**Електротехнички факултет, Универзитет у Београду**

**Катедра за рачунарску технику и информатику**

## Дипломски рад

# Класификација и визуелизација елементарних функција помоћу програмског алата GeoGebra

ментор: др. Бранко Малешевић

аутор: Милан Бранковић

2011.

# Садржај

# 1 Увод

Природна је ситуација да савремена настава математике прати развој технологије, те настоји да у образовни процес уведе нова наставна средства како би се ученицима и студентима приближила математика, мотивисали их на рад, побољшало разумевање, откривање и усвајање математичких појмова, појава и законитости. Данас смо сведоци све чешћег подучавања и учења помоћу рачунара и програма подршке. Студенти поседују преносиве (лаптоп) рачунаре који су опремљени различитим врстама програма, од којих многи поседују едукацијску компоненту. При одабиру појединe програмске подршке, професори и наставници морају размотрити неколико питања:

- може ли конкретни софтвер помоћи подучавању математике, повећању нивоа знања, развоју одређених вештина и побољшању разумевања математичких идеја
- може ли конкретни софтвер помоћи при раду са математичким садржајима, односно може ли студентима помоћи при рачунању, цртању графова, креирању таблица, решавању проблема...
- помаже ли употреба конкретног софтвера у изради наставних материјала, чувању података, проналажењу већ постојећих наставних материјала...

Општи програмски алати са којима се сусрећемо у настави су: програми за рад са таблицама, програми за презентацију, програмски језици... Такође постоје специјализовани програмски алати намењени управо математичкој едукацији. Рачунари у наставном процесу користе се у неколико ситуација: професор их користи при планирању и припремању за наставу, студент као појединац их користи ван времена проведеног на факултету...

При планирању и припремању градива професор треба да искористи могућност приступа разним врстама наставног и пропратног материјала. Наиме на интернеру и електронским медијима постоји низ информација и материјала помоћу којег професор може обогатити обраду новог градива и увежбавање обрађеног градива. Професор ће преузети оне електронске садржаје који ће му омогућити ефикасније подучавање и увежбавање наставног градива. Такође помоћу рачунара професор лако долази у контакт са стручњацима математичарима, с колегама професорима и осталим особама које професору могу пренети корисна искуства и пружити савет везан за извођење наставе математике и/или рад са студентима.

Употреба рачунара значајно доприноси учењу математике помажући студентима при:

- увежбавању рачунања
- експериментисању, стварању које се односе на својства геометријских ликова, функција и бројева

- раду са реалним подацима и са већим скупом података
- развијању логичког мишљења, стварању и модификовању стратегија решавања омогућеним брзом повратном информацијом
- учењу помоћу слика
- развијању вештина и способности математичког моделирања на темељу датих података

Кратко речено употреба рачунара омогућава студентима да се концентришу на размишљање о математичким идејама, на решавање проблема на начин који је лакши и ефикаснији него без тих алата. Технологија обогаћује учење математике дозвољавајући ученику истраживање и откривање, а проширује и врсте проблема који се могу проучавати.

# 2 GeoGebra

## 2.1 Увод

Програм GeoGebra је математички софтвер који повезује геометрију, алгебру и анализу. Развио га је Markus Hohenwarter на Универзитету у Салцбургу за подучавање математике у школама. Превод на српски језик урадили су Ђорђе и Драгослав Херцег. Програмски пакет GeoGebra намењен је широкој популацији, али пре свега професорима и ученицима у школама, којима иначе програмски пакет овакве намене често нису доступни.

Програм GeoGebra као и остали програми динамичке геометрије конструише тачке, векторе, дужи, праве, углове, многоуглове, конусе, црта графике функција, њихове екстремуме и нуле, тангенте и слично. Са друге стране параметре једначина, координате и наредбе можемо уносити директно и када њих мењамо ту промену прате и сви зависни конструисани геометријски објекти са својим дефинисаним својствима и алгебарским описима. Ова два приступа су главне особине програма GeoGebra: израз у алгебарском прозору одговара објекту у геометријском прозору и обрнуто. Ауторова идеја је била да уједини могућност графичког калкулатора, програма динамичке геометрије и програма намењених алгебри као што су Maple и Derive.

## 2.2 Зашто GeoGebra?

GeoGebra је рачунарски алат који повезивањем симболичког и иконичког представљања доноси бројне могућности. Код овог алата долазе до изражаја принцип активности, принцип оперативности, принцип експерименталности и принцип учења откривањем.

Иконичка репрезентација је представљање или предочавање на степену који је прелаз између дословне, реалистичке репрезентације и симболичке, потпуно апстрактне репрезентације. Иконичка репрезентација задржава основне елементе или контуре стварности, док је у симболичкој веза са стварношћу још само конвенционална.

Овај пакет пружа на једноставан и веома приступачан начин припремање и самосталан рад ученика из две веома важне области школске математике, из геометрије и алгебре. Креирање анимација и једноставне илустрације школског садржаја омогућавају наставницима да за кратко време и веома ефикасно упознају ученике са основним математичким појмовима и знањима.

GeoGebra је бесплатна и доступна на више од 30 језика: српски, енглески, немачки, аустријски, италијански, француски, шпански, каталонски, португалски, холандски, дански, мађарски, словеначки, хрватски, кинески, руски, македонски, ... . Може је имати и користити сваки ученик. Инсталација је крајње једноставна. Овај програм обједињује многе особине које имају многи системи, али ниједан овако комплетно као GeoGebra. Описујући GeoGebra-у, дајемо практично принцип рада многих других система. У основној школи, посебно од петог до осмог разреда, настава математике је конципирана тако да се садржаји геометрије и алгебре преплићу и прожимају, тако да је GeoGebra овде посебно погодна. Уместо два одвојена програма, један за геометрију а други за алгебру, имамо само један – GeoGebra-у.

Радне површине креиране у програму GeoGebra могу се преносити у html и word документе. Поред тога конструкције се могу понављати по вољи корак по корак и аутоматски и ручно.

## 2.3 Програмски пакет GeoGebra

Програмски пакет GeoGebra је рађен на програмском језику JAVA. Пошто је рађен на JAVA платформи, GeoGebra је доступна на више оперативних система (Windows, Linux, MacOS). Као такав је приступачан за велики број људи.

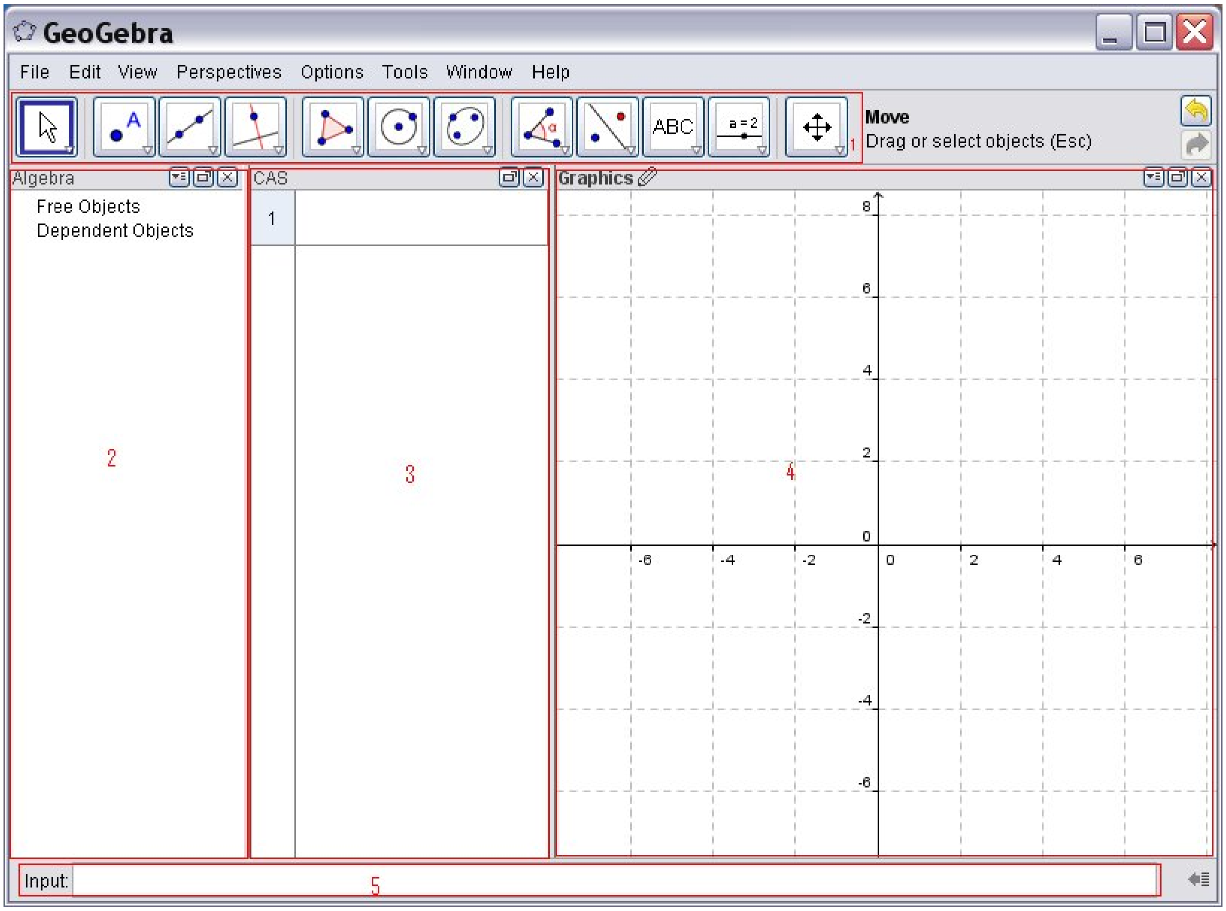
Програмски пакет GeoGebra се може скинути са званичне адресе пројекта (www.geogebra.org). Почто GeoGebra ради на JAVA платформи, потребно је имати неку верзију JAVA виртуелне машине (најмање верзију 1.5) инсталиране на рачунару. Такође могуће је покренути програмски пактет и из интернет читача (Mozilla, Opera, Google Chrome...). Тада није потребно инсталирати никакве програме, али је и тада потребно имати инсталирану JAVA виртуелну машину.

## 2.4 Кориснички интерфејс програмског пакета GeoGebra

GeoGebra поседује релативно стандардни кориснички интерфејс и приказ радне површине. На слици 3.1 приказујемо главне елементе, док стандардни систем падајућих менија није специјално означен.

1. *Дугмићи са алатима.* Свако дугме у себи крије додатни падајући мени. Навешћемо само општи опис категорије гледајући са лева на десно.
    a. алатке за померање и манипулацију објектима
    b. алатке за креирање тачке
    c. алатке за креирање тангенти, паралела и слично
    d. алатке за рад са полигонима
    e. алатке за рад са кругом и делом/деловима круга
    f. алатке за рад са елипсама и сличним
    g. алатке за рад са угловима, рефлексије и транслације
    h. алатке за креирање текст поља на графичкој радној површи
    i. алатке за креирање дугмади и слајдера

j. алатка за померање и зум радне површи



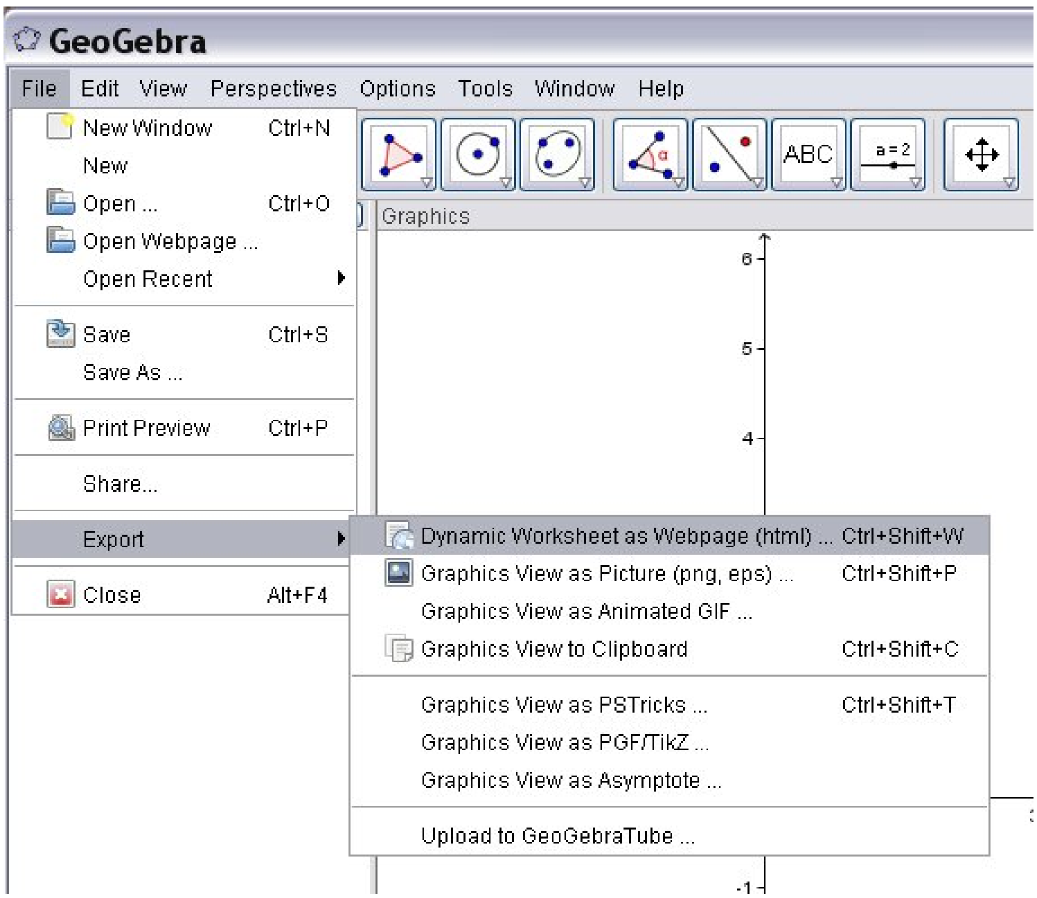

слика 2.1 Елементи GeoGebra радне површине

2. *Алгебарски приказ.* Овде GeoGebra симболички приказује креиране објекте и промењљиве. У ову групу спадају и поља са текстом и прекидачи
3. *CAS поља.* Овде се могу уносити специфичне CAS команде. Већина ових команди се може користити и из GeoGebra командне линије о којој ће бити речи касније. Када је активиран CAS подпрозор кликом миша у њега или у неко од поља у њему поставка алатки у горњем делу GeoGebra прозора ће се променити и дати пречице за интеграл, извод, експанзију разломака и полинома, и факторисање полинома
4. *Главни графички прозор.* Овде се приказују креиране криве и функције, као и разне геометријске конструкције и површине. Може функционисати са и без приказа координатних оса и координатне мреже
5. *Командна линија.* Све команде које се налазе у линији са алаткама и другим падајућим менијима, као и још доста других које немају графичке пречице могу се задати у командној линији

Читаоци се упућују на детаљна објашњења, упутства и приручнике који се могу наћи на главном GeoGebra сајту, на линковима (http://www.geogebra.org/cms/en/help) и (http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Main_Page)

## 2.5 GeoGebra на интернету

Како смо већ рекли корисник ће своје геометријске или алгебарске радове конструисати у графичком интерфејсу и/или додатним наредбама у командној линији. Готов рад се може снимити у .ggb формату, где је за прегледање тако снимљених фајлова потребна GeoGebra, или се може извести из програма у друге формате. Могуће је снимити само графичку радну површину као графички фајл који се може убацити у текст или на статичку интернет страницу. Скоро све математичке илустрације у овом раду су креиране у GeoGebra-и. Друга могућност, далеко значајнија од претходне, је извожење GeoGebra конструкције у облику интерактивне веб странице.




слика 2.2 Опције за извоз рада из GeoGebra-е

GeoGebra је веома моћан алат који омогућава лако уграђивање динамичких цртежа у интерактивну веб страницу. Писана на програмском језику JAVA, захваљујући коме се сваки наш цртеж може покретати у било ком веб претраживачу као такозвани аплет. Шта више унутар веб странице са аплетом се може комуницирати линковима, дугмићима и обрасцима. Уз пропратни текст који служи као објашњење неке наставне јединице, постижемо висок степен интерактивности са посетиоцима страница.

Језик комуникације са аплетом је javascript-у, посебан скрипт језик који служи за повезивање html садржаја са GeoGebra аплетом. У почетку највише је био употребљаван за проверу уписаних података у обрасце што се далеко брже одвија са корисничке стране него са сервера. Убрзо се javascript развио у најраширенију веб технологију за „оживљавање“ елемената додатих статичким веб страницама.

Када креирамо нову страницу, крајњи корисник ће видети све што је видљиво у GeoGebra прозору, тако да ствари које су ирелевантне за корисника треба искључити или сакрити.

## 2.6 GeoGebra у настави

Динамичко јединство геометрије и алгебре у GeoGebra-и омогућавају ученицима једноставан експериментални прилаз математици. Они могу као сопствени учитељи самостално да напредују, индивидуално и откривачки да раде и уче. Уз чешћу употребу рачунара и овог програма и бољу обученост, пре свега наставника, организација часа може бити и боља и занимљивија од досадашње. Реакције ученика, повратне информације, такође ће утицати на будуће организације часова.

Пустимо ученике да сами откривају математичке ствари и односе помоћу GeoGebra-е. Дајмо им задатак који треба да реше и да на једном листу хартије или фолији помоћу GeoGebra-е испишу решење. Настава се не мора одржавати у рачунарској учионице. Довољан је један PC са GeoGebra- ом, да би се организовао један групни рад.

GeoGebra се може користи као динамички пројектор да би се материја изложила целом одељењу или да би се извео неки експеримент. За то је потребан један лаптоп или PC и пројектор. Излагање може почети са празним прозором GeoGebra-е или са унапред спремљеним конструкцијама. У другом случају потребно је приказати конструкциони протокол да би се корак по корак приказала и образложила конструкција.

# 3 Основне функције

## 3.1 Линеарна функција

Најпознатији облик линеарне функције је $f(x) = kx + n$ (експлицитни). Проблем са овом дефиницијом је да функције овог облика, упркос њеном имену, не задовољавају обавезно услов линеарног пресликавања, уколико је $k$ једнако нула. График ове функције је права. $K$ је коефицијент правца, односно $k = tg\alpha$ , где је $\alpha$ угао који права гради са позитивним смером x-осе, а $n$ је одсечак на y-оси.

Нула функције је место где график сече x-осу, а добија се кад ставимо y=0, па израчунамо колико је x.

Ако је $k>0$ функција је растућа и са позитивним смером x-осе гради оштар угао, а ако је $k<0$, функција је опадајућа и са позитивним смером x-осе гради туп угао. На графику мењање параметра $k$ чини линију стрмијом или равнијом, а мењање параметра $n$ помера линију горе или доле.

Функција је позитивна за $y>0$, односно $kx + n > 0$ и график је изнад x-осе. Функција је негативна за $y<0$, односно $kx + n < 0$ и график је испод x-осе.

## 3.2 Квадратна функција

Квадратна функција је полиномска функција другог степена. Општа форма квадратне функције је:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Квадратна једначина је потпуна уколико су и $b$ и $c$ различити од нуле, у супротном је не-потпуна.

Граф квадратне функције је парабола чија је оса симетрије паралелна са y-осом. Уколико је $a>0$, парабола је отворена на горе (смеје се), а уколико је $a<0$, парабола је отворена на доле (плаче). Коефицијент a контролише брзину којом функција расте, односно ширину параболе. Коефицијент $b$, заједно са $a$, контролише осу симетрије, где је $x = -\frac{b}{2a}$ . Коефицијент $c$ контролише висину на којој је парабола, конкретније, то је тачка где парабола сече y-осу. Минимум и максимум функције се одређује на следећи начин: најпре се одреди први извод који се изједначи са нулом и доатле добијемо $x$ координату $x = -\frac{b}{2a}$ , затим тако добијено $x$ уврстимо у функцију и добијемо вредност $y$ координате

$y=-\dfrac{D}{4a}$ , што нам даје и тачку минимума, односно максимума, у зависности од коефицијента *a*, *T(x,y)*.

Уколико изједначимо квадратну функцију са 0, добијамо квадратну једначину. Решења квадратне једначине називамо коренима. Корени се добијају помоћу следеће формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

где је дискриминанта дефинисана као

$$D=b^2-4ac$$

Ако је дискриминанта позитивна, постоје два различита корена, оба реална. Код квадратних једначина са целобројним коефицијентима, ако је дискриминанта савршен квадрат, онда су корени рационални бројеви, док у осталим случајевима могу бити ирационални. Ако је дискриминанта једнака нули, постоји тачно један корен, и тај корен је реалан број. Он се некад назива двоструким кореном. Ако је дискриминанта негативна, нема реалних корена. Уместо њих постоје два различита (не реална) комплексна корена, који су комплексни коњугати један другог.

Квадратна једначина се може изразити у три форме:

1. Генерална форма $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$
2. Форма у облику фактора $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, где су $x_1$ и $x_2$ решења квадратне једначине
3. Канонски (стандардни) облик $f(x)=a(x-h)^2+k$, где су h и k x и y координате темена параболе

## 3.3 Полиномска функција

Ако је *n* природан број или нула може се дефинисати функција:

$$\text{(1)}\quad P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \qquad (a_n\neq 0)$$

где су $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ реални бројеви. Ово је ***полином*** или ***полиномска функција*** степена *n*. Она је дефинисана за свако $x\in R$.

Полиноми су, са рачунарске тачке гледишта, најједноставније функције, јер се њихова вредност може израчунати у свакој тачки, само применом основних операција.

За сваки полином $P$ степена n облика (1) постоји тачно $n$ комплексних (или реалних) бројева $z_1, z_2, \ldots, z_n$ таквих да је

$$\textbf{(2) } P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n), \text{ за свако } x \in R.$$

За полином облика (2) кажемо да је факторисан, а за бројеве $z_1, z_2, \ldots, z_n$ називамо коренима или нулама полинома $P$. Очигледно је $P(z_i) = 0$ за свако $i = 1, \ldots, n$.

Међу коренима може бити међусобно једнаких бројева. Ако се број $z$ појављује $r$ пута као корен полинома, кажемо да је то корен реда $r$. Дакле, корену реда $r$ одговара у факторизацији (2) фактор облика $(x - z)^r$.

Корени чији је имагинарни део различит од нуле (тзв. имагинарни корени) појављују се у паровима: ако је $P(z) = 0$, онда је и $P(\bar{z}) = 0$. Дакле, пару имагинарних корена реда $s$ $(s \geq 1)$ одговара фактор $((x - z)(x - \bar{z}))^s$. Ако ставимо да је $z = \alpha + i\beta$, $\bar{z} = \alpha - i\beta$, добијамо да је:

$$((x - z)(x - \bar{z}))^s = (x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2))^s = (x^2 + px + q)^s$$

где је $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$, па је $p^2 - 4q < 0$.

Према томе, факторизација (2) може се записати у облику:

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{r1}(x - x_2)^{r2} \ldots (x - x_k)^{rk}(x^2 + p_1x + q_1)^{s1} \ldots (x^2 + p_mx + q_m)^{sm}$$

где су $x_1, \ldots, x_k$ реални корени реда $r_1, \ldots, r_k$ респективно, а остали одговарају комплексним коренима.

## 3.4 Експоненцијална функција

У математици експоненцијална функција је функција облика $e^x$, где је $e$ број (приближно 2.718281828).

Експоненцијална функција је реална функција једне променљиве, дефинисана за реалне бројеве, која је увек позитивна и растућа. Како се $x$ повећава, тако и функција брже расте. Никада не додирује x-осу, мада јој је x-оса једина асимптота. Њена инверзна функција, природни логаритам, је дефинисана само за позитивне вредности променљиве $x$.

Понекад се, нарочито у науци, израз експоненцијална функција користи да означи функцију облика $a^x$, где је $a$, које се назива *база* или *основа*, било који позитиван реалан број. Уопштеније, $x$ може бити било који реалан или комплексан број.

Употребом природног логаритма, може се дефинисати нешто генералнија експоненцијална функција. Функција

$$a^x = e^{x\ln a}$$

за свако $a>0$, и за сваки реалан број $x$ се назива **експоненцијална функција за основу *a***.

Експоненцијална функција са основом $a > 1$ је монотоно растућа на $R$, док је експоненцијална функција $0 < a < 1$монотоно опадајућа. Ако је $a = 1$, онда је $a^x = 1$ за свако $x \in R$. За свако $x$ и за сваку позитивну основу важи да је $a^x > 0$.

## 3.5 Логаритамска функција

Како је експоненцијална функција са основом $b \neq 1$ строго монотона, она има инверзну функцију – то је логаритамска функција. Имамо да је

$$y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$$

Логаритамска функција се може дефинисати за сваку позитивну основу $b \neq 1$; њен домен је интервал $(0,+\infty)$. Ако је $b > 1$, ова функција је монотоно растућа, а за $0 < b < 1$ монотоно опадајућа. Логаритам није дефинисан за основу $b = 1$.

Логаритам за основу $e$ се назива ***природним логаритмом*** и традиционално се обележава са $\ln x$. У новије време преовлађује ознака $\log x$ (која је раније коришћена за логаритме за основу 10).

## 3.6 Тригонометријске и инверзне тригонометријске функције

Тригонометријске функције су функције угла: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс. Функције се могу дефинисати за углове троугла полазећи од геометријских чињеница, а затим се периодично продужавају на целу реалну осу.

Код сваког правоуглог троугла, можемо уочити шест различитих односа његових страница: однос насправне и хипотенузе, налегле и хипотенузе, насправне и налегле и тако даље. Сваки од тих односа представља по једну тригонометријску функцију и има своје историјско име и скраћеницу која омогућава једноставнији запис.

$$\sin(\alpha) = \frac{naspramna\ kateta}{hipotenuza} = \frac{a}{c}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{nalegla\ kateta}{hipotenuza} = \frac{b}{c}$$
$$tg(\alpha) = \frac{naspramna\ kateta}{nalegla\ kateta} = \frac{a}{b}$$
$$ctg(\alpha) = \frac{nalegla\ kateta}{naspramna\ kateta} = \frac{b}{a}$$
$$\sec(\alpha) = \frac{hipotenuza}{nalegla\ kateta} = \frac{c}{b}$$
$$\csc(\alpha) = \frac{hipotenuza}{naspramna\ kateta} = \frac{c}{b}$$

Основне тригонометријске функције су периодичне и зато немају инверзну функцију на скупу R. На пример, једначина *sin(y) = x* има бесконачно много решења *y* за свако дато $x \in [-1,1]$. Међутим, ако тражим решење ове једначине само на неком од интервала дужине $\pi$ на коме је функција $y \mapsto \sin y$ монотона, добићемо једно и само једно решење за свако $y \mapsto \sin y$. Ако се решење тражи на сегменту $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, добија се функција:

$$x \mapsto \arcsin x$$

На сличан начин се дефинишу и остале инверзне тригонометријске функције:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \qquad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \qquad y \in [0, \pi]$$
$$y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy \qquad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

### 3.6.1 Синус

Синус је тригонометријска функција. Дефинише се као однос хипотенузе и наспрамне катете неког одговарајућег правоуглог троугла који је изграђен над датим углом, чији се синус одређује. Синусна функција је дефинисана за сваки угао *x*.

Особине функције синус:

- домен функције је цела x-оса
- кодомен функције је интервал [-1, 1]
- функција је непарна
- период функције је $2\pi$

- нуле функције су у тачкама $k\pi$
- локални максимуми су у тачкама $((2k+\frac{1}{2})\pi, 1)$
- локални минимуми су у тачкама $((2k-\frac{1}{2})\pi, -1)$
- превоји су у тачкама $k\pi$

### 3.6.2 Косинус

Косинус је тригонометријска функција која се дефинише за неки угао као однос дужина хипотенузе и припадајуће катете над датим углом, произвољног правоуглог троугла. Косинусна функција је дефинисана за сваки угао *x*.

Особине косинусне функције:

- домен функције је цела x-оса
- кодомен функције је интервал [-1, 1]
- функција је парна
- период функције је $2\pi$
- нуле функције су у тачкама $(2k+\frac{1}{2})\pi$
- локални минимуми су у тачкама $(2k\pi, 1)$
- локални максимуми су у тачкама $((2k+1)\pi, -1)$
- превоји су у тачкама $(2k+\frac{1}{2})\pi$

### 3.6.3 Тангенс

Тангенс је тригонометријска функција изведена од синуса и косинуса. Дефиниција јој гласи:

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Особине функције тангенс:

- домен функције је $((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi)$
- кодомен функције је цела y-оса
- функција је непарна
- период функције је $\pi$
- нуле функције су у тачкама $k\pi$
- превоји су у тачкама $k\pi$

- асимптоте су $(k+\frac{1}{2})\pi$

### 3.6.4 Котангенс

Котангенс је тригонометријска функција изведена од косинуса и синуса. Дефиниција јој гласи:

$$ctg(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Особине функције тангенс:

- домен функције је $(k\pi,(k+1)\pi)$
- кодомен функције је цела y-оса
- функција је непарна
- период функције је $\pi$
- нуле функције су у тачкама $(k+\frac{1}{2})\pi$
- превоји су у тачкама $(k+\frac{1}{2})\pi$
- асимптоте су $k\pi$

### 3.6.5 Секанс

Секанс је тригонометријска функција изведена из функције косинуса. Дефиниција гласи:

$$\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$

Особине функције секанс:

- домен функције је $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$
- кодомен функције је $(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$
- функција је парна
- период функције је $2\pi$
- локални максимуми су у тачкама $((2k+1)\pi,-1)$
- локални минимуми су у тачкама $(2k\pi,1)$
- асимптоте су $(k+\frac{1}{2})\pi$

### 3.6.6 Косеканс

Косеканс је тригонометријска функција изведена из синуса. Дефиниција јој гласи:

$$\cos ec(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Особине функције косеканс:

- домен функције је $(k\pi, (k+2)\pi)$
- кодомен функције је $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$
- функција је непарна
- период функције је $2\pi$
- локални максимуми су у тачкама $(2k + \frac{1}{2})\pi$
- локални минимуми су у тачкама $(2k - \frac{1}{2})\pi$
- асимптоте су $k\pi$

### 3.6.7 Аркус синус

Аркус синус је функција инверзна синусној функцији на њеном ограниченом интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Користи се за одређивање величине угла у овом опсегу, када је позната вредност његовог синуса.

Особине функције аркус синус:

- домен функције је [-1, 1]
- кодомен функције је $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- функција је непарна
- нула функције је 0
- превоји су у тачкама (0,0)

### 3.6.8 Аркус косинус

Аркус косинус је функција инверзна косинусној функцији на интервалу њеног домена $[0, \pi]$. Користи се за одређивање величине угла у овом опсегу када је позната вредност његовог косинуса.

Особине функције аркус косинус:

- домен функције је [-1, 1]
- кодомен функције је $[0,\pi]$
- функција је непарна
- нула функције је 1
- превоји су у тачкама $(0,\frac{\pi}{2})$

### 3.6.9 Аркус тангенс

Аркус тангенс је функција инверзна функцији тангенса на интервалу њеног домена $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Користи се за одређивање величине угла када је позната вредност његовог тангенса.

Особине функције аркус тангенс:

- домен функције је цела x-оса
- кодомен функције је $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
- функција је непарна
- нула функције је 0
- превоји су у тачкама (0, 0)
- асимптоте $y=\pm\frac{\pi}{2}$

### 3.6.10 Аркус котангенс

Аркус котангенс је функција инверзна функцији котангенса на интервалу њеног домена $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Користи се за одређивање величине угла када је позната вредност његовог котангенса.

Особине функције аркус котангенс:

- домен функције је цела x-оса
- кодомен функције је $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
- функција је непарна
- асимптоте y = 0

## 3.7 Хиперболичке и инверзне хиперболичке функције

У вези са експоненцијалном функцијом су такозване ***хиперболичке функције***: синус, косинус, тангенс и котангенс хиперболички. Свака од ови функција има и своју инверзну функцију, која има префикс *ареа*, што треба разликовати од префикса *аркус* код обичких тригонометријских функција.

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Ове функције су добиле своје називе по извесној аналогији са тригонометријским функцијама. Непосредно из дефиниције може се видети да је:

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$$
$$\sec h^2(x) = 1 - \tan^2(x)$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

Међутим, иако су формуле аналогне, хиперболичке функције по облику графика не личе на одговарајуће тригонометријске. Ниједна од њих није периодична, а функције синус, косинус и котангенс хиперболички су неограничене.

### 3.7.1 Синус хиперболички

Дефиниција функције је:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Особине функције синус хиперболички:

- домен функције је цела x-оса
- кодомен функције је цела y-оса
- функција је непарна

- нула функције је (0,0)
- превоји су у тачкама (0, 0)
- асимптоте нема

### 3.7.2 Косинус хиперболички

Дефиниција функције је:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Особине функције косинис хиперболички:

- домен функције је цела x-оса
- кодомен функције је $[1, +\infty)$
- функција је парна
- локални минимум (0, 1)
- асимптоте нема

### 3.7.3 Тангенс хиперболички

Дефиниција функције је:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Особине функције тангенс хиперболички:

- домен функције је цела x-оса
- кодомен функције је (-1, 1)
- функција је непарна
- нула функције је (0,0)
- превоји су у тачкама (0, 0)
- асимптоте $y = \pm 1$

### 3.7.4 Котангенс хиперболички

Дефиниција функције је:

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Особине функције котангенс хиперболички:

- домен функције је $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$
- кодомен функције је $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$
- функција је непарна
- асимптоте $y = \pm 1$

### 3.7.5 Ареа синус хиперболички

Дефиниција функције је:

$$\arcsin h(x) = \sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Особине функције ареа синус хиперболички:

- домен функције је цела x-оса
- кодомен функције је цела y-оса
- функција је непарна
- нула функције је (0,0)
- превоји су у тачкама (0, 0)
- асимптоте нема

### 3.7.6 Ареа косинус хиперболички

Дефиниција функције је:

$$\arccos h(x) = \cosh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x-1}\sqrt{x+1})$$

Особине функције ареа косинус хиперболички:

- домен функције је $[1, +\infty)$
- кодомен функције је $(0, +\infty)$
- нула функције је (1,0)
- превоја нема
- асимптоте нема

### 3.7.7 Ареа тангенс хиперболички

Дефиниција функције је:

$$arctgh(x) = tgh^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x))$$

Особине функције ареа тангенс хиперболички:

- домен функције је (-1, 1)
- кодомен функције је цела y-оса
- нула функције је (0,0)
- превоји су у тачкама (0, 0)
- асимптоте $x = \pm 1$

### 3.7.8 Ареа котангенс хиперболички

Дефиниција функције је:

$$arcctgh(x) = ctgh^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\log(1+\frac{1}{x}) - \log(1-\frac{1}{x})), x \neq 0$$

$$arcctgh0 = \frac{i\pi}{2}$$

Особине функције ареа котангенс хиперболички:

- домен функције је $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$
- кодомен функције је цела y-оса
- нула функције нема
- функција има прекид у [-1, 1]
- асимптоте y =0 и $x = \pm 1$

# 4 Едукативни веб аплети креирани у GeoGebra-и

У конструкцији интернет презентације о основним функцијама коришћен је HTML, CSS и JavaScript. Интернет презентација садржи математички опис одређене материје и GeoGebra-ине аплете који ближе објашњавају изнету материју. GeoGebra-ини аплети су повезани у HTML странице као JAVA аплети.

Презентација је подељена у две секције. Свака секција се бави одређеном темом

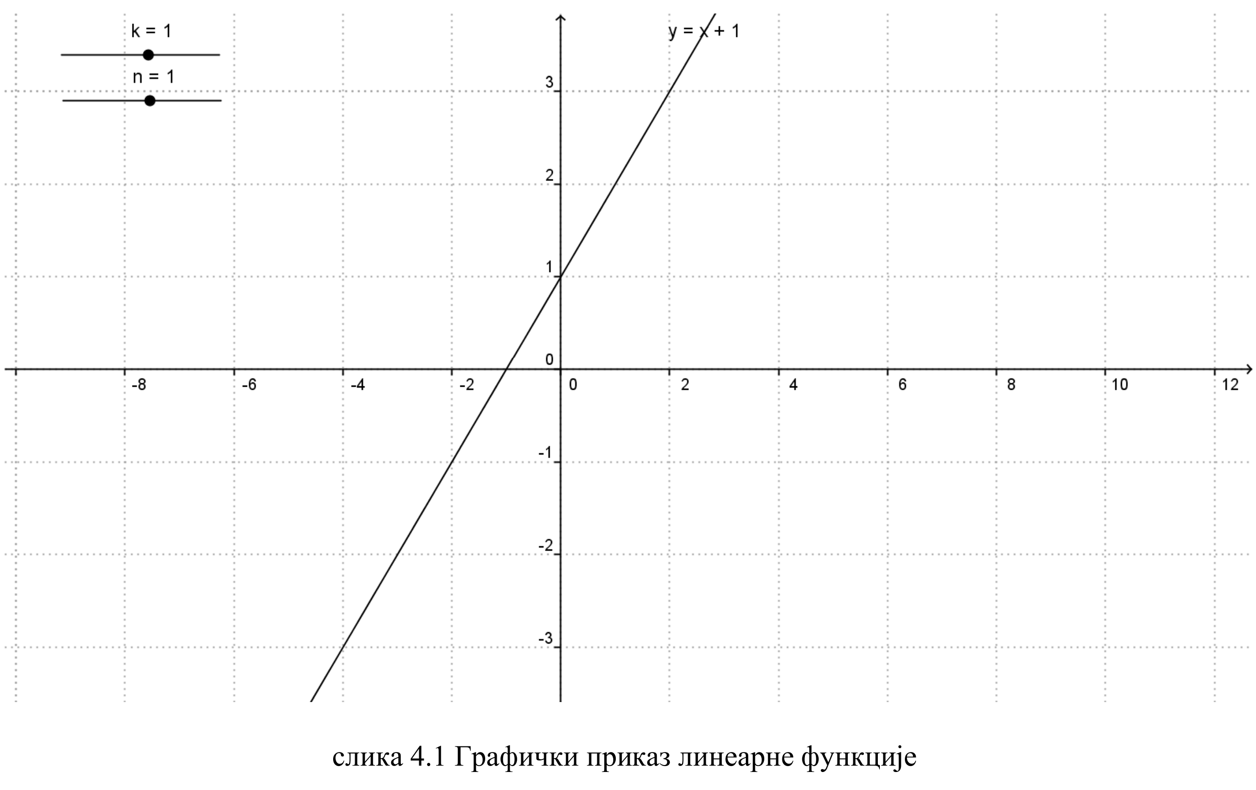
1. Основне функције
   a. линеарна
   b. полиномска
   c. експоненцијална
   d. логаритамска
   e. тригонометријске и инверзне тригонометријске
      i. синус
      ii. косинус
      iii. тангенс
      iv. котангенс
      v. секанс
      vi. косеканс
      vii. аркус синус
      viii. аркус косинус
      ix. аркус тангенс
      x. аркус котангенс
   f. хиперболичке и инверзне хиперболичке
      i. синус хиперболички
      ii. косинус хиперболички
      iii. тангенс хиперболички
      iv. котангенс хиперболички
      v. ареа синус хиперболички
      vi. ареа косинус хиперболички
      vii. ареа тангенс хиперболички
      viii. ареа котангенс хиперболички
2. Цртање функција
   a. експлицитно задавање
   b. имплицитно задавање
   c. параметарско задавање

У оквиру основних функција свака функција је покривена математичком теоријом која стоји иза ње, и додатно је допуњена аплетом програмског пакета GeoGebra, који омогућава посетиоцу да тестира изнету теорију. Аплети подржавају одређен ниво комуникације са корисником , тако да посетилац може да мења унапред задате параметре аплета и да посматра резултате тих промена.

Друга секција омогућава кориснику да нацрта неку сложену функцију, и посматра њен изглед. Друга секција је подељена на три подсекције: експлицитно задавање, имплицитно задавање и параметарско задавање. Свака од ових секција је направљена тако да кориснику омогући брзо и ефикасно упознавање са сваком врстом функција.

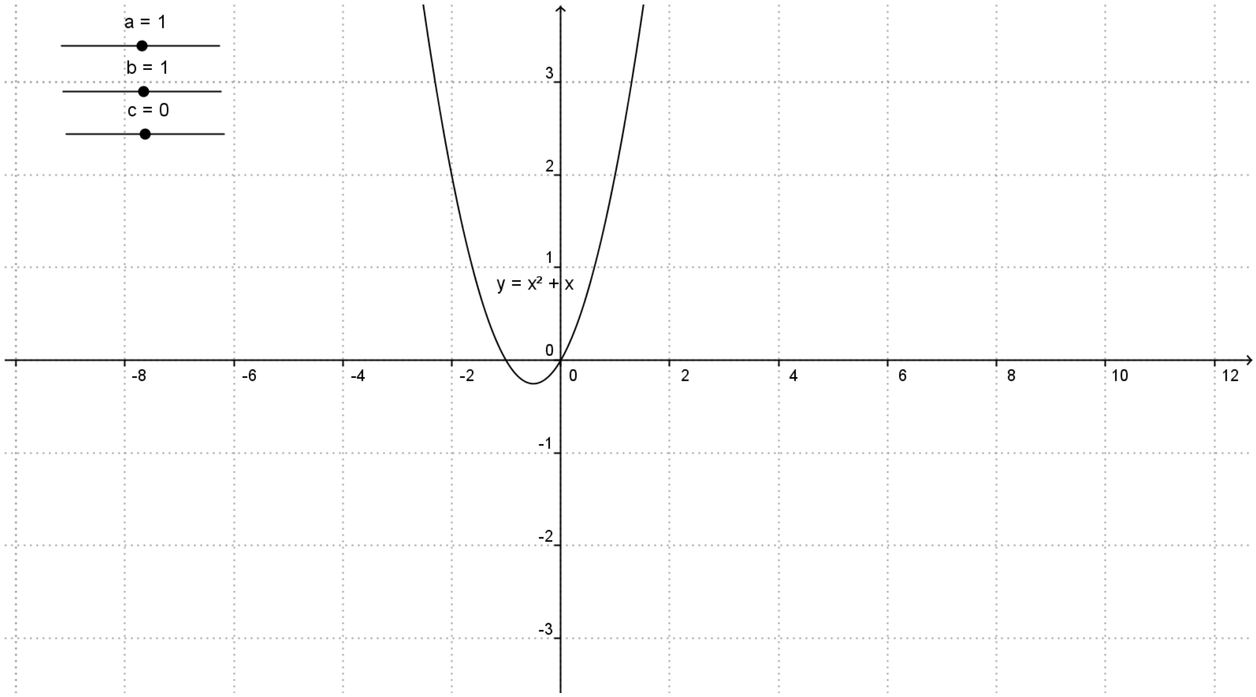
За све аплете ћемо приложити само слике изгледа главног дела радне површине. Дајемо као напомену да су сви аплети рађени у бета верзији GeoGebra4.0 тако да дугорочна потпуна функционалност није гарантована. Срећом углавном је могуће по изласку нове ревизије GeoGebra-е отворити старе .ggb датотеке и извести их као HTML страницу. По добијању новостворене странице потребно је наћи комплетан код који описује аплет, који је садржан у тагу <applet>GEOGEBRA_KOD<applet> и тај део прекопирати у нашу веб страницу.

## 4.1 Линеарна функција



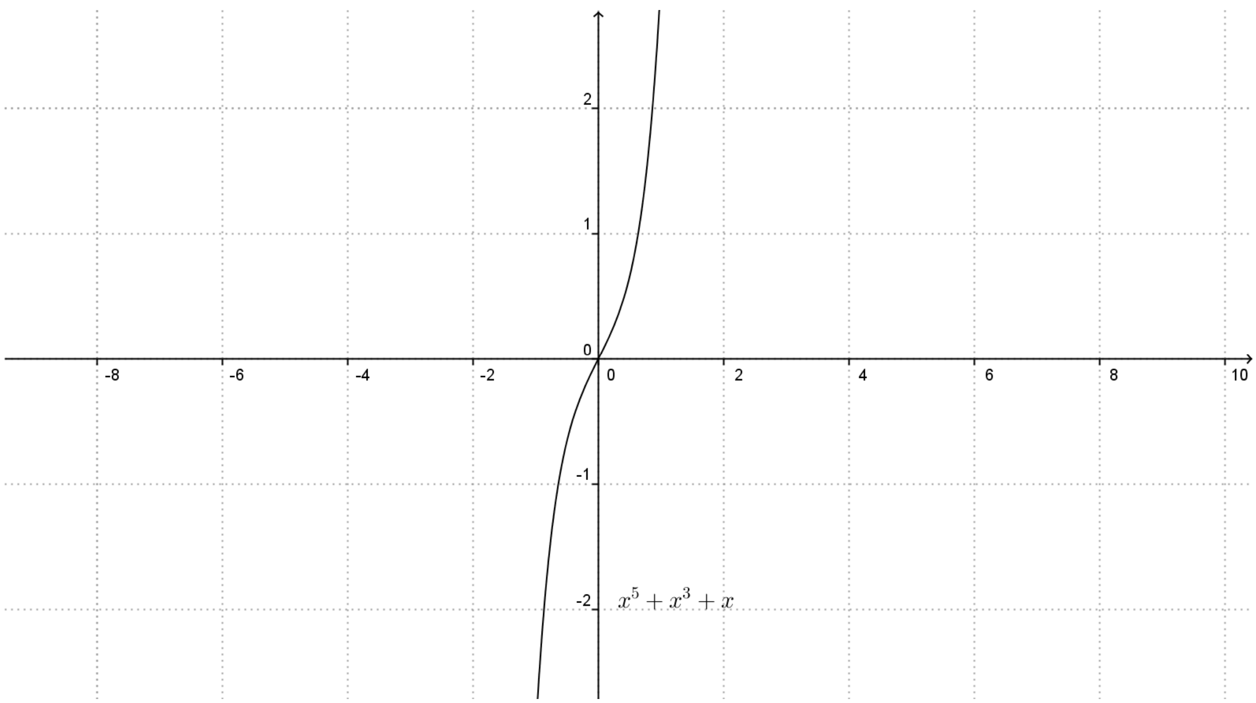

слика 4.1 Графички приказ линеарне функције

## 4.2 Квадратна функција



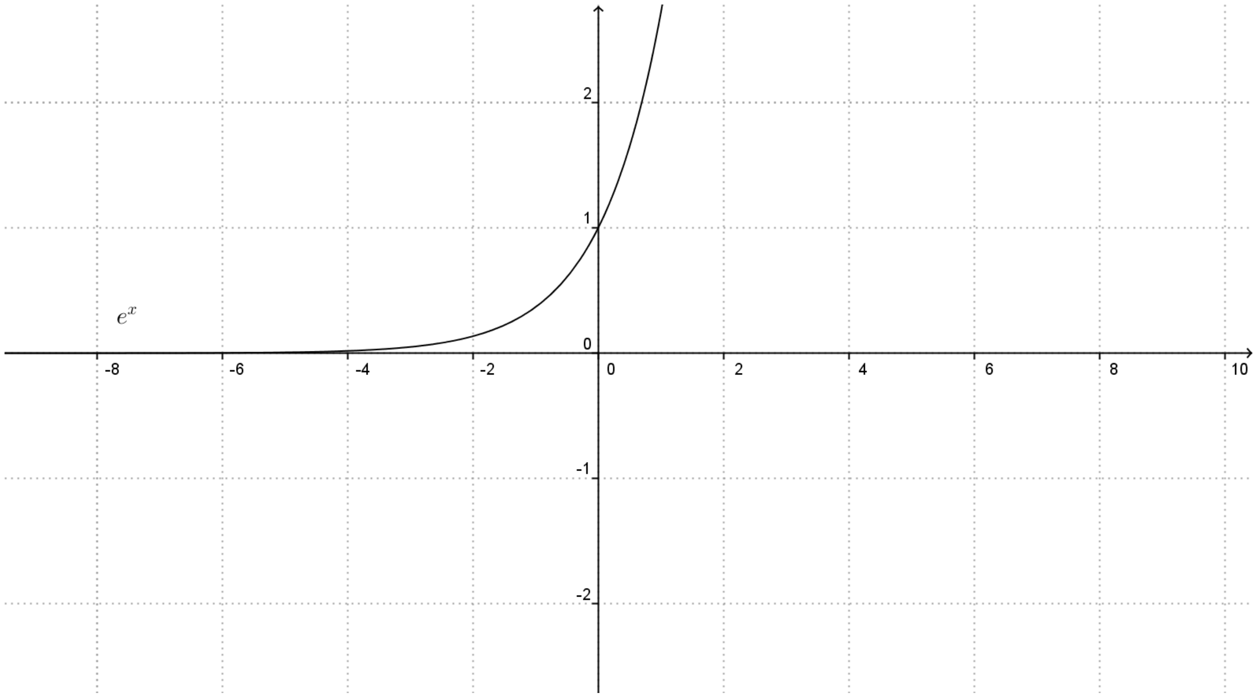

Слика 4.2 Графички приказ квадратне функције

## 4.3 Полиномска функција



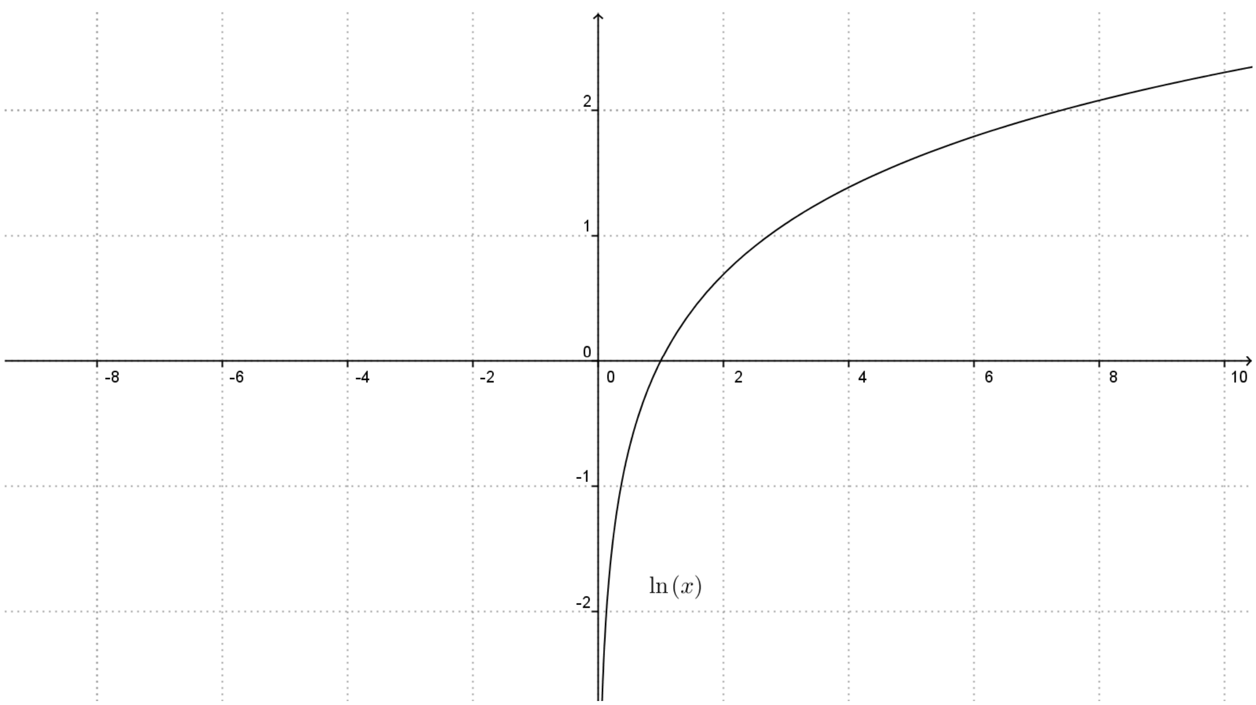

Слика 4.3 Графички приказ полиномске функције

## 4.4 Експоненцијална функција




Слика 4.4 Графички приказ експоненцијалне функције

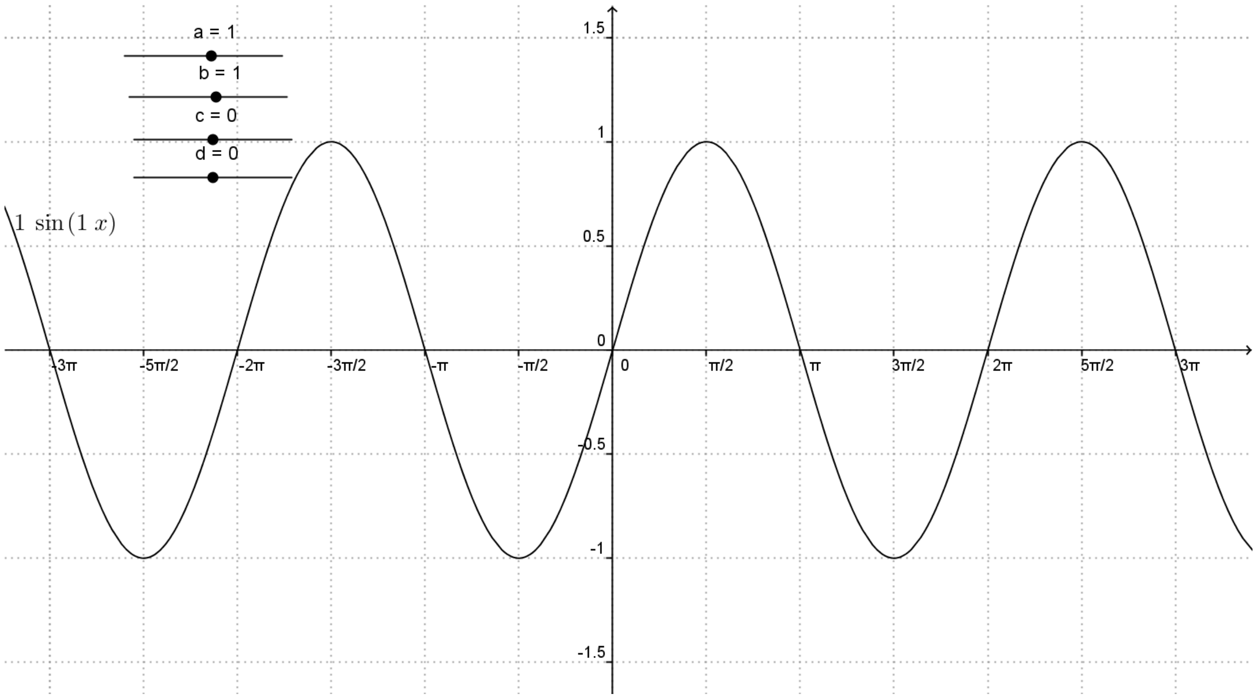
## 4.5 Логаритамска функција




Слика 4.5 Графички приказ логаритамске функције

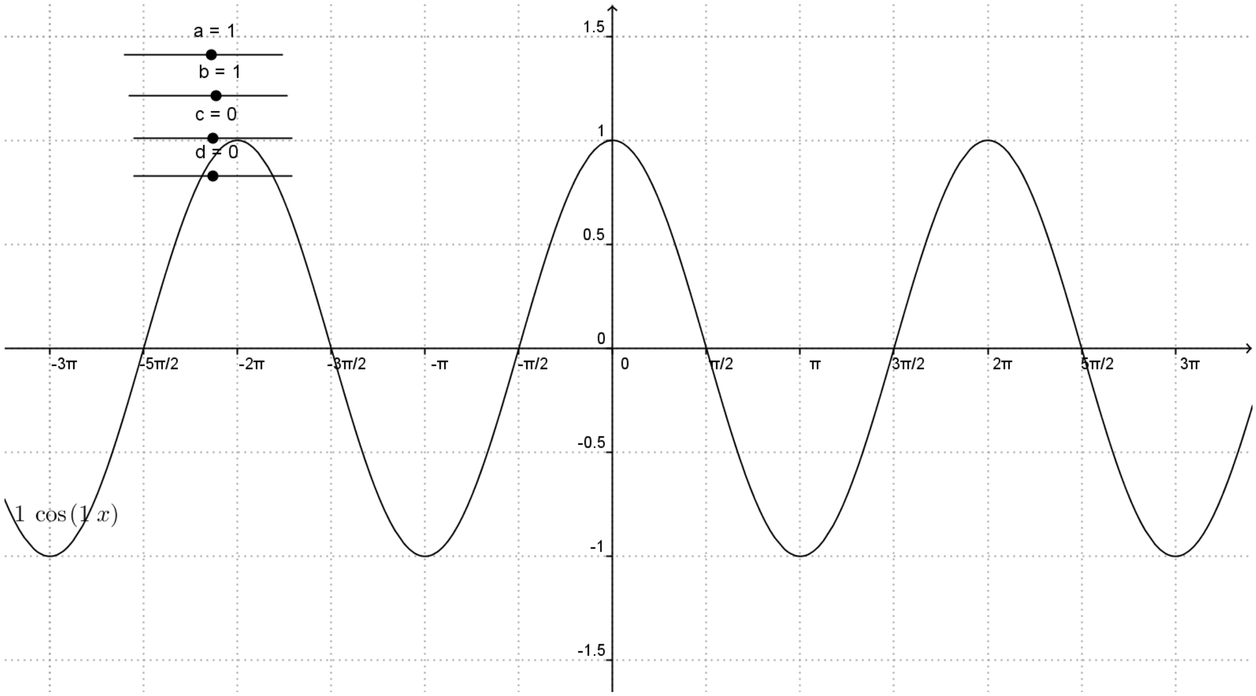
## 4.6 Тригонометријске и инверзне тригонометријске функције

### 4.6.1 Синус



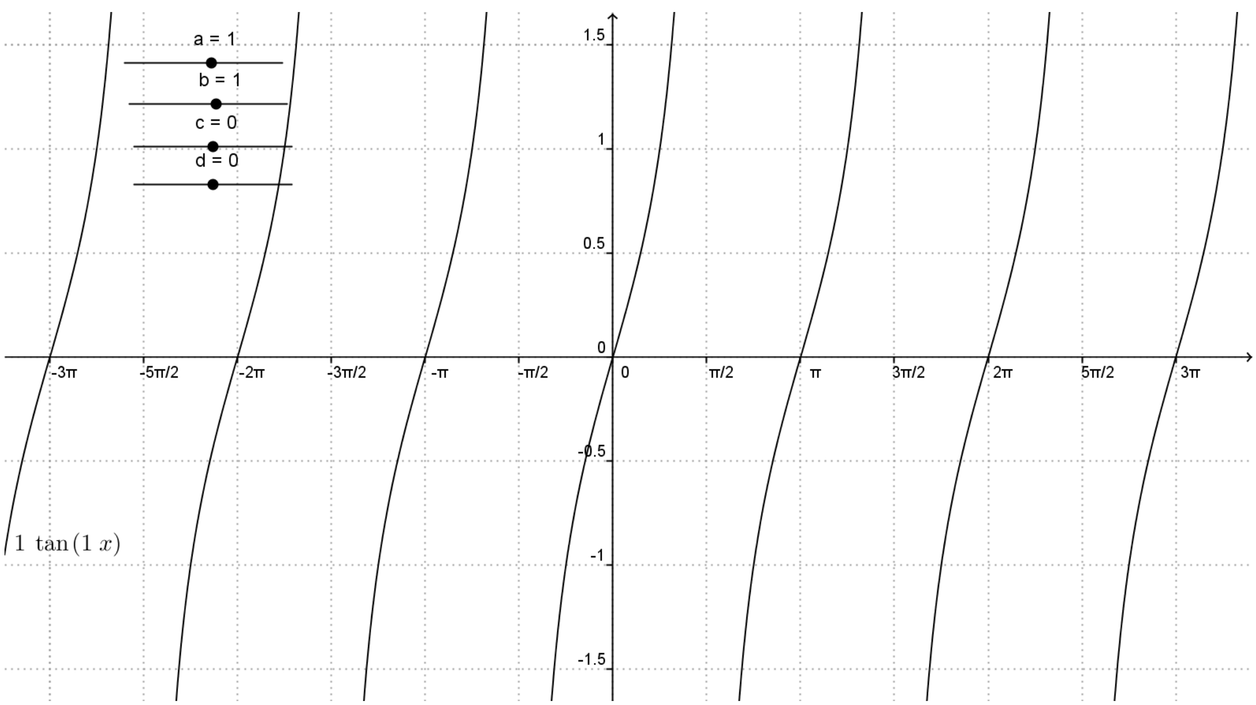

Слика 4.6.1 Графички приказ синусне функције

### 4.6.2 Косинус



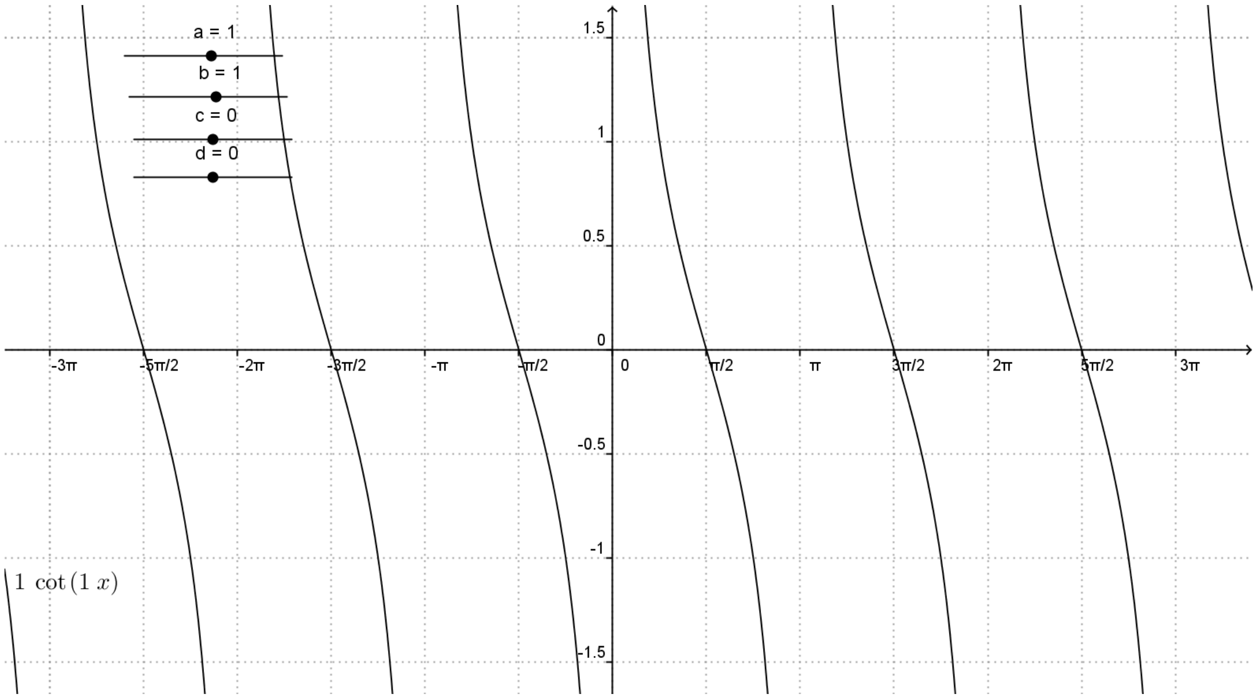

Слика 4.6.2 Графички приказ косинусне функције

### 4.6.3 Тангенс



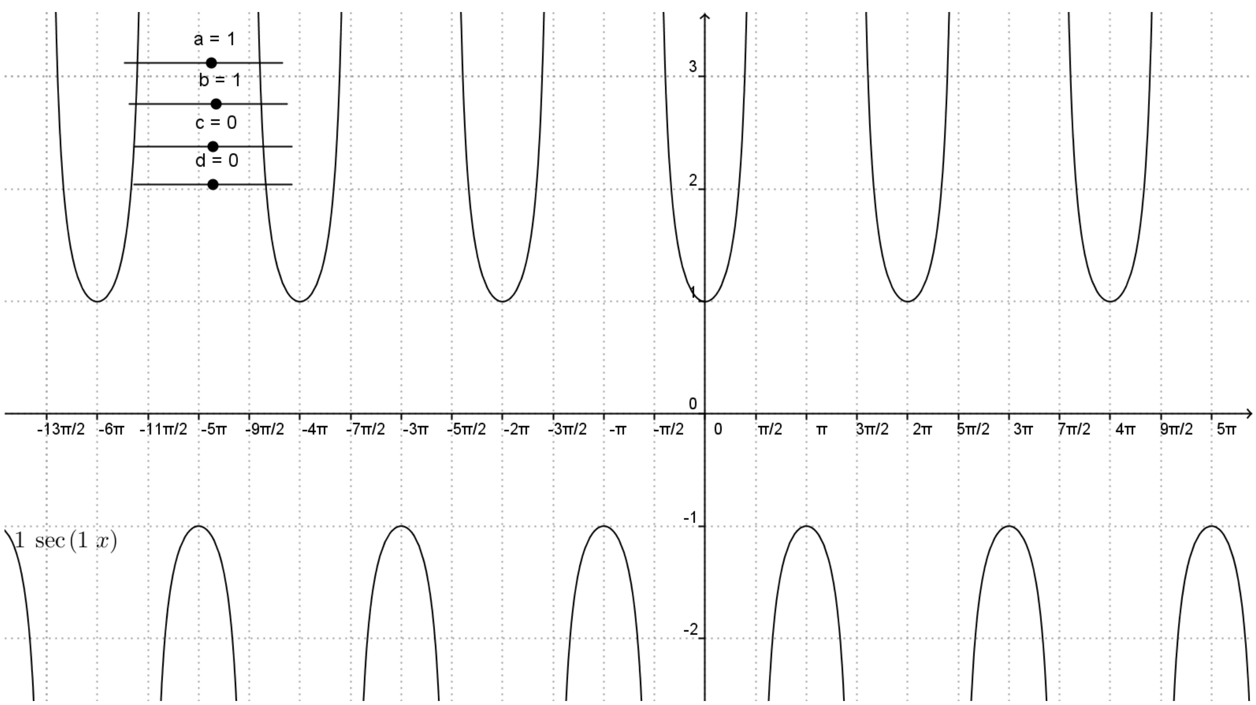

Слика 4.6.3 Графички приказ функције тангенс

### 4.6.4 Котангенс



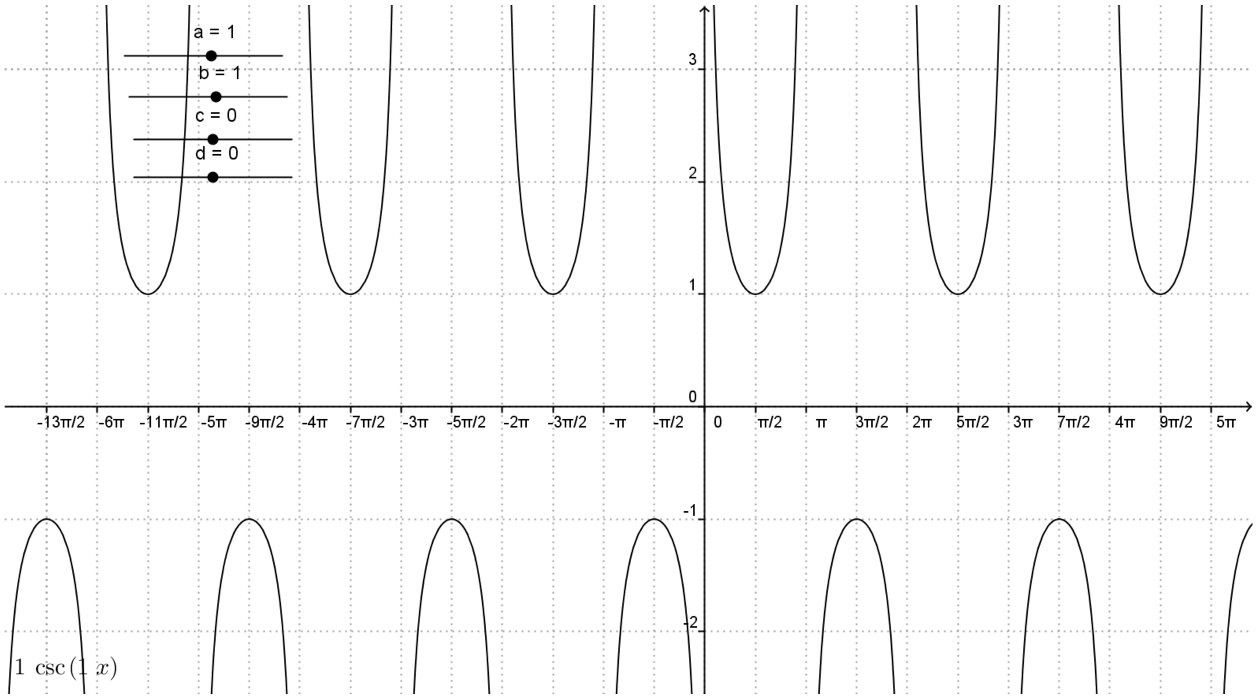

Слика 4.6.4 Графички приказ функције котангенс

### 4.6.5 Секанс



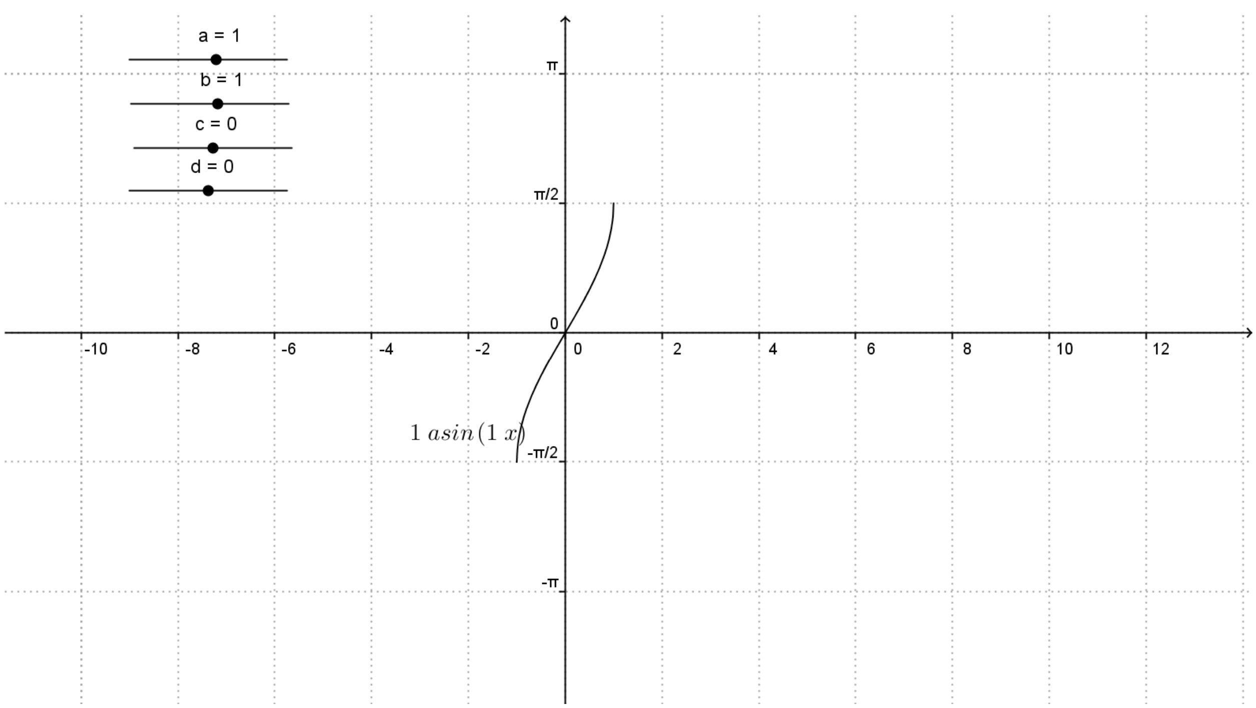

Слика 4.6.5 Графички приказ функције секанс

### 4.6.6 Косеканс



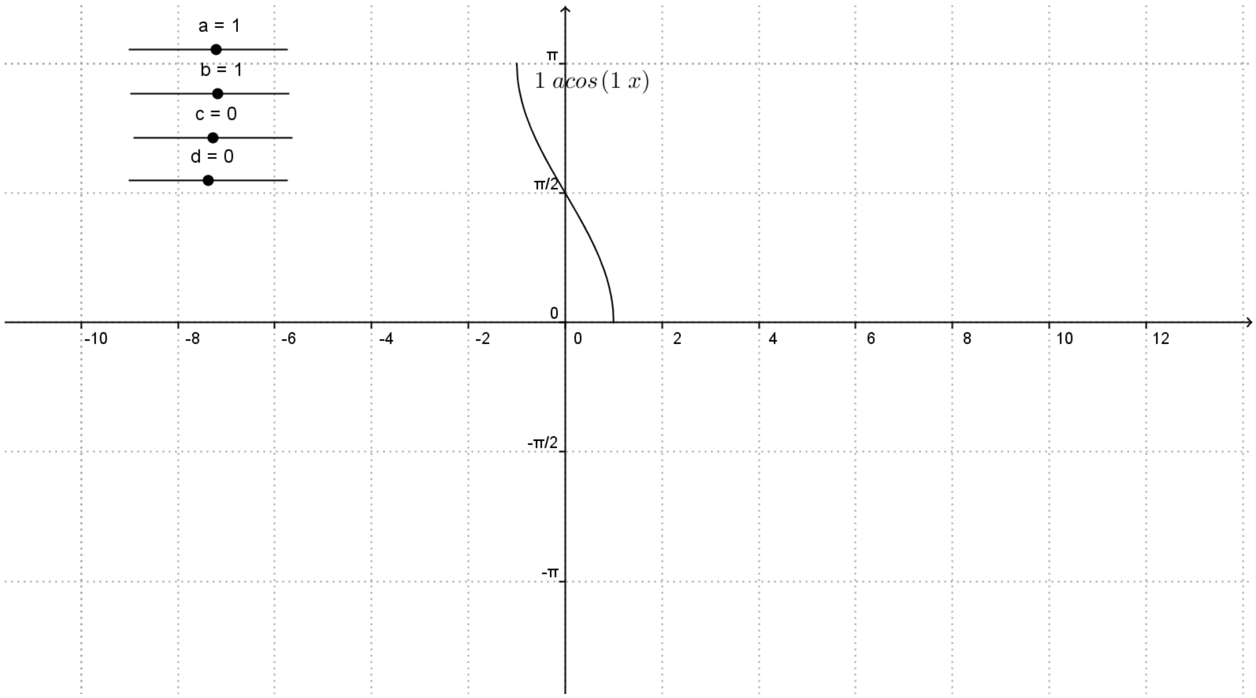

Слика 4.6.6 Графички приказ функције косеканс

### 4.6.7 Аркус синус



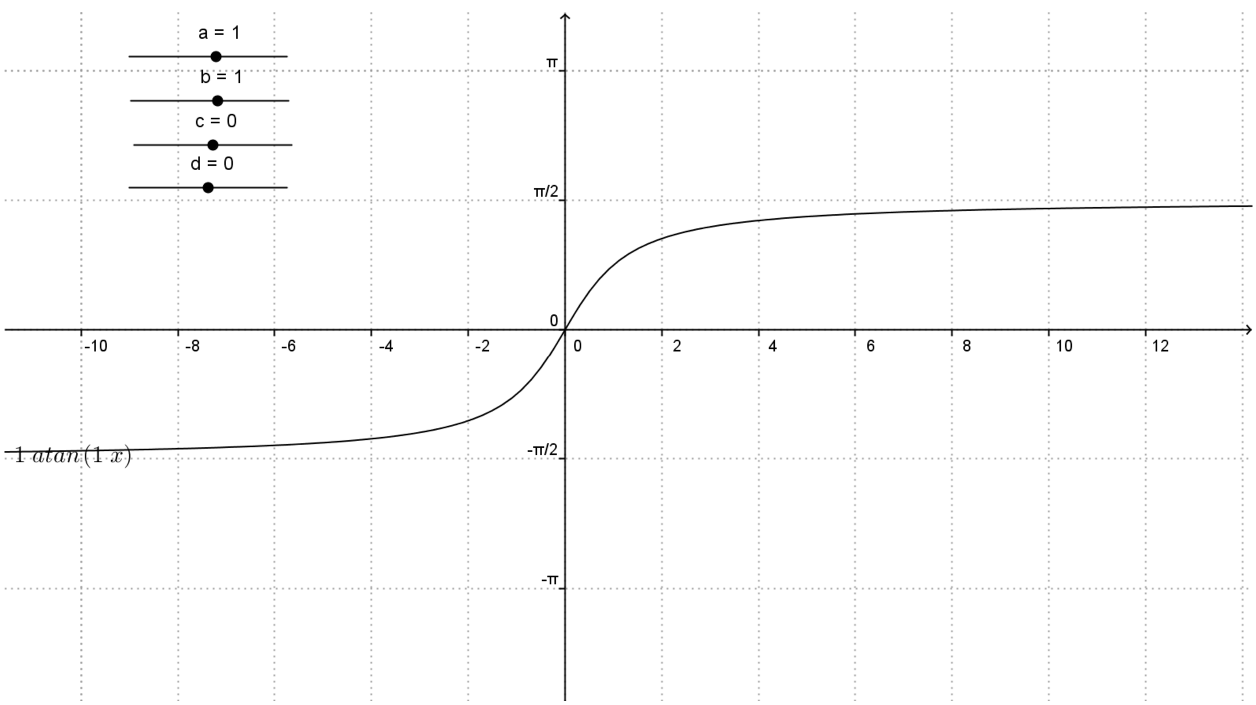

Слика 4.6.7 Графички приказ функције аркус синус

### 4.6.8 Аркус косинус




Слика 4.6.8 Графички приказ функције аркус косинус

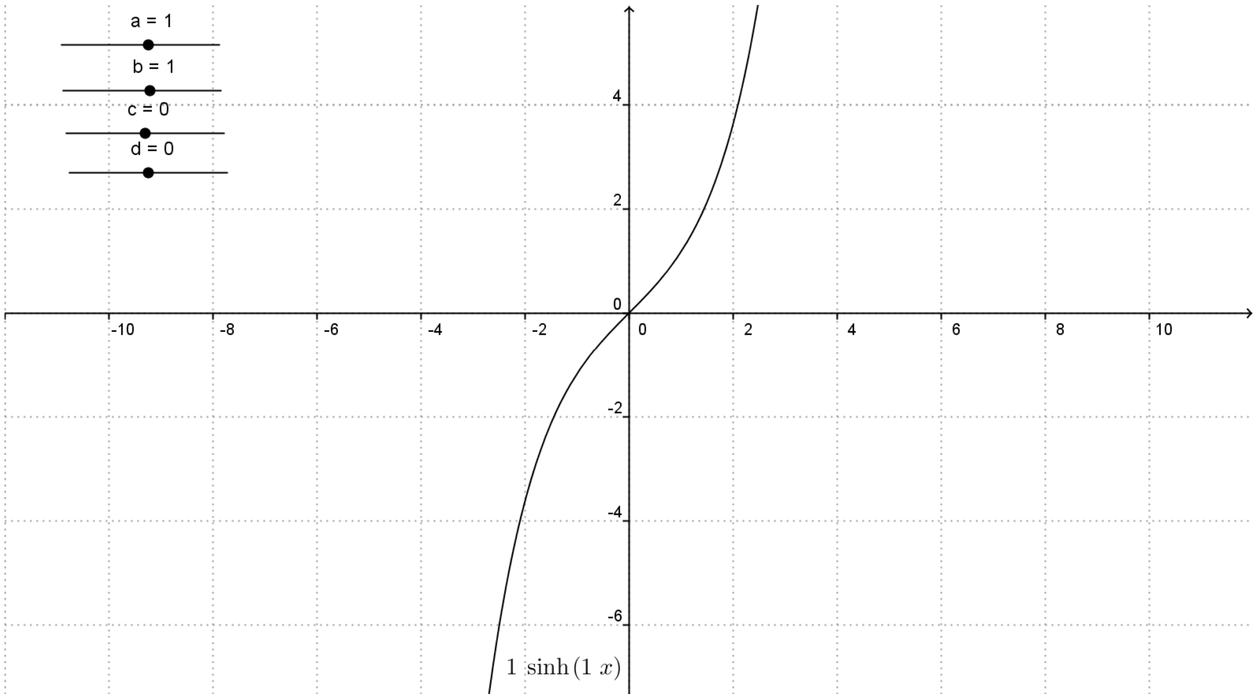
### 4.6.9 Аркус тангенс




Слика 4.6.9 Графички приказ функције аркус тангенс

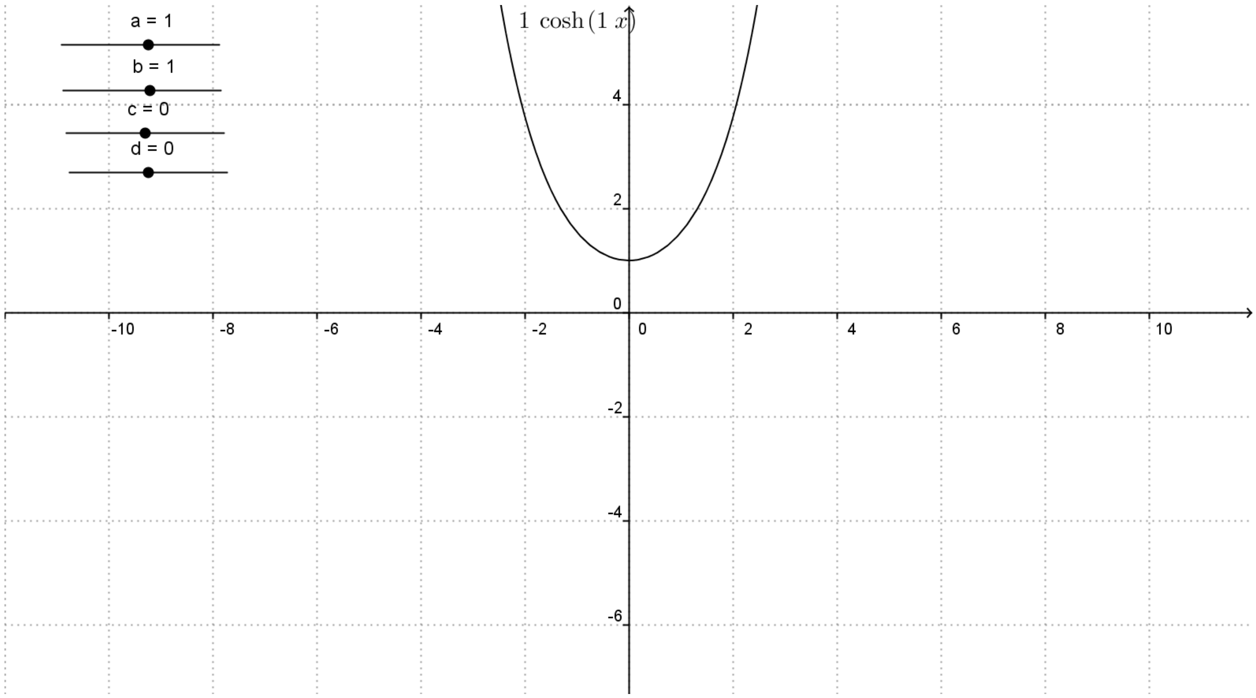
## 4.7 Хиперболичке и инверзне хиперболичке функције

### 4.7.1 Синус хиперболички



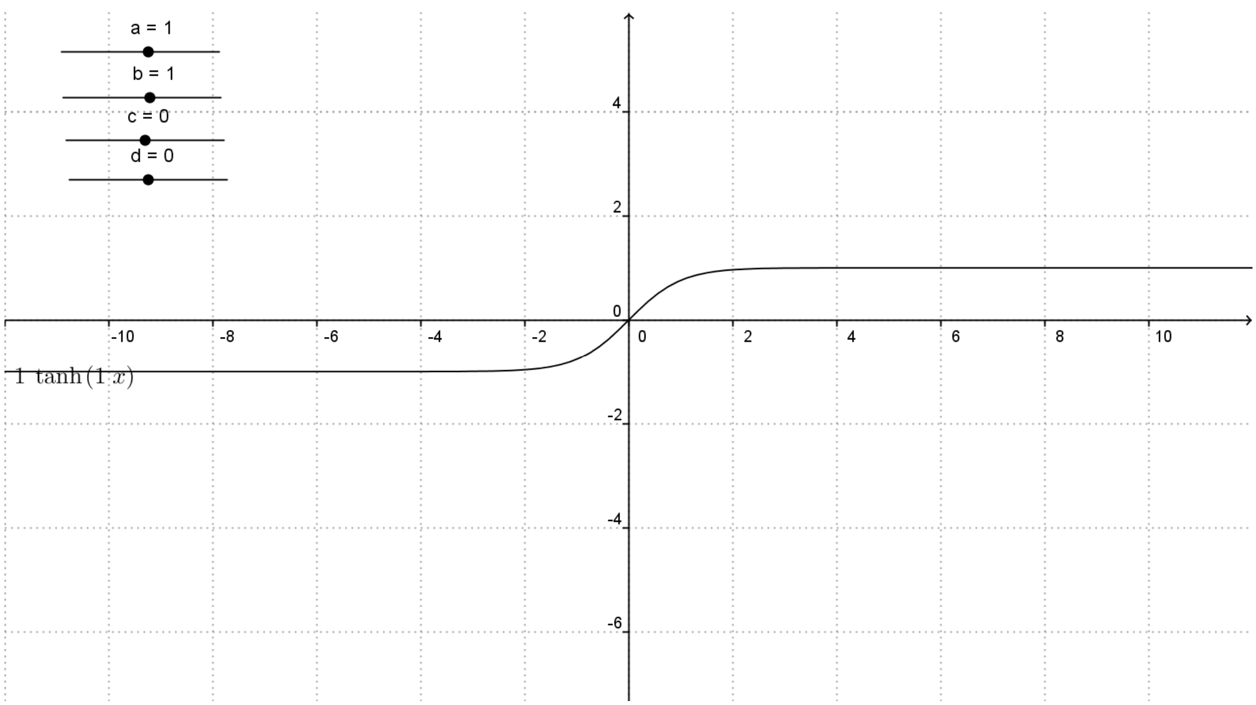

Слика 4.7.1 Графички приказ функције синус хиперболички

### 4.7.2 Косинус хиперболички



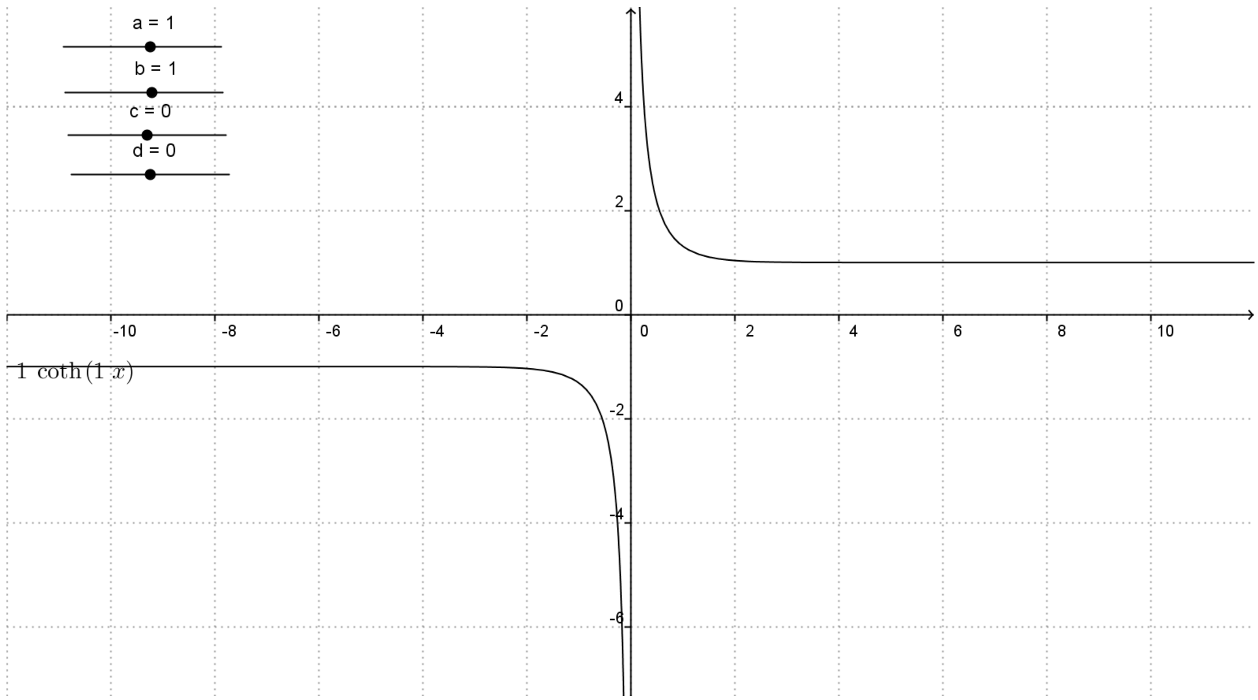

Слика 4.7.2 Графички приказ функције косинус хиперболички

### 4.7.3 Тангенс хиперболички



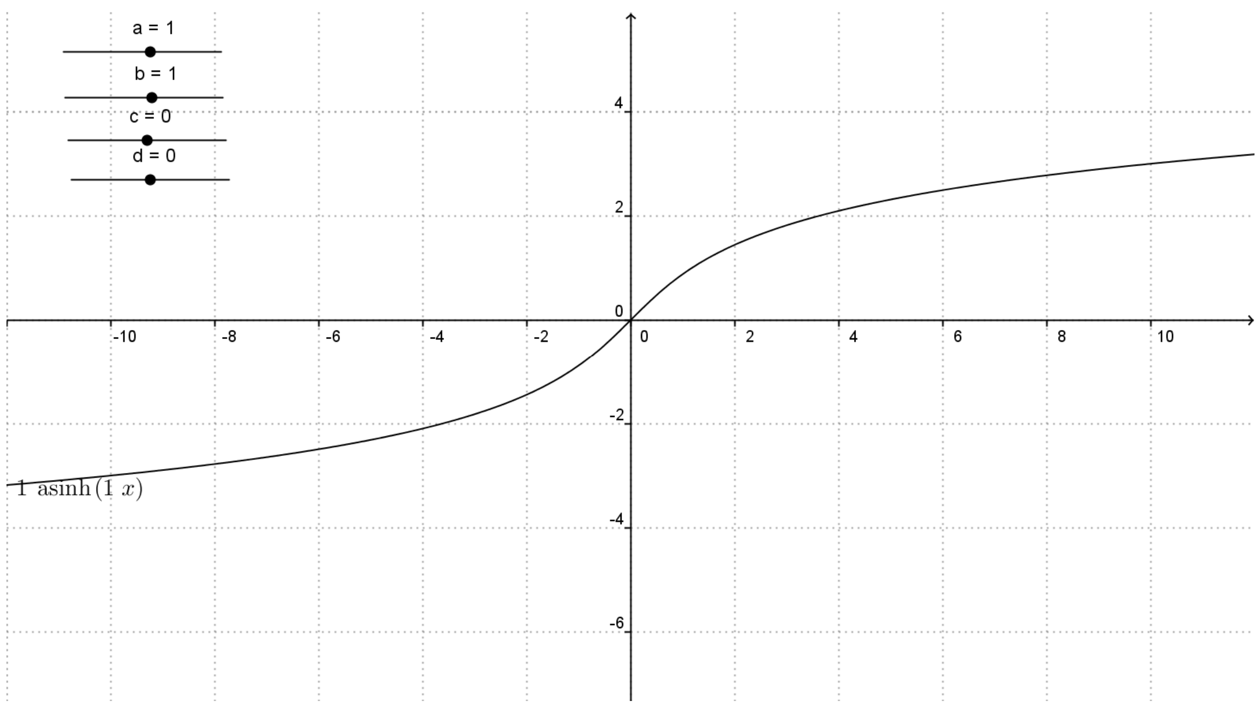

Слика 4.7.3 Графички приказ функције тангенс хиперболички

### 4.7.4 Котангенс хиперболички



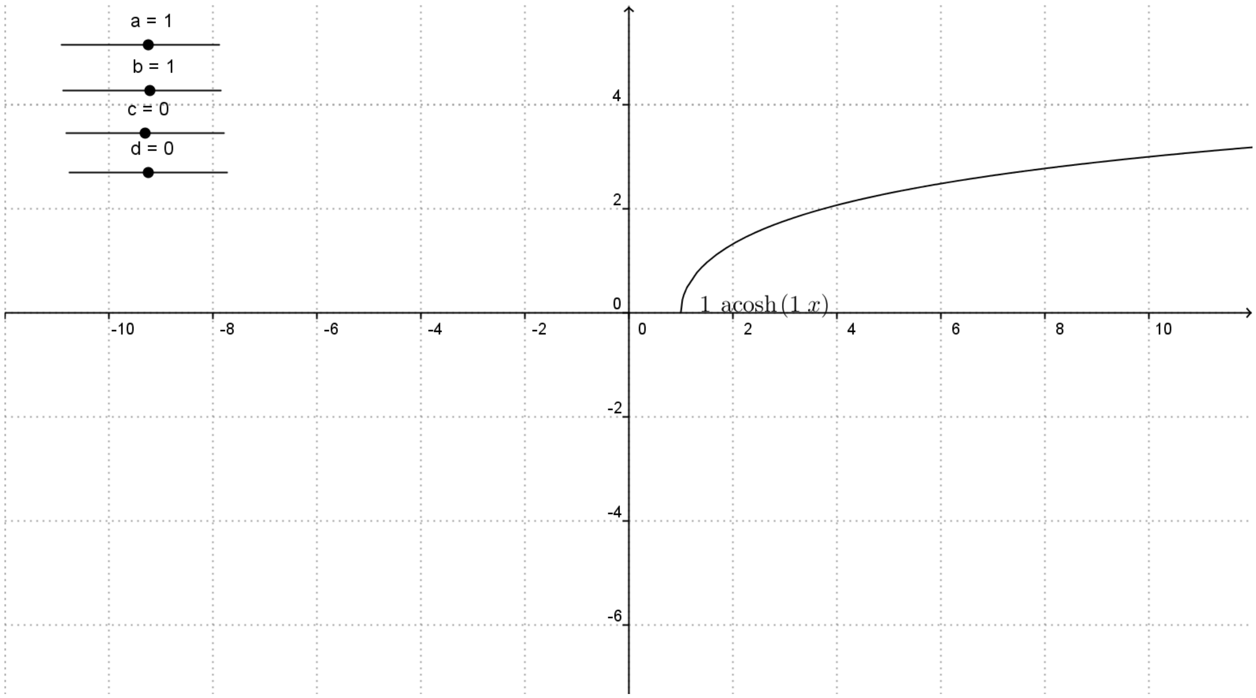

Слика 4.7.4 Графички приказ функције котангенс хиперболички

### 4.7.5 Ареа синус хиперболички



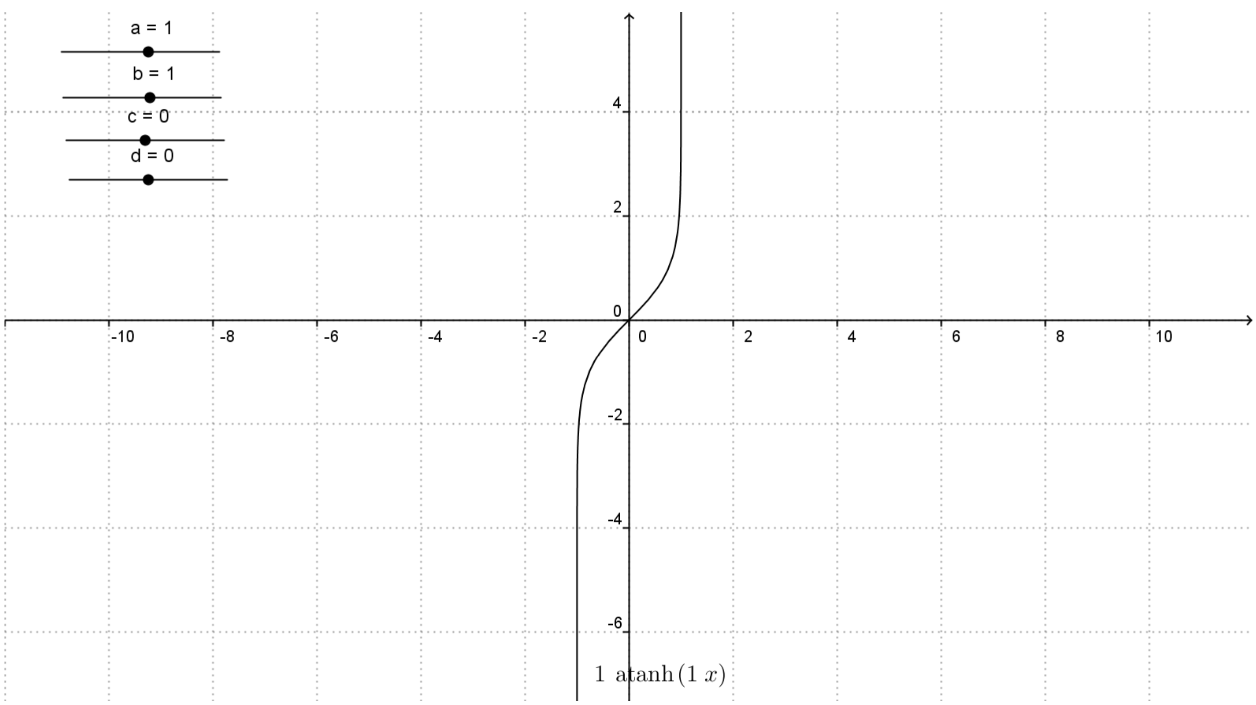

Слика 4.7.5 Графички приказ функције ареа синус хиперболички

### 4.7.6 Ареа косинус хиперболички




Слика 4.7.6 Графички приказ функције ареа косинус хиперболички

### 4.7.7 Ареа тангенс хиперболички




Слика 4.7.7 Графички приказ функције ареа тангенс хиперболички

## 4.8 Цртање функција

Функције можемо задати на следећи начин:

1. Таблицом (табеларно); таблица садржи вредности x и вредности функције f(x)
2. Графом (графички); граф прати промену неке величине
3. Аналитички (формулом):
   a. експлицитно
   b. имплицитно
   c. параметарски

Прва два начина задавања функција неће бити посебно разматрана, јер нису посебно обрађивана у веб презентацији, док ће о трећем начину бити мало више речи.

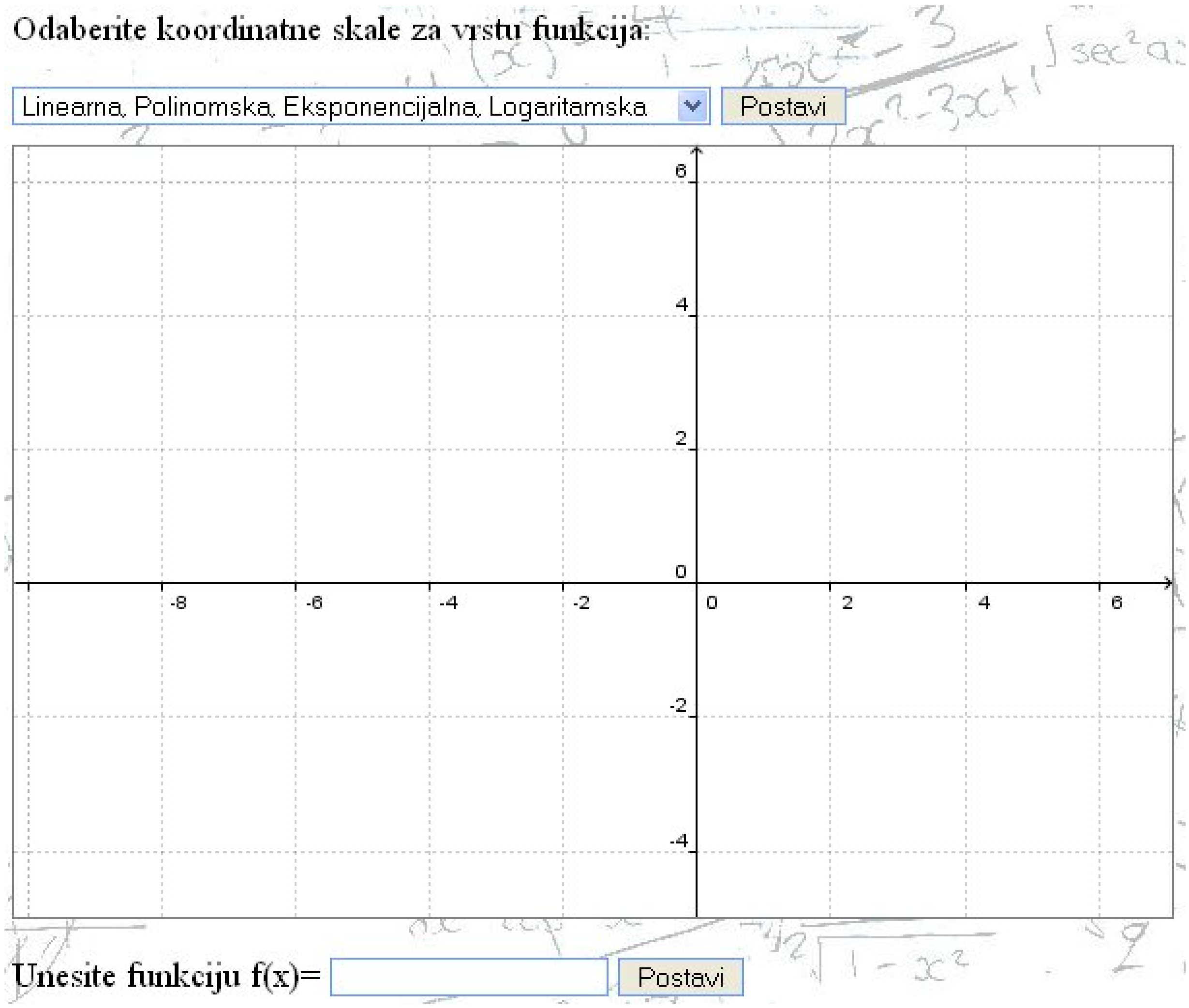
### 4.8.1 Експлицитно задавање

Експлицитно се функција задаје помоћу правила *y = f(x)*, где је *f(x)* израз који садржи само независну варијаблу *x*. Дакле, експлицитно задана функција је пресликавање $f : D \to K$ при чему су домен *D* и кодомен *K* подскупови скупа *R*. Домен је скуп свих вредности независне промењљиве *x* за коју функција *f(x)* има смисла. При томе једној вредности независне промењљиве $x \in D$ одговара самo једна вредност зависне промењљиве *y*. Другим речима, када је на јасан начин (без потребе трансформације једначине којом је функција задата) изражен скуп правила израчунавања вредности функције за дату вредност аргумента (независне промењљиве), онда се каже да је функција дата у експлицитном облику *y = f(x)*.

Примери експлицитно задате функције:

$$y = 1 - x^2, y = \frac{1}{1-x}, y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$$

Помоћу овог аплета корисник може да исцртава произвољне просте или сложене експлицитно задате функције. Такође омогућен је избор координатне скале за разне групе функција. Задавањем функције, уносом њеног експлицитног облика у поље предвиђено за ту намену, и кликом на дугме Постави функција бива исцртана на аплету.




слика 4.8.1 Приказ дела веб странице за исцртавање експлицитно задате функције

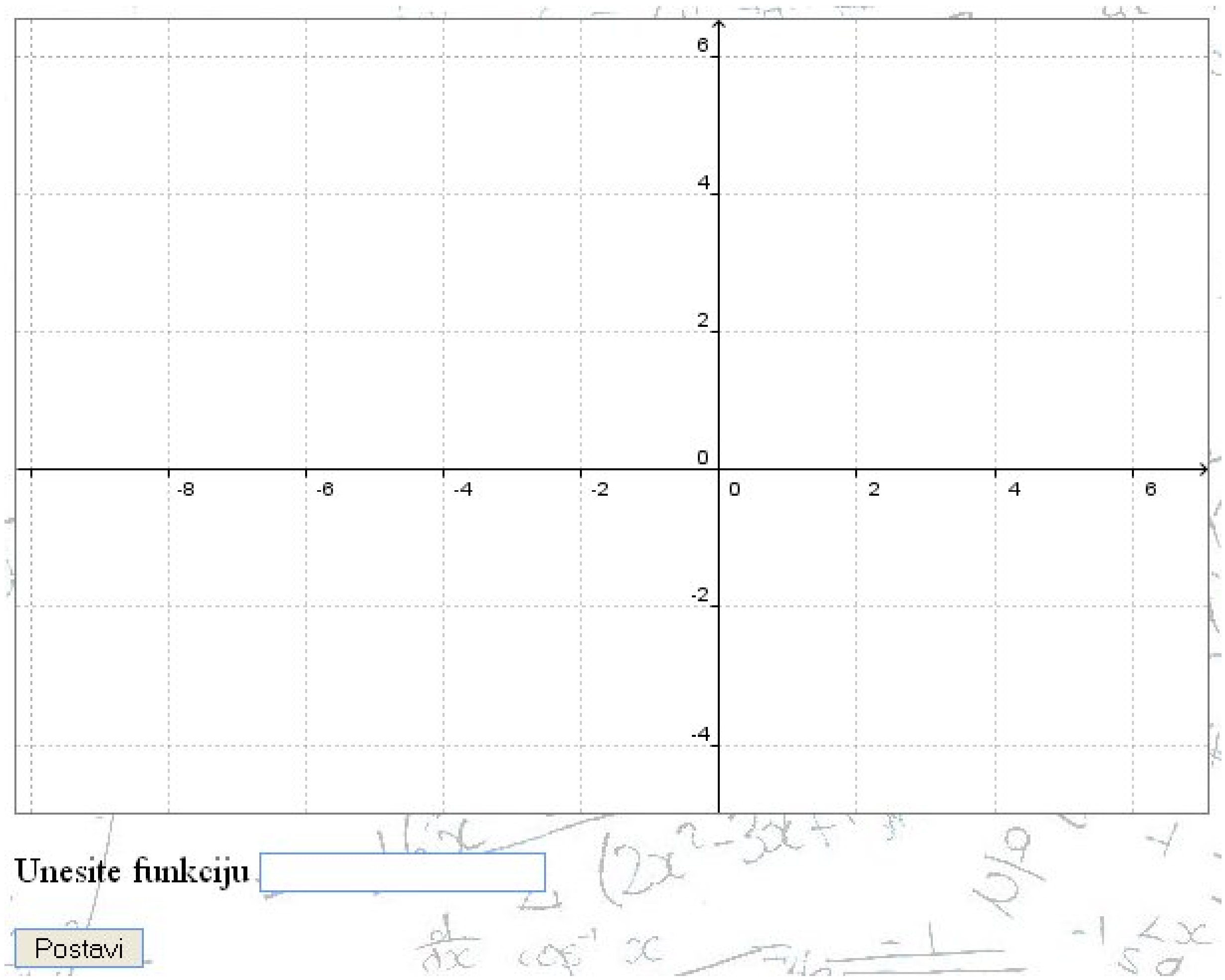
### 4.8.2 Имплицитно задавање

Имплицитно се функција задаје помоћу правила *F(x,y) = 0*, где је *F(x,y)* израз који садржи независну промењљиву *x* и зависну промењљиву *y*. Граф имплицитно задане функције је крива у равни $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. За добијање експлицитног облика потребно је вршити трансформацију једначине којом је функција дата у имплицитном облику. Функција задата у експлицитном облику може се увек трансформисати у имлицитни облик. Свака функција која се из експлицитног трансформише у имлицитни облик може и обратно, да се из имплицитног трансформише у експлицитни облик. Међутим не може се свака функција задата у имплицитном облику трансформисати у експлицитни облик.

Примери имплицитно задате функције:

$$x^2 + (y-1)^2 - 4 = 0, x^3 + y^3 - 3xy = 0, 2x - 3y - 6 = 0$$

Помоћу овог аплета корисник може да исцртава произвољне имплицитно задате функције. Задавањем функције, уносом њеног имплицитног облика у поље предвиђено за ту намену, и кликом на дугме Постави функција бива исцртана на аплету.




слика 4.8.2 Приказ дела веб странице за исцртавање имплицитно задате функције

### 4.8.3 Параметарско задавање

У математици, параметарска једначина је у неку руку слична функцији: оне омогућавају да се користе произвољне вредности, које се називају параметрима, уместо независних променљивих, које дају вредности за зависне променљиве. Функција се задаје параметарски тако да се x и y задају као експлицитне функције параметра помоћне променљиве t,

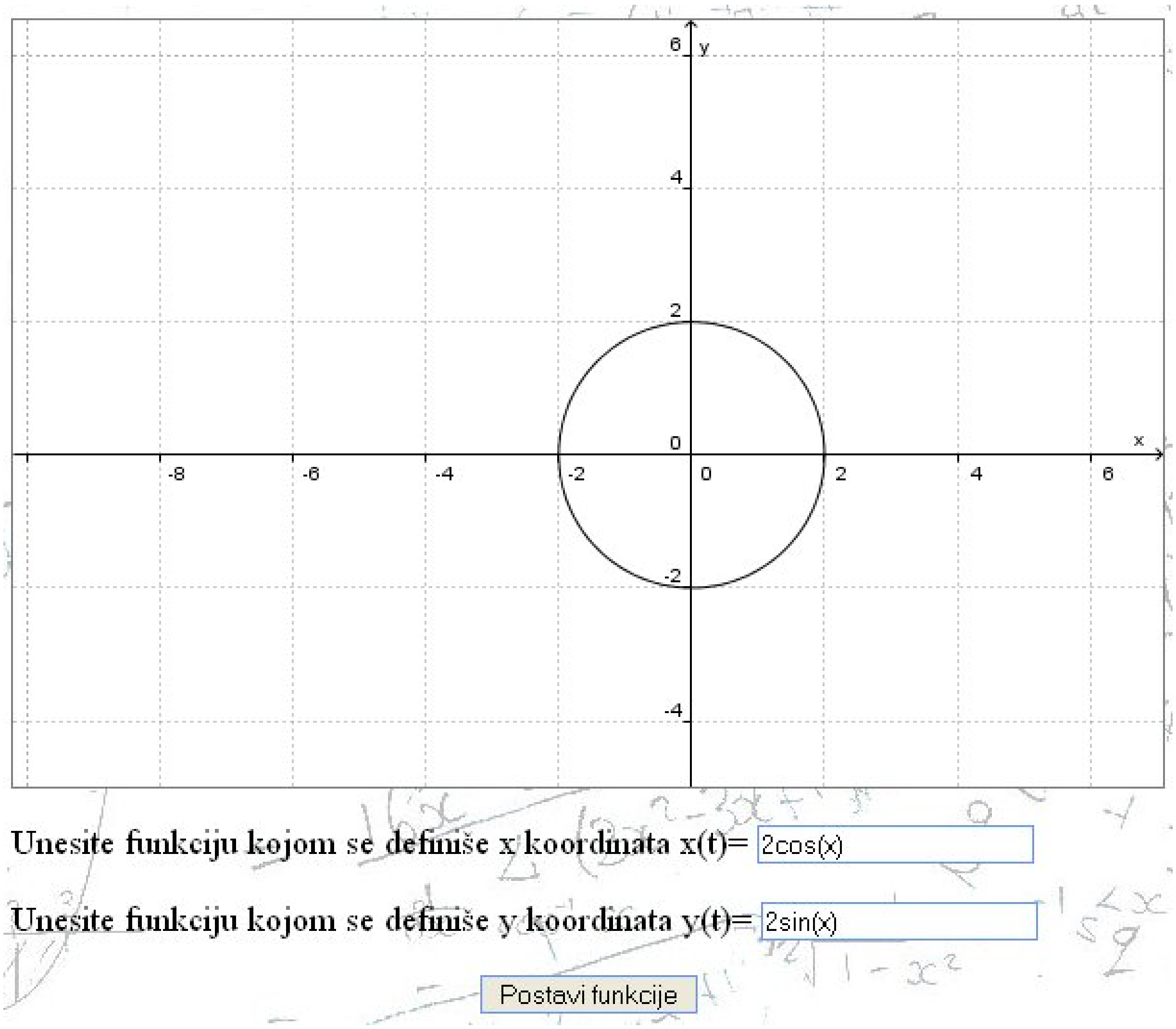
$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t) \qquad \alpha \le t \le \beta$$

Граф параметарски задане функције је крива у равни $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Као и код имплицитно задатих функција, код параметарски задатих функција једној вредности променљиве $x$ може одговарати више вредности променљиве $y$.

Примери параметарски задате функције:

$$x = r(t - \sin(t)), y = r(1 - \cos(t)), t \in \mathbb{R}$$
$$x = t, y = t^2$$

Помоћу овог аплета корисник може да исцртава произвољне параметарски задате функције. Задавањем функција, уносом њихових експлицитних облика у поља предвиђено за ту намену, и кликом на дугме Постави функције функција бива исцртана на аплету. Због ограничења GeoGera-е, функције морају бити задате као функције од параметра ***x***, а не у зависности параметра *t*, како се иначе у теоријском делу математике функције задају. За генерисање параметарске криве коришћена је GeoGebra-ина функција “Curve[ <funkcija koja opisuje x koordinatu>, < funkcija koja opisuje y koordinatu >, <parametarska promenljaiva po kojoj su zadate funckije>, <pocetna vrednost parametra>, <krajnja vrednost parametra> ]”. Овде параметарска променљива по којој су задате функције обухвата опсег, који је фиксиран, од 0 до 10.




слика 4.8.3 Приказ дела веб странице за исцртавање параметарски задате функције

# 5 Литература


[1] http://www.geogebra.org
[2] http://www.wikipedia.org
[3] Милан Меркле, Математичка анализа, Академска мисао, Београд, 2001