8. naloga
Metoda končnih elementov: lastne rešitve

Miha Srdinšek

I. Lastni nihajni načini polkrožne opne

Za razliko od prejšnje naloge, sedaj iščemo lastne rešitve za nihanje polkrožne opne. Rešitve smo že videli pri 6. nalogi, zato si poglejmo kako se takega problema rešimo z metodo končnih elementov.

Rešujemo enačbo

$$\nabla^2 u = -k^2 u. \tag{1}$$

Zopet se poslužimo postopkov, ki smo jih spoznali pri prejšnji nalogi. Minimiziramo akcijo v smislu

$$S(u) = \frac{1}{2}\langle \nabla u, \nabla u \rangle - \frac{1}{2}\lambda \langle u, u \rangle. \tag{2}$$

Preostali postopek je praktično identičen postopku iz prejšnje nalgoe. Notri vstavimo razvoj za u

$$u(x,y) = \sum_i c_i \phi_i \tag{3}$$

in dobimo precej grdo enačbo oblike

$$S(u) = \frac{1}{2}\sum_{ij} c_i c_j \iint (\nabla\phi_i)^T(\nabla\phi_j) dxdy - \frac{1}{2}\lambda \sum_{ij} c_i c_j \iint phi_i \phi_j dxdy, \tag{4}$$

to lahko v dosti bolj humani obliki zapišemo, če opazimo, da lahko definiramo matrike oblike

$$A_{ij} = \langle \nabla\phi_i, \nabla\phi_j \rangle \qquad in \qquad B_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle. \tag{5}$$

S tem spoznanjem se minimizacija prevede na precej enostavnejšo matrično enačbo

$$\sum_i (A_{ij} - \lambda B_{ij}) c_j = 0 \quad oziroma \quad A\vec{c} = \lambda B\vec{c} \tag{6}$$

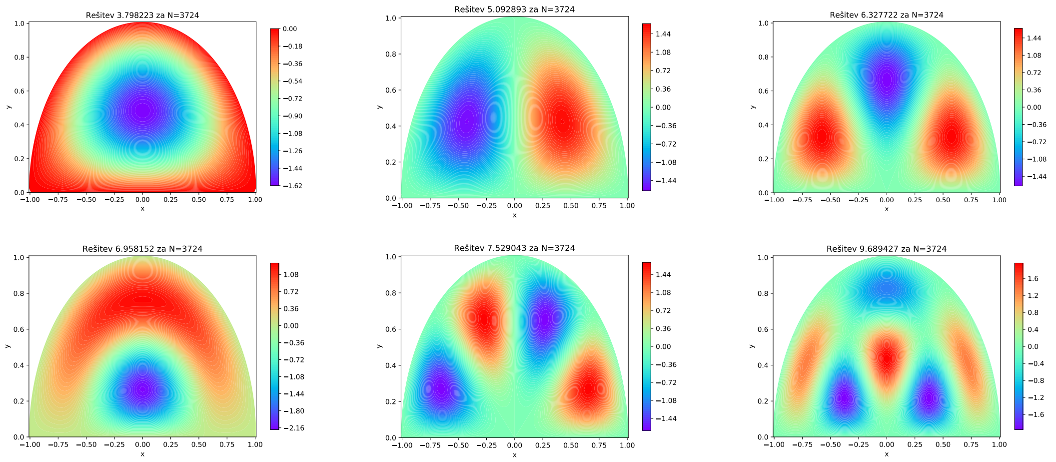
s čimer se znajdemo pred generaliziranim problemom, ki smo se ga navadili reševati, predvsem s pomočjo redkih matrik, pri 6. nalogi.

Tokrat si pomagamo še z eno poenostavitvjo, in sicer dejstvom, da velja

$$B_{ii} = \sum_{it} \frac{S(i,j,t)}{6} \qquad in \qquad B_{ij} = \sum_{t} \frac{S(i,j,t)}{12}, \tag{7}$$

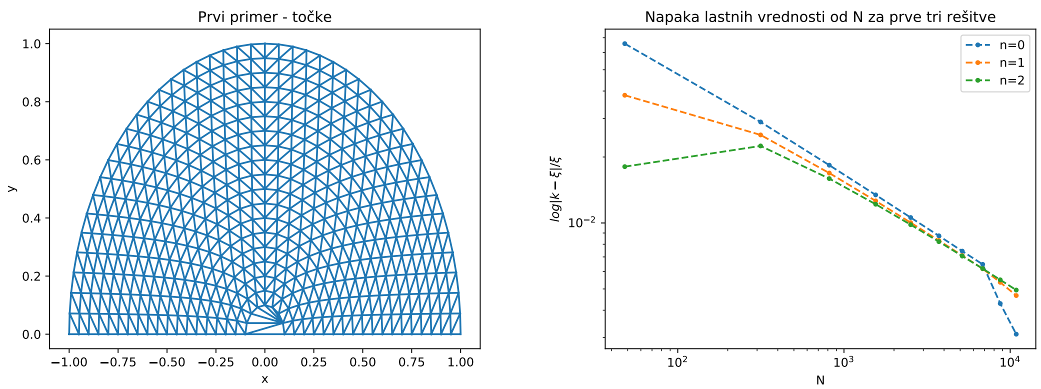
če nam $S(i,j,k)$ predtavlja ploščino trikotnika triangulacije z indeksom t za vsako oglišče z indeksom i ali j.

Enačbe so torej izredno preproste in dejansko delujejo. Samo uporabimo algoritem ki smo ga opisali v prejšnji nalogi in dobimo prelepe rešitve, pričakovane glede na rezultate iz prejšnjih nalog. Prikazane so na slikah 1.



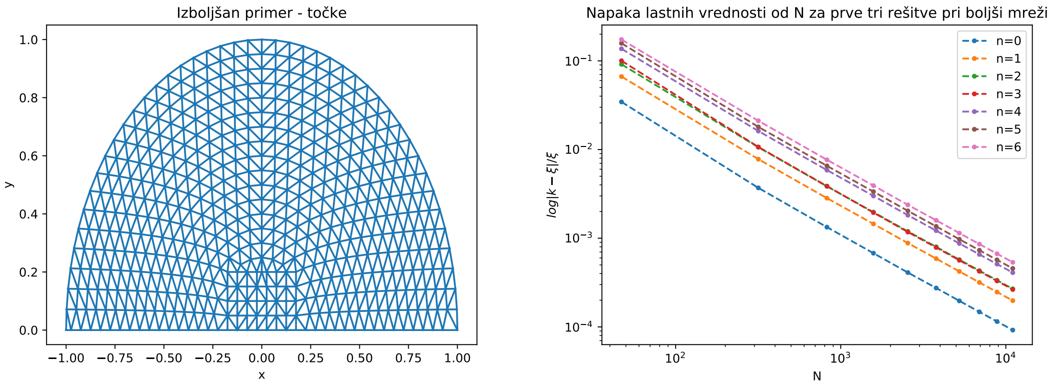
Slika 1: *Slike prikazujejo rešitve, za različna lastna nihanja v prvem primeru.*

A tega smo že od prejšnjič čisto preveč navajeni, zato se raje lotimo ukvarjanja s samo metodo. Zanima nas kako natančne lastne vrednosti smo dobili. Vemo namreč kakšna je analitična rešitev - ničle besselovih funkcij. Na tak način dobimo relativno napako v odvisnosti od števila točk za prvo mrežo, kot je prikazana na sliki 2. Vidimo, da so napake precej velike, sam izgled mreže pa nam daje slutiti čemu je tako. Sama mreža ima namreč ves čas v okolici ničle zelo velike trikotnike, in z zmanjševanjem ostalih trikotnikov, ti ostajajo šrecej veliki, zgolj vse bolj oski.



Slika 2: *Leva slika prikazuje točke, desna pa relativno napako od števila tokčk za različne lastne vrednosti.*

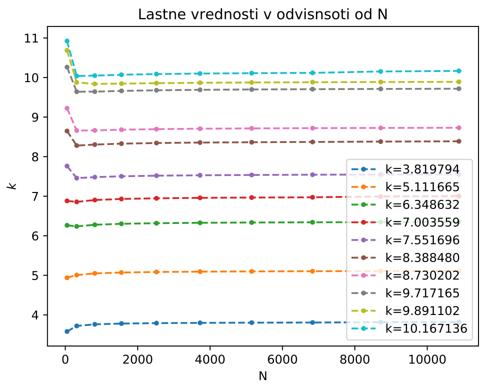
Mreža je zelo lepa, a zgolj daleč od izhodišča. Tam pri izhodišču, bi gostota divergirala in nasploh sem imel same probleme, zato sem tisti odsek kar izbrisal. To s eni poznalo pri malem številu točk, in celo pri velikem sem dobil precej natančne rešitve, kar dokazuje kako zelo dobra je ta metoda. Ne glede na vse, problem je očiten, zato sem mrežo popravil s tem, da sem v okolici izhodiča izrezal kvadrat in notri vstavil kvadratno mrežo. Na tak način sem dobil izredno lepo mrežo, ki je napako precej zmanjšala. Žal mi ni uspelo poiskati rešitev za še večje število N, ker računalnik ni zmogel. Rezultate imamo prikazane na slikah 3.



Slika 3: *Leva slika prikazuje točke, desna pa relativno napako od števila tokčk za različne lastne vrednosti.*

Na zgornjih slikah vidimo, kako močno se oblika mreže pozna. Če želimo naisati mrežo, pri kateri bomo kasneje povečevali natančnost z zviševanjem števila točk, potem moramo biti precej previdni in jo napisati tako, da bo zdržala spreminjanje števila točk. Relativna napaka je zdaj že kar precej majhna in s tem smo zadovoljni.

Zdaj si lahko pogldamo še ostale lastne vrednosti v odvisnosti od števila točk N. To vidimo na sliki 4. Kot sm ože pokazali so to enostavno ničle Besselovih funkcij.



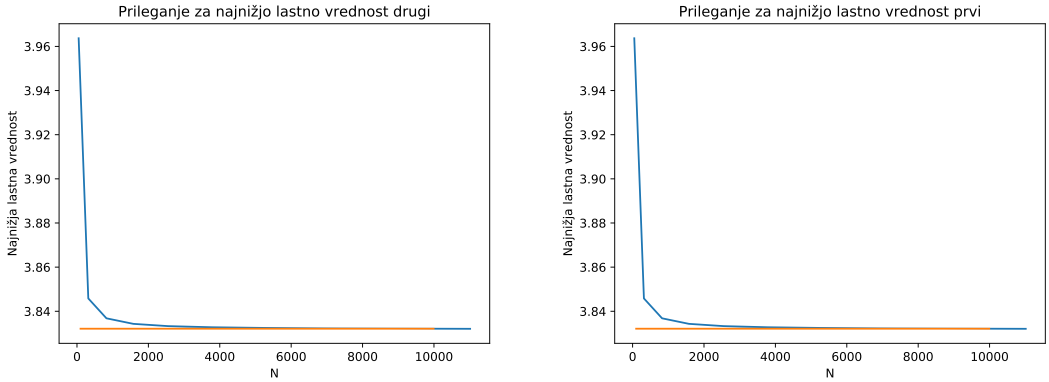
Slika 4: *Na sliki je prikazanih prvih 10 izračunanih lastnih vrednosti.*

Na predavanjih smo izvedeli še za približek s katerim lahko ekstrapoliramo našo rešitev in s tem najdemo bolj natančno lastno vrednost. Žal meni to ni uspelo. Očitno je moja lastna vrednost že dovolj natančna, da ni rezultata ni uspelo izboljšati. Uporabil sem nastavka

$$x = x_\infty(1 - N_{triang}^{-\alpha}) \quad in \quad x = x_\infty(1 - e^{-\alpha N_{triang}}), \tag{8}$$

ki sem ju označil kot prvega in drugega. Rezultati so čisto brezvezni in so prikazani na slikah 5.

Vidimo, da nam ti funkciji nista prav nič pomagali priti do boljšega približka za lastne vrednosti. Označil bi ju torej za neuporabni, vsaj v mojem primeru.



Slika 5: *Sliki prikazujeta prilagajanje danih približkov, podatkom.*

II. Galerkinovski nastavek

Poglejmo si sedaj postopek, ki ga ne razumem. Vseeno bom opisal postopek, kot nam ga je opisal profesor. Ponovil sem ga in izkazal se je za izredno uspešnega. Zgolj zapisla sem dve matriki, rešil generaliziran porblem in dobil lastne vrednosti, pri neverjetni natančnosti. Matriki sem definiral kot

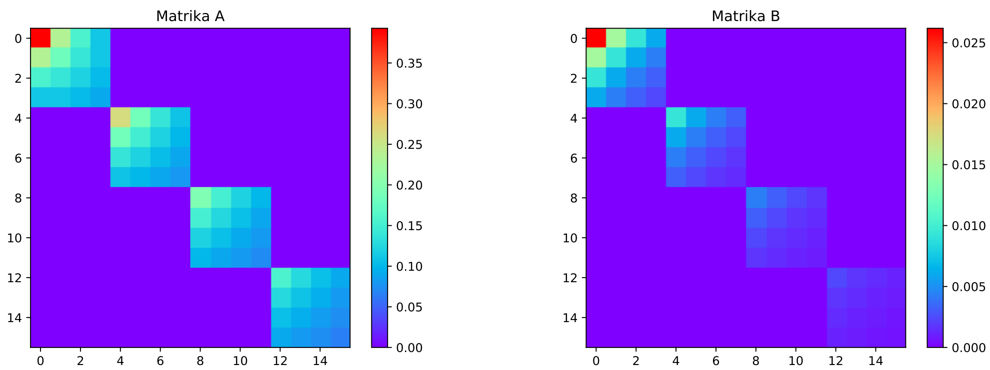
$$A_{ij} = \langle \nabla\phi_{mk}, \nabla\phi_{ml} \rangle = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{kl}{2m+k+l+2} - \frac{2kl+k+l}{2m+k+l+3} + \frac{(k+1)(l+1)}{2m+k+l+4}\right\} \tag{9}$$

in

$$B_{ij} = \langle \phi_{mk}, \phi_{ml} \rangle = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2m+k+l+2} - \frac{2}{2m+k+l+3} + \frac{1}{2m+k+l+4}\right\}. \tag{10}$$

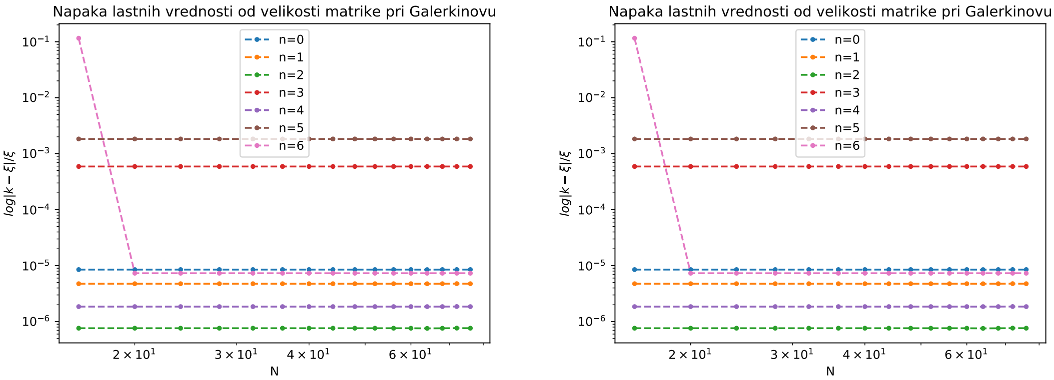
Pri čemer je potrebno stvari dodatno pojasniti. Ti matriki sta bločni matriki in to nam predstavljata inteksa m. m pomeni v katerem bloku smo. mk ali ml ne pomeni množenja ampak nam samo sibolizira, da nam to predstavlja bločni element matirke v bloku m. Blok m ima potem svoje dimenzije, po katerih tečeta preostala indeksa. V enačbo vstavljamo m na intervlu $[1, n]$ in k, l na intervalu $[0, n-1]$.

Po tem postopku dobimo dve matriki, prikazani na slikah 6.



Slika 6: *Sliki prikazujeta matriki A in B dimenzije 16 in dimenzije blokov 4.*

Ker postopka sploh en razumemo in nisem našel razlage postopka v knjigah se v to niti ni treba pretirano poglabljati. Najbolje je kar poiskati same rešitve s pomočjo redkih matrik,



Slika 7: *Sliki prikazujeta relativne napake lastnih vrednosti v odvisnosti od dimenzije matrike pri konstantni dimenziji blokov (levo) in v odvisnosti od dimenzije blokov pri konstantni dimenziji matrike.*

lahok tudi brez in dobimo grafa prikazana na slikah 7. Tam lahko lepo vidimo, da je ta metoda izredno uspešna in neodvisna od dimenzije blokv ali dimenzije matrike. Poskrbeti moramo da je dovolj velika, a ko enkrat dosežemo stabilno področje, je metoda izredno natančna. Tako natančnos bi s prejšnjo metodo dosegli šele pri precej večjem številu točk ali pa pri še lepši mreži.