

---

# 10. naloga

## Direktno reševanje Poissonove enačbe

---

MIHA SRDINŠEK

### I. POVES KVADRATNE OPNE

Tokrat bomo poissonovo enačbo reševali s pomočjo fourijejeve transformacije. Podobno kot se to splača pri analitičnem reševanju, je tudi tu zelo uporabno to, da se operator  $\nabla$  prelevi v deljenje z valovnim vektorjem. V tej nalogi se bomo ukvarjali z dvema načinoma reševanja s fourijejevo transformacijo. Dvodimenzionalno območje bomo reševali s dvodimenzionalno diskretno transformacijo in z enodimenzionalno + reševanje tridiagonalnega sistema enačb. Najrej bom predstavil dvodimenzionalno fourijejevo transformacijo. Začnemo z znano enačbo

$$\nabla^2 u(x, y) = g(x, y), \quad (1)$$

pri čemer  $u$  očitno predstavlja poves opne,  $g$  pa težo oz gostoto opne v dani točki. Izvedemo transformacijo za pravokotnik z robovoma  $a$  in  $b$ . Pri tem izberemo sinusno transformacijo, da s tem že kar upoštevamo periodične robne pogoje (transformacija prvega tipa):

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} U^{nm} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (2a)$$

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} G^{nm} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (2b)$$

Pri tem lahko takoj vidimo, kako enostavna je rešitev te enačbe:

$$U^{mn} = -\frac{G^{mn}}{k_{mn}^2} \quad k_{mn}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (3)$$

To pa je potem že to. Da sistem rešimo, samo izrazimo ven  $G_{mn}$  in  $U_{mn}$ , upoštevamo povezavo med njima in na koncu nazaj izrazimo  $u$ . Tako rešimo sistem enačb. Zapišemo torej

$$G^{mn} = \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{l=1}^{L-1} u^{jl} \sin\left(\frac{j\pi m}{J}\right) \sin\left(\frac{l\pi n}{L}\right), \quad (4a)$$

$$U^{mn} = \frac{h^2}{2 \cos(\pi m/J) + \cos(\pi n/L) - 2'} G^{mn} \quad (4b)$$

$$u_{jl} = \frac{4}{JL} \sum_{m=1}^{J-1} \sum_{n=1}^{L-1} U^{nm} \sin\left(\frac{j\pi m}{J}\right) \sin\left(\frac{l\pi n}{L}\right). \quad (4c)$$

Ta metoda je bila sprva izredno počasna, saj nisem uporabil že napisanih algoritmov. Šele kasneje sam ugotovil, da je smiselno za tako metodo uporabiti že obstoječe hitre algoritme. S tem popravkom, je ta metoda postala izredno hitra, kot lahko vidimo tudi na sliki spodaj.

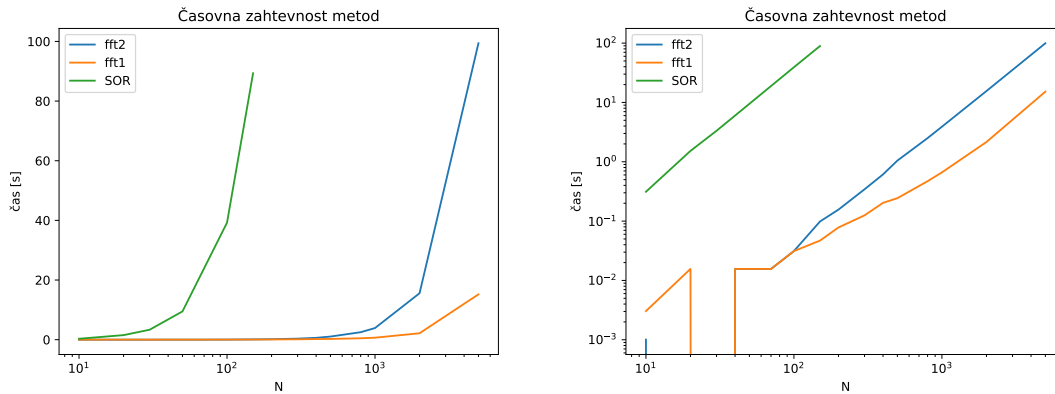
Zdaj pa lahko omenim še drugo metodo. V tem primeru izvedemo fourijejevo transformacijo zgolj v eni smeri, potem pa rešimo dobljeni tridiagonalni sistem enačb, ki je izredno enostaven, ter na koncu transformiramo nazaj zopet zgolj v eni smeri, torej v obeh primerih z enodimenzionalno fourijejevo transformacijo, po vseh vsticah ali stolpcih. V tem primeru torej zapišemo prejšnji enačbi kot

$$U_l^m = \sum_{n=1}^{L-1} u_{ln} \sin\left(\frac{m\pi n}{L}\right), \quad G_l^m = \sum_{n=1}^{L-1} g_{ln} \sin\left(\frac{m\pi n}{L}\right) \quad (5)$$

in nato rešimo tridiagonalni sistem oblike

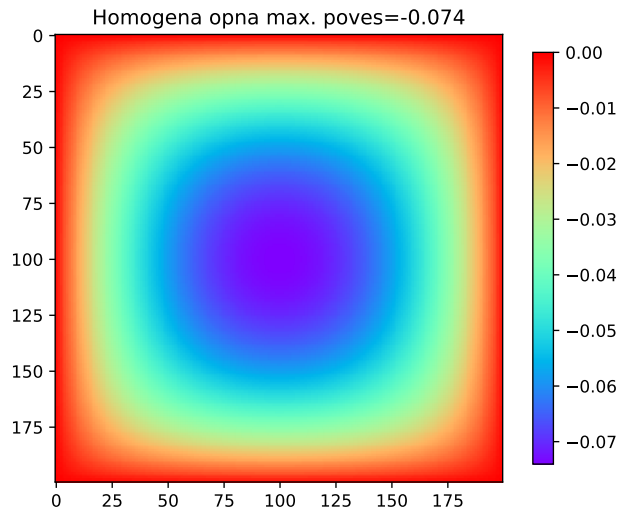
$$U_{l-1}^m - U_l^m(4 - 2 \cos(\frac{m\pi}{J})) + U_{l+1}^m = h^2 G_l^m, \quad (6)$$

za vsak  $m$ . Pri tem bi opozoril, da moramo mi zgolj določiti težo opne  $g$  v vsaki točki in s tem že definiramo  $G^{mn}$ . Torej je vse skupaj izredno enostaven algoritem. Vprašanje je le še kako ga sestaviti skupaj, da je dejansko hitrejši kot dvodimenzionalna transformacija. Če vse to zgolj zapišemo in uporabimo algoritem za tridiagonalni sistem enačb, bo ta postopek vzel več časa. Poslužiti se moramo redkih matrik, tako kot smo to že storili pri šesti nalogi. Tokrat tudi matriko skonstruiramo na bolj pameten način. Vsak tridiagonalni sistem ima namreč zgolj tri diagonale, ki so sestavljene iz zgolj treh elementov. Dve diagonali sta iz enic, sredinska pa je daljša. Če torej skonstruiramo redko matriko na tak način, in rešimo sistem enačb, potem je naša metoda dejansko hitrejša od dvodimenzionalne, kot vidimo na sliki 1.



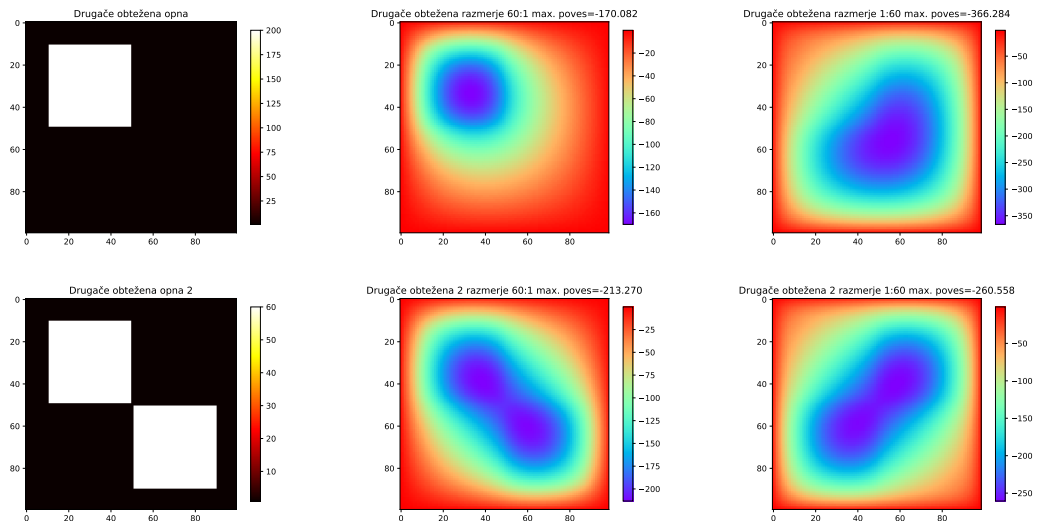
Slika 1: Časovna zahtevnost metod za izračun povesa kvadratne opne. Pri tem uporabimo še SOR metodo.

Na tej sliki smo obe metodi primerjali še z metodo SOR iz prejšnje nalge, pri optimalni  $\omega$ . V nadaljevanju si bom osamo na hitro pogledali nekaj zanimivih rešitev, za različne  $g(x, y)$ . Najprej si pogledajmo na hitro homogeno opno, prikazano na sliki 2. Rešitev izgleda pravilno in



Slika 2: Povese homogene opne.

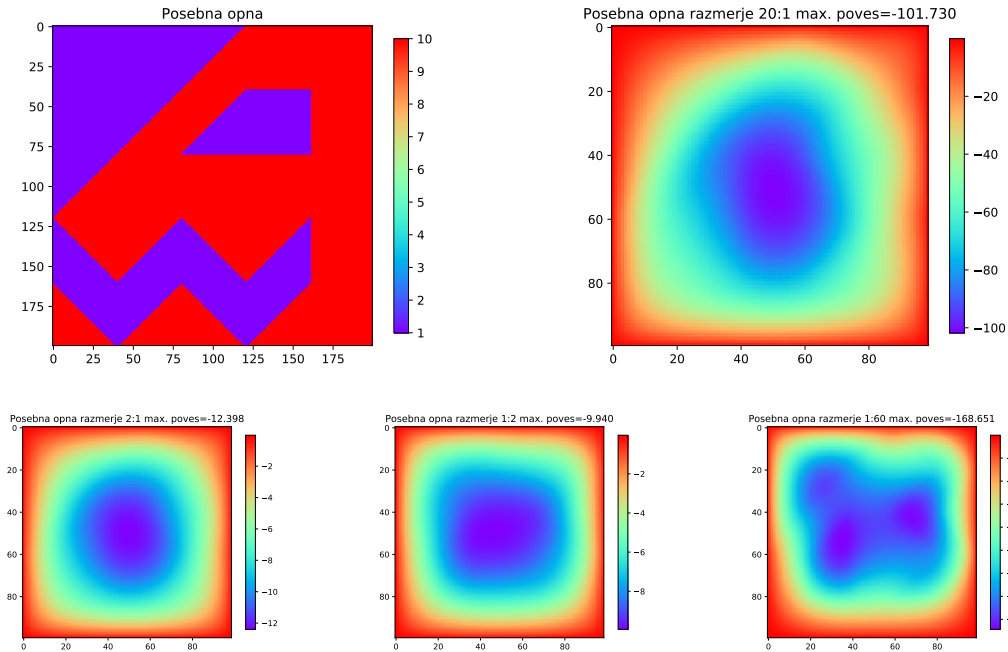
tako kot bi to pričakovali, zato si pogledamo še drugače obtežene opne. Recimo nesimetrično in simetrično obteženo opno na slikah 3. Pri tem so povese nenavadno veliki iz dveh razlogov. Prvi je to da sem dal precej vidoke teže na različne dele opne. Drugi pa je to, da sem najprej imel povese v velikostnem redu prve slike, a sem nekje nek faktor 100 izbrisal. Metoda še vseeno deluje, samo velikosti so narobe za nek tak faktor. Je pa zato Poiseuillov koeficient zelo točen.



Slika 3: Levo vidimo obteženost opne, desno pa kako se taka opna povese

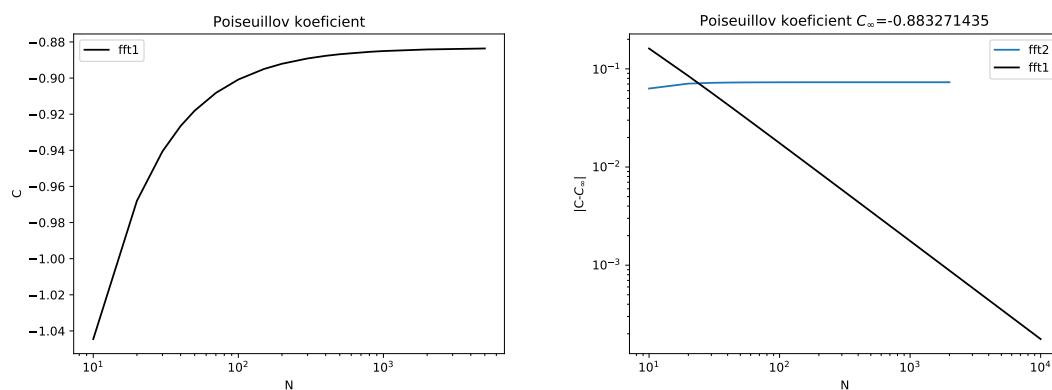
Potem pa si pogledamo še opno, ki smo jo prvič srečali pri šesti nalogi. Rezultate vidimo na slikah 4. Zopet smo si pogledali različna razmerja obteženosti, zraven pa sem prikazal še kako ta opna izgleda. Rezultati so precej smiselni. Sploh na spodnji sliki denso lepo vidimo, da

se trikotnik na levi samostojno povesi zaradi lastne teže, kadar pa obtežimo rdeči del se opna povesi precej podobno, kot pri homogeni obremenitvi. S tem smo zaključili s tem delom naloge.



**Slika 4:** *Levo vidimo obteženost opne, desno pa kako se taka opna povesi*

Za trenutek se lahko vrnemo nazaj k homogeni opni in si pogledamo Poiseuillov koeficient, kot dmo to naredili pri prejšnjih nalogah. S tem lahko preverimo natančnost metode. Na internetu sem izvedel za točno rešitev, zato sem dobljeni koeficient primerjal s tem koeficientom. Na žalost se pri fft2 rešitev ni ujemala s to vrednostjo, se j epa zato pri fft1 izredno lepo ujemal moj rezultat s tistim na internetu. Do četrte decimalke natančno, pri mreži velikosti 10000. Ta razmislek je prikazan na grafih 5.



**Slika 5:** *Na slikah vidimo izračunan koeficient v odvisnosti od velikosti mreže. Levo vidimo koeficient, desno pa odstopanje od pričakovane vrednosti.*

## II. TEMPERATURNI PROFIL ENAKOSTRANIČNEGA KOVINSKEGA VALJA

Pri tej nalogi bomo uporabili zelo podobno metodo, kot pri enodimenzionalni fourijejevi transformaciji. Na kovinskem valju se nam v enačbi spremeni operator nabra, ki je sedaj zapisan v cilindričnih koordinatah

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (7)$$

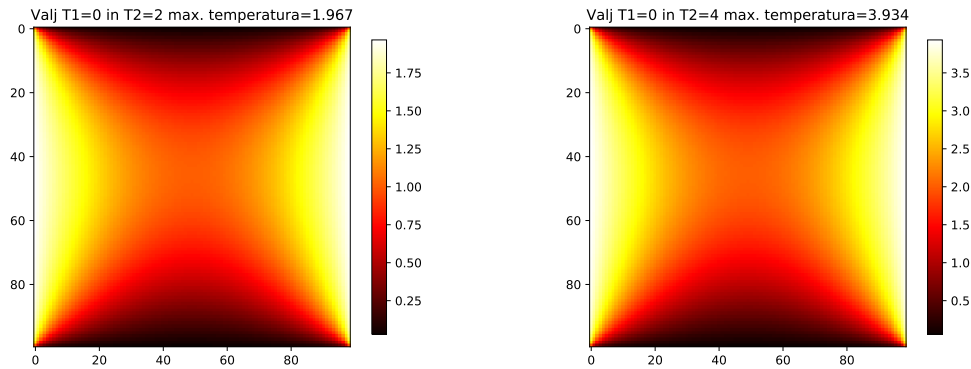
Tak sistem bi bilo s fourijejevo transformaciji težko reševati, saj bi nam narobe hodil faktor  $\frac{1}{r}$  v drugem členu. Zato se poslužimo podobnega tika kot v prejšem primeru, le da je tokrat to zelo uporaben trik. Fourijejevo transformacijo izvedemo le po stolpcih, torej po koordinati  $z$ , potem pa rešimo dobljeni sistem enačb, ki je zopet tridiagonalni sistem oblike

$$\left(1 + \frac{h}{2r_j}\right)U_{j+1}^k - (4 - 2\cos(\pi n/J))U_j^k + \left(1 - \frac{h}{2r_j}\right)U_{j-1}^k = h^2 G_j^k, \quad (8)$$

za vse  $k$ . Postopek je identičen tistemu iz prejšnje naloge, le upoštevati moramo pravilo za nehomogeni robni pogoj, ki smo ga povedali v navodilih. Robne pogoje zgolj spravimo na desno stran  $g$  s predpisom

$$g_{J-1,l} \longrightarrow g_{J-1,l} - \frac{f_l}{h^2}. \quad (9)$$

Zdaj še samo rešimo sistem enačb in nato izvedemo obratno transformacijo. Tako dobimo rešitve prikazane na slikah 6.



**Slika 6:** Temperaturni profil, če je  $T_1$  temperatura zgoraj in spodaj,  $T_2$  pa temperatura na plašču.