6. naloga
Parcialne diferencialne enačbe: lastne rešitve

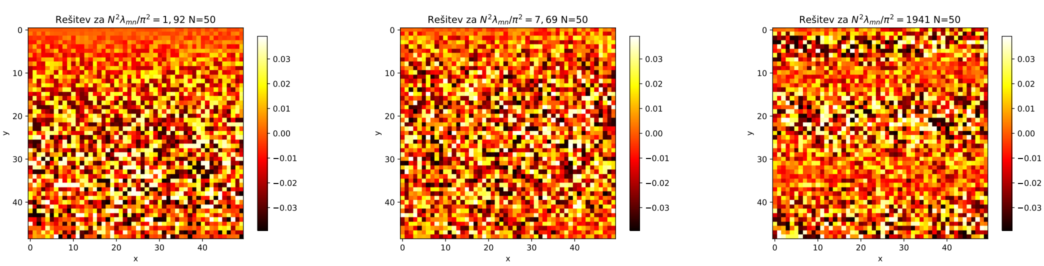
Miha Srdinšek

I. Lastne frekvence homogene opne

Pri tej nalogi bomo poskusili rešiti enačbo opno. Iskali bomo lastne vrednosti in lastne nihajne načine te opne. Za začetek smo si izbrali kar kvadratno homogeno opno, zato da si bomo lažje ustvrili predstavo o tem kako se take probleme rešuje. Za začetek samo zapišemo enačbo opne in jo diskretiziramo

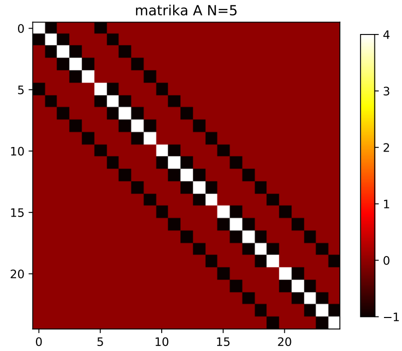
$$\nabla^2 u = -\frac{\rho \omega d}{\gamma} u = -ku \tag{1}$$

pri čemer je γ elastičnost opne, d debelina opne in ρ gostota opne. V drugem delu naloge bo ta gostota odvisna od kraja. Sedaj tako kot smo to poskušali v prejšnji nalogi, zgolj rešimo to enačbo za lastne vrednosti in lastne vektorje. Tako kot prejšnjič sem tudi tokrat prišel do napačnih rezultatov, ki sem jih prikazal na sliki 1. Dobil sem natančne lastne vrednosti, ki sem jih primerjal s tistimi podanimi na predavanjih (2,5,5,8,10,10), a hkrati popolnoma nepravilne lastne vektorje.



Slika 1: *Slike prikazujejo začetne rešitve.*

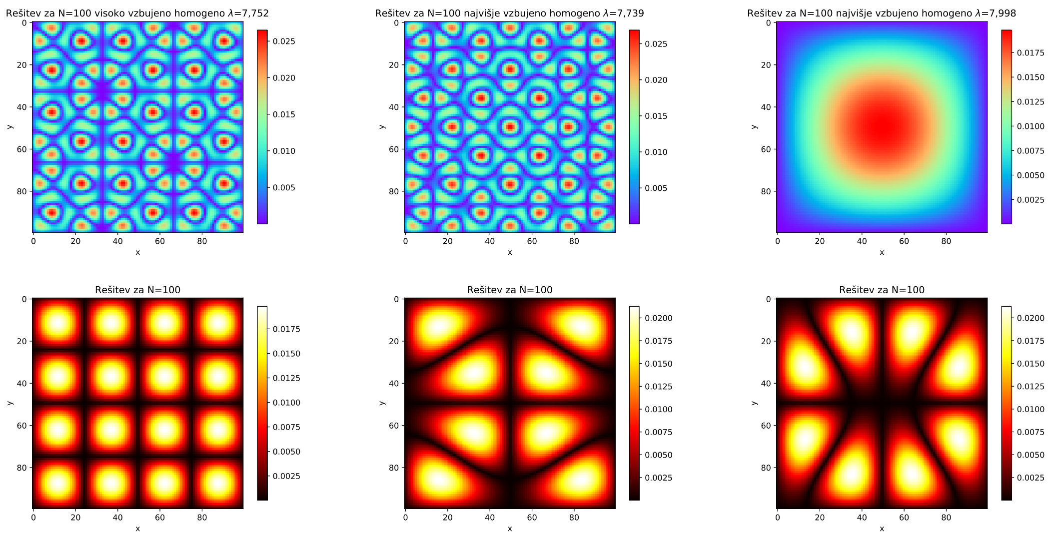
Vprašanje je kaj sem naredil narobe? Da tak problem rešiš moraš najprej operator ∇^2 preleviti v linearno transformacijo v obliki matrike A. To matriko sem narisal pravilno, kar sem tudi preveril. Matrika je izrisana na sliki 2. Vidimmo, d os na diagonali 4 in na nediagonalnih delih -1 ali 0. Vse kar sem torej moral narediti je to matriko diagonalizirati. To sem naredil s čisto ustaljenimi postopki in kot vidimo, so bili rezultati tega katastrofalni.



Slika 2

Da sem rešil ta problem sem moral spoznati osnove teorije redkih matrik. S pomočjo redkih matrik lahko namreč operacijo močno pohitrimo, naredimo pa jo tudi dosti natančnejšo. Če imamo redko matriko, kar pomeni, da je ničelnih elementov matrike dosti manj od neničelnih elementov matrike, jo lahko še dosti bolj poenostavimo. Še bolj jo lahko poenostavimo, če so ti elementi enaki in še bolj, če so lepo urejeni, kot v našem primeru. Ko so vsi elementi različni od nič enaki in postavljeni po nekih diagonalah. Če imamo tako lepo in po možnosti še simetrično matriko se torej splača uporabiti algoritme za redke matrike.

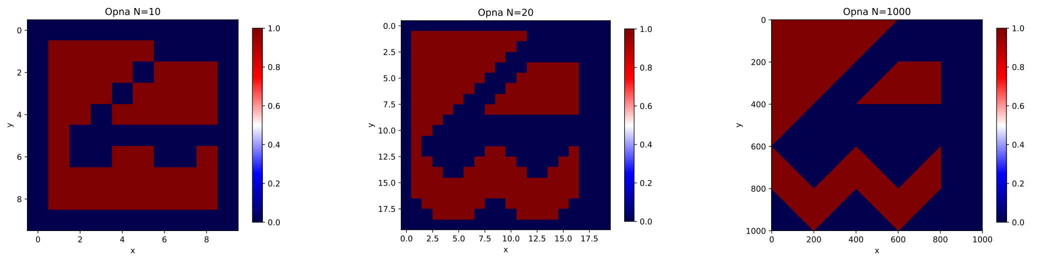
Kljub rahlim zapletom je prevedba na redke matrike v programskem jezku *python* stekla zelo hitro. Postopek poteka tako, da ali že sam zgradiš redko matriko, ali pa, tako kot jaz, napišeš matriko in jo potem s funkcijo iz knjižnice prevedeš v redko ($'sparse'$) matriko. Algoritmi za take matrike so že napisani. Pri tem so algoritmi tako splošni, da si lahko sam izbereš koliko rešitev naj ti izračuna, pa tudi splošni problem lastnih vrednosti zna rešiti. Od tu naprej je bilo reševanje rve naloge zgolj klicanje te funkcije na raznorazne načine. Rešitve so bile dosti lepše in že urejene po velikosti. Tak smo si lahko čisto brez problemov ogledali rešitve za homogeno opno



Slika 3: *Slike prikazujejo rešitve za homogeno opno.*

II. Lastne frekvence nehomogene opne

Prijazen asistent nam je podal zelo enostavno nehomogeno opno, razdeljeno na dva dela - enega bolj gostega in enega lažjega. Struktura opne je prikazana na slikah 4. Slike bi lahko pri bralcu vzbudila ogorčenje, a naj opozorim, da sem kasneje obliko opne rahlo spremenil. Rob, ki ga trenutno vidimo, sam odstranil, saj sicer splošnega problema ne moreš rešeevati zaradi singularnosti. Pa tudi špičke sem obrusil.

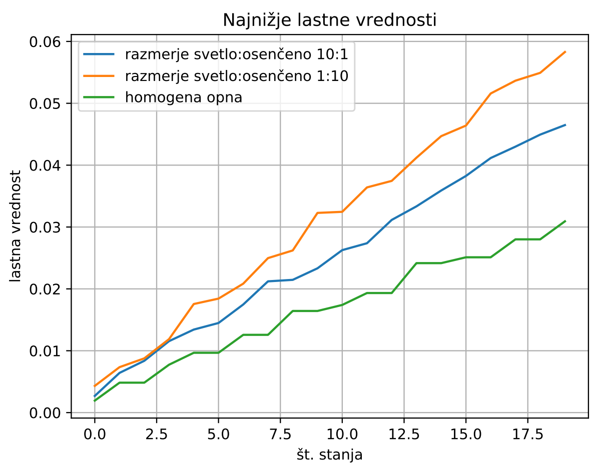


Slika 4: *Slike prikazujejo obliko opne pri različnih natančnostih.*

Kaj naj naredimo sedaj? Vse kar se spremeni, je to, da gostota v prejšnji enačbi (oziroma k) postane odvisen od kraja. Torej lahko tudi to gosotot zapišemo v obliki matrike v stilu

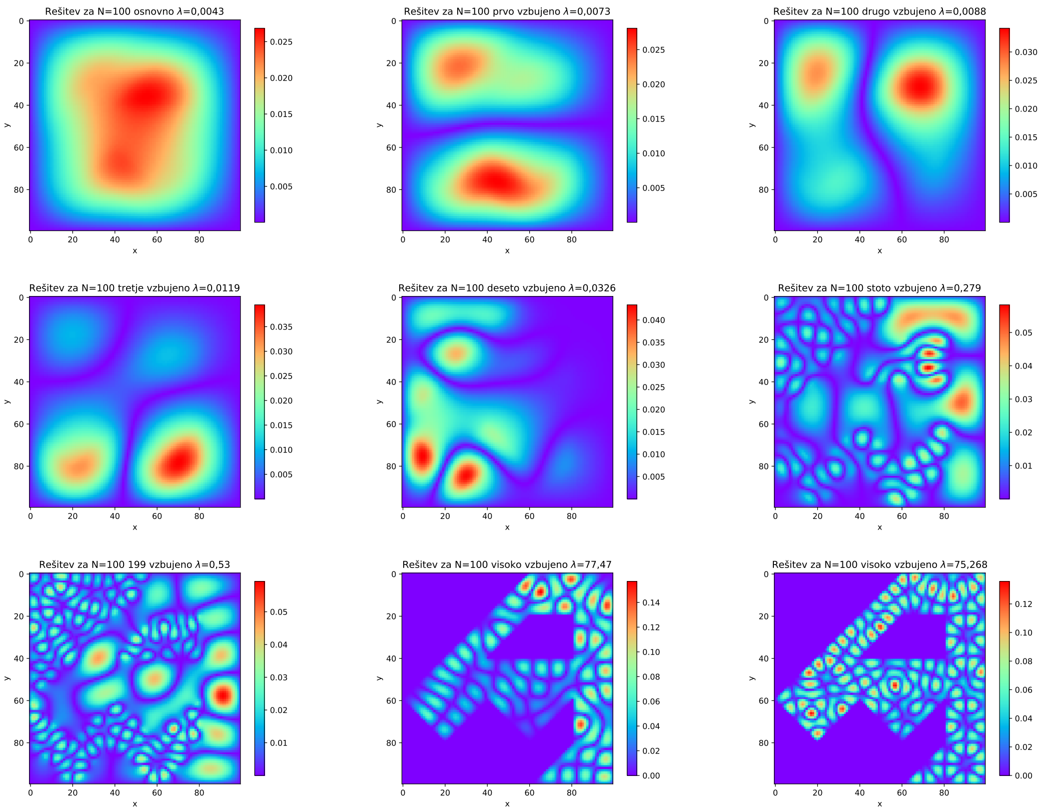
$$A\vec{x} = \lambda B\vec{x}. \tag{2}$$

Reševanje takega problema se potem lotimo z metodami *LAPACK*, ki so, kot sem že omenil, del funkcij za redke matrike. Matrika A ostane ista, matrika B pa je čisto enostavno zgolj diagonalna matrika, na katero nanizamo vrednosti tako, da ob množenju z vektorjem 1 dobimo sliko 4. Za rešitevanje takega problema torej zopet nismo potrebovali pretiranih miselnih naporov, saj je še vse vsebovano v funkcijah, ki smo jih klicali do sedaj. Lahko zgoj nanizamo rešitve. Za začetek si poglejmo kaj se zgodi z lastniim vrednostmi, kar sem prikazal grafično na grafu 5.



Slika 5: *Slika prikazuje lastne vrednosti za različne opne.*

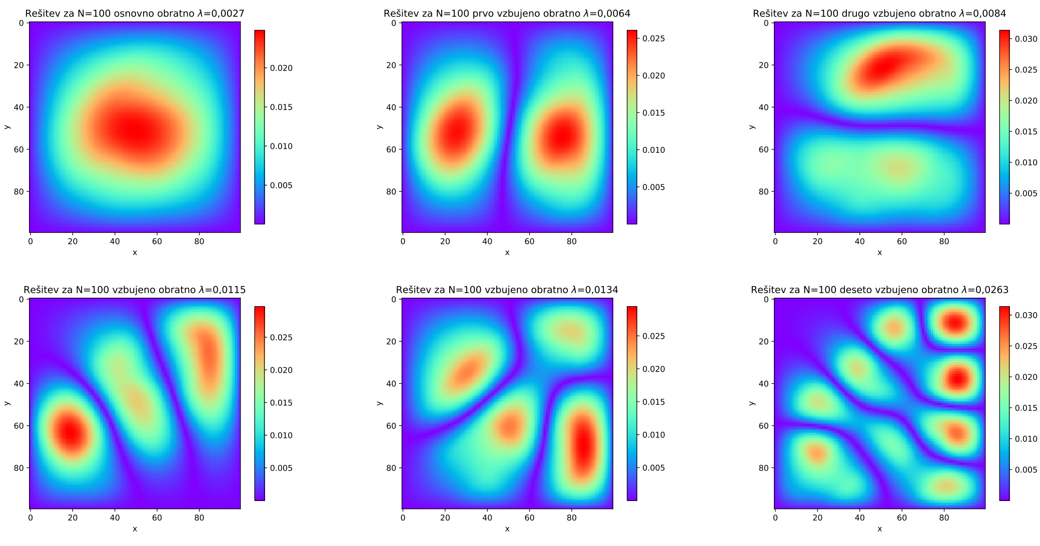
Prva stvar, ki jo lahko opazimo na grafu je to, da so pri homogeni opni lasnet vrednosti ene posamične, druge pa v parih, kar smo tako ali tako pričakovali. Kar je zanimivo, je to da zlom simetrije opne, pri nehomogeni opni preivede do tega, da se te enake lastne vrednosti vse



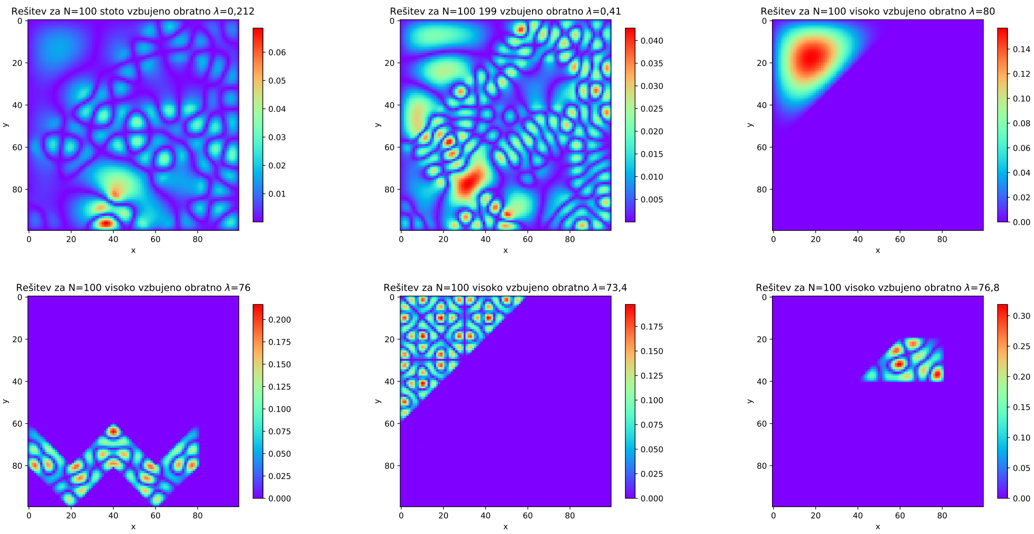
Slika 6: *Slike prikazujejo obliko lastnih nihanj opne če je osenčen del 10x težji od neosenčenega dela.*

bolj razcepijo. Še vedno ohranimo približno stopničasto strukturo, a ni več tako lepa kot pri homogeni opni.

Podobno zanimivo, je če si ogledmao še obrani problem, kjer je osenčen del opne lažji od neosenčenega dela opne. Pri tem dobimo kanček drugačne oblike lastnih nihajnih načinov.



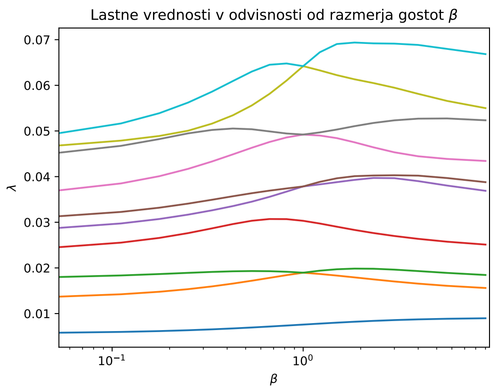
Vidimo, da se rešitve rahlo popačijo pri bolj osnovnih nihajnih načinih, a čim pogledamo višja vzbujena stanja se se opazi katera opna je težja in katera lažja. Pri višjih vzbujenih stanjih se opna obnaša, kot da je težja opna stena, med tem ko se pri nižjih lastnih vrednostih pojavijo rešitve čez celotno opno.



Slika 7: *Slike prikazujejo obliko lastnih nihanj opne če je osenčen del 10x težji od neosenčenega dela.*

Lahko bi si pogledali še ostale oblike opne, a rešitve so precej podone, le stopnja popačenosti se pri nižjih lastnih vrednsotih spreminja, med tem ko pri višjih lastnih vrednostih dobivamo precej podobne rešitve.

VIdimo torej, da je lastni nihajni načini precej razlikujejo pri visokih vrednostih in ne tako zelo pri malih lastnih vrednostih. Tudi lastne vrednsoti so kar precej podobne. Vse to nas privede do razmisleka o tem, kako razmerje gostot vpliva na lastne vrednsoti. Ampak ne le to. Že zgoraj smo si ogledali različne lastne vrednosti in videli, da so se določeni nihajni načini z istimi lastnimi vrednostimi razcepili na različne nihajne načine z različnimi lastnimi vrednostmi. Zanima nas torej ta spekter, zato narišemo graf spodaj v sliko 8.



Slika 8: *Na sliki vidimo spekter v odvisnosti od* β.

Zelo lepo se divi, kako se degenerirane lastne vrednsoti razcepijo pri različnih β. PRi čisto zgornjih nivojih lahko vidimo, da se pri betah močno raličnih od 1 pravzaprav pojavi kar nova degeneracija.

III. Polkrožna opna

Pri drugi nalogi nas zanima kako izgledajo zgornje rešitve v polarnih koordinatah, na polkrožni opni. Pri tem zgolj spremenimo obliko našega oparatorja v

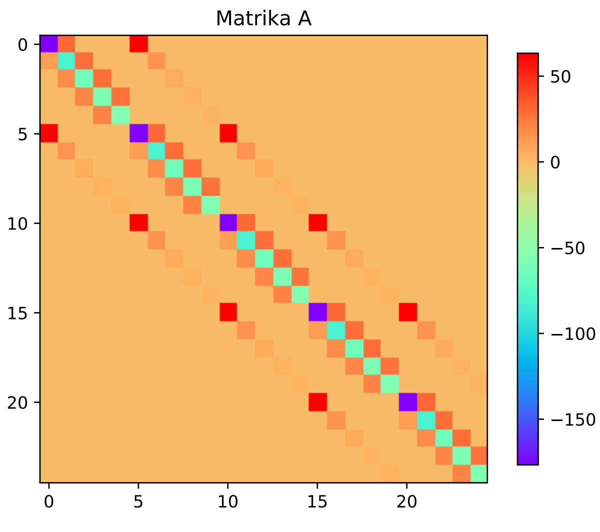
$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)u + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \tag{3}$$

nato ga prevedemo na kvadratno mrežo dimenzij 1 in π. S pomočjo te mreže, lahko zapišemo diferenno enačbo

$$k^2 u_{i,j} = \nabla^2 u_{i,j} = \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2ih_r^2}\right)u_{i+1,j} + \left(\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2ih_r^2}\right)u_{i-1,j} - 2\left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{(ih_\theta h_r)^2}\right)u_{i,j} + \frac{1}{(ih_\theta h_r)^2}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}), \tag{4}$$

kjer sta $h_r = 1/N$ in $h_\theta = \pi/N$ dolžini korakov, pri prevedbi na kvadrat. Na koncu rešitve seveda spet izrišemo na polkrog, samo reševanje pa izvedemo na taki matriki. Pri tem sem z rdečo barvo označil ključni element te diferenčne enačbe. Na predavanjih, te dvojke namreč ni bilo in jaz sem sprva pravoverno reševal s tisto enačbo. Porabil sem kar nekaj časa, nato sem enačbo izpeljal sam in ugotovil, da je manjkala ta dvojka na diagonali. Če te dvojke ne napišemo metoda ne konvergira in imamo ogromno problemov. Ko pa zapišemo to dvojko dobimo hitro konvergirajočo rešitev za poljubno veliko matriko. Druga pomembna stvar je, da kljub temu, da mi vemo, da so rešitve realna števila, ne moremo uporabiti metode za hermitske matrike, saj pride do grših rešitev. Šele če damo metodo za navane matrike, nam najde tako lepe rešitve, kot bodo priakzane spodaj.

Najprej pa si poglejmo kako izgleda matrika, kar vidimo na sliki 9 spodaj. Matrika zdaj ni

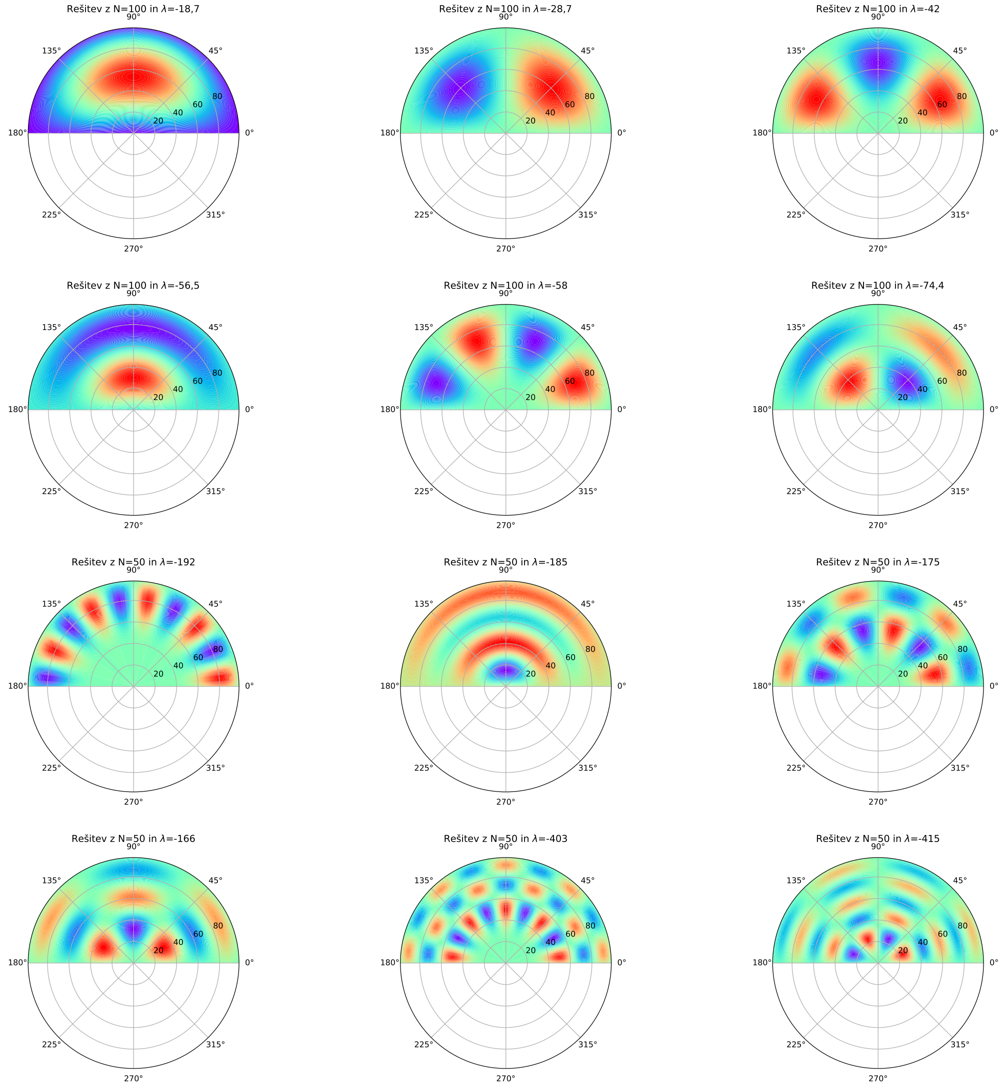


Slika 9: *Na sliki vidimo amtriko A.*

več simetrična, ima a tudi dosti bolj zapleteno strukturo od prejšnje matrike, saj sedaj vrednosti niso konstantne. Kljub tmemu je pripravno uporabiti funkcije za redke matrike, saj je daleč velika količina elementov ničelnih.

Če poženemo naše rutine in poičemo rešitve, tako dobimo točno to kar smo že od začetka pričakovali od analitičnih rešitev. Rešitve lahko vidimo na slikah 10.

Pri tem lahko lepo vidimo, kako obstaja določeno število podobnih nihajnih načinov, ki se potem pri višjih lastnih nihanjih pojavljajo v zelo simetrični obliki, ampak le v večjem številu.



Slika 10: *Slike prikazujejo obliko lastnih nihanj opne.*

Tako lahko opazimo rešitve kolobarjaste oblike, pri kateri zgolj vsaka višja lastna vrednost take vrste doda nov kolobar. Druga taka rešitev je samo deljenje polkroga na manjše kroge itd. Pri tem nam pomaga predvsem domišljija.

Nalogo smo s tem zaključili. Videli smo kako izgeldajo lastne rešitve, kakšne so lastne vrednosit in v prejšnjem primeru celo zanimiv spekter v odvisnosti od razmerja gostot.