12. naloga
Navier-Stokesov sistem

Miha Srdinšek

I. Enačbe

V tej nalogi smo reševali sistem Navier-Stokesovih enačb, zapisanih kot

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad in \tag{1b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1c}$$

pri čemer u in v predstavljata normirani komponenti hitrosti $(x, y) \longrightarrow (u, v)$. Enačbe bi v vsakem primeru reševali tako, da jih enostavno diskretiziramo in rešujemo eno za drugo. A te enačbe so zahtevne, ker moramo upoštevati še tlak. Zato enačbe raje preoblikujemo v enačbe za vrtinčnost in tokovno funkcijo. S tem se znebimo zahtev glede tlaka. Nove enačbe že poznamo iz teorije in se glasijo

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}p + \frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y} - \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

če velja $\zeta = -(\nabla \times \vec{v})_z$, ki ima zgolj eno komponento v dvodimenzionalnem primeru. Pri tem rabimo še povezavo s tokovno funkcijo

$$\vec{v} = \nabla \times \psi, \tag{3a}$$

$$\nabla^2 \psi = \zeta. \tag{3b}$$

Zdaj rabimo le diskretizirati enačbe s predpisom

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta x} \quad in \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} \tag{4}$$

in poskrbeti za robne pogoje. To je seveda tisti del, ki je bolj zapleten. Reševali bomo primer, ko imamo kvadratno cev in ji s konstantno hitrostjo večemo pokrov. Robni pogoj za hitrost bo torej hitrost v smeri stene nič in hitrost vzporedno s premikajočo steno hitrost stene. Za robne pogoje prve vrste za ψ bomo torej dali ničle, robne pogoje druge vrste pa bomo prepisali v robne pogoje za ζ. Zapisali bomo torej

$$\zeta_{N-2,j} = \frac{2}{(\Delta x)^2}\Big(- \psi_{N-1,j} - v_{stene}\Delta x\Big) \tag{5}$$

na spodnjem robu in na ostalih robovih podobno kot spodaj

$$\zeta_{2,j} = -\frac{2}{(\Delta x)^2}\psi_{1,j}. \tag{6}$$

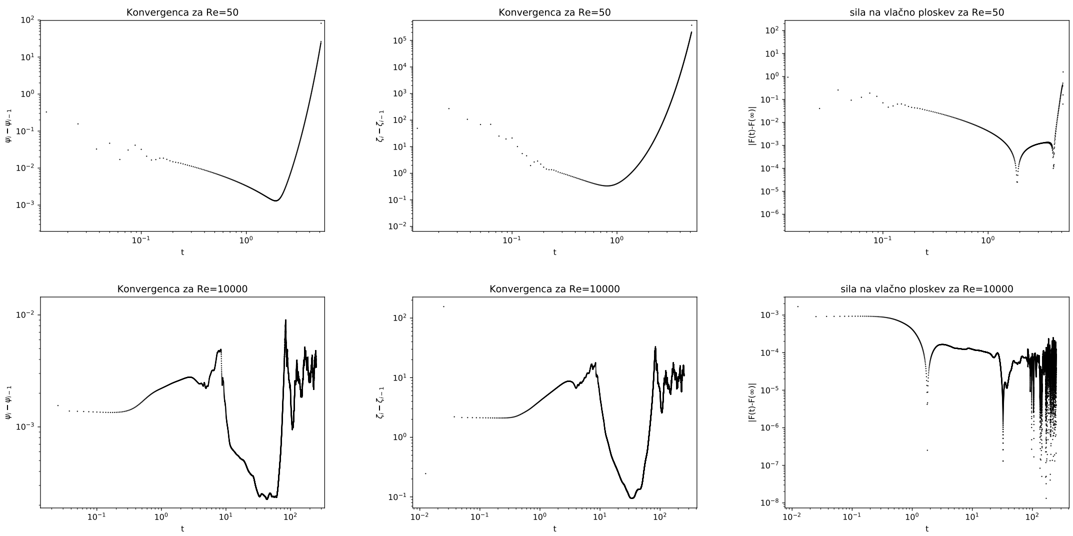
Sistem bomo torej rešili po enostavnem postopku.
i. Najprej postavimo u in v na nič povsod,
ii. ψ povsod postavimo na nič,
iii. Hitrost na dnu v x smeri nastavimo na $u_0 = 1$,
iv. Izračunamo $\zeta = -(\nabla \times \vec{v})_z$
v. Upoštevamo robne pogoje za ζ in nato začnemo zanko:

1. Iz diskretizirane enačbe 2 izračunamo iz u,v in ψ novo ζ,
2. Upoštevamo robne pogoje za ζ,
3. S pomočjo metode *SOR* rešimo enačbo 3 spodaj za ψ,
4. Iz novega ψ izračunamo po enačbi 3 zgoraj hitrostno polje,
5. Preverimo za koliko se novo hitrostno polje razlikuje od prejšnjega in ponovimo zanko če ni željene natančnosti oz. prekinemo zanko, če jo dosežemo.

Za dolžino koraka vzamemo $\Delta \lesssim \frac{0{,}4\Delta x}{v_{max}}$.

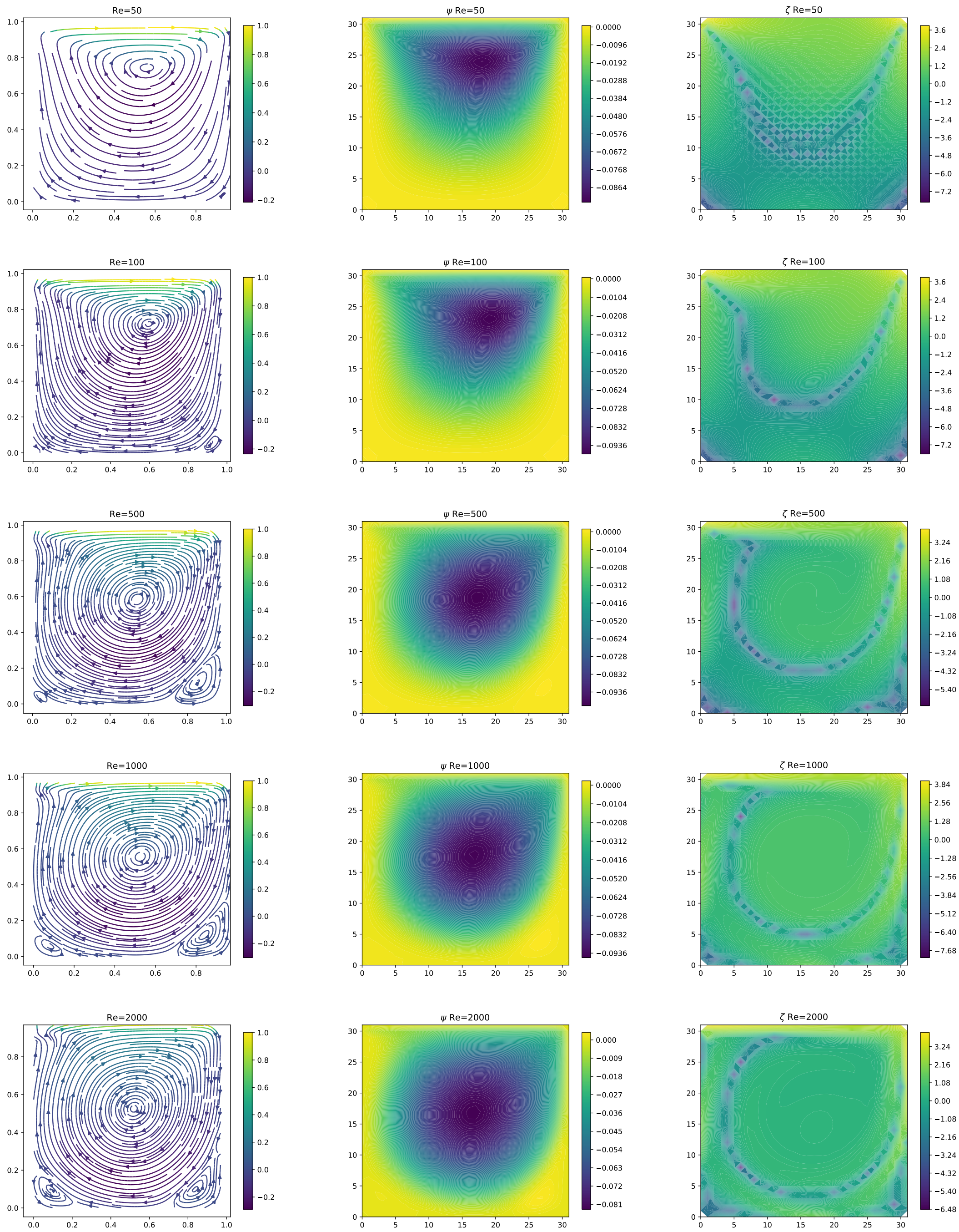
II. Rezultati

Kar hitro skočimo na rezultate. Najprej omenimo da je metoda hitra in brezhibna pri Re okoli $100 - 5000$, izven tega območja pa se srečamo z vedno več komplikacijami. Najprej si poglejmo tak primer za $Re = 50$ in $Re = 10\,000$.

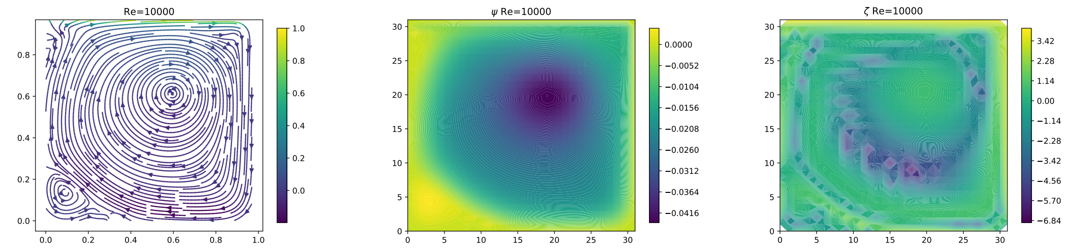


Slika 1: *Slike na levi in sredini prikazujejo kako izbrane količine konvergirajo s časom, sliki desno pa prikazujeta kako se sila na premikajočo steno s časom približuje končni vrednosti.*

V tem primeru dobimo konvergence in silo v odvisnosti od koraka, kot je prikazano na slikah 1. Kadar sem v prihodnje torej risal rezultate tudi za ti dve vrednsoti Re, sem ju risal v točki, kjer je napaka najmanjša. Pri tem bi komentiral tudi to, da v tem primeru vidimo dva različna načina nekonvergentnosti. V primeru $Re = 50$ nam rešitev konvergira in na neki točki pobegne v neskončnost. Jaz sem divergentni del odrezal, ampak doseže se vrednost 10^{200}, med tem ko nam pri $Re = 10\,000$ metoda zgolj začne nihati in ne konvergira, a tudi ne divergira. Narava rešitev je povsem drugačna in osebno bi sklepal, da je rešitev pri $Re = 50$ fizikalna, med tem ko tista pri $Re = 10\,000$ ni. Tu na oko izgleda tako. Poglejmo si sedaj kako izgleda hitrostno polje, ζ in ψ v odvisnosti od Re.



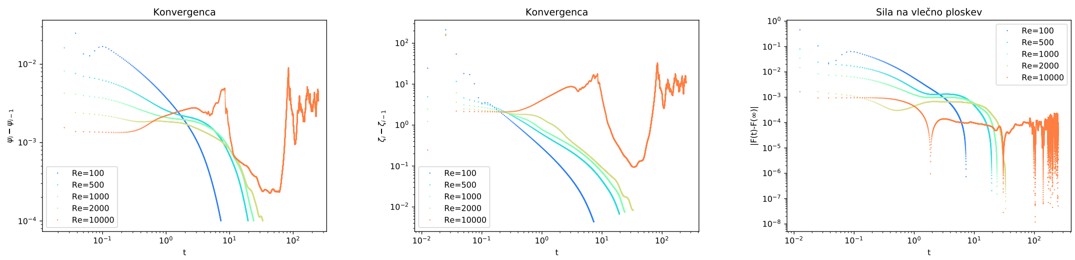
Te rešitve z izjemo prve so povsem lepo konvergirali, kar bom pokazal kasneje. Poglejmo si samo še kako nenavadno izgleda oscilirajoča rešitev, kadar je v svojem najboljšem stanju na slikah spodaj 2. Že na prvi sliki, vidimo, da so tokovnice nenavadnih oblik in da se vrtinci ne



Slika 2: *Nestabilna rešitev pri* $Re = 10\,000$.

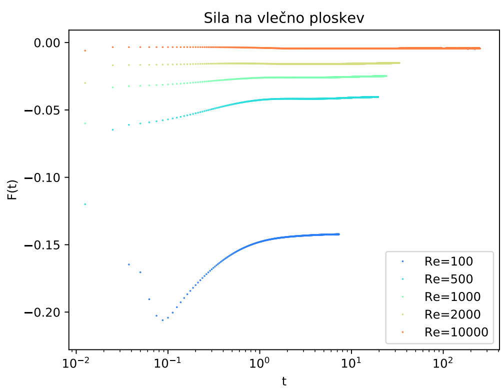
povečujejo kot bi pričakovali iz rezultata $Re = 2000$. Še dodatno nas v nepravilnost prepriča ζ, ki je posebaj nenavadnih oblik. To bi lahko izboljšal na več načinov. Jaz sem algoritem *SOR* pognal tako, da sem vsakič naredil enako število korakov in morda bi bilo bolje dolžino prilagajati, lahko pa bi tudi izbral boljši korak Δt in širšo mrežo.

Poglejmo si sedaj še, kako se že zgoraj predstavljene količine, obnašajo pri razuličnih Re na slikah 3.



Slika 3: *Že prej opisane količine 1 pri različnih Re.*

Da bomo imeli kvantitativno predstavo o tem kolikšna je dejansko sila na steno pa si poglejmo še sliko 4.



Slika 4: *Sila na premikajočo steno pri različnih Re.*