

---

## 9. naloga

### Metoda robnih elementov

---

MIHA SRDINŠEK

#### I. POLJE NABITEGA KOVINSKEGA TRAKU

Če poznamo Greenovo funkcijo za potencial, ki ga modeliramo, potem lahko zapišemo rešitev potencialne enačbe zgolj s tem, da poznamo vrednosti potenciala in odvoda potenciala na robu območja. To vidimo s pomočjo znane identitete

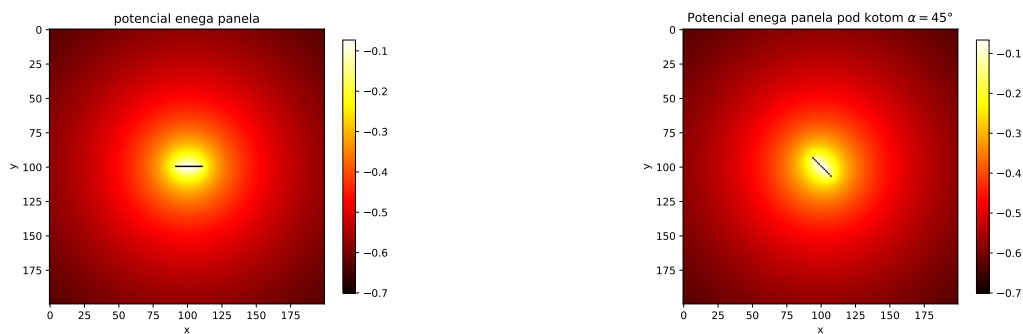
$$u(\vec{r}) = \int_S G(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial u(\vec{r}_0)}{\partial n} dS_0 - \int_S u(\vec{r}_0) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0)}{\partial n} dS_0. \quad (1)$$

Pri prvi nalogi bomo to upoštevali tako, da bomo trak razdelili na manjše intervale (panele) s konstantno gostoto naboja. Nato bomo upoštevali Greenovo funkcijo za vsak tak panel, ki se v 2D glasi

$$G(0, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \ln((x - \xi)^2 + y^2) d\xi. \quad (2)$$

Za kasneje bom izračunal ta integral, saj sem potem ves čas uporabljal zgolj analitično rešitev

$$G(0, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \left[ -l + y(\arctan(\frac{x_-}{y}) - \arctan(\frac{x_+}{y})) + \frac{x_-}{2} \ln(x_-^2 + y^2) - \frac{x_+}{2} \ln(x_+^2 + y^2) \right]. \quad (3)$$



Slika 1: Potencial enega panela v ravnini.

Če je  $l$  dolžina izbranega panela in pomeni  $x_- = x - l/2$  in  $x_+ = x + l/2$ . Nato le še shranimo podatke o teh panelih, koordinate oz. kontrolne točke na sredini panelov, in pa smerne vektorje panelov. Nato z neznanimi gostotami naboja v  $i$ -tih kontrolnih točkah zapišemo potencial v  $j$ -ti kontrolni točki kot vsoto prispevkov vseh ostalih panelov

$$u_j = G(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \sigma_i. \quad (4)$$

Sedaj zahtevamo da je po prevodniku potencial povsod v notranjosti kontanten in postavimo to konstanto na 1. Torej imamo sedaj enačbo oblike

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = G(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{pmatrix}, \quad (5)$$

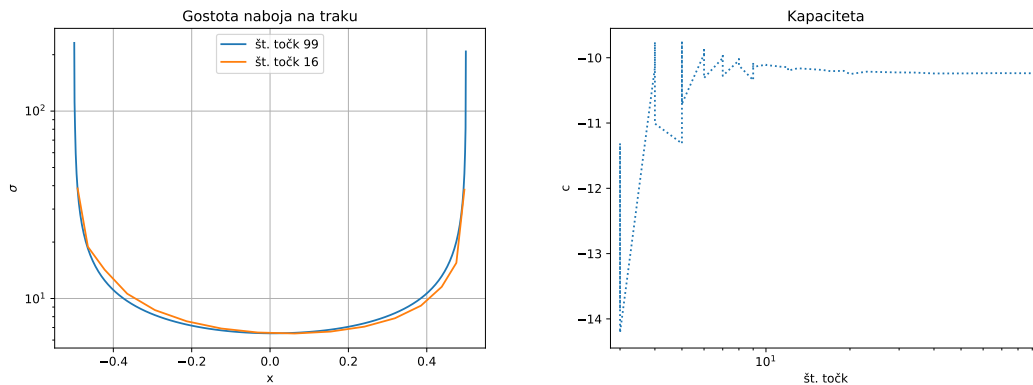
ki je precej majhna in jo lahko brez težav hitro rešimo z metodami iz knjižnic. Rešitev je vektor gostot naboja. Torej lahko sedaj zapišemo v vsaki točki prostora vrednost potenciala, saj poznamo gostote naboja vsakega panela. To naredimo enostavno tako, da zapišemo

$$u(x, y) = \sum_i \sigma_i G(x'_i, y'_i, x, y). \quad (6)$$

Kot sem omenil že na začetku je potrebno shraniti tudi orientacijo panelov. Če krivulja, ki smo jo razdelili ni ravna, potem vsak panel kaže v različno smer in na sliki 1 vidimo, da se potencial panela spremeni, če ga zarotiramo. Zato smo morali v vsem računanju do sedaj v resnici upoštevati še kot za katerega so zavrti paneli, in ne le to, tudi velikost panelov. Zato bom zapisal prejšnje enačbe še enkrat, tako da bodo zapisane za splošien primer

$$1 = u_j = G(\vec{r}_i, \vec{r}_j, l_i, \alpha_i) \sigma_i \quad \text{in} \quad u(x, y) = \sum_i \sigma_i G(x'_i, y'_i, l_i, \alpha_i, x, y). \quad (7)$$

Zdaj smo opremljeni z enačbami in teorijo, zato se lotimo računanja. Najprej si pogledamo kakšna je gostota naboja na takem ravnem traku. Pri tem sem imel najprej težave, ker sem točke določil enakomerno. Potem sem to opustil in jih zapisal z funkcijo sin, tako da so bile bolj gosto posejane na robu. Poleg tega sem najprej pozabil, da moram upoštevati, da se velikost panelov v tem primeru spreminja. Ko sem vse to končno upošteval, sem dobil lep rezultat prikazan na sliki 2 levo.



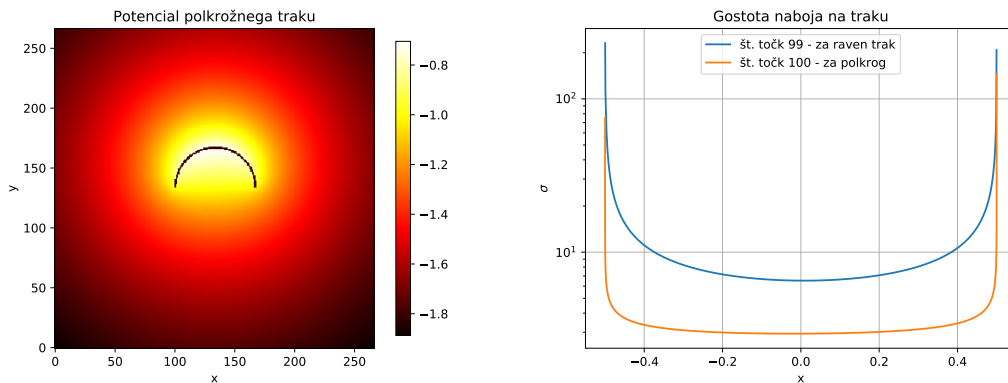
**Slika 2:** Gostota naboja na ravnem traku (levo) in kapaciteta v odvisnosti od števila točk (desno).

Prikazal sem rešitvi, saj je tako hitro konvergiralo, da je bila edina zanimiva vmesna točka recimo ta pri 16-ih točkah. Vidimo, da je rešitev zelo gladka, hkrati pa vidimo, da je rešitev

rahlo asimetrična. Verjetno ker nisem simetrično porazdelil točk. S tem sem se trudil, a mi ni supelo povsem izboljšati. Ko sem lepše točke in lepše funkcije uporabljal, kasneje, take asimetrije ni bilo. Zato bom v prihodnje panele ustvarjal s čim lepšimi funkcijami, za katere vem kaj počnejo. Na sliki 2 desno pa vidimo kako kovergira vrednost

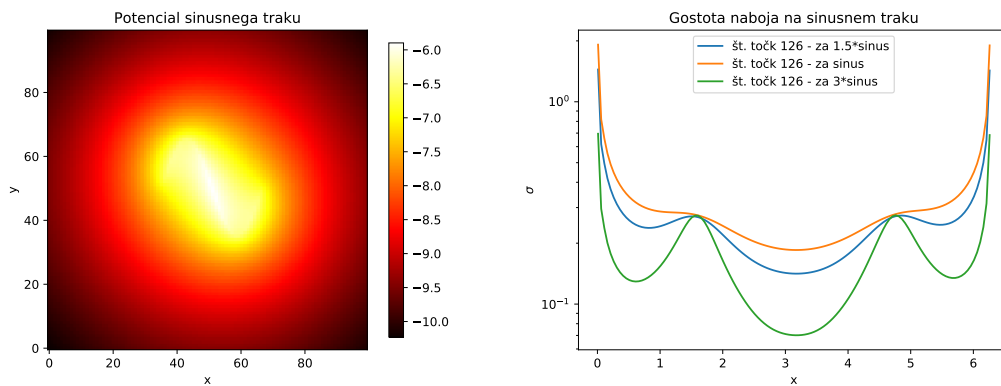
$$c = \sum_i \sigma_i l_i$$

v odvisnosti od števila panelov. Izredno hitro. Da sem se malo navadil, na upoštevanje kotne odvisnostizgornjih enačb, in ne le odvisnosti od velikosti panelov, sem si zamislil nekaj enostavih in lepih oblik traku.



**Slika 3:** Potencial okoli polkrožnega traku (levo) in gostota naboja na polkrožnem traku (desno).

Na sliki 3 sem tako rešil sistem za polkrožni trak in dobil pravitako lepe in precej prepričljive rešitve, na sliki 4 pa sem poiskal rešitev za trak v obliki sinusa. Potem sem se še malo poigral z gostoto naboja v primeru sinusnega traku glede na  $x$  os. Vidimo, da so gosotote naboja pri sinusih dosti bolj simetrične, saj so tudi funkcije precej lepše.



**Slika 4:** Potencial okoli sinusnega traku (levo) in gostota naboja na sinusnih trakovih (desno).

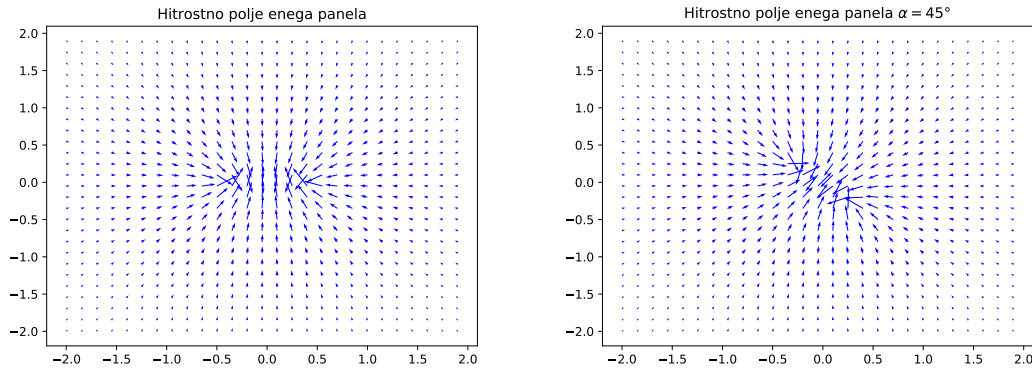
## II. HITROSTNI PROFIL ZA OBTEKAJOČO TEKOČINO

Sedaj v drugem delu, se lotimo primera ki se izkaže za dosti zahtevnejšega, kot se zdi na prvi pogled. Ker tudi enačbo za hitrostni potencial napišemo kot poissonovo enačbo, velja ista

greenova funkcija tudi prej. Hitrostno polje, ki ga ustvarja en panel torej izgleda kot

$$\nabla u(x, y) = \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{x_-^2 + y^2}{x_+^2 + y^2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{1}{2\pi} \left( \arctan\left(\frac{x_-}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x_+}{y}\right) \right) \mathbf{e}_y, \quad (8)$$

in se transformira kot vektorsko polje, torej kot  $R(\alpha)u(R(-\alpha)\vec{r})$ , če je  $R(\alpha)$  rotacijska matrika za kot  $\alpha$ . Kako izgleda vektorsko polje enega panela lahko vidimo na slikah 5.



**Slika 5:** Hitrostno polje enega panela. Desno vidimo še rotacijo takega panela za kot  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .  $l = 1$ .

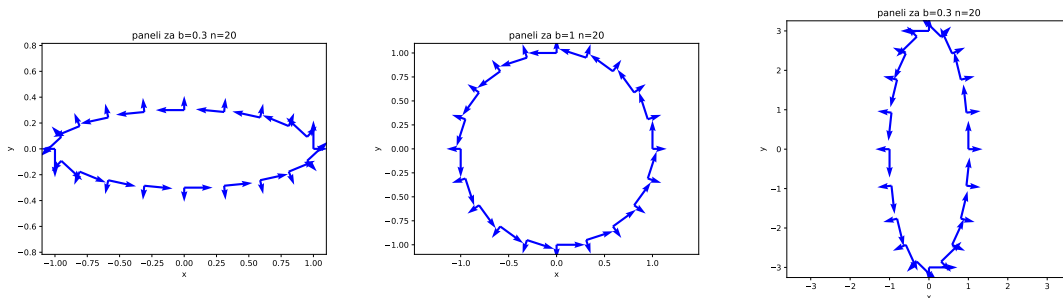
Zdaj bomo podobno kot prejšnjič, zahtevali, da je hitrost okoliške tekočine v smeri normale panela enaka nič na robu panela. S tem pogojem bomo določili virtualne izvore in ponore hitrostnega polja za vsak panel, na robu naše ovire in s tem določili hitrostno polje v vseh točkah prostora. To dosežemo z enostavnim pogojem

$$\sum_j \sigma_j \nabla u(\vec{r}_i, \vec{r}_j, l_j, \alpha_j) \cdot \vec{n}_i = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_i. \quad (9)$$

Pri tem za diagonalne elemente (polje samega nase) privzamemo vrednost 1/2. Vektorsko polje v vsaki točki potem po istem kopitu, kot v prejšnji točki, izračunamo kot

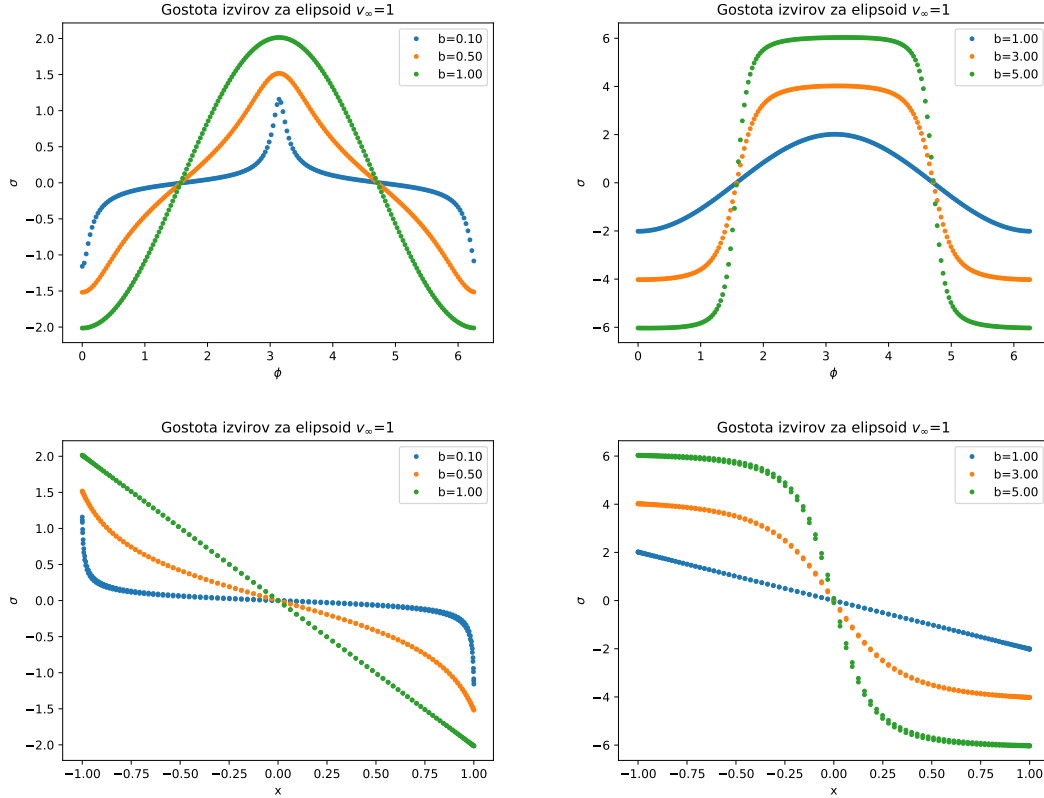
$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_\infty + \sum_j \sigma_j \nabla u(\vec{r}, \vec{r}_j, l_j, \alpha_j). \quad (10)$$

Za začetek si torej najprej pogledamo enostaven elipsoid, s koordinatami  $x = \cos(\phi)$  in  $y = b \sin(\phi)$ . Za takšen elipsoid si najprej pogledajmo kako sploh izgledajo tangente in normale panelov, ki sestavljajo elipsoid na slikah 6.



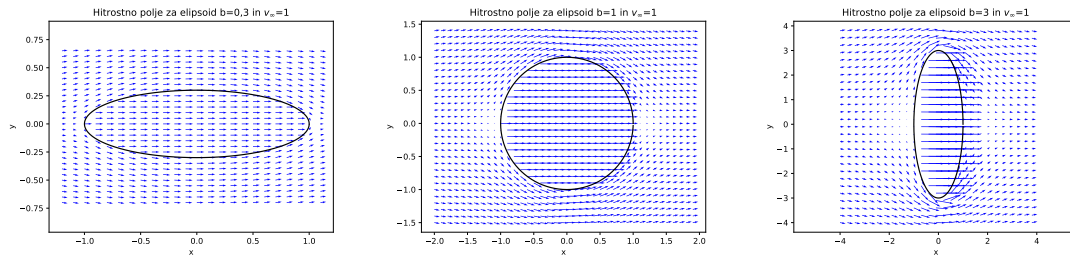
**Slika 6:** Tangente in normale za različne parametre  $b$  elipsoida.

Nato pa zapišemo zgoraj opisani algoritem. Pri tem moramo biti pozorni, da pravilno upoštevamo kot, jaz sem kot izračunal kot  $-\arctan(\frac{T_y}{T_x})$ , pri čemer  $T_i$  predstavlja  $i$ -to komponento tangente panela. Pri tem moramo biti pozorni in tangente in normale normirati. Dalje moramo oceniti kako zapisati velikost dotičnega panela. Jaz sem zgolj pogledal razdaljo do sosedne točke in to razdaljo izbral za  $l$ . Kasneje se bo to izkazalo za slabo taktiko. S tem postopkom smo potem dobili gostote izvirov za različne oblike elipsoidov, kar vidimo na slikah 7.



**Slika 7:** Gostote izvirov za različne oblike elipsoidov. Zgoraj  $v$  odvisnosti od kota, spodaj od komponente  $x$ .

Hitrostna polja za oblike, ki smo jih videli že na slikah 6, pa so prikazana na slikah 8.

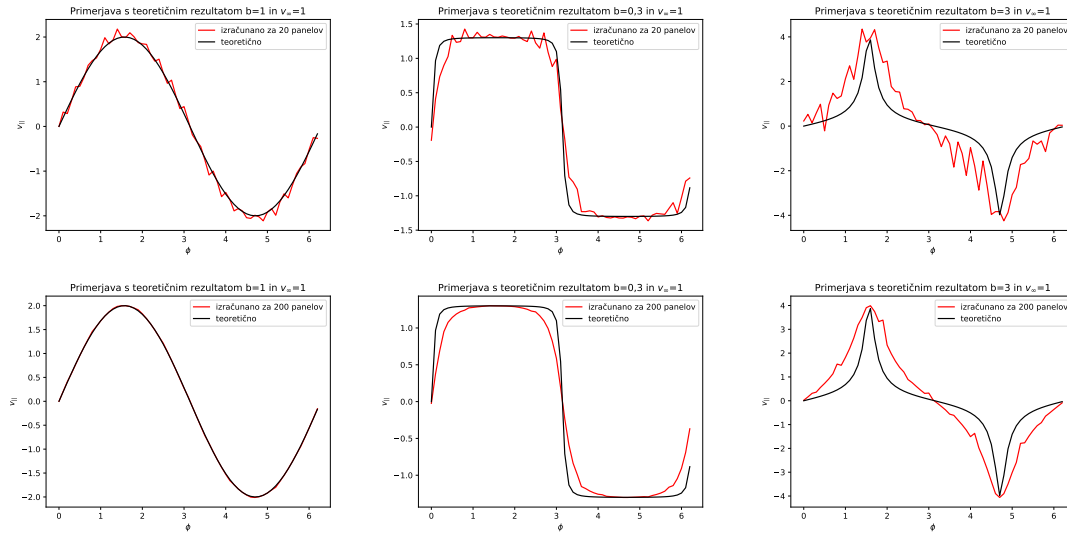


**Slika 8:** Hitrostna polja za različne parametre  $b$  elipsoida.

Pri tem še ne končamo. Zanima nas kako se natančnost rešitve spreminja s številom panelov, tako kot smo to storili poprejšnjich. Iz teorije namreč poznamo rešitev v bližini roba za vzporedno komponento, ki se glasi

$$v_{||} = u_\infty \frac{(1+b)y}{\sqrt{y^2 + b^4 x^2}}, \quad (11)$$

če  $u_\infty$  pomeni hitrost v  $x$  smeri v neskončnosti. Če to primerjam z mojimi rezultati dobim slike 9. Vidimo, da dobimo neko sistematično odstopanje, čim nimamo več opravka s krogom. Do tega ne vem zakaj pride. Možno tudi, da sem kaj narobe narisal, saj sem vzporedno komponento hitrosti računal s skalarnim produktom med hitrostjo v točki nič in normalo v titi točki. Morda bi bilo bolje, če takega izračuna nebi izvedel v naključnih točkah, ampak na panelih. Zs konec

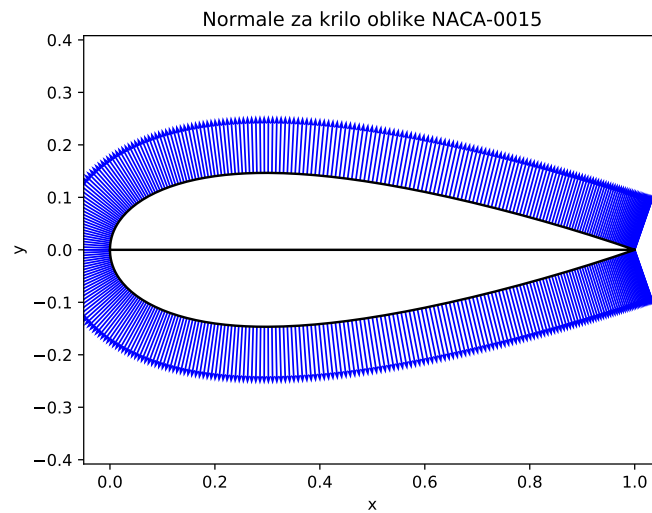


Slika 9: PRimerjava s teoretično rešitvijo, pri različnih številih panelov.

si lahko pogledamo še kakšno drugačno obliko krila, kot je recimo NACA-00t, pri čemer  $t$  predstavlja debelino profila v odstotkih. Obliko zapišemo kot

$$y(x) = \frac{t}{50} (1,457122\sqrt{x} - 0,624424x - 1,727016x^2 + 1,384087x^3 - 0,489769x^4), \quad (12)$$

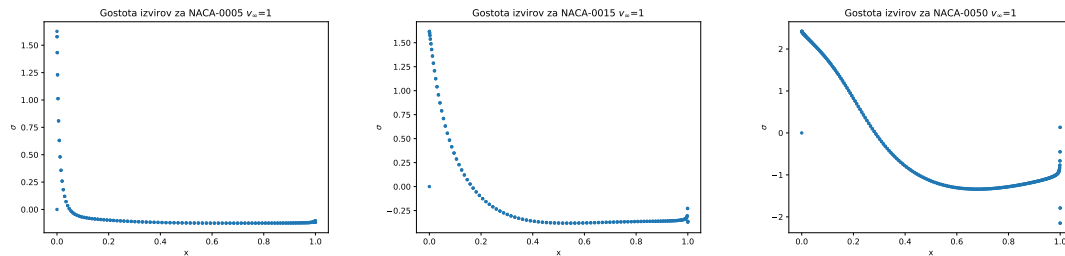
na zaprtem intervalu  $x \in [0, 1]$ . Tudi s tem profilom se bomo malce poigrali, poiskali rešitve za gostote in izrisali hitrostni profil. Profil lahko vidimo na sliki 10. Točke na robu krila pa



Slika 10: Oblika krila in normale na krilo za  $t=15$ .

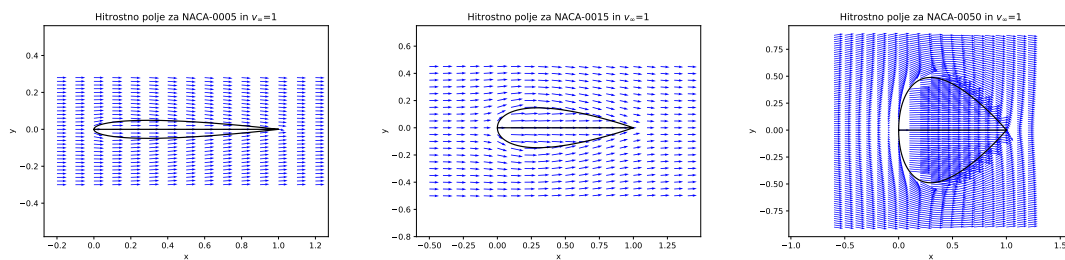
nisem računal enakomerno po  $x$ , ker bi s tem dobil slabo pokrito čelo, temveč sem jih računal kot  $\frac{1}{2}(1 - \cos(x\pi))$ , tako da so se bolj zgostile na čelu. S tem dobimo vtis kot da so precej enakomerno nanese, kar ni res.

Zdaj je prišel čas, da omenim zakaj sem do sedaj slabo določal velikosti panelov. Jaz sem velikosti panelov določal naknadno, po tem ko sem že določil točke na krilu. Vsakič ko sem pogledal izbrano krilo, sem izračunal razdaljo do ene od sosednjih točk in določil velikost panela. To se je tu izkazalo za katastrofalno, saj sem v točki  $x = 1$  za soseda imel panel v točki  $x = 0$ . Zato sem moral v tem primeru, ko točk nisem več risal po kotu, način določanja velikosti spremeniti. Zgolj rahlo sem ga spremenil, da nisem rabil spreminjati vseh enačb, sem pa zaradi tega ugotovil kako bi moral postopati do tega problema že v začetku. Najprej bi moral razdeliti rob po dolžinah in potem poiskati sredine teh odsekov in shraniti dolžine v ločen seznam. Tako bi dobil za vsako točko že tudi velikost, in bi bilo računanje dosti zanesljivejše. Zdaj pa sme moral pri vsaki novi obliki premisliti, ali je z velikostmi panelov vse vredno. Ko s tem končno opravimo, si na hitro pogledamo kako izgledajo gostote izvorov za take oblike v odvisnosti od osi  $x$  na slikah 11.



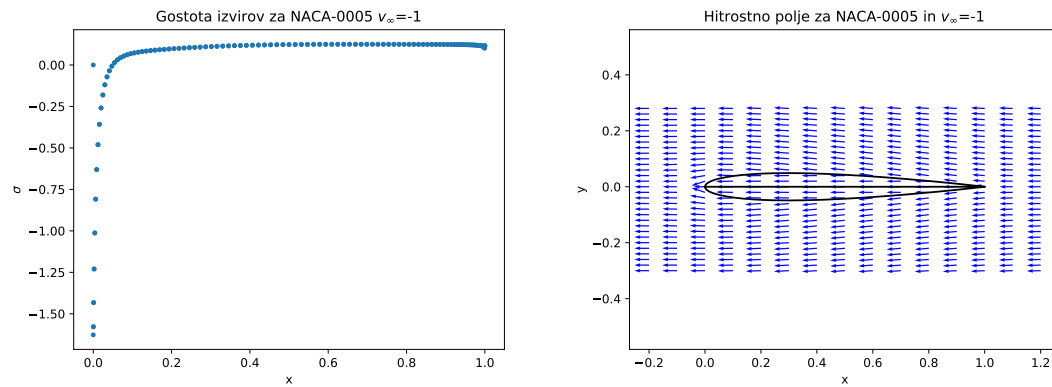
Slika 11: Gostote izvirov za različne debeline  $t$  NACA profilov.

Na zgornjih slikah vidimo, da imamo določene točke, ki kažejo na nezveznost porazdelitve. A bolj kot sem se jih trudil odstraniti, slabši so bili rezultati, tako da sklepam, da te nezvezne točke, spadajo k pravilni rešitvi. Vredno je omeniti da se te točke nahajajo tam kjer imamo toločene nezveznosti. Odvodi so v teh točkah neskončni in  $y$  komponente so 0 itd. Tako da je bilo nepravilnosti v teh točkah, morda za pričakovati. Na slikah 12 potem vidimo, kako izgledajo hitrostna polja za zgornje profile.



Slika 12: Hitrostna polja za različne debeline  $t$  NACA profilov.

Čisto tako za zanimivost se lahko prašamo kako izgleda polje, če tekočina teče v obratno smer. Tako kot recimo če zamahnemo z nožem po zraku ali vodi. Dobimo rezultat prikazan na slikah 13. Recimo, da smo dobili to kar smo pričakovali.



**Slika 13:** Če je tekočina teče v obratno smer.