



4. naloga Populacijski modeli

MIHA SRDINŠEK

Povzetek

1. Preuči standardni deterministični model zajci lisice (model Lotka-Volterra).
2. Analiziraj fazni portret za populacijski model laserja s konstantnim črpanjem
3. Model epidemije: V epidemiji nas zanima njen vrh (maksimalno trenutno število obolelih), čas nastopa maksimuma in celotno število obolelih. S cepljenjem lahko vnaprej preselimo določen del populacije med imuna. Kako vpliva delež cepljenih na parametre epidemije? Kako se spremeni potek epidemije, če obolele razdeliš na več razredov?

I. MODEL ZAJCI LISICE

Najprej si pogledajmo model, kjer imamo neko vrsto, ki se sama od sebe lahko množi v neskončnost (zajce), in drugo vrsto, ki je odvisna od te vrste, ker jo je (volkove). Hkrati so tudi zajci odvisni od volkov, saj jim volkovi omejujejo rast s tem ko jih jejo. Če to zapišemo v matematičnem jeziku dobimo

$$\dot{Z}(t) = \alpha Z - \beta ZL \quad \text{in} \quad (1a)$$

$$\dot{L}(t) = -\gamma L + \delta ZL, \quad (1b)$$

kjer $Z(t)$ predstavlja število zajcev ob času t in $L(t)$ število lisic ob času t . Iz konteksta lahko razberemo da α predstavlja hitrost razmnoževanja zajcev na dano število zajcev, β hitrost upadanja števila zajcev na število zajcev na voljo za vsako lisico, γ hitrost umiranja lisic na število lisic in δ hitrost množenja lisic na število zajcev na vsako lisico. Zajci predstavljajo količino, ki sama od sebe raste, med tem ko lisice predstavljajo količino, ki sama od sebe umira. Hkrati pa se to pravilo obrne ko govorimo o medsebojnih interakcijah, takrat število zajcev pada in število lisic raste. Kar takoj bi radi zapisali Jakobijevo matriko za ta sistem, da izvemo kaj o dimaniki. Jakobijeva matrika izgleda takole

$$J(Z, L) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta L & -\beta Z \\ \delta L & \delta Z - \gamma \end{pmatrix}, \quad (2)$$

determinanta pa je torej

$$\det(J(Z, L)) = \alpha\gamma\left(\frac{\delta}{\gamma}Z + \frac{\beta}{\alpha}L - 1\right). \quad (3)$$

Determinanta nam opisuje kako se spreminja volumen faznega prostora odvodov s tem ko spreminjamo število zajcev oziroma lisic. Če recimo spreminjamo število zajcev, se skupno število naraščanja števila živali povečuje, a z utežjo $\alpha\delta$, ker jih bodo tudi lisice potem bolj jedle. Vidimo tudi, da je determinanta ves čas na intervalu $[-1, \infty)$, saj število zajcev oziroma lisic ne more biti negativno. Za lažjo predstavo sedaj uvedemo nove koordinate

$$\det(J(z, l)) = (z + l - 1), \quad (4)$$

oziroma, če jih izpišem

$$l = \frac{\beta}{\alpha}L, \quad z = \frac{\delta}{\gamma}Z, \quad \tau = t\sqrt{\alpha\gamma} \quad \text{in} \quad p = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}. \quad (5)$$

Nova spremenljivka p nam predstavlja razmerje med rastjo zajčje populacije in upadanjem lisičje populacije samih od sebe. τ pa smo uvedli zgolj zato, da smo polešali jakobijevo determinanto. Na nek način predstavlja nov čas, ki je prilagojen hitrostim naravnega naraščanja oziroma umiranja zajcev in lisic. Pri tem se spremenita tudi začetni enačbi

$$\dot{z}(t) = pz(1 - i) \quad \text{in} \quad (6a)$$

$$\dot{l}(t) = \frac{l}{p}(z - 1), \quad (6b)$$

ter seveda sama jakobijeva matrika

$$J(z, l) = \begin{pmatrix} p(1 - l) & -pz \\ 1/p & \frac{1}{p}(z - 1) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Če si pogledamo determinanto, vidimo da imamo pri $z + l < 1$ bolj stabilno področje in pri $z + l > 1$ bolj nestabilno področje. Večja kot sta l in z , bolj nestabilno je in nižja kot sta z in l

bolj stabilno je. Zato nas zanimajo zastojne točke $(0,0)$ in $(1,1)$, ki smo jih razbrali iz enačb 6. Če vržemo oko na determinanto 4 mislimo, da je točka $(0,0)$ stabilna, a matrika 7 ima v tej točki relani lastni vrednosti, eno pozitivno in eno negativno, kar pomeni da gre za sedlo in v resnici točka ni stabilna. Torej se lahko obe populaciji poljubno zmanjšata, pa še vedno ne bosta izumrli. Lahko tudi rešimo dinamiko v okolici te točke

$$J(Z, L) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial l} \\ \frac{\partial \dot{l}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{l}}{\partial l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Oba diagonalna elemnta sta pravzaprav parcialni diferencialni enačbi za l in z . Tako dobimo rešitvi

$$\dot{z}(t) = pz \quad \dot{l}(t) = -\frac{l}{p} \quad (9a)$$

$$z(t) = z_0 e^{p\tau} \quad l(t) = l_0 e^{-\tau/p}. \quad (9b)$$

Zajci se bodo torej začeli hitro razmnoževati, ko bo zmanjkalo lisic in tako bodo v kasnejših korakih tudi pobrali lisice od mrtvih.

V drugi zastojni točki dobimo matriko

$$J(Z, L) = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

ki ima lastni vrednosti $\pm i$. Takšna točka s sicer determinanto 1, ima oscilatorne rešitve, ki oscilirajo okoli nje (krožijo v smeri urinega kazalca). Ker gre za konstante od odvodov lahko zapišemo kar

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{l} \end{pmatrix} = J(Z, L) \begin{pmatrix} z \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ l \end{pmatrix}. \quad (11)$$

To pa seveda znamo rešiti, le poiščemo lastne vektorje lastnih vrednosti in prepisemo enačbo v

$$\begin{pmatrix} z \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -pi & pi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\tau} & 0 \\ 0 & e^{i\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ip(-Ae^{-i\tau} + Be^{i\tau}) \\ Ae^{-i\tau} + Be^{i\tau} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

S tem pa smo jo že rešili. Le še začetne pogoje rabimo, da določimo konstanti A in B .

Ta dinamika ima tudi konstanto gibanja

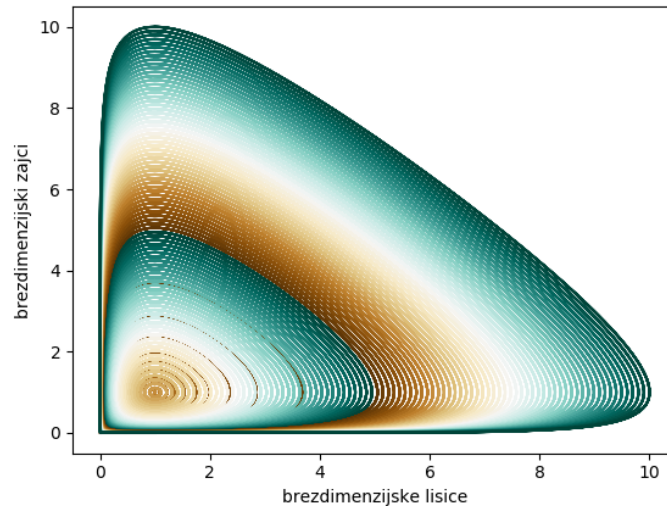
$$\delta Z - \gamma \log(Z) + \beta L - \alpha \log(L) = \text{konstanta}. \quad (13)$$

Če izrišemo rešitve tega sistema, dobimo sliko faznega prostora 1.



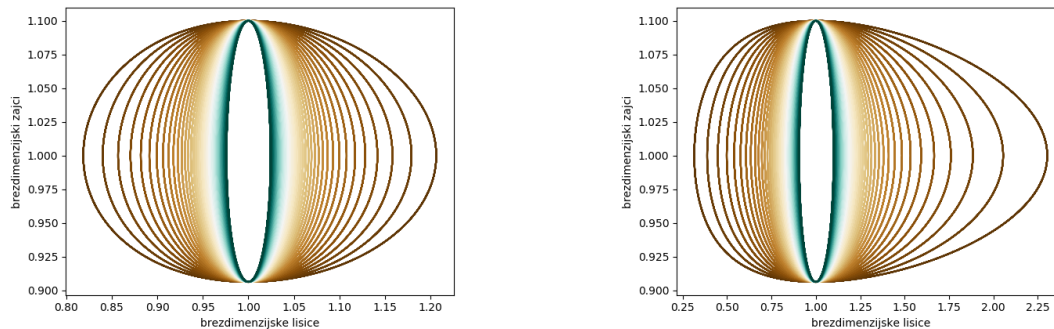
Slika 1: Levo je izrisanih 40 različnih orbit, desno pa 150, za vrednost parametra $p = 3$.

Na sliki 1 vidimo, da je zajcev ob njihovem vrhuncu trikrat več kot lisic. To pa je ravno vrednost parametra p . Zato nas naravno pač zanima, kaj se zgodi, če damo ta parameter na ena. V tem primeru bi morali videti dinamiko sistema, ki se je dosedaj poskrila v parameter p . Dobimo kar prikazuje slika 2. Vidimo da dobimo precej izenačeno orbito. Oba ekstrema sta



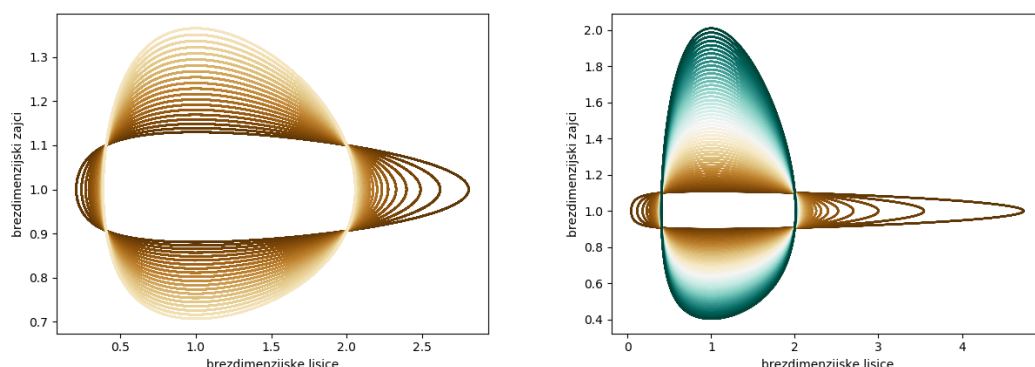
Slika 2: Izrisanih je 100 različnih orbit, za vrednost parametra $p = 1$.

približno enako velika, sistem pa se v kotu obrne za praktično devedeset stopinj. Vidimo da se pravzaprav največ zanimivega dogaja ravno v primeru ko spreminjamo parameter p in ne ko spreminjamo začetno točko, zato se lotimo riasnja grafov za različne p . Vidimo, da manjšanje



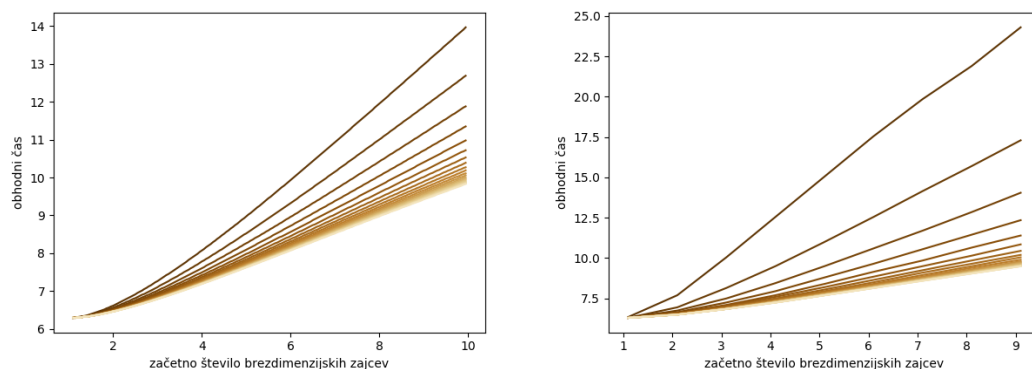
Slika 3: Levo so izrisane orbite na intervalu $p \in [0.5, 4]$, desno pa na intervalu $p \in [0.1, 1]$, če začnemo vsakič v točki $(1.1, 1)$.

parametra p razteguje orbite v smeri osi brezdimenzijskih lisic. To je še posebej lepo vidno, če si izberemo bolj eksotične izhodiščne točke, ki se ne nahajajo v stacionarni točki. Tako dobimo rezultate, ki jih prikazujeta sliki 4. Ko enkrat pridemo pod vrednost parametra 1, se začnejo orbite zelo močno raztegovati v smeri osi brezdimenzijskih lisic. Kar je pri tem zanimivo je zaključek, torej da je število lisic ob maksimumu večje od števila zajcev ob maksimumu kadar lisice umirajo hitreje kot se zajci rojevajo. To lahko razumemo tako, da morajo enostavno lisice pojesti toliko več zajcev, če želijo pri taki hitrosti umiranja doseči začetno točko, ki smo jo od njih zahtevali. Tako pride do tako ekstremne dinamike, ki sploh ne more biti fizikalna.



Slika 4: Levo so izrisane orbite na intervalu $p \in [0.1, 0.4]$, desno pa na intervalu $p \in [0.05, 1]$, če začnemo vsakič v točki $(1.1, 2)$.

Sedaj pa si bomo pogledali še kako se periode spreminjajo z začetnimi pogoji in različnimi parametri p . Na slikah 5 vidimo, da se obhodni čas zvišuje, višje kot postavimo začetno točko v faznem prostoru. Hkrati pa vidimo, da se z višanjem vrednosti parametra p obhodni čas zmanjšuje. Opazimo tudi, da so si odvisnosti obhodni čas-število zajcev pri višjih vrednostih p zelo podobne, oziroma da z višanjem vrednosti p zaporedje funkcij konvergira. Zadnja trditev je zgolj ugibanje.



Slika 5: Graf levo prikazuje odvisnost obhodnih časov od spreminjanja začetne vrednosti brezdimenzijskih zajcev in začetni vrednosti brezdimenzijskih zajcev 1 za vrednosti parametra p na intervalu $p \in [1, 5]$, desno pa na intervalu $p \in [0.1, 5]$. Najvišja krivulja ima najnižji p , za ostale pa se s padanjem p zvišuje. Graf desno je manj natančen.

Lahko torej rečemo, da večja kot je ploščina, ki jo orbita obdaja, večji je obhodni čas. Poleg tega lahko rečemo še, da imajo orbite z istim izhodiščem krajši obhodni čas, če imajo višjo vrednost parametra p .

II. POPULACIJSKI MODEL LASERJA

Sedaj pa si pogledimo podobno populacijo, kjer obe sami od sebe umirata, a sta med seboj odvisni na način, da se ena hrani na drugi, druga pa ima še nek dodatni konstantni pritok. V praksi tak sistem opazimo pri laserju, kjer je populacija s konstantnim pritokom količina vzbujenih atomov, druga populacija, ki se na vzbujenih atomih hrani, pa so fotoni, ki zaradi izgub pač umirajo. To v matematičnem jeziku zapišemo kot

$$\dot{f}(t) = -Bf + Daf \quad \text{in} \quad (14a)$$

$$\dot{a}(t) = -Ca - Eaf + Q, \quad (14b)$$

pomen spremenljivk pa lahko razberemo po zgledu iz poglavja I. Tako kot prejšnjic tudi sedaj naprej izračunamo jakobijsko determinanto

$$\det(J(f, a)) = \begin{vmatrix} -B + Da & Df \\ -Ea & -C - Ef \end{vmatrix} = BC(1 + \frac{E}{C}f - \frac{D}{B}a), \quad (15)$$

pri kateri je zelo očitno kakšne brezdimenzijske spremenljivke želimo vzeti. Ko potem te tri spremenljivke vstavimo v enačbe, nam te vrnejo še dve novi spremenljivki. Skupaj jih lahko zapišemo kot

$$F = \frac{E}{C}f, \quad A = \frac{D}{B}a, \quad \tau = t\sqrt{BC}, \quad p = \sqrt{C/B} \quad \text{in} \quad q = \frac{QD}{\sqrt{B^3C}}. \quad (16)$$

Dobili smo nov sistem enačb, z brezdimenzijskimi količinami

$$\dot{F}(t) = \frac{F}{p}(A - 1) \quad \text{in} \quad (17a)$$

$$\dot{A}(t) = q - pA(1 + F), \quad (17b)$$

ki mu kar takoj izračunamo zastoje točke. Te se nahajajo v točkah $(1, \frac{q}{p} - 1)$ in $(\frac{q}{p}, 0)$, kjer prvo mesto predstavlja vrednost A in drugo vrednost F . Pa kar zapišimo njihovi jakobijski matriki, da vidimo, če se lahko o točkah kaj naučimo. Jakobijeva matrika v prvi zastojni točki izgleda takole

$$J(1, q/p - 1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p}(\frac{q}{p} - 1) \\ -p & -q \end{pmatrix} \quad (18)$$

in njene lastne vrednosti so

$$\lambda_{\pm} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - (\frac{q}{p} - 1)}. \quad (19)$$

Ker predpostavimo, da so vse konstante pozitivne, velja, da so v večini primerov realne vrednosti negativne. To se ne zgodi, le če velja $4\frac{q}{p} < 1$, sicer pa je člen s korenem vedno manjši od q ali pa je imaginaren. Torej govorimo o skoraj povsem stabilni zastojni točki (če velja zgoraj zapisani pogoj), ki ima lahko tudi oscilatorno rešitev, ki pa se tudi približuje zastojni točki. Če zgornji pogoj ne velja pa govorimo o čisto navadnem sedlu in imamo nestabilno rešitev.

Drugi stacionarni točki pripada jakobijska matrika

$$J(q/p, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}(\frac{q}{p} - 1) & 0 \\ -q & -p \end{pmatrix}, \quad (20)$$

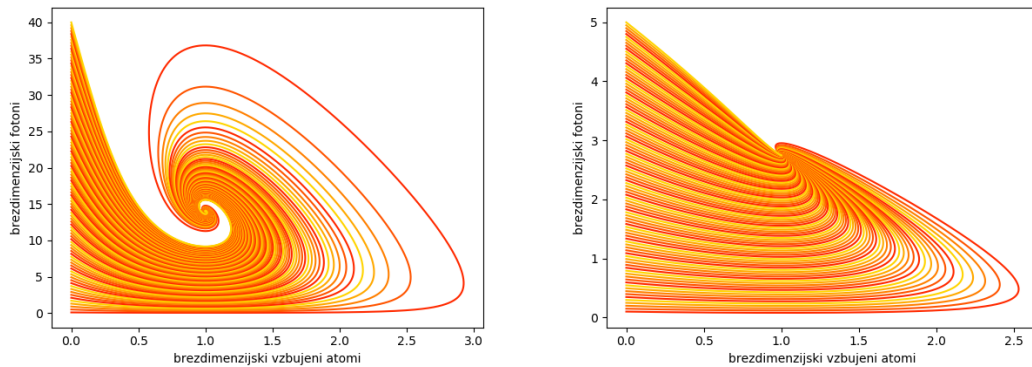
ki pa ima precej grši lastni vrednosti, ki imata praviloma različne predznake. Lahko se pojavijo tudi oscilatorne rešitve (imaginarni deli lastnih vrednosti), če je izpolnjen pogoj

$$(-q/p^2 + 1/p + p)^2 - 4(q + 1 - q/p) < 0. \quad (21)$$

Torej izredno grda in praviloma nestabilna zastojna točka.

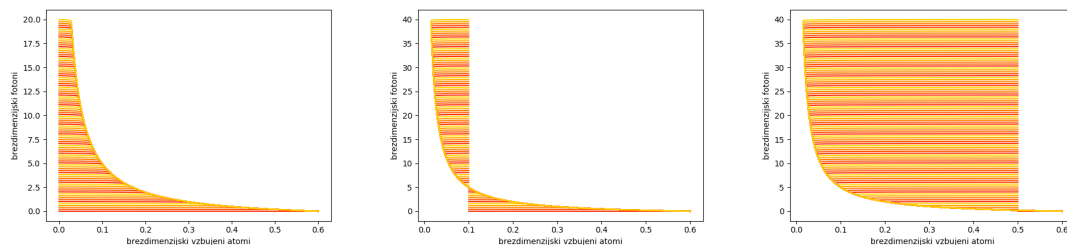
Poglejmo si sedaj ta fazni prostor. Iz teorije že vemo, da ne gelde na to v kakšni točki faznega prostora začnemo, skoraj zagotovo se bomo na koncu znašli v točki $(1, \frac{q}{p} - 1)$ in v dostih primerih bomo v te točke zakrožili. Ne pa vedno! To v praksi pomeni, da ne glede na to s koliko fotoni in vzbujenimi atomi začnemo, v večini primerov se bomo hitro znašli pri neki določeni vrednosti. Lahko da bomo na poti do tja zaoscilirali, a pri pametni izbiri parametrov q in p se tudi to ne bo zgodilo.

Poglejmo si sedaj čisto za začetek, kako izgledajo trajektorije, ki jih sistem opiše če se na začetku nahaja pri izbranih začetnih vrednostih. Takšne trajektorije so prikazane na sliki 6, kjer vidimo, da se dejnako vse trajektorije približujejo tej stacionarni točki- Hkrati opazimo tudi, da ni pomembno zgolj razmerje q/p , temveč tudi sami vrednosti p in q . Grafa namreč izgledata povsem drugače. Tudi če pomnožimo q in p z nekim številom, bo sicer sistem imel isto stekališče, a krivulje se bodo stekale drugače. Na sliki 6 desno recimo opazimo, da sploh ni več tako močnega kroženja kot na sliki levo.



Slika 6: Na obeh grafih so začetne točke na osi, kjer je število vzbujenih atomov enako nič. Levo je razmerje $q/p - 1 = 14$ ($p = 0.2, q = 3$), desno pa $q/p - 1 = 2,75$ ($p = 0.8, q = 3$).

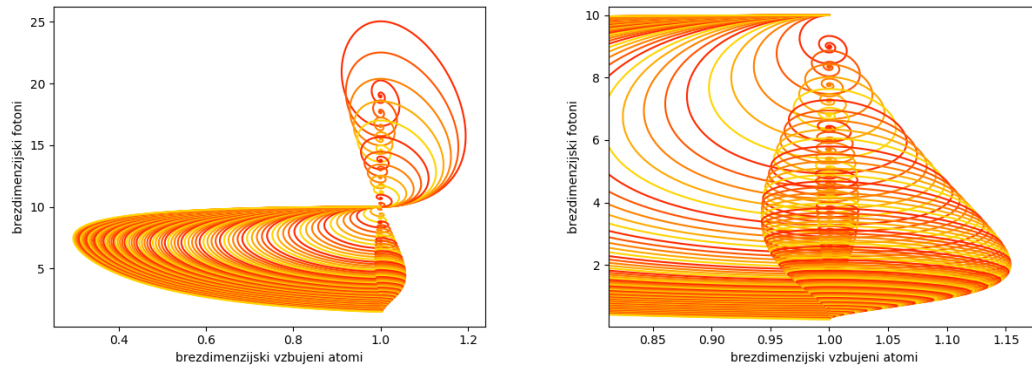
Zelo zanimiv primer je prikazan še na slikah 7, kjer je razmerje $q/p - 1 = -0,4$. Kar se zgodi je to, da neglede na začetni pogoj, vse trajektorije vodijo na isto trajektorijo, ki potem potuje do točke, ki ima vrednost $(q/p, 0)$. Očitno gre za sočni primer, za katerega sem terdil, da je zelo redek. Dejanko je redek, a tu se je zgodil. To je stabilna rešitev za drugo stacionarno točko.



Slika 7: Na vseh grafih začnemo risati točke na neki osi. Na vseh je razmerje $q/p - 1 = -0,4$ ($p = 5, q = 3$). Vidimo da se iz vseh smeri pridružijo skupni poti, ki jih vse vodi do točke $(q/p = 0,6, 0)$.

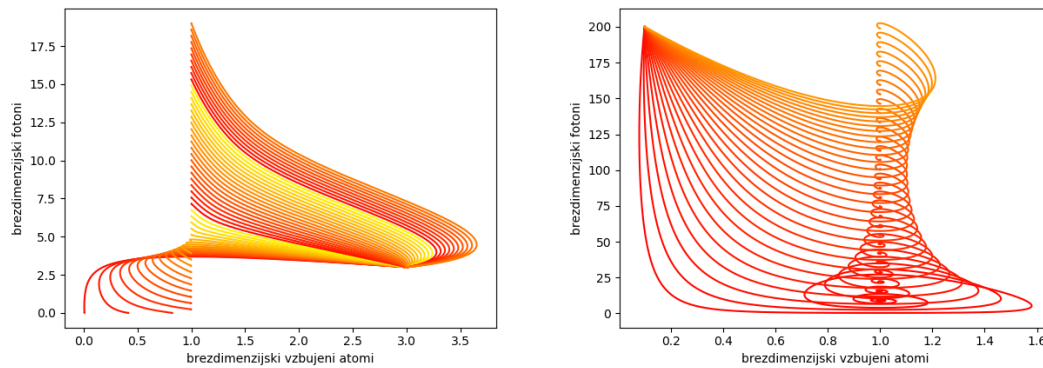
Še en zanimiv primer je, če si pogledamo kako se spreminjajo trajektorije s tem, ko spreminjamo vrednost parametra p . Pričakovali bi, da se bo pač zastojna točka premikala po osi $(y, 1)$. Točno to se tudi zgodi, če si pogledamo sliki 8. Graf sem zanalašč narisal tako, da začnemo v

točki na tej osi. Poleg tega opazimo, da gostota trajektorij narašča s tem ko se spuščamo po osi y , kar pripišemo temu, da je enačba za določanje teh točk racionalna funkcija q/p . Zato gostota točk narašča s tem ko p zvišujemo.



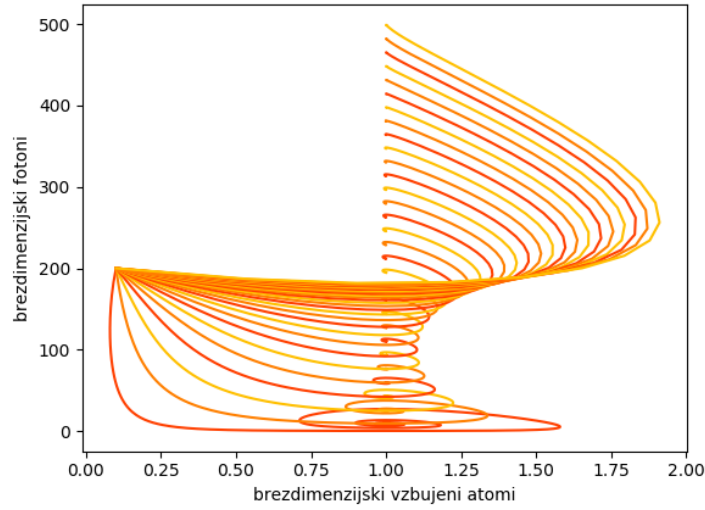
Slika 8: Sliki prikazujeta isti graf, na katerem so prikazane trajektorije, ki se začnejo v točki $(10, 1)$ a pri različnih vrednostih parametra p , ki pri konstantem $q = 2$ teče od vrednosti 0,1 do vrednosti 0,8. Desni graf je zgolj povečana slika levega.

Kaj pa če spreminjamo parameter q ? Spremembe, ki jih bomo videli, so pač zelo podobne tistim, ko spreminjamo parameter p . Samo spreminjajao se stabilne točke, v katere sistem konvergira. To vidimo na slikah 9. Na teh slikah smo ujeli tudi interval, kjer rešitve lepo brez oscilacij konvergirajo v stabilno točko (to vidimo na sliki 9 levo). Pri tem velja poudariti, da karakteristike trajektorij niso odvisne toliko od začetne točke. Bližje stabilni točki kot bi dal izhodišče, hitreje bi točka konvergirala, to ali bi zaokrožila vanjo ali pa šla vanjo lepo naravnost, pa je odvisno od izbire parametrov q in p .



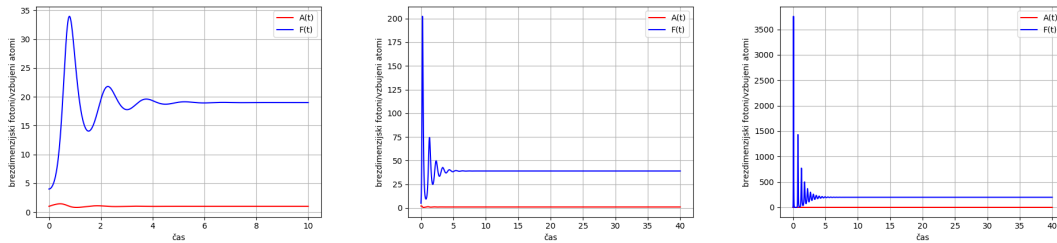
Slika 9: Na levi sliki opazujemo $q \in [0,1, 20]$ pri vrednosti $p = 1$ in pri začetni točki $(3, 3)$. Na desni pa $q \in [1, 20]$ pri vrednosti $p = 0,1$ in pri začetni točki $(200, 0,1)$.

Iz zgoraj navedenih grafov se zelo lepo vidi kako se spreminja frekvenca relaksacijskih oscilacij ko spreminjamo p ali q . Večji kot je p (seveda se moramo pri tem nahajati v območju, kjer do oscilacij sploh pride!), višja je frekvenca. To recimo vidimo na slikah 8. Če pa spreminjamo q pa obratno opazimo, da frekvenca pada s tem, ko q zvišujemo (slika 9 desno), pri dovolj visokih q pa že izstopimo iz režima oscilatornih rešitev in se rešitvam postopoma približamo kar direktno, kar vidimo na spodnji sliki 10. Do tega pridemo, ker $q^2 > 4(\frac{q}{p} - 1)$. Na zgornji trajektoriji na sliki 10 ta neenačaja velja ($50 > 44,7$).



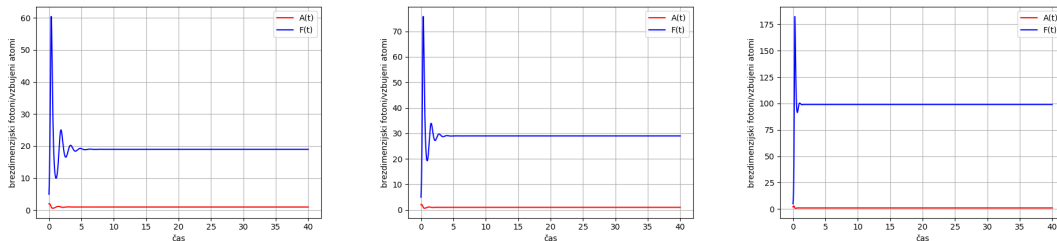
Slika 10: Opazujemo trajektorije na intervalu $q \in [1, 50]$ pri $p = 0,1$ in z izhodiščem v točki $(200, 0.1)$. Vidimo, da trajektorije vmes zamenjajo režim iz oscilatornega v linearni, ker se izpolni pogoj $q > \sqrt{4(\frac{q}{p} - 1)}$.

Iz navedenih grafov pa še nismo uspeli razbrati karakteristični čas relaksacijskih oscilacij, saj te stvair v faznih diagramih niso lepo vidne. Ugotovimo lahko, da se z zmanjševanjem q karakteristični čas zmanjša in s povečevanjem daljša. Za p pa zgolj potrdimo, kar smo do sedaj lahko videli že iz faznih diagramov, če si ogledamo slike 11. Pri tem opazimo, da tudi amplitude oscilacij naraščajo.



Slika 11: Na slikah od leve proti desni spreminjam $p = 0.1, 0.05, 0.01$, pri vrednostih $q = 2$.

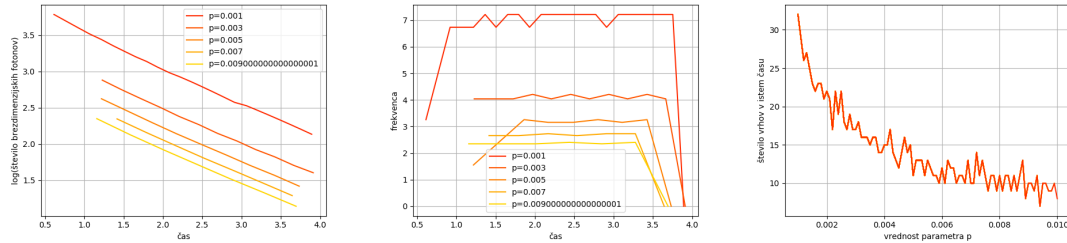
Ugotovitve glede parametra q pa lahko vidimo na spodnjih grafih slike 12.



Slika 12: Na slikah od leve proti desni spreminjam $q = 2, 3, 10$, pri vrednostih $p = 0,1$.

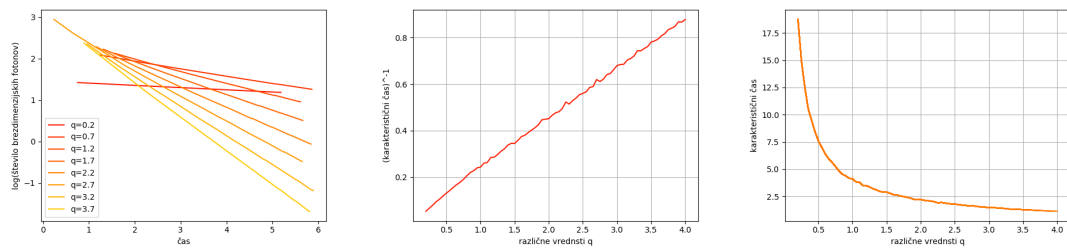
A zgoraj navedeni grafi so zgolj kazali kaj se dogaja, mi pa bi radi lastnosti poznali v večje

detajle, zato odčitamo vse maksimume, ki jih najdemo in preverimo, kakšni so relaksijski časi in kakšne so frekvence. Dobimo grafe prikazane na slikah 13, na levi sliki vidimo, da je naklon ves čas enak in se karakteristični čas s p ne spreminja. Na sredinski sliki vidimo, da se z zmanjševanjem p spreminja frekvenca, kar vemo že od prej, a funkcija spreminjanja je vidna šele na desni sliki, kjer smo prikazali število vrhov pri različnih p .



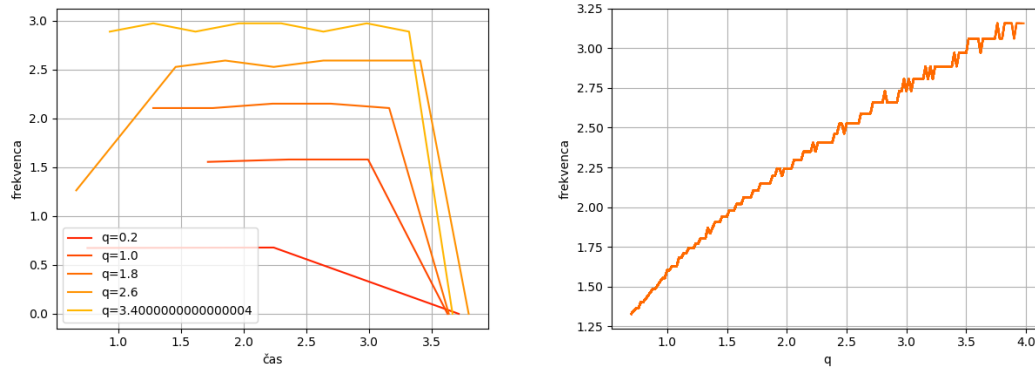
Slika 13: Na sliki levo so pri različnih vrednostih p prikazane odvisnosti logaritma števila delcev v maksimumu (amplituda) od časa. Na srednji sliki vidimo frekvence v odvisnosti od časa za različne vrednosti p , na desni sliki pa število maksimumov pri različnih p . Izhodišče je v točki $(5, 1)$ in $q = 2$.

A v resnici nas zanima kako se relaksacijski čas in frekvanca oscilacij spreminjata s parametrom q . Torej s tem koliko energije dovajamo sistemu. Tako pridemo do grafov prikazanih na slikah 14, kjer mo opaziti da dobimo za vse vrednosti q eksponentne odvisnosti maksimumov od časa. To je prikazano na sliki levo potem pa smo na slikah desno razbrali naklon teh premic in iz tega izluščili odvisnost karakterističnega časa od parametra p . Vidimo da gre za linearno odvisnost in da se z večjim dovajanjem energije relaksacijski čas močno zmanjša. Tam pri vrednostih $q = 2$ nam je sistem zelo všeč, če je $p = 0,01$, oziroma razmerje med njima $q/p = 200$.



Slika 14: Na sliki levo vidimo amplitude maksimumov v odvisnosti od časa, v logaritem ski skali. Na sredinski sliki in na sliki levo pa so prikazani koeficienti naklona teh premic v odvisnosti od parametra q . Sistem se nahaja pri vrednostih $p = 0,01$ in začne v točki $(5, 1)$.

Tako kot v primeru za p nas tudi sedaj zanima kako se z različnimi parametri q spreminja frekvenca teh oscilacij, zato si izrišemo grafe prikazane na sliki 15. Na grafu levo vidimo, da se frekvence tudi s parametrom q spreminjajo in zato izrišemo graf desno, ki prikazuje odvisnost frekvence od parametra q . Vidimo, da z večanjem dotoka energije zvišujemo oscilacije, a hkrati kot smo videli poprej zmanjšujemo tudi relaksacijski čas.



Slika 15: Na sliki levo vidimo odvisnost frekvenc od časa za različne vrednosti parametra q . Na sliki desno pa število maksimumov znotraj intervala oscilacij v odvisnosti od parametra q . Pri desni sliki gre torej za odvisnost frekvence od parametra q . Sistem se nahaja pri vrednostih $p = 0,01$ in začne v točki $(5, 1)$.

III. MODEL EPIDEMIJE

Poglejmo si še bolj zapleteno populacijo, kjer imamo tri razrede. Zdrave in dovztno (D), bolne in klionsne (B) in imune (I). Bolezen se širi s stiki med zdravimi in bolnimi, bolnik pa se s konstantno verjetnosjo znajde med imunimi (ozdravi ali umre). To lahko zapišemo v matematičnem jeziku kot

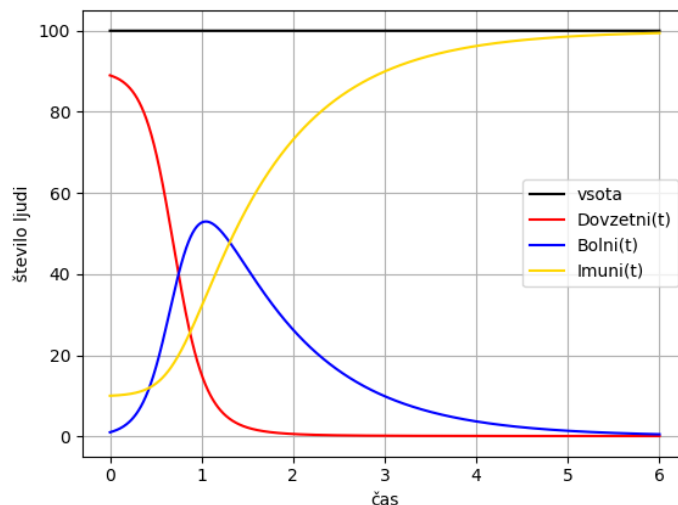
$$\dot{D}(t) = -\alpha DB, \quad (22a)$$

$$\dot{B}(t) = \alpha DB - \beta B \text{ in} \quad (22b)$$

$$\dot{I}(t) = \beta B, \quad (22c)$$

kjer je pomen konstant α in β razviden po podobnem razmisleku kot v poglavju I. Že tako na prvi pogled vidimo, da obstaja le ena zastojna točka in to takrat, kadar velja $B = 0$, torej kadar ni nihče boln. Jakobijeva determinanta je v taki točki enaka nič, lastne vrednosti jacobijeve matrike pa so $0, 0$ in $-\beta$, kar pomeni da imamo poseben primer zastoje točke, ki se lahko pojavi le v treh dimenzijah in se imenuje Bogdanov-Takenovo ravnovesje, do katerega ponavadi pride pri takoimenovanem Bogdanov-Takenovem viličenju.

Poglejmo si namesto faznega prostora, odvisnost različnih razredov od časa. Večinoma se bomo ukvarjali z maksimalnim številom obolelih, ker je to tisto, kar ponavadi želimo izničiti. Ukvarjali se bomo kako se poznajo različni deleži predimunosti na maksimum obolelih. Nasploh te odvisnosti izgledajo tako, kot jih prikazuje slika 16.

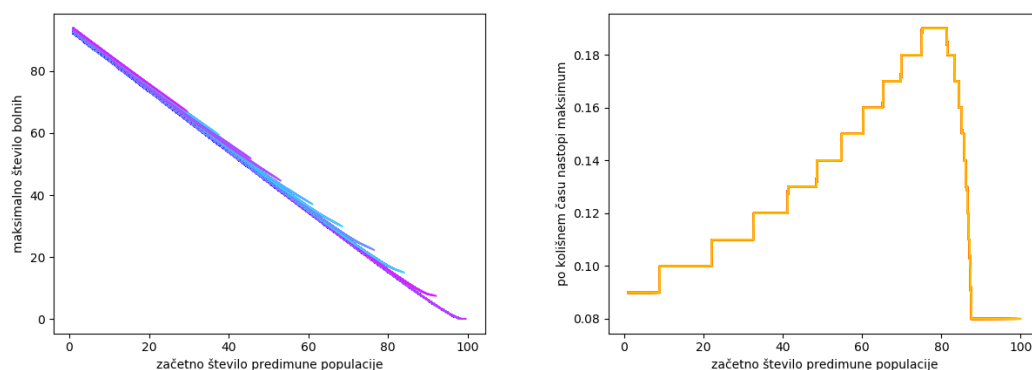


Slika 16: Odvisnost pri vrednostih parametrov $\alpha = 0,08$ in $\beta = 1$.

Najprej število obolelih narašča in se zaradi tega zmanjšuje število dovzetnih, ves čas pa se tudi število obolelih manjša in povečuje število imunih, dokler niso vsi imuni. Ni pa vedno nujno, da so na koncu vsi imuni, kot bomo pokazali kasneje.

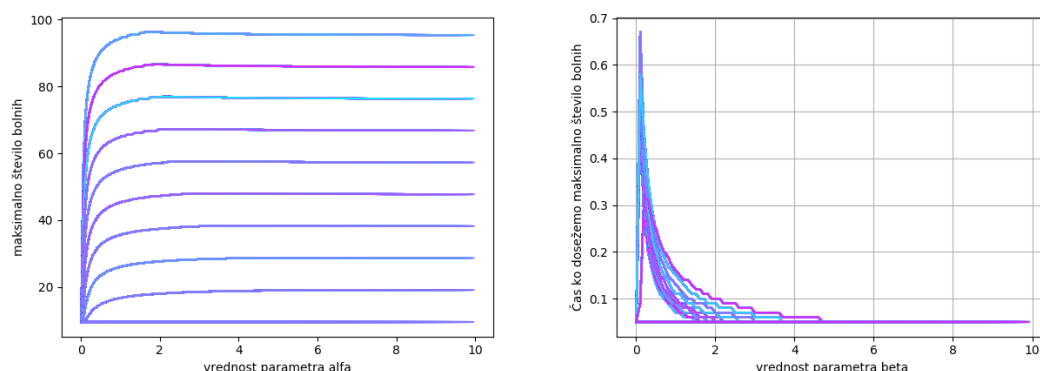
Poglejmo si nekaj osnovnih lastnosti takšnega sistema. Najprej nas zanima kako se spreminja maksimalno število bolnih v odvisnosti od začetnega števila imunih. Pri tem si na sliki 17 pogledmo več krivulj, ki pripadajo še različnim začetnim številom bolnih. Vidimo, da gre za linearno odvisnost.

Precej bolj zanimive odvisnosti pa dobimo, če spreminjamo parametra α in β . To je prikazano na slikah 18, kjer vidimo, da se maksimalno število obolelih z zviševanjem nalezljivosti bolezni



Slika 17: Na zgornjih slikah sta parametra $\alpha = 0,8$ in $\beta = 1$, različne krivulje na levi sliki pa predstavljajo različna začetna števila imunih na intervalu med 0,1 in 70.

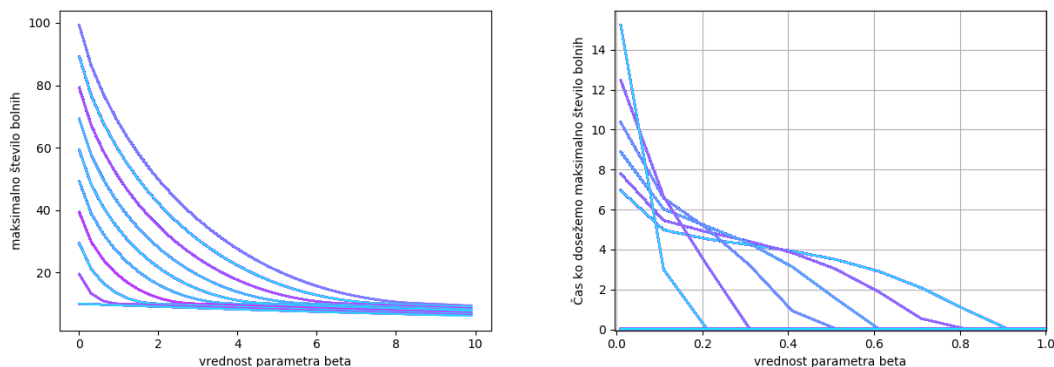
hitro približa konstantni vrednosti, kako pa se te vrednosti spreminjajo gleda na začetno število imunih, pa že vemo iz slike 17. Kot bi pričakovali vidimo, da je maksimum pri nižjih vrednostih nalezljivosti vse nižje. Na sliki desno pa si lahko pogledamo čas v katerem dosežemo maksimalno število obolelih v odvisnosti od nalezljivosti. Tam vidimo, da bolezen največ časa porabi, da pokaže največ svojih grozot, če ni tako zelo nalezljiva in doseže maksimum v trenutku, če je močno nalezljiva. Odvisnosti so eksponentne, kar vidimo, če gral logaritimiramo, a tega nisem prikazal.



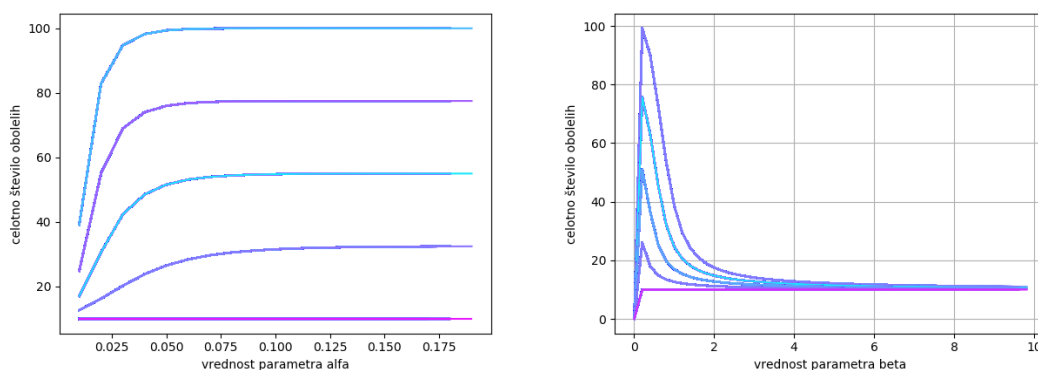
Slika 18: Na zgornjih slikah spreminjam vrednost parametra α pri konstantni vrednosti $\beta = 1$, različne krivulje pa predstavljajo različna začetna števila imunih na intervalu med 0 in 90. Začetno število obolelih je 10.

Ko spreminjamo parameter β pa dobimo krivulje prikazane na slikah 19, kjer kot bi pričakovali, vidimo da se maksimum zmanjšuje, s tem ko je bolezen hitro preboljiva na sliki levo in da se tudi čas v katerem bolezen doseže ta maksimum zmanjšuje, če je bolezen hitro preboljiva. To zadnje poemi, da se ljudje tako hitro zdravijo, da se maksimum premakne nazaj, saj vrh, ki bi ga bolezen sicer dosegla odžrejo.

Sedaj pa si pogledjmo še celotno število obolelih v odvisnosti od teh dveh parametrov, kar je prikazano na slikah 20. Vidimo, pri dovolj visokih stopnjah nalezljivosti zbolijo vsi ljudje, a če bolezen ni dovolj naseljivo, sploh ne zbolijo vsi ljudje. V absurdnem primeru, ko bolezen ni nalezljiva, je pa ozdravljiva, se celotno število obolelih s časom sploh ne spremeni. Podobno vidimo na sliki desno, da hitreje ozdravljive bolezni prav tako ne uspejo okužiti vseh ljudi in da težko ozdravljive bolezni okužijo vse, ki niso cepljeni.

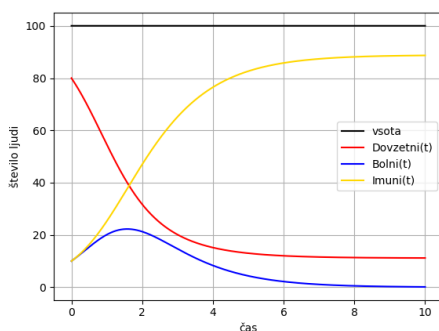


Slika 19: Na zgornjih slikah spreminjam vrednost parametra β pri konstantni vrednosti $\alpha = 0,1$, različne krivulje pa predstavljajo različna začetna števila imunih na intervalu med 0 in 90. Začetno število obolelih je 10.



Slika 20: Na zgornjih slikah spreminjam vrednost parametrov α in β pri istih konstantnih vrednostih, kot vselej do sedaj. Različne krivulje predstavljajo različna začetna števila imunih na intervalu med 0 in 90 (na levi sliki celotno število obolelih pada s tem ko začetno število imunih narašča). Začetno število obolelih je 10.

Poglejmo si torej zgoraj omenjeni primer na sliki 21. Vidimo, da se ljudje okužijo tako počasi, da bolezen že prebolijo vsi, preden bi se lahko sploh vsi dovzetni okužili. Fazni diagrami pa za nas niso zanimivi in so nepregledni.



Slika 21: Graf prikazuje sistem, ko je precepljene dovolj populacije in je bolezen dovolj nenalezljiva, da se z njo ne okuži ves dovzeten delež prebivalstva. Parametra sta $\alpha = 0,025$ in $\beta = 1$.