
1. naloga

Navadne diferencialne enačbe: začetni problem

MIHA SRDINŠEK

I. GIBANJE PLANETA NA TIRU OKROG SONCA

Reševali bomo problem dveh teles, od katerih je eno dosti večje od drugega. Težje telo (sonce) miruje. Če zahtevamo $GM = 1$, dobimo tri diferencialne enačbe gibanja

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{m}{r^3}\vec{r}, \quad (1)$$

kjer \vec{r} predstavlja vektor razdalje med telesoma in m maso planeta. Rešitve teh enačb, elipse v ravnini, poznamo. Lahko izračunamo njihovo ekscentričnost, velikost velike polosi, dolžino obhodnega časa itd. Ne znamo pa analitično rešiti in zapisati dinamike planeta po tej elipsi, zato se lotimo simulacije te dinamike.

Da bo vso računanje poenostavljeno, si vse primere poenostavimo, tako da začetni položaj planeta postavimo v točko $y = 0$ in $x = 1$ ter začetno hitrost $v_x = 0$. Čisto vse rešitve lahko namreč tako zavrtimo, in tako redefiniramo skalo merjenja razdalj, da bo planet v tej točki. S tako notacijo lahko torej dosti lažje zajemamo lastnosti tega sistema. Opazimo lahko recimo, da na podlagi poznanih analitičnih rešitev sledi ta razčlenitev možnih trajektorij planeta okoli sonca:

$ v_0 = 1$	- krog
$ v_0 < 1$	- elipsa
$1 < v_0 < \sqrt{2}$	- elipsa
$ v_0 = \sqrt{2}$	- parabola
$ v_0 > \sqrt{2}$	- hiperbola

Kasneje bomo z numeričnimi metodami simulirali take trajektorije in jih prikazali na sliki. Te enačbe lahko torej poenostavimo. Najprej upoštevamo, da se rešitev nahaja na ravnini, zato z komponento hitrost, pospeška in razdalje odstranimo. Dobimo sitem vseh enačb, drugega reda, ki pa ga lahko zaradi linearnosti lahko razbijemo na sistem širih enačb prvega reda.

$$m\dot{\vec{v}} = -\nabla V(\vec{r}) \quad \text{in} \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad (2)$$

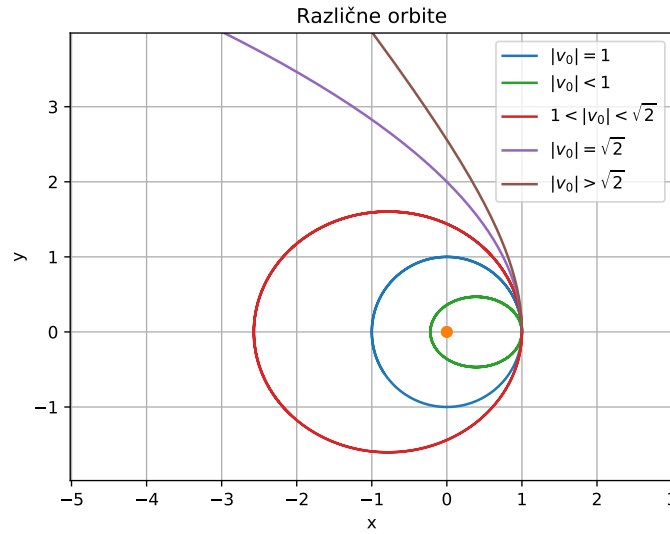
Ko tak sistem rešimo izvemo, da se v našem sistemu ohranjajo štiri količine: energija, z komponenta vrtilne količine in x in y komponenti Runge-Lenzovega vektorja. Zapišemo lahko:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{r} = -\frac{1}{2a}, \quad (3a)$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{p} \text{ in} \quad (3b)$$

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{\Gamma} - \frac{m}{r} \vec{r}, \quad (3c)$$

kjer a predstavlja veliko polos elipse in kjer so neničelne le komponente, ki sem jih prej omenil. Numerično lahko ta problem rešimo na več načinov. Enemu izmed njih pravimo modificirani



Slika 1: Na sliki so prikazane različne možne oblike orbit. Oranžna pika je sonce.

Eulerjev način, kjer zapišemo sistem enačb

$$\vec{q}' = \vec{q} + \vec{p} h, \quad (4a)$$

$$\vec{p}' = \vec{p} - h \nabla V(q). \quad (4b)$$

Upoštevali smo namreč to, da je sila sorazmerna z gradientom potenciala. Izkazalo se bo, da je nekoliko boljši način reševanja takomenovana metoda "Lepfrog", ki jo zapišemo kot

$$\vec{q}_{1/2} = \vec{q} + \frac{h}{2} \vec{p}, \quad (5a)$$

$$\vec{p}' = \vec{p} - h \nabla V(q_{1/2}), \quad (5b)$$

$$\vec{q}' = \vec{q}_{1/2} + \frac{h}{2} \vec{p}'. \quad (5c)$$

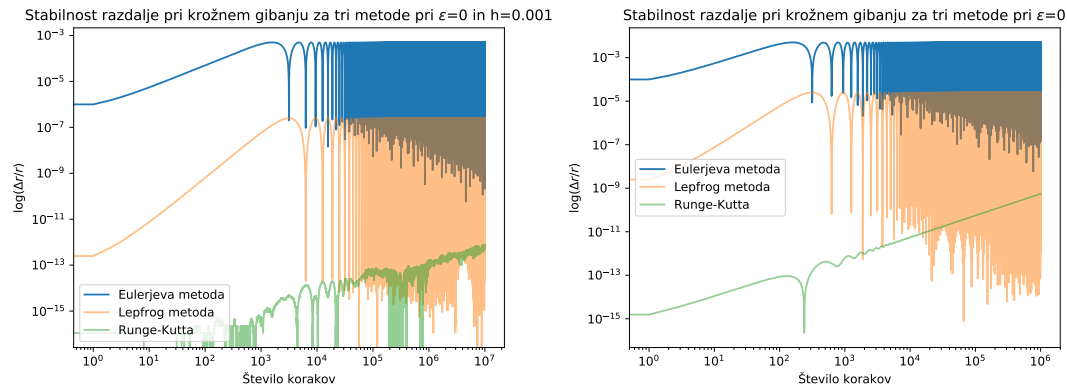
V nadaljevanju bom vseskozi uporabljal še metodo "Runge-Kutta" četrtega reda, ki ima malček bolj zapleteno definicijo in je zato ne bom tu navajal, lahko pa jo najdemo na spletu in v literaturi.

V nadaljevanju bomo ves čas potrebovali gradient potenciala, zato ga kar v splošnem izračunajmo kot

$$V = -\frac{m}{r^{\epsilon+1}} \longrightarrow \nabla V = (1 + \epsilon) \frac{m}{(x^2 + y^2)^{\frac{3+\epsilon}{2}}} (x, y), \quad (6)$$

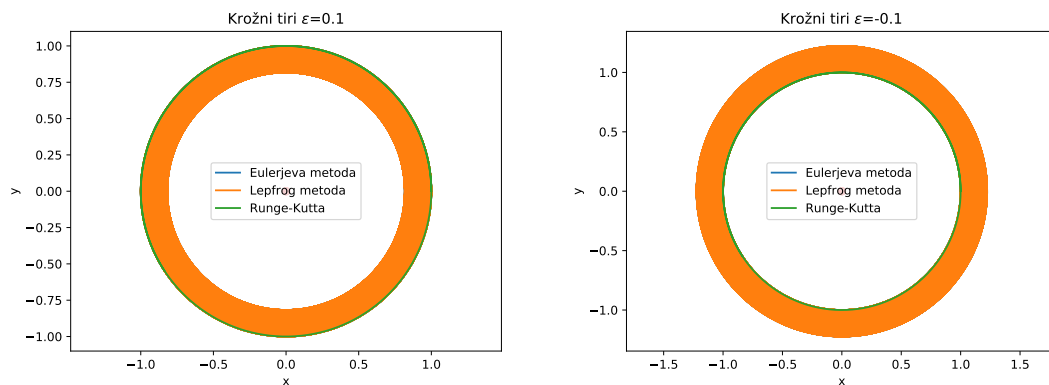
z ϵ pa smo označili majhno pertrubacijo v potencialu.

Poglejmo si torej lastnosti krožne orbite. Pri taki orbiti vemo, da mora imeti radij dolžine 1, zato opazujemo, kako dobro zadanemo analitični rezultat s tremi različnimi numeričnimi metodami.



Slika 2: Na slikah so prikazana relativna odstopanja od prave razdalje v odvisnosti od časa. Levo pri koraku dolžine $h = 0,001$ in desno pri koraku dolžine $h = 0,01$.

Očitno je na kratek rok metoda "Runge-Kutta" zelo dobra, a nas na daljši tok bolj prepričata ostali metodi s svojo stabilnostjo. Vse to smo riali pri lepem, nepertrubiranem potencialu. Če predpostavimo, da se pertrubacija pozna le v potenci potenciala, potem dobimo takšne orbite ob pertrubaciji, kot so prikazane na sliki 3.

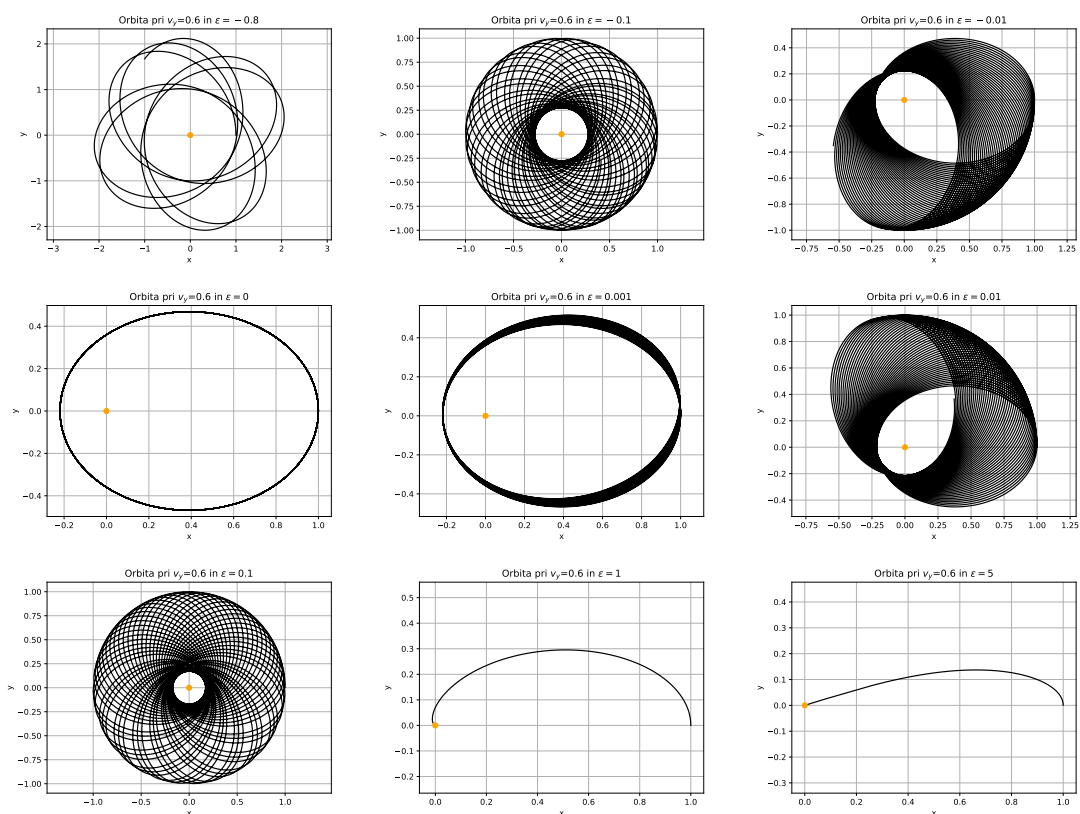


Slika 3: Na slikah so prikazane orbite po zelo dolgem času za potencial s potenco $(1+\epsilon)$.

Na zgornjih slikah vidimo, da kljub precejšnji pertrubaciji, orbite še vedno ostanejo omejene. Zvezno skačejo med zgornjo in spodnjo mejo, a so omejene, zato bo planet kljub kar precejšnji pertrubaciji, ostal na psevdo krožni tirnici, kar je bolj eksperimentalni dokaz sicer znanega teoretičnega dokaza.

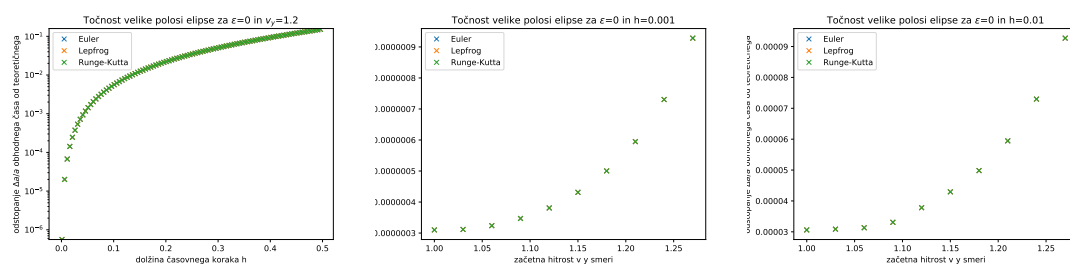
Tudi za primer elips lahko ogledamo kaj naredijo majhne in tudi velike pertrubacije. To si lahko pogledamo na slikah 4. Pertrubacija orbite zamakne, ampak še vedno ostane ujeta. Šele ko ϵ postane večji od 1, nimamo več orbite, ampak planet zdrsne v sonce.

Naslednja lastnost rešitve je bolj dinamična, in sicer točnost obhodnega časa. Poznamo namreč analitično rešitev in zato lahko ugotovimo, kako dobro smo z našo simulacijo zadeli to vrednost. Po zgoraj omenjenih enačbah najprej izrazimo veliko polos in izračunano veliko polos primerjamo z izmerjenimi velikimi polosmi. Izmerimo jih tako, da pogledamo kje naša



Slika 4: Na slikah so prikazane orbite za potencial s potenco $(1+\epsilon)$.

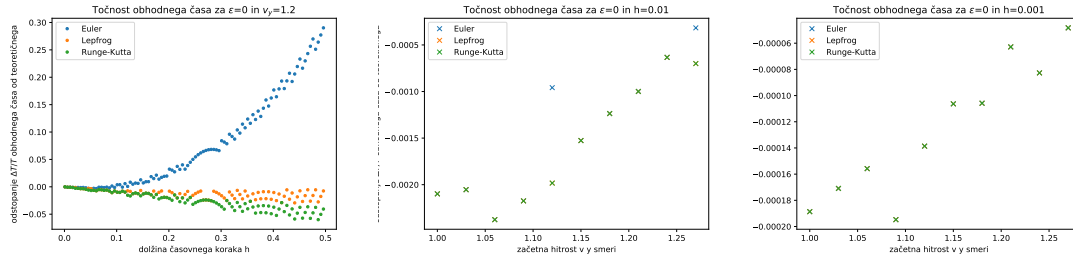
elipsa preseka x os. Na tak način dobimo primerjave, kot so prikazane na sliki 5. Vidimo, da s povečevanjem dolžine koraka relativna napaka narašča, prav tako napako poveča tudi zviševanje začetne hitrosti. Pri tem nisem izračunal presečišča, ampak sem le upošteval najbližjo točko presečišču, upoštevanje česar, bi morda lahko spremenilo rezultate.



Slika 5: Na slikah je prikazano koliko odstopa izmerjena polos od napovedane.

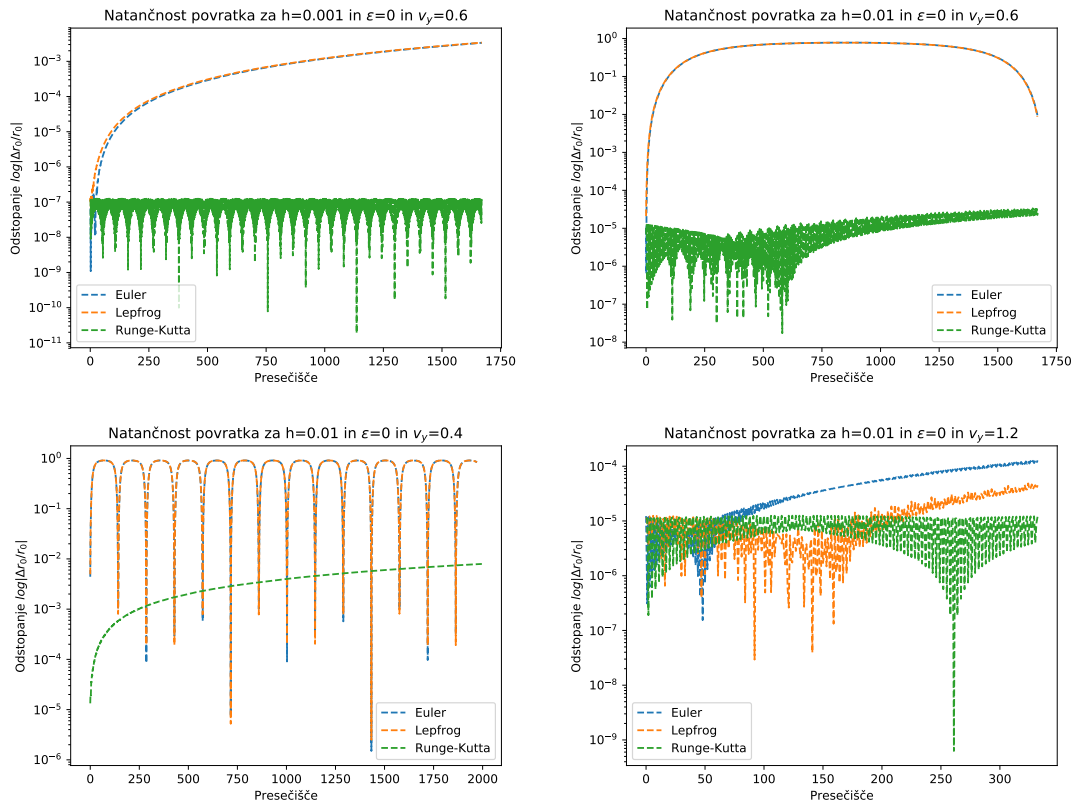
Sedaj ko vidimo kako zelo zanemarljive so te napake, lahko obhodne čase primerjamo s teoretičnimi in zanemarimo tisti del spremembe obhodnega časa, ki je nastal zaradi spremembe dolžine velike polosi elipse. Tako dobimo sledeče rezultate prikazane na slikah 6, kjer nas močno razočara Eulerjeva modificirana metoda, hkrati pa vidimo, da nam višja hitrost natančnost obhodnega časa izboljša, za razliko od velike polosi, za katero smo videli, da jo poslabša. Po drugi strani pa vidimo, da so si metode zelo podobne. Pri tem bi rad opozoril, da sem pri vsem tem gledal zgolj prvi obrat, in nisem povprečeval skozi večje število obhodov. Če bi upošteval tudi to, bi verjetno dobili rezultate, ki bi razlikovali med metodami, a mislim da nas to tu sploh

ne zanima. Tako sem namreč naredil nameroma - Če bi želel opazovati kako se obhodni čas spreminja s številom obhoda, bi opazoval to, neumno povprečevanje, pa je čisto nesmiselno, ker bi s tem zraven pobral še nek trend, ki ga ne razumem. Smiselno bi bilo torej opazovati razne obhodne čase posebjaj, povprečevanje pa v takem dinamičnem sistemu ni nujno smiselno.



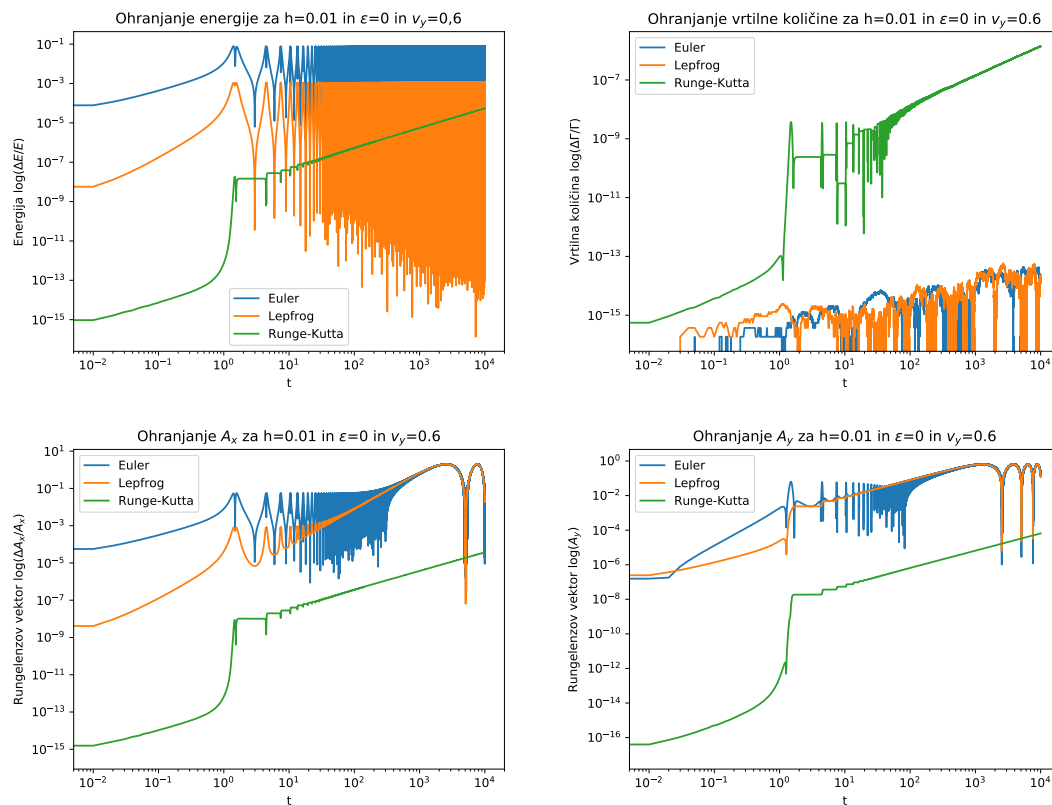
Slika 6: Na slikah je prikazano koliko odstopa izmerjeni obhodni čas od teoretičnega.

Tako kot smo prej opazovali stabilnost orbit tako, da smo v vsaki točki opazovali kolikšen je radij, tako bi to radi opazovali tudi za elipse. Ker za kaj takšnega ne poznamo dobre analitične rešitve, tako kot recimo za parabolične orbite, si lahko pomagamo zgolj tako, da opazujemo kje presekamo y os. Morali bi namreč dobiti sklenjeno orbito, karadi računskih napak pa se to ne zgodi, zato opazujemo odstopanje od prave vrednosti 1, ki jo poznamo iz analitične rešitve. Analitična rešitev je namreč geometrijski lik, dinamike po tem liku pa ne poznamo. Rezultati so prikazani na slikah 7, kjer se izkaže da je daleč najboljša metoda "Runge-Kutta", ki ima ekstremno natančnost in ne kaže težnje po povečevanju napake s časom, kvečjemu obratno.



Slika 7: Na slikah je prikazana natančnost povratka v različnih primerih.

V primerih ko simuliramo za manjše hitrosti se napaka povečuje, a temu se lahko vedno ognemo, tako da izhodišče postavimo na drugi strani, kot smo to razglabljali že na začetku. Za nas je torej edina relevantna rešitev spodaj desno. Počasi torej postaja jasno, zakaj sem že od začetke dajal prednost metodi "Runge-Kutta" in z njo narisal vse orbite, saj je za to enostavno najboljša. Še dodatni plus bo pogled na ohranjene količine prikazane na sliki 8, kjer vidimo odvisnost količin od časa, po zelo dolgem času. Vse metode na kratek čas ohranjajo energijo v povprečju, vendar le metoda "Runge-Kutta" ohranja energijo vas čas. Pri vrtilni količini metoda "Runge-Kutta" močno zaostaja, med tem ko pri Runge-lenzovem vektorju spet izpade najboljša. Žal opazimo hibo, da po dolgih časih metoda "Runge-Kutta" ne ohranja več dobro energije, tam jo moramo nadomestiti s preostalima metodama.



Slika 8: Na slikah so prikazane ohranjane količine v odvisnosti od časa pri enakih začetnih pogojih in enaki dolžini koraka.

Po vsem skupaj torej lahko izločimo Eulerjevo metodo kot nižjerazredno, med tem ko metodi "Lepfrog" in "Runge-Kutta" med seboj tekmujeta. Na hitro lahko naštejemo prednosti in slabosti teh dveh metod:

-Lepfrog: PLUS: Stabilna razdalja pri krožnem gibanju, ki zelo malo odstopa; manjša občutljivost na povečanje dolžine koraka pri točnosti obhodnega časa; zelo dobro ohranja vrtilno količino.

MINUS: Zelo slaba natančnost povratka pri orbitah z majhno hitrostjo

-Runge-Kutta: PLUS: Stabilna in zelo dobra natančnost povratka pri eliptični orbiti; na kratek čas zelo dobro ohranja količine

MINUS: Ne ohranja vrtilne količine

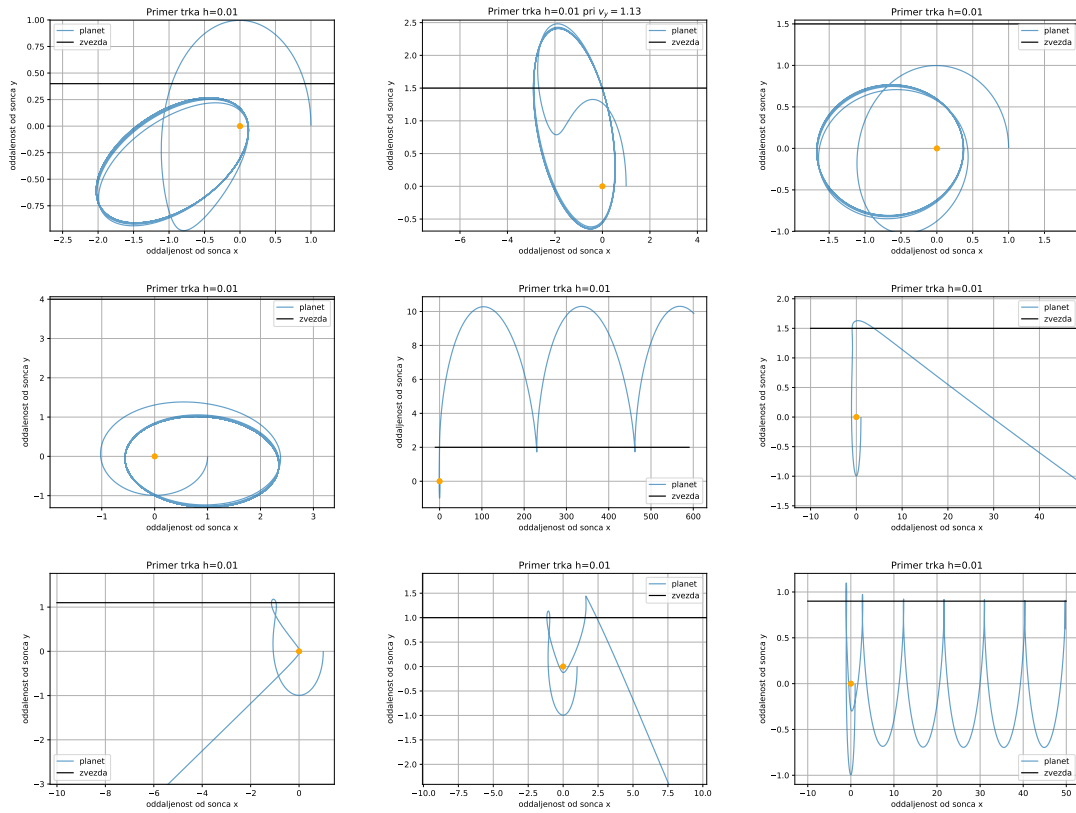
II. TRK ZVEZDE IN PLANETNEGA SISTEMA

Planetni sistem smo v prejšnjem poglavju natančno spoznali, zato s iželimo s tem sistemom izvesti kakšne eksperimente. Ena od možnosti je, da simuliramo dinamiko, če proti takemu sistemu pošljemo neko zvezdo, ki je enako težka kot sonce in s tem soncem ne interagira. To je seveda povsem za lase privlečen problem, ki se v naravi ne mora zgoditi, je pa zanimivo, saj gre za to da bomo z neko metodo opravili delo na sončnem sistemu in opazovali kakšno je to delo. Za realno predstavo si zato raje mislimo da naredimo umetno zvezdo in jo vozimo po ravni črti mimo sonca, ter opazujemo kakšno delo opravimo na sistemu, če to naredimo. Pri tem sonce miruje, ker smo zanemarili interakcijo in pač privzamemo, da ga planet ne more premakniti. Silo bi torej za planet (ker samo planet v resnici opazujemo) zapisali kot

$$\nabla V = -\frac{m}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y) - \frac{m}{((x - (v^z t + x_0^z))^2 + (y - y_0^z)^2)^{3/2}}(x - (v^z t + x_0^z), y - y_0^z), \quad (7)$$

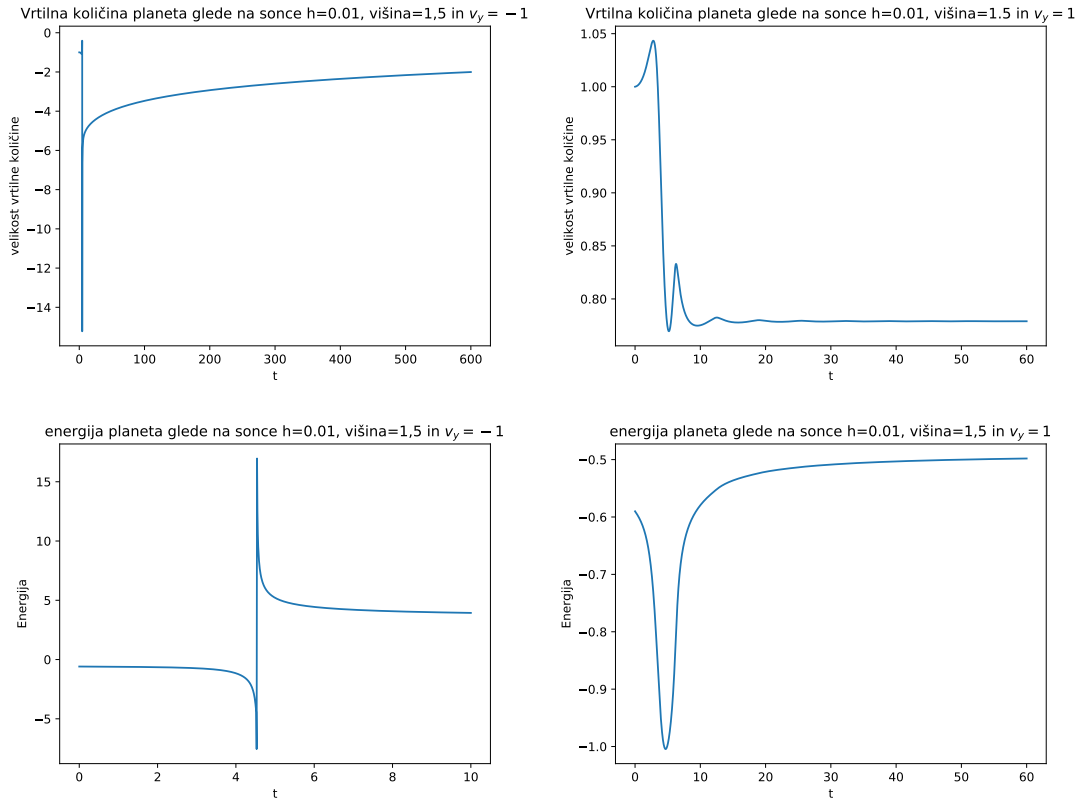
in pi tem označili z indeksom z vse količine povezane z zvezdo. Določiti moramo le začetno višino zvezde in začetno oddaljenost (x_0^z, y_0^z) , ter začetno hitrost zvezde v x smeri.

Ko imamo potencial z lahkoto zapišemo sistem enačb in rešimo problem za razne začetne pogoje. Pogledamo si na slikah 9 kako izgledajo trajektorije po dolgem času, če postavimo planet na različne začetne točke in pot zvezde na različne premice. Včasih zvezda zgolj spremeni krog v elipso, včasih planet iztrga iz objema sonca in ga zabriše v vesolje, spet drugič pa ga priklene nase in planet potem kroži okoli nje. Zanimivi so tudi primeri, ko zvezda zapelje kar v sredino planetarnega sistema, kjer planet opiše zelo nenavadne trajektorije.



Slika 9: Na slikah so prikazane trajektorije planeta. Zgoraj če začne v nasprotni smeri urinega kazalca in spodaj, če začne v smeri urinega kazalca. Črna črta predstavlja trajektorijo zvezde.

Kot sem že omenil, smo v tem primeru zgolj na bolj realističen način opravili delo na planetarnem sistemu in se zato energija in vrtilna količina ne ohranjata. Kako recimo s tako zvezdo spremenimo vrtilno količino vidimo na slikah 10. V teh dveh primerih je zvezda planetu vedno pobrala vrtilno količino, v točki prehoda pa je čisto zmedla sistem.



Slika 10: Na slikah so prikazane vrtilne količine planeta okoli sonca za dva različna primera.

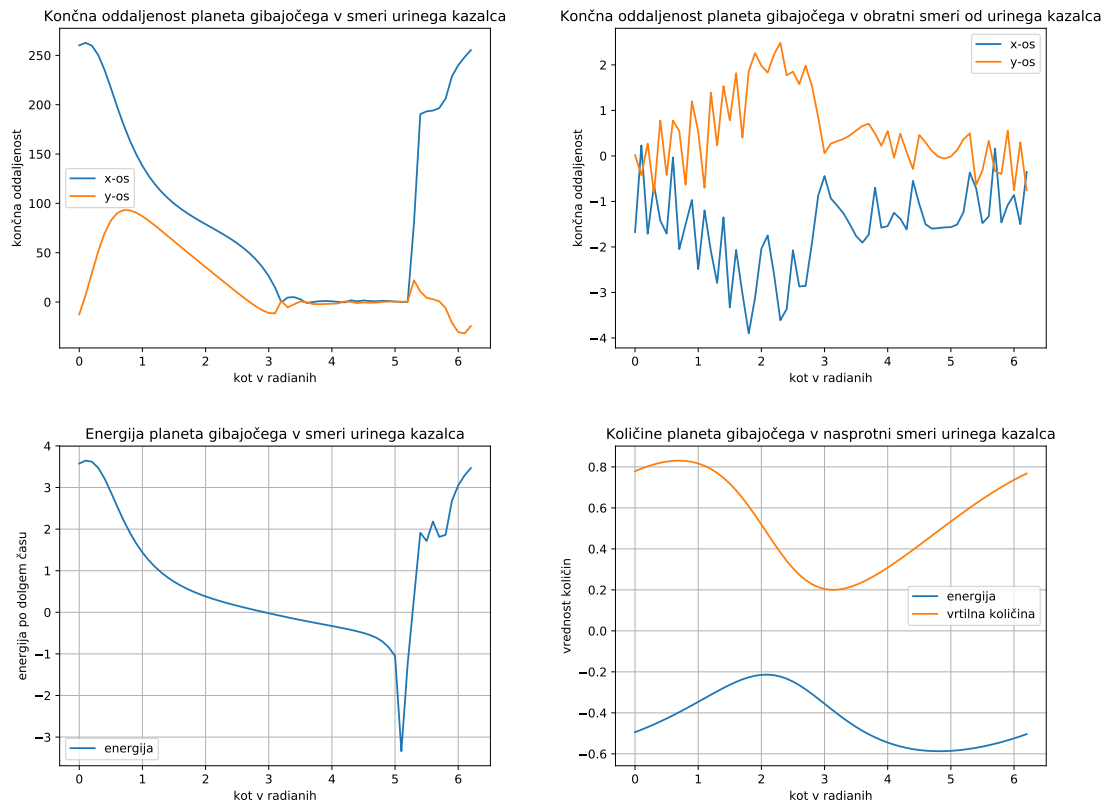
Isto vidimo tudi pri energiji. V prvem in drugem primeru zvezda energijo sistema poveča, med tem ko v vmesnem stanju ustvari čisto zmedo. Tu opazimo še eno stvar, ki nam bo kasneje koristila. Vidimo, da je energija v drugem primeru ves čas negativna, kar pomeni da je planet ujet in kroži okoli sonca, kar lahko vidimo tudi na trajektorijah, ki sem jih narisal zgoraj. Med tem ko na drugem grafu vidimo, da je planet očitno pobegnil, saj ima na koncu pozitivno energijo. Ko to narišemo, vidimo da je res (slika 9 na sredi desno).

Iz razmisleka dobimo torej izvrstno idejo kako opazovati lastnosti našega sistema bolj sistematično. Lahko opazujemo zgolj lastnosti ostalih parametrov, kot so energija, in na podlagi njih ugotavljamo ali je planet pobegnil, ali je ujet. Še več - lahko ugotavljamo, če se je ujet v potencial zvezde, tako da opazujemo energijo planeta hkrati z radijem po dolgem času. Če je radij zelo velik, energija planeta pa nizka, lahko uganemo, da je planet ukradla zvezda.

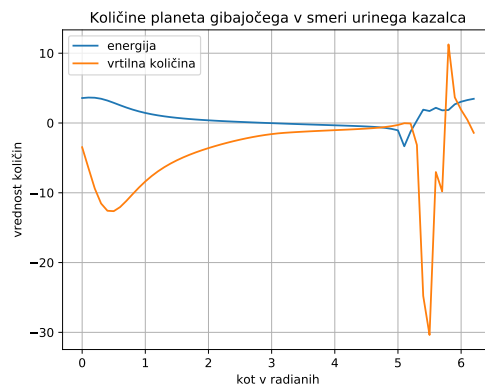
Izvrsten način kako bi opazovali lastnosti tega našega delovanja z veliko umetno zvezdo je, da opazujemo odvisnost energije po dolgem času in oddaljenosti po dolgem času od tega kje se planet nahaja, ko je zvezda 10 dolžinskih enost daleč. Izbrali bi lahko tudi drugo oddaljenost. V takem primeru lahko vse zapišemo v odvisnosti od koda z x osjo pod katerim se nahaja planet na začetku. In tako kot smo to storili vselej doslej, opazujemo le primerje, ko se planet na začetku giblje krožno.

Rezultate takega risanja lahko vidimo na slikah 11. Izkaže se točno tako kot smo predvidevali, a nas vseeno preseneti ta izjemna natančnost. Točno povsod kjer je pri levem primeru

energija negativna je radij zelo majhen po dolgem času in čim energija divergira, divergira tudi razdalja. Ne le to, te grafi nam povejo še veliko več. Povedo nam kako hitro se planet giblje pri določeni fazi in tudi kam gre pri določeni fazi, saj opazujemo tako x kot y komponento. Vidimo recimo, da planet skoraj vedno zleti navzgor in hkrati desno, ker sta tako x kot y komponenta večino časa pozitivna. Zgodi se tudi primer ko planet zleti desno navzdol, nikoli pa ne gre levo. Med tem ko pa desni primer kaže, da pri gibanju planeta v obratni smeri urinega kazalca sistem ostane le malo zmoten in planet še vedno kroži okoli sonca. Energija je negativna, radiji majhni in vrtilna količina ves čas pozitivna, kar pomeni, da se tudi smer vrtenja planet ne spremeni.



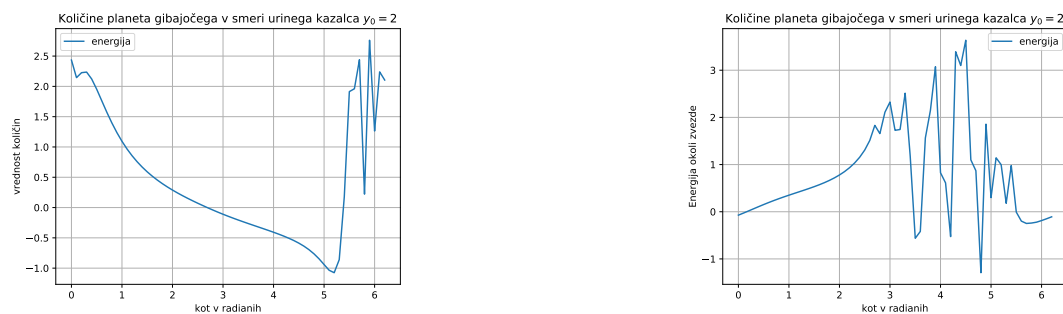
Slika 11: Na slikah so prikazane razdalje, vrtilna količina in energija v odvisnosti od faze.



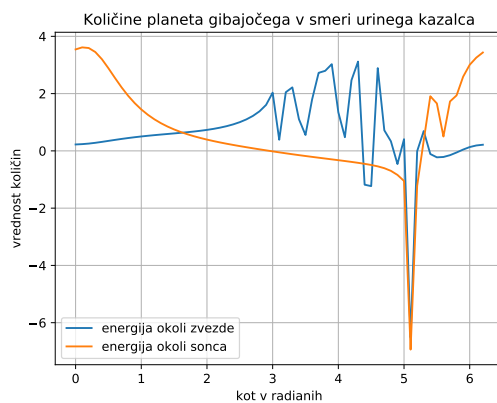
Slika 12: Slika prikazuje vrtilno količino in energijo v odvisnosti od faze.

Ta uporabnost desnega grafa spodaj nas navda z zaupanjem, da je tudi vrtilna količina zanimiv podatek, ki se ga splača opazovati. Zato si še enkrat pogledjmo primer ko se gibljemo v smeri urinega kazalca iz strani vrtilne količine. Dobimo sliko 12, kjer opazimo, da ravno v tistem skoku, kjer planet pobegne soncu v smer navzdol, spremeni tudi smer vrtenja. To je čisto zanimiva opazka. Nismo pa uspeli opaziti da bi zvezda planet ukradla. Nikjer se sploh ne zgodi, da bi planet imel negativno energijo in hkrati veliko razdaljo. Zaradi tega bi si upal sklepati, da pri taki postavitvi poskusa planeta enostavno ne ujamemo.

Pa preverimo to hipotezo. Preverimo jo lahko tako, da izrišemo tako kotno odvisnost za primer, ko vemo, da je bil planet ukraden. Takšen primer smo že izrisali za primer gibanja v smeri urinega kazalca, če gre zvezda mimo pri oddaljenosti dveh dolžinskih enot. Pogledjmo si torej kako bi izgledala odvisnost od faze v tem primeru. Skrbi nas namreč lahko, da smo opazovali premalo časa. Izkaže se da to ni bil problem. Pogledjmo si sliko 13. Sliki prikazujeta odvisnost energije od faze, če je planet na začetku oddaljen dve enoti dolžine od sonca. V tem primeru dobimo levo energijo takšno kot smo je vajeni. Ta nam enostavno ne napove, da bi zvezda ukradla planet zaradi razlogov, ki smo jih že opisali. Kadar zvezda planet ukrade namreč še vedno govorimo o pobeglem planetu v gledišču sonca, saj se moramo spomniti, da ta zvezda ni prava zvezda, mapak neka umetna zvezda, ki jo mi tako krmilimo. Spomnimo se zato, da lahko narišemo odvisnost energije okoli zvezde namesto okoli sonca in stem opazujemo ravno problem, ki nas zanima. To dosežemo tako, da le spremenimo člen s kinetično energijo. V takem primeru dobimo desno sliko, na kateri napovemo, da bo zvezda planet pri fazi 0 ukradla. To bomo sedaj naredili še za prejšnji primer in tako kot tu vzeli malo daljši čas, da bomo lahko prepričani. Vzeli bomo torej čas 600.

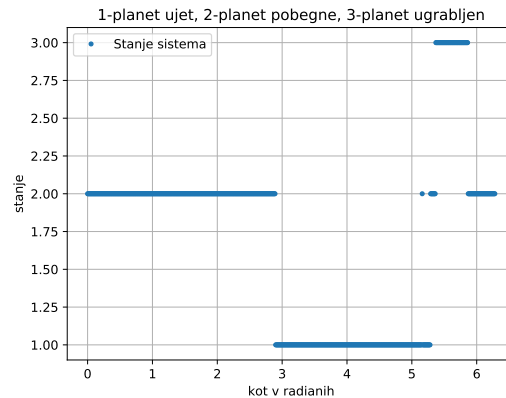


Slika 13: Slika prikazuje energijo v odvisnosti od faze.



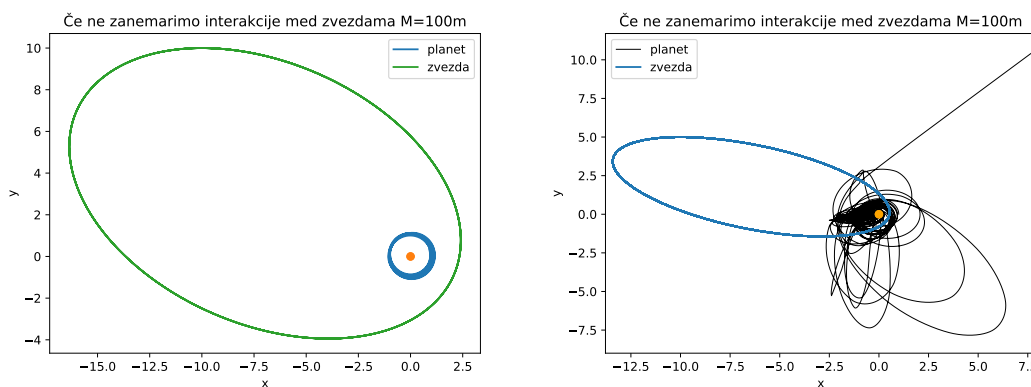
Slika 14: Slika prikazuje obe energiji. S tem lahko vidimo tudi, kdaj je planet ukradla zvezda.

Na tak način dobimo sliko 14, kjer napovemo kdaj bo zvezda ukradla planet soncu. Vidimo, da bi moralo do tega priti pri energijah **od 5,39 do 5,84**. Če to narišemo, se naša napoved potrdi, zato smo izredno veseli, da smo se dokopali do tega izjemnega orodja. Zdaj znamo iz nekih fizikalnih količin razbrati lastnosti sistema po tem ko na njem delujemo z neko zvezdo. Narisali bi lahko kar sliko kot je slika 15, a moramo pri tem še vedno paziti. Na grobo pa mu lahko kar dobro zaupamo.



Slika 15: Slika prikazuje v katerem stanju je sistem an koncu. Kakšen je končni izid trka v odvisnosti od faze.

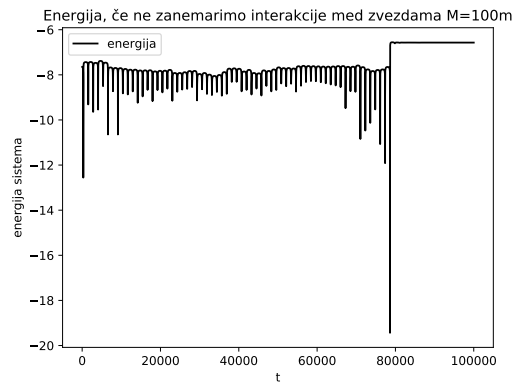
Sedaj smo čisto vzhičeni in si v zanosu pogledamo še bolj naraven primer, kjer ne zanemarimo interakcije med zvezdama, zanemarimo le vpliv planeta na zvezdo. V takem primeru dobimo zanimive orbite prikazane na slikah, če privzamemo, da je masa zvezd zgolj 100-kratnik mase planeta. Vidimo, da začne zvezda po eliptični orbiti krožiti okoli sonca, medtem ko se planetu ali nič ne pozna, ali pa mu povsem podivja orbito in ga na koncu zabriže ven. Z metodami, ki smo jih uporabili pri prejšnjem primeru, bi lahko tudi tokrat bolj analitično opazovali problem in potem narisali tiste bolj eksotične možnosti.



Slika 16: Slika prikazuje kako izgleda trk med zvezdo in planetarnim sistemom. POstavljeni smo v sistem, kjer sonce miruje.

Če v zgornjem primeru desno opazujemo energijo v odvisnosti od časa, opazimo skok v energiji, tam kjer planet pobegne. Takšen primer vidimo na sliki 17. Tam smo risali celotno energijo sistema glede na sonce. Vidimo da je sistem zelo nestabilen in zato očitno energija pleše, med tem ko energija pri trajektorijah ki so zgolj malo zmotene ostaja konstantna. S tem smo torej rešili problem z umetno zgrajeno zvezdo in pokazali, da s pravo zvezdo dobimo ohranitev energije celega sistema, če izberemo dovolj lep sistem, da se trajektorija planeta ne

pokvari tako zelo, da pride do hudih napak, kot to vidimo na sliki 17. Napake moramo verjetno pripisati integratorju, tu namreč nismo opravili nobenega dela kot tam, saj smo vse trajektorije pustili dinamiki, le sonce smo pustili pri miru. Morda smo delo opravili s tem.



Slika 17: Energija v primeru prave zvezde s 100-krat večjo maso od mase planeta v odvisnosti od časa, za primer ko zvezda močno zmoti trajektorijo planeta nato pa ga izvrže.