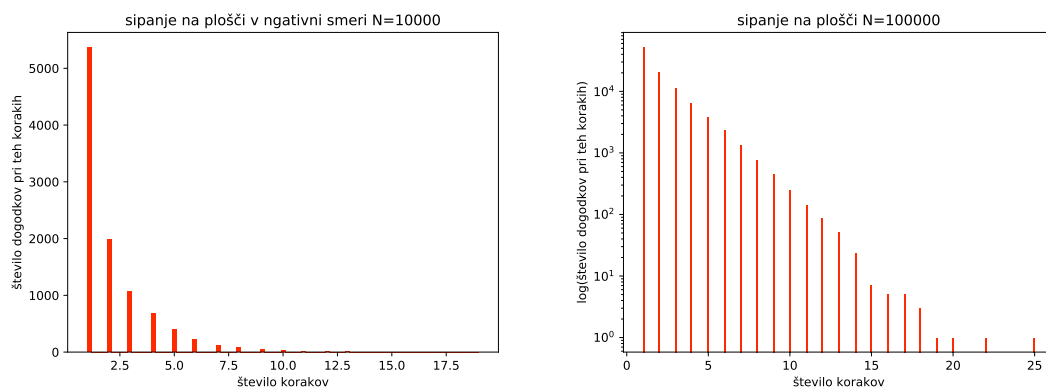
Slika 9: Slike prikazujejo verjetnosti za pobeg v odvisnosti od kota.

III. MODEL NEVTRONSKEGA REFLEKTORJA

Tok nevtronov vpada pravokotno na ploščo, v kateri se nevtroni sipljejo in nič ne absorbirajo. Način reševanja bo praktično idetičen tistemu v prejšnji nalogi. Spet bomo žrebali te proste poti, le da bomo tokrat za vsak nevtron izžrebali več poti, dokler ne bo prišel ven iz plošče. Njihova prosta pot je enaka polovici dolžine plošče in sipljejo se tako naprej kot tudi nazaj z enako verjetnostjo. Zapišemo torej

$$s = -\text{random.sign}() \mu(1 - \xi), \quad (13)$$

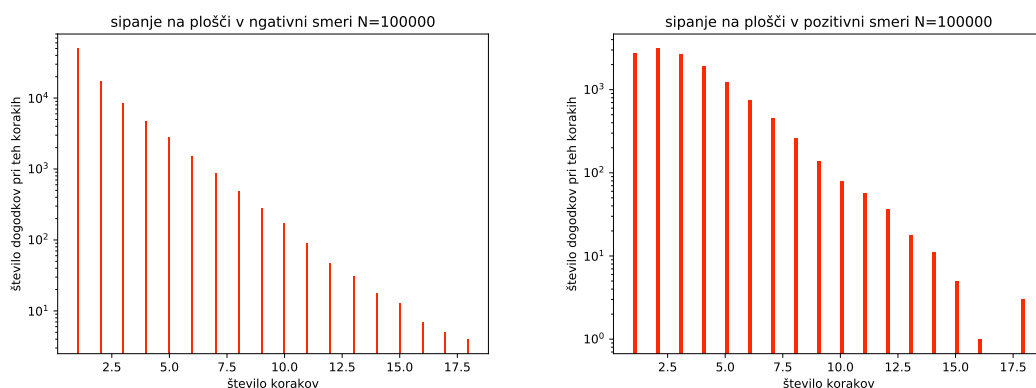
kjer je s izžrebana pot, ki jo prištevamo do takratni poti, ξ pa naključna spremenljivka porazdeljena po $U[0, 1]$. Na tak način si lahko pogledamo po koliko korakih nevtroni zletijo nazaj ven (naprej ali pa nazaj) iz reflektorja, za veliko število poskusov. Dobimo sliko prikazano na slikah 10.



Slika 10: Slike prikazujeta po koliko korakih so nevtroni v poskusu zapustili reflektor.

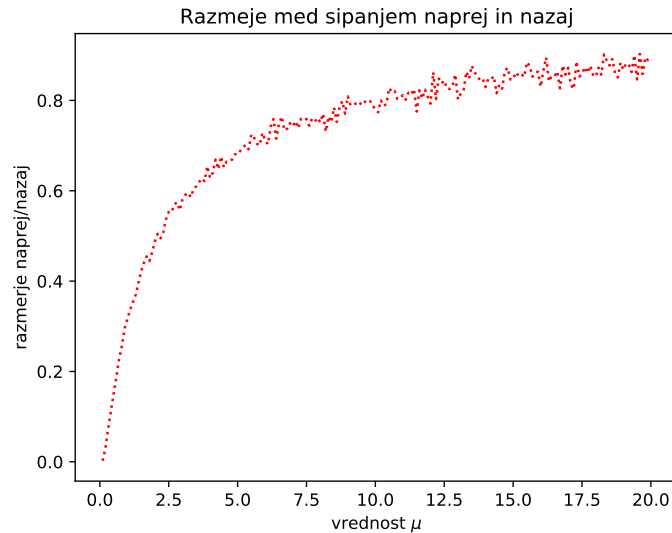
Vidimo, da število pada eksponentno, kar bi mogoče lahko pričakovali, glede na to da smo po taki porazdelitvi žrebali proste poti.

Problema ne pustimo pri tem odgovoru. Vprašamo se še, če sta ti porazdelitvi enaki v primeru, ko se delci sipajo nazaj in ko se sipajo naprej. Odgovor na to vprašanje je prikazan na slikah 11. Vidimo, da neka razlika obstaja, zato si bomo v nadaljine pogledali še eno odvisnost.



Slika 11: Slike prikazujeta po koliko korakih so nevtroni v poskusu zapustili reflektor v pozitivni in negativni smeri.

Vprašamo se namreč kako se razmerje med nevtroni ki pridejo ven na drugi strani in tistimi ki se odbijejo, spreminja v odvisnosti od μ . Dobimo sliko 12. Sedaj imamo odgovor na naše vprašanje, zakaj pride do razlike na slikah 11 - ker se jih nazaj sipa ogromno manj in pride do napak. Lahko da gre še tudi za druge efekte.

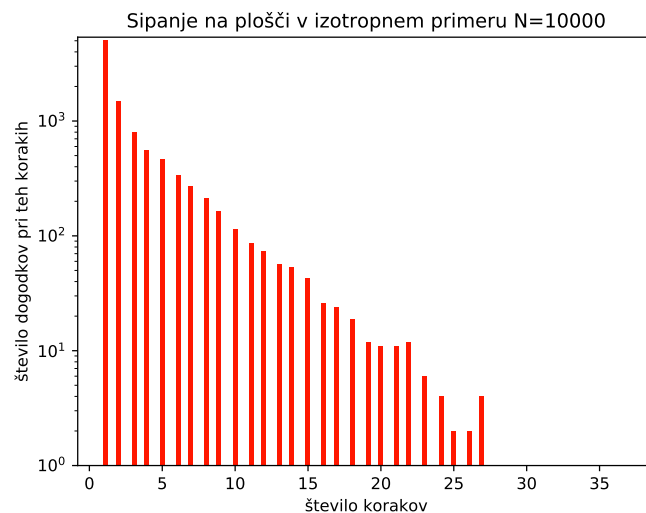


Slika 12: Slika prikazuje razmerje med nevtroni ki so se odbili in tistimi, ki so šli skozi snov, v odvisnosti od μ .

Da preverimo dobljene rezultate si pogledjmo še primer izotropnega sipanja, kjer upoštevamo, da se v realnosti nevtroni sipajo izotropno v vse smeri. Zapišemo

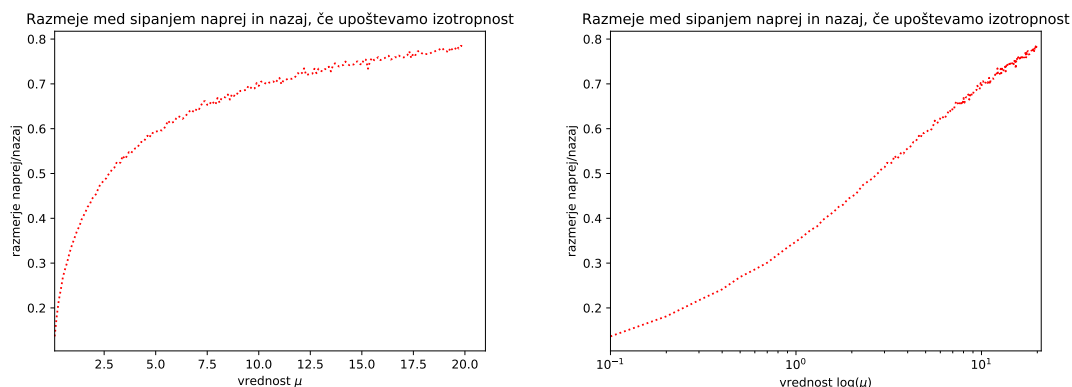
$$s = -\text{random.sign}() \mu \log(1 - \xi) \cos(\theta) = -\text{random.sign}() \mu \log(1 - \xi)(2\vartheta - 1), \quad (14)$$

kjer sta ξ in ϑ porazdelena po $U[0,1]$. Če sedaj izrišemo iste stvari kot poprej dobimo za porazdelitev števila sipanj praktično identični graf prikazan na sliki 13.



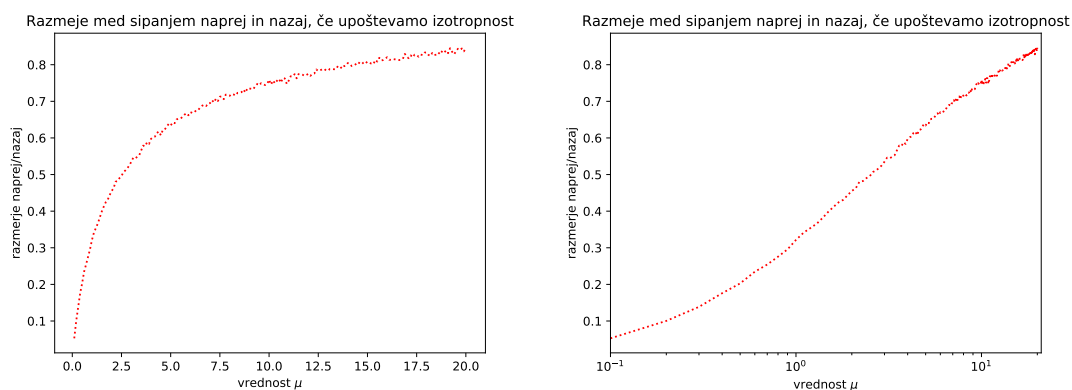
Slika 13: Slika prikazuje po koliko korakov so nevtroni v poskusu zapustili reflektor v primeru izotropnega sipanja. Žrebamo le kot.

Če si pogledamo, še odvisnost razmerja odbitih in prepuščenih nevtronov od μ , dobimo v izotropnem primeru identični rezultat prikazan na slikah



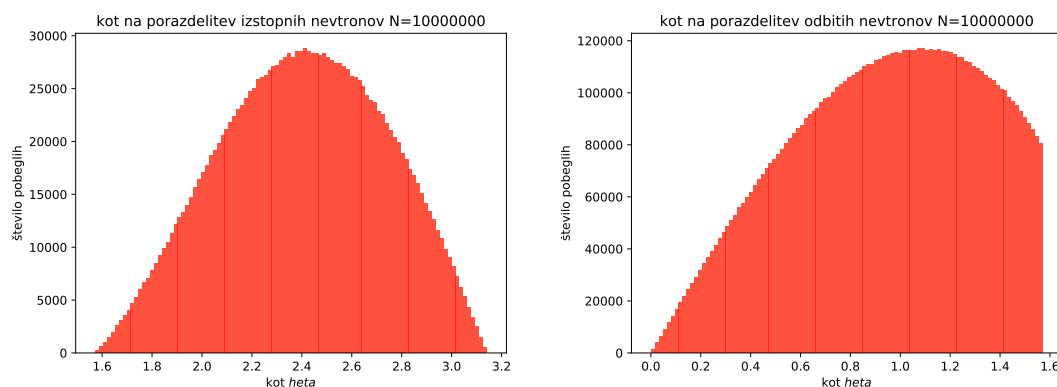
Slika 14: Slika prikazuje razmerje med nevtroni ki so se odbili in tistimi, ki so šli skozi snov, v odvisnosti od μ . Pri izotropnem sipanju, kjer žrebamo tako kot, kot smer.

A opozoriti je potrebno da je razlika kako žrebamo smeri. Vprašanje je namreč ali naključno žrebamo le kot, ali naključno žrebamo tudi predznak. V zgornjem primeru smo namreč naključno žrebali tako kot kot predznak, če žrebamo le kot, pa dobimo identične rezultate. Kot recimo vidimo na slikah 15.



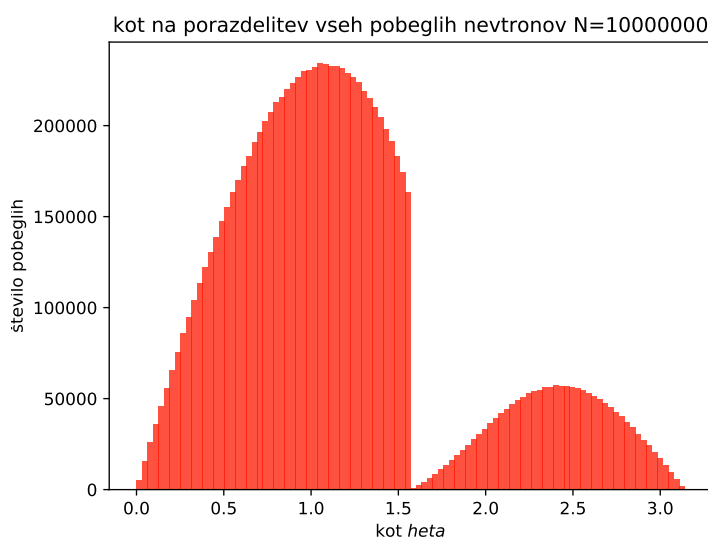
Slika 15: Slika prikazuje razmerje med nevtroni ki so se odbili in tistimi, ki so šli skozi snov, v odvisnosti od μ . Pri izotropnem sipanju, kjer žrebamo le kot.

Zadnji primer bi si zaslužil odgovor na še eno vprašanje - pod kakšnimi koti delci pobegnejo ven iz plošče v obe smeri. Zato si pogledamo še slikah 16.



Slika 16: Slika prikazuje kotno odvisnost pobeglih žarkov. Na levi sliki so žarki, ki se prebijejo čez ploščo, na desni pa tisti, ki se odbijejo.

Vidimo, da si lahko to predstavljamo kar skupaj na enem grafu in se pač zavedamo, da nam kot sporoča ali gre za odbite ali prepuščene fotone. Če si to izrišemo dobimo sliko 16. S tem smo to nalogo končali. lahko bi posegli še po kakšnih boljših predstavnostnih načinih, ki pa bi bilo verjetno vsi zgolj bolj pregledni in manj kvalitativni.



Slika 17: Slika prikazuje kotno odvisnost pobeglih žarkov.