

## QUEST, A LONGA HISTÓRIA DE UM ALGORITMO RÁPIDO \*

**Malcolm David Shuster**  
**The Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory**  
**Laurel, Maryland, USA 20723**

### Resumo

Em 1965, Grace Wahba propôs o problema de determinar a atitude que minimiza a função de custo

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \|W_k - A V_k\|^2 :$$

Durante os vinte e cinco anos subseqüentes formularam-se muitas soluções a este problema de estimação, das quais um número muito elevado foram aplicadas à estimação de atitude de um veículo espacial. Atualmente, o mais eficiente, mais popular, e menos compreendido daqueles algoritmos é o QUEST, publicado em 1981. O presente trabalho acompanhará o desenvolvimento dos métodos de determinação de atitude desde seu início, as condições próprias da década de 70 que conduziram ao algoritmo QUEST, o desenvolvimento do QUEST e as evoluções posteriores: as extensões do algoritmo QUEST e dos algoritmos híbridos, como o método de Varotto, Orlando e Lopes.

## ÍNDICE

Introdução . . . . .	3
Juizes sobre o QUEST . . . . .	4
Pré-história (t < 1965) . . . . .	4
O algoritmo TRIAD . . . . .	5
Métodos ótimos . . . . .	6
As circunstâncias do desenvolvimento do QUEST . . . . .	9
O filtro de Kalman . . . . .	10
O problema de Wahba (1965) . . . . .	11
O trabalho de Davenport (1965–1977) . . . . .	14
O método-Y . . . . .	14
O método-q . . . . .	15
O desenvolvimento do QUEST—a verdadeira história (1977–1981) . . . . .	18
O problema do autovalor . . . . .	18
Crimes adicionais—A computação de atitude . . . . .	21
A verdade estranha . . . . .	24
Análise de covariância . . . . .	24
Um dividendo imprevisto . . . . .	26
Outras complicações . . . . .	27
QUEST e TRIAD . . . . .	29
Propriedades estatísticas do QUEST (1989) . . . . .	30
QUEST filtro! (1989) . . . . .	31
O método de Varotto, Orlando e Lopes (1985–1987) . . . . .	31
Desenvolvimentos de Markley (1987–1990) . . . . .	33
Outras aplicações . . . . .	34
Observações finais . . . . .	34
Reconhecimento . . . . .	34
Referências . . . . .	35
Resumo inglês . . . . .	39

## **Introdução**

Neste relatório desejo apresentar um tópico que não recebe muito atenção na literatura, a saber, como um algoritmo particular começou a existir. Geralmente, a história do desenvolvimento de um algoritmo não é muito interessante. O presente exemplo, assim espero, será uma exceção.

O algoritmo desta história é o QUEST, possivelmente agora o algoritmo “batch” mais popular para estimar a atitude em três eixos de um veículo espacial. A popularidade deste algoritmo aconteceu apesar da obscuridade de muitos resultados intermediários que apereceram no seu desenvolvimento e apesar também da opacidade enorme da implementação. Assim, minha intenção é apresentar a história de obscuridade e opacidade !

Esta confissão não é uma boa recomendação para ler o resto deste artigo. Um leitor inteligente que se respeita abandonaria normalmente um tal artigo imediatamente. Mas talvez ele já tenha se divertido suficientemente da franqueza do autor para continuar, esperando achar as confissões ainda mais divertidas. Se continuar, sua recompensa será o conhecimento de como o algoritmo QUEST deveria ter sido desenvolvido, se o seu criador fosse mais inteligente. Por estas alturas o leitor já percebeu que o autor deste artigo é o responsável pela obscuridade do algoritmo QUEST e que não era bastante inteligente. Por que então, ler um artigo de tal pessoa?

A razão é que o QUEST é um algoritmo muito interessante, cujo desenvolvimento contém muita anedota. O problema de determinação de atitude resolvido pelo QUEST é muito interessante também e por esta razão há muitas soluções, mas nenhuma tão eficiente – nem tão obscura – como o QUEST. Se o autor conseguir convencer muitos outros (inclusive o INPE) a adotar este algoritmo, será uma razão importante para estudá-lo. De fato, parece que todas as decisões errôneas tomadas no desenvolvimento – que ninguém com senso prático teria tomado – têm contribuído às boas propriedades do algoritmo. Por esta razão talvez a obscuridade mesma deva ser aprendida.

O QUEST nasceu em 1965. Assim, neste momento, o algoritmo tem 25 anos. Como a era espacial começou somente em 1957, as origens do QUEST remontam aos primeiros dias desta era, aos dias felizes em que ainda era possível realizar atividades de valor, com pouca experiência. Na sua forma madura, o QUEST data de 1979, embora a data oficial de publicação seja quase dois anos mais tarde, em janeiro de 1981. Assim, podemos dizer que o algoritmo QUEST entrou na sociedade aos 16 anos, como manda o figurino.

Para utilizar a analogia humana um pouco mais, pode se dizer também que o algoritmo QUEST tem mãe mas não tem pai. Para compensar a falta de um pai, o QUEST tem-se beneficiado de muitos tios dentre os quais um deles é o autor deste relatório. As deficiências de caráter do QUEST são as deficiências dos seus tios, que discutiremos adiante.

## **Juízos do QUEST**

Para melhor apreciar o efeito psicológico do algoritmo QUEST sobre os usuários, começamos com um comentário escrito há muitos anos por um engenheiro americano [ 1 ] :

“Venho estudando o algoritmo QUEST a vários meses. Espero compreendê-lo antes de falar sobre ele.”

Um engenheiro brasileiro tem escrito [ 2 ] :

“Já há vários anos que temos conhecimento de alguns de seus notáveis trabalhos e desde então nos tornamos seus admiradores. Nossas pesquisas foram evidentemente influenciadas por seus artigos sobre calibração de sensores, emprego de modelo cinemático, e por aquele primoroso artigo no JGC sobre o algoritmo QUEST—por trás de cada passagem algébrica, um verdadeiro mistério a desvendar ::: Foi um dos pioneiros desta divisão, o Dr. G—, ::: quem certa vez melhor expressou este fato observando, em um seminário, que a leitura e entendimento deste seu artigo seria recomendável como um excelente trote para qualquer aluno de pós-graduação. Ele porém não sabia que na audiência estava presente alguém que havia acabado de passar exatamente por este trote. Na verdade, tivéssemos nós sabido as dores de cabeça que nos esperavam para compreender aquelas deduções, certamente nossa correspondência teria sido iniciada muito antes!”

Outros brasileiros do INPE queixam-se também das dores de cabeça providas das tentativas de entender o QUEST [ 3 ] .

Este relatório apresentará :

As circunstâncias que antecederam o nascimento do algoritmo QUEST.  
As primeiras tentativas de se desenvolver um algoritmo deste tipo.  
O algoritmo QUEST como tal, as versões humanas e inumanas.  
Evoluções recentes.

### **Pré-história (t < 1965)**

Os métodos utilizados até 1965 para determinar a atitude de um veículo espacial eram de dois tipos :

Métodos deterministas, e  
Métodos ótimos.

Como métodos deterministas entendemos os que aceitam unicamente uma quantidade mínima de dados para determinar a atitude de maneira não-ambígua. Se houver dados demasiados, aqueles serão negligenciados pelo algoritmo. Um algoritmo determinista não pode tratar uma medida corrompida pelo ruído.

Os métodos ótimos, por outro lado, utilizam todos os dados disponíveis, para determinar a atitude que otimiza uma função de custo. O algoritmo QUEST é do segundo tipo.

## O algoritmo TRIAD

O Método determinista mais conhecido na época do nascimento do QUEST era o método TRIAD, desenvolvido por Harold Black [4] em 1964, data não muito anterior à das primeiras noções do QUEST. O método TRIAD supõe que os dados provindos do veículo espacial consistem-se de duas medidas vetoriais,  $\mathbf{W}_1$  e  $\mathbf{W}_2$ , que satisfaçam

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{V}_1 ; \\ \mathbf{W}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{V}_2 ;\end{aligned}\quad (1)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz de atitude, uma matriz  $3 \times 3$  ortogonal com determinante positivo, e  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  são os vetores referenciais, matrizes  $3 \times 1$  dos componentes conhecidos no sistema de referência.  $\mathbf{W}_1$  e  $\mathbf{W}_2$  são matrizes  $3 \times 1$  dos componentes conhecidos no sistema solidário ao veículo.

A multiplicação de um vetor por uma matriz ortogonal não muda a magnitude do vetor. Assim, só dois graus de liberdade de uma medida vetorial (isso é, a direção) fornecem informações sobre a atitude. As duas medidas vetoriais fornecem quatro elementos de informação. Porém, três elementos de informação são suficientes para determinar a atitude. Por conseguinte, não existe geralmente uma solução para as Equações (1). Para ver isso mais claramente, notamos que a matriz  $\mathbf{A}$ , sendo ortogonal, não muda o valor de produtos escalares. Assim, necessitamos que

$$j\mathbf{W}_{1j} = j\mathbf{V}_{1j} ; \quad j\mathbf{W}_{2j} = j\mathbf{V}_{2j} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 ; \quad (2)$$

Dado que as medidas são corrompidas pelo ruído, esta relação não é satisfeita normalmente. Por conseguinte, para achar uma solução, necessitamos descartar uma parte dos dados.

Black faz isso de maneira interessante. Para começar, construiu duas tríades de vetores, segundo

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \frac{\mathbf{V}_1}{j\mathbf{V}_{1j}} ; & \mathbf{s}_1 &= \frac{\mathbf{W}_1}{j\mathbf{W}_{1j}} ; \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{\mathbf{V}_1}{j\mathbf{V}_1} \cdot \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_2j} ; & \mathbf{s}_2 &= \frac{\mathbf{W}_1}{j\mathbf{W}_1} \cdot \frac{\mathbf{W}_2}{\mathbf{W}_2j} ; \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 ; & \mathbf{s}_3 &= \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 ;\end{aligned}\quad (3)$$

Se supusermos que as Equações (1) são verdadeiras e notarmos que a matriz de atitude preserva os produtos escalares e vetoriais, será também verdadeiro que

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{r}_1 ; \\ \mathbf{s}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{r}_2 ; \\ \mathbf{s}_3 &= \mathbf{A} \mathbf{r}_3 ;\end{aligned}\quad (4)$$

Os  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1; \dots; 3$ , e os  $\mathbf{s}_i$ ,  $i = 1; \dots; 3$ , são ortogonais e diretos e, por conseguinte, as Equações (4) têm uma solução, que construímos da maneira seguinte: Escrevemos

$$\mathbf{M}_R = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3] ; \quad (5a)$$

e

$$\mathbf{M}_S = [\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \mathbf{s}_3] ; \quad (5b)$$

Isso é,  $M_R$  e  $M_S$  são duas matrizes  $3 \times 3$  cujas colunas são os vetores  $\mathbf{r}_i$  ou  $\mathbf{s}_i$ , respectivamente.  $M_R$  e  $M_S$  são todas as duas ortogonais e

$$M_S = A M_R ; \quad (6)$$

que é equivalente às Equações (4). Como  $M_R$  é ortogonal, a solução para  $A$  é

$$A = M_S M_R^T ; \quad (7)$$

Uma solução é possível porque a construção dos vetores  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{s}_i$  eliminou os componentes que não satisfizeram à Equação (2).

No fim da década de 60 e durante a de 70, este algoritmo simples era utilizado para suportar muitos satélites. Frequentemente o algoritmo era chamado “SUNMAG” porque a atitude era determinada utilizando um sensor solar e um magnetômetro. No livro de Wertz [5] chama-se o método algébrico. Este algoritmo tem a vantagem de ser simples e rápido, mas tem também uma desvantagem importante. Como é limitado a duas medidas, a precisão é também limitada. Se houver mais do que duas medidas, não é possível aproveitar-se delas para alcançar uma precisão maior.

### Métodos ótimos

Para compensar esta desvantagem, utilizavam-se outros métodos também. Estes algoritmos ótimos eram todos do tipo mínimos-quadrados. Supunha-se que a relação entre a atitude e as medidas pudesse ser expressa como

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{f}_k(A) + \mathbf{v}_k ; \quad k = 1; \dots; N ; \quad (8)$$

Aqui  $\mathbf{z}_k$  é uma medida (de dimensão arbitrária),  $\mathbf{f}_k(\cdot)$  é uma função qualquer vetorial conhecida e  $\mathbf{v}_k$  é um vetor de ruído. A atitude ótima minimiza a função de custo

$$J(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\mathbf{z}_k - \mathbf{f}_k(A)]^T W_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{f}_k(A)] ; \quad (9)$$

onde  $W_k$  é uma matriz de peso, necessariamente simétrica e semidefinida positiva. Se o ruído de medida for gaussiano e com média zero e covariância  $R_k$ , então  $A$ , o valor da matriz de atitude que minimiza  $J(A)$ , será também a solução de variância mínima se escolhermos [6]

$$W_k = R_k^{-1} ; \quad (10)$$

Ainda que esta declaração seja imediatamente aceita, de fato é um pouco obscura, porque ainda não indiquei o que quer dizer uma “variância de atitude”. Será mais conveniente adiar esta definição para mais tarde.

Como exemplos de medidas de atitude citamos:

Medidas vetoriais,

$$\mathbf{f}_k(A) = A \mathbf{V}_k ; \quad (11a)$$

Neste caso,  $\mathbf{z}_k$  é simplesmente  $\mathbf{W}_k$  como no algoritmo TRIAD.

Medidas escalares,

---

Um asterisco denotará uma quantidade estimada.

$$f_k(A) = \mathbf{x}^T A \mathbf{V}_k ; \quad (11b)$$

que corresponde a um componente de uma medida, neste caso o componente-x de  $\mathbf{W}_k$ .

A otimização da função de custo é complicada pelo fato de que os nove elementos da matriz de atitude não são independentes. Este problema pode ser eliminado se escrevermos a matriz de atitude em função dos ângulos de Euler.

$$A = R_{313}(\phi; \theta; \psi) ;$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \sin \psi + \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta \sin \psi - \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi - \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta \sin \psi - \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \sin \psi + \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad (12a)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\theta & c_\phi c_\theta s_\psi + s_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta & s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\theta & s_\phi c_\theta s_\psi - c_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta & -s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\theta & -s_\phi c_\theta s_\psi - c_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\theta & s_\phi c_\theta s_\psi - c_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta & c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\theta & c_\phi c_\theta s_\psi + s_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta \cos \psi + c_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta \sin \psi - c_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad (12b)$$

Os ângulos de Euler chamam-se normalmente rolamento, arfagem e guinada, mas somente um capitão de um navio ou avião sabe qual é um e qual é o outro.

Definimos

$$\begin{aligned} & \phi, \theta, \psi \\ & \phi, \theta, \psi \end{aligned} ; \quad (13)$$

para podemos escrever as nossas expressões em função de uma só variável vetorial. Evidentemente,

$$J(\mathbf{v}) = J(A(\mathbf{v})) ; \quad (14)$$

Podemos agora minimizar  $J(\mathbf{v})$  em função dos três componentes de  $\mathbf{v}$ , que são independentes. Como a expressão para  $J(\mathbf{v})$  é muito complicada, só podemos fazer isso de forma aproximada e sem expressões simples. Recorremos então ao método preferido por todos, a saber, o método de Newton e Raphson.

Definimos  $\mathbf{v}^{(i)}$  como a aproximação número “i” de  $\mathbf{v}$ , o valor que minimiza a função de custo exata, e escrevemos  $J(\mathbf{v})$  como série de Taylor em função do erro,

(i). Este procedimento dá diretamente

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}) &= J(\mathbf{v}^{(i)}) + \frac{\partial J(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}^{(i)})^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(i)}) \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(i)})^T \frac{\partial^2 J(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}^T}(\mathbf{v}^{(i)}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(i)}) + \dots ; \quad (15) \end{aligned}$$

---

Utilizamos a convenção que  $\mathbf{v}$  é um vetor coluna. Um acento circunflexo denota um vetor unidade.

onde

$$\frac{\partial J(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial z_1} \\ \frac{\partial J}{\partial z_2} \\ \frac{\partial J}{\partial z_3} \end{bmatrix}; \quad (16a)$$

e

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial z_1 \partial z_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial z_1 \partial z_3} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial z_2 \partial z_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial z_2 \partial z_3} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial z_3 \partial z_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial z_3 \partial z_2} & \frac{\partial^2 J}{\partial z_3 \partial z_3} \end{bmatrix}; \quad (16b)$$

Se na Equação (15) guardarmos somente os termos até a segunda ordem inclusive, a minimização é muito simples. O resultado, que dá a aproximação seguinte,  $(i + 1)$ , é simples

$$\mathbf{z}^{(i+1)} = \mathbf{z}^{(i)} - \frac{\partial J(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)})^{-1} \frac{\partial J(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)}); \quad (17)$$

No caso presente

$$\frac{\partial J(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^{(i)}) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_k^T(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} W_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{f}_k(A)]; \quad (18a)$$

e

$$\frac{\partial^2 J(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}^T}(\mathbf{z}^{(i)}) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_k^T(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} W_k \frac{\partial \mathbf{f}_k^T(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{f}_k^T(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}^T} W_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{f}_k(A)]; \quad (18b)$$

Podemos agora repetir as Equações (17) e (18) até a diferença entre  $(i)$  e  $(i + 1)$  ser insignificante. Se pudermos aplicar o método Newton-Raphson uma infinidade de vezes, chegaremos ao valor ótimo de  $\mathbf{z}$ .

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{z}^*: \quad (19)$$

A maior parte de nós, porém, estará satisfeita em aplicar o método Newton-Raphson um número finito de vezes.

Este método tem muitas vantagens. Em particular, permite aproveitar qualquer quantidade de dados e, por conseguinte, chegar a uma estimativa de atitude de precisão arbitrária (no caso se possa achar uma infinidade de coisas a medir). Por outro lado, o algoritmo é complicado por causa das diferenciações das funções



trigonométricas. Além disso, este método necessita de um valor inicial (cada  $(i)$ , de um  $(i - 1)$ ). Se os dados consistirem de vetores, o algoritmo ótimo pode ser iniciado pelo algoritmo TRIAD, e isso é o que acontece normalmente. Porém, o método Newton-Raphson não deixa de ter perigos latentes. O método convergirá sempre a um mínimo, mas nem sempre ao mínimo menor. Se o valor inicial não for muito bom (por causa, por exemplo, de um ruído muito grande) é possível que o método Newton-Raphson convirja a uma atitude falsa. Este resultado desagradável não acontece freqüentemente. O problema ainda maior é que o algoritmo pode ser muito lento. Não obstante, o algoritmo TRIAD com sua limitação em precisão, e o método Newton-Raphson baseado nos ângulos de Euler para parametrizar a atitude com todas as suas complicações—tinha dominado as atividades de estimação de atitude (ao menos no NASA Goddard Space Flight Center) nos primeiros 20 anos da era espacial.

### **As circunstâncias do desenvolvimento do QUEST**

Examinemos primeiramente a adolescência do algoritmo QUEST (ca. 1977) para entender por quê existia interesse no seu desenvolvimento. O QUEST foi desenvolvido para apoiar a missão Magsat. Em 1977, quando Magsat estava ainda na etapa de planejamento, havia séria preocupação se o sistema de determinação de atitude era capaz alcançar uma precisão de 15 segundos de arco. Nesta época essa era a precisão mais importante exigida de um satélite. Além disso, a freqüência de dados para Magsat seria também muito alta: a atitude deveria ser computada a cada 0,25 seg. Assim, era necessário computar a atitude acurada e rapidamente.

O caso para comparação era o veículo Seasat. Para este veículo, o requisito de precisão era somente 4 minutos de arco (240 segundos de arco) e a freqüência de computação somente uma vez por segundo. O sensor solar do Seasat era igual ao sensor do Magsat mas o Magsat teria também dois sensores estelares. Assim, o tempo necessário para o processamento de dados (em particular a identificação das estrelas) seria muito longo.

Além disso, para o processamento definitivo, depois que a atitude foi computada pela primeira vez, requeria-se um processamento adicional para editar os dados. Para desempenhar isso, era necessário enquadrar uma curva (normalmente uma expansão em polinômios de Tschebischev) no rolamento, arfagem e guinada computados, calcular os desvios dos pontos da curva e eliminar os pontos mais distantes do que 3 da curva. Então, uma nova expansão em polinômios de Tschebischev foi computada e utilizada para interpolar os pontos que faltavam. Este método necessitou de uma grande atividade da parte do analista de missão, o qual para processar um segmento de dados deve iniciar a computação da expansão polinomial, eliminar os pontos falsos a mão, e então, recomputar a curva. O tempo necessário para estas operações era muito longo, freqüentemente muitas vezes mais longo do que o segmento de dados. Por causa disso os analistas do Seasat estavam apreensivos dos esforços exigidos para apoiar a missão. O sentimento do grupo do Magsat por outro lado era de pânico completo!

Quando o satélite Seasat foi lançado a equipe das operações de missão estavam tão descontente—eles deveriam trabalhar até durante o fim da semana para assegurar

---

Lançada no fim do 1979, esta missão forneceu as medidas do campo geomagnético mais acuradas até agora.

o processamento dos dados — que eles ameaçaram com uma revolução. Alguns operadores realmente demitiram-se ao invés de continuar. Uma revolução completa foi evitada somente devido a morte do satélite 106 dias depois do lançamento por causa de um curto-circuito maciço (possivelmente, isso foi uma ação de graças porque durante aqueles 106 dias o satélite colecionou uma quantidade enorme de dados de uma qualidade ótima e a terminação da missão liberou muito capital para a análise).

Assim, necessitou-se de um novo método para determinar a atitude e com a maior brevidade possível.

### **O filtro de Kalman**

O leitor com um pouco de experiência em estimação perguntará neste momento porque um sistema de determinação de atitude baseado no filtro de Kalman não foi considerado. Com efeito, foi nesta época que o filtro de Kalman começou a ser aplicado na estimação de atitude. Porém, até este momento, os sucessos do filtro de Kalman aplicado ao problema de estimação de atitude (não obstante os grandes sucessos na determinação de órbita) não tinham sido muito gloriosos [7]. Em um caso, a aplicação de um filtro de Kalman na estimação de atitude foi um desastre.

Decidiu-se uma vez no começo da década de 70, utilizar um filtro de Kalman no sistema de determinação de atitude. Os problemas da divergência do filtro de Kalman não foram compreendidos completamente e os erros de estimação do filtro divergiram. A perspectiva de um satélite sem sistema de determinação de atitude não era muito confortável. Felizmente, o sistema de determinação de atitude foi baseado em Terra e processou todos os dados aqui e não no satélite. O centro de operações da missão pôde então receber a telemetria e verificar o bom funcionamento do veículo. Igualmente, os analistas de missão puderam formular um novo programa para computar a atitude sem o filtro de Kalman. Não obstante aquelas possibilidades de consertar o sistema (certamente com um certo custo adicional), foi compreensível que durante muitos anos o emprego do filtro de Kalman para a estimação de atitude não tenha recebido uma acolhida calorosa.

### **O problema de Wahba (1965)**

A abordagem histórica não foi totalmente honesta. Discursi sobre o algoritmo TRIAD e sobre os métodos de mínimos quadrados baseados nos ângulos de Euler e no método Newton-Raphson. Expliquei porque necessitamos de um novo algoritmo em 1977. Mas não disse que há doze anos existem outros algoritmos no meio do caminho entre o algoritmo TRIAD e os algoritmos do tipo Newton-Raphson. Permiti esta negligência porque estes algoritmos até 1977 mais ou menos não eram muito práticos. Corrigimos agora essa negligência.

---

Para os leitores que não são peritos em estimação, o filtro de Kalman é um método no qual os dados são tratados seqüencialmente e com a chegada de cada novo dado computa-se uma melhor estimativa dos parâmetros. O filtro de Kalman pode tratar também a situação no qual os parâmetros a serem estimados mudam continuamente. Infelizmente, o comportamento do filtro de Kalman pode ser imprevisível para alguém sem muita experiência na sua aplicação. Ver Referência [7] para uma explicação mais detalhada.

Em 1965 o problema seguinte [8] apareceu em *SIAM Review*: Determinar a matriz ortogonal  $A$  que minimiza a função de custo

$$J(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{j} \mathbf{W}_k \mathbf{A} \mathbf{V}_k \mathbf{j}^2 ; \quad (20)$$

onde  $a_k > 0$  para  $k = 1; \dots; N$ . Este problema foi proposto (em uma nomenclatura um pouco diferente e com os vetores não normalizados) por Grace Wahba, aluna de pós-graduação em Estatística, trabalhando no verão de 1965 na IBM. O problema originou-se no seu trabalho e o aparecimento daquele problema em *SIAM Review* foi a sua primeira publicação (agora a Dra. Wahba é professora de Estatística com quase cem publicações). Uma solução iterativa foi sempre possível, mas o interesse de Wahba, porém, era uma solução finita (ou quase finita), como, por exemplo, o algoritmo TRIAD.

Várias soluções foram oferecidas em um número posterior da revista mas nenhuma foi muito prática. Como soluções matemáticas algumas delas foram interessantes, mas os engenheiros de missão não parecem muito encantados com elas.

A primeira solução a ser publicada foi a de Farrell e Stuelpnagel [9]. Aqueles autores sugeriram começar com a expansão dos quadrados na função de custo da Equação (20). Assim,

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{j} \mathbf{W}_k \mathbf{A} \mathbf{V}_k \mathbf{j}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{j} \mathbf{W}_k \mathbf{j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{j} \mathbf{A} \mathbf{V}_k \mathbf{j}^2 - \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{W}_k \mathbf{A} \mathbf{V}_k \end{aligned} ; \quad (21)$$

e como

$$\mathbf{j} \mathbf{W}_k \mathbf{j}^2 = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{j} \mathbf{A} \mathbf{V}_k \mathbf{j}^2 = 1 ; \quad (22)$$

seguir que

$$J(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k - g(A) ; \quad (23)$$

com

$$g(A) = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{W}_k \mathbf{A} \mathbf{V}_k ; \quad (24)$$

A minimização de  $J(A)$  é equivalente então à maximização de  $g(A)$ , que se chama a função de ganho.

Fazemos agora uma manipulação artística da Equação (24). Notamos que

$$g(A) = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{W}_k \mathbf{A} \mathbf{V}_k = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{A} \mathbf{V}_k ; \quad (25)$$

A última expressão pode ser escrita como um traço. Assim,

$$\begin{aligned}
 g(A) &= \sum_{k=1}^n a_k \operatorname{tr}[\mathbf{W}_k^T A \mathbf{V}_k] \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k \operatorname{tr}[\mathbf{V}_k \mathbf{W}_k^T A] \\
 &= \operatorname{tr} \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{V}_k \mathbf{W}_k^T A \\
 &= \operatorname{tr}[\mathbf{B}^T A] ;
 \end{aligned} \tag{26}$$

onde

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{W}_k \mathbf{V}_k^T ; \tag{27}$$

A Equação (26) esconde um resultado muito interessante e importante para nós. A equação diz que toda as informações necessárias para o cálculo da atitude ótima que minimiza a função de custo da Equação (20) acham-se na matriz  $\mathbf{B}$ , que se chama agora a matriz de perfil de atitude, definida pela Equação (27). Quando sabemos  $\mathbf{B}$ , sabemos a atitude.

Esta função de ganho aparece em um outro problema, a ortogonalização de uma matriz quadrada arbitrária. Suponha que tenhamos  $\mathbf{B}$ , uma matriz  $n \times n$  arbitrária, e que queiramos achar  $\mathbf{A}$ , a matriz  $n \times n$  ortogonal que esteja mais perto de  $\mathbf{B}$  no sentido de  $\mathbf{A}$  minimizar a norma de Schur,

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|_F^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\mathbf{B}_{ij} - \mathbf{A}_{ij}]^2 \\
 &= \operatorname{tr} (\mathbf{B} - \mathbf{A})^T (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \\
 &= n + \operatorname{tr}[\mathbf{B}^T \mathbf{B}] - 2 \operatorname{tr}[\mathbf{B}^T \mathbf{A}]
 \end{aligned} \tag{28}$$

A minimização desta norma conduz evidentemente a uma função de ganho para  $\mathbf{A}$  que é idêntica àquela da Equação (26). Assim, para  $n = 3$  a matriz de atitude  $\mathbf{A}$  é a matriz ortogonal mais perto da  $\mathbf{B}$  no sentido das Equações (28).

Farrell e Stuelpnagel resolveram a Equação (26) por meio do Teorema de Decomposição Polar. Este teorema declara que cada matriz  $\mathbf{B}$  pode ser escrita como o produto

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \mathbf{U} ; \tag{29}$$

onde  $\mathbf{M}$  é real e simétrica e  $\mathbf{U}$  é ortogonal. Se  $\mathbf{U}$  for de determinante positivo, a solução para a atitude ótima é simples

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} ; \tag{30}$$

Se  $\mathbf{U}$  não for de determinante positivo, a construção é um pouco mais difícil.

A maioria dos leitores deste artigo não conhecerá o Teorema de Decomposição Polar. O interesse deste teorema é mais para os matemáticos (devemos indicar aqui

que o doutorado do Stuelpnagel era em Topologia Algébrica; Farrell por outro lado é o autor de um livro muito conhecido sobre a Navegação Aeronáutica [10]).

Wessner [11] propôs uma outra solução, que apareceu no mesmo número com a de Farrell e Stuelpnagel. Ele observou que a questão era de maximizar  $\text{tr}[B^T A]$  sujeito ao vínculo de que  $A$  seja ortogonal,

$$A^T A = I \quad ; \quad (31)$$

Para resolver uma otimização com vínculo ele utilizou o método de Lagrange. Assim, maximizou, em vez da função de ganho da Equação (26), a função aumentada

$$g^0(A) = \text{tr}[B^T A] - \text{tr}[\mathcal{Y}_0 A^T A - I] \quad ; \quad (32)$$

onde  $\mathcal{Y}_0$  é uma matriz de coeficientes desconhecidos cujos valores depois da maximização devem ser escolhidos para satisfazer ao vínculo. A maximização é direta e conduz a

$$A = B \mathcal{Y}_0^{-1} \quad ; \quad (33)$$

onde

$$\mathcal{Y}_0 = B^T B \quad ; \quad (34)$$

A função do lado direito da Equação (34) é a raiz quadrada matricial, definida como a matriz simétrica e definida positiva cujo quadrado é  $B^T B$ . Assim, em vez de calcular a decomposição polar, calculou-se a raiz quadrada matricial, que não é muito mais prática.

Esta solução tem outras fraquezas. Sabemos já que duas medidas vetoriais são suficientes para estimar a atitude (senão o método TRIAD seria impossível). Porém, com unicamente duas medidas vetoriais,  $\mathcal{Y}_0$  é singular e não pode ser invertido. Naturalmente, este problema é compensado pelo fato de que  $B$  também é singular. Infelizmente, o computador não pode fazer a divisão de zero por zero e o método de Wessner nunca foi popular.

Houve outras soluções [12–23] publicadas entre 1966 e 1977 (algumas tratam realmente do problema de ortogonalização sem referência à determinação de atitude). Nenhuma delas era muito prática (os autores podem disputar este juízo), e não creio que todas delas foram utilizadas para uma missão real. Assim, o autor deste artigo pode ser perdoado, talvez, por não ter mencionado aqueles métodos imediatamente.

## **O trabalho de Davenport (1965–1977)**

O trabalho mais interessante sobre este problema nunca foi publicada por seu autor. É o trabalho de Paul Davenport da NASA Goddard Space Flight Center. Davenport, matemático de formação (parece que poucos engenheiros “reais” contribuíram ao estudo deste problema), começou os seus estudos [24–25] com a reinvenção do vetor de Gibbs [5], que foi mesmo, na verdade, uma reinvenção, sendo inventado na primeira vez por Rodrigues em 1840 [26].

## O método-Y

Notamos que a matriz de rotação  $R(\mathbf{n}; \theta)$  é uma função do eixo de rotação,  $\mathbf{n}$ , e do ângulo de rotação,  $\theta$ , segundo

$$R(\mathbf{n}; \theta) = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{nn}^T + \sin \theta [[\mathbf{n}]] ; \quad (35)$$

onde a matriz  $[[\mathbf{v}]]$  é definida por

$$[[\mathbf{v}]] = \begin{bmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ v_3 & 0 & v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad (36)$$

O vetor de Rodrigues (ou de Gibbs) é definido por

$$\mathbf{Y} = \tan \frac{\theta}{2} \mathbf{n} ; \quad (37)$$

que tem somente três componentes. A álgebra do vetor de Rodrigues é muito simples. Se três matrizes de rotação,  $R$ ,  $R^0$ , e  $R^{\theta}$ , satisfizerem a

$$R^{\theta} = R^0 R ; \quad (38)$$

então, equivalentemente em função dos vetores correspondentes de Rodrigues

$$\mathbf{Y}^{\theta} = \frac{1}{1 + \mathbf{Y}^0 \cdot \mathbf{Y}} (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^0 + \mathbf{Y} \times \mathbf{Y}^0) ; \quad (39)$$

Em função do vetor de Rodrigues, a matriz de atitude escreve-se

$$A = \frac{1}{1 + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}} \left[ (1 - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}) \mathbf{I} + 2\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T + 2[[\mathbf{Y}]] \right] ; \quad (40)$$

Para desenvolver uma solução do problema de Wahba em função do vetor de Rodrigues, Davenport substituiu a Equação (40) na Equação (26) e resolveu para o valor através de maximização. Ele pôde mostrar por uma manipulação muito obscura que o valor ótimo do vetor de Rodrigues  $\mathbf{Y}$  satisfaz a

$$\mathbf{Y} = [(2s + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}) \mathbf{I} - \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{Z} ; \quad (41)$$

onde foram definidos

$$\mathbf{S} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T ; \quad s = \text{tr} \mathbf{B} ; \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & B_{23} & B_{32} \\ B_{31} & 0 & B_{13} \\ B_{12} & B_{21} & 0 \end{bmatrix} ; \quad (42)$$

---

Utilizamos tanto “R” quanto “A” para indicar uma matriz de rotação segundo as circunstâncias, para evitar uma nomenclatura muito fatigante.

Para calcular  $\mathbf{Y}$ , a Equação (41) pôde ser escrita como

$$\mathbf{Y}(i+1) = 2\mathbf{s} + \mathbf{Z} \mathbf{Y}(i) \mathbf{I} - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Z} \quad (43)$$

e esta equação pode ser iterada para  $\mathbf{Y}$ . Ainda uma vez, necessita-se de um bom valor inicial. Isso Davenport obteve evidentemente do algoritmo TRIAD (com dois vetores) e calculou  $\mathbf{Y}_0$  a partir da matriz de atitude do TRIAD. As quantidades  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{s}$ , e  $\mathbf{Z}$  são determinadas inteiramente da matriz  $\mathbf{B}$  e não necessitam ser recalculadas para cada iteração. Assim, a Equação (43) é simples para se avaliar em comparação com o método Newton-Raphson aplicado ao mínimos quadrados utilizando os ângulos de Euler, e foi um grande melhoramento. O algoritmo foi aplicado com grande sucesso para determinar a atitude para o Orbiting Astronomical Observatory [27], possivelmente a primeira aplicação do problema de Wahba a uma missão real. Infelizmente, o algoritmo nunca se tornou popular, talvez, porque a sua derivação fosse muito difícil de seguir.

Este método foi seguido rapidamente por um outro muito mais interessante baseado sobre o quatérnion, que Davenport chamou de “método-q” (o método de Wessner [11] ele chamou de “método-R”).

### O método-q

O quatérnion é definido por

$$\mathbf{q} = [q_1; q_2; q_3; q_4]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} ; \quad (44)$$

onde

$$\mathbf{q} = \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{n} ; \quad q_4 = \cos \frac{\alpha}{2} ; \quad (45)$$

Em função do quatérnion, a matriz de rotação pode ser escrita

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = (q_4^2 - \mathbf{q} \mathbf{q})\mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_4 [[\mathbf{q}]] ; \quad (46)$$

A propriedade notável do quatérnion é que tem uma regra de composição linear como a matriz de rotação. Assim, se a Equação (38) é verdadeira para as matrizes de rotação, a equação correspondente para os quatérnions é

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}^1 \mathbf{q}_1 = \mathbf{f} \mathbf{q}^0 \mathbf{g}_L \mathbf{q} ; \quad (47)$$

onde

$$\mathbf{f} \mathbf{q} \mathbf{g}_L = \begin{bmatrix} 2 & q_4 & q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & 4 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 & q_4 & q_3 & q_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 5 \end{bmatrix} ; \quad (48)$$

Esta regra simples de composição e a dimensão pequena do quatérnion (somente quatro componentes em vez de nove elementos da matriz de rotação) são responsáveis pela popularidade do quatérnion em muitas aplicações, especialmente para calcular a cinemática ou a dinâmica. Mais importante para este estudo, porém, é o fato que a matriz de atitude é quadrática em função do quatérnion. Como a função de ganho é

linear na matriz de rotação, segue que a função de ganho é quadrática como função do quatérnion. A maximização de uma função quadrática é muito simples.

Assim,

$$g(q) = g(A(q)) = q^T K q ; \quad (49)$$

e

$$K = \begin{bmatrix} S & s I \\ \mathbf{Z}^T & s \end{bmatrix} ; \quad (50)$$

onde  $S$ ,  $s$ , e  $\mathbf{Z}$  são as mesmas quantidades como nas Equações (42). Existe uma só complicação: o quatérnion satisfaz a um vínculo

$$q^T q = 1 ; \quad (51)$$

Para achar o quatérnion ótimo, recorremos de novo ao método de Lagrange. Como Davenport, definimos

$$\begin{aligned} g^0(q) &= g(q) - \frac{1}{2}(q^T q - 1) \\ &= q^T K q - \frac{1}{2}(q^T q - 1) ; \end{aligned} \quad (52)$$

e minimizamos  $g^0(q)$  sem vínculo, do qual segue que

$$\frac{\partial g(q)}{\partial q} (q) = 2(Kq - q) = \mathbf{0} ; \quad (53)$$

A solução da Equação (53) conduz imediatamente a

$$Kq = q ; \quad (54)$$

Assim,  $q$  é um autovetor de  $K$ , e  $\lambda$  é um autovalor de  $K$ . Dado que

$$g(q) = q^T K q = \lambda q^T q = \lambda ; \quad (55)$$

segue que  $\lambda$  é o autovalor maior de  $K$ .

Para determinar  $q$  precisamos computar  $K$ , a matriz  $4 \times 4$ , e resolver o problema de autovalor da Equação (54). O autovetor de autovalor maior é o quatérnion ótimo, do qual podemos calcular a matriz de atitude ótima, os ângulos de Euler ótimos, o vetor de Rodrigues ótimo, ou o valor ótimo de qualquer representação de atitude. Esta forma do algoritmo foi utilizada com muito sucesso na missão HEAO [28–30] . Neste ponto, porém, Davenport acabou as suas pesquisas sobre este problema.

O método- $q$  tinha muitas vantagens em comparação com o método- $Y$ . Em primeiro lugar, foi muito mais fácil de entender, visto que as etapas da sua derivação eram muito menos obscuras do que o método- $Y$ . Também, este método conduziria sempre a um valor bem definido de  $q$ , se existisse um atitude bem definida. O método- $Y$  sofreu do fato que o vetor de Rodrigues se tornou infinito quando o ângulo de rotação era  $\pi$ , e, por conseguinte, as soluções tornaram-se inacuradas perto deste valor. Também o método- $Y$  necessitou de um outro método para começar, como o método TRIAD. Por outro lado, o método- $Y$ , quando não sofreu divergência perto de  $\pi$ , foi muito mais rápido do que o método- $q$ .

O método- $q$  foi ainda um pouco lento por causa da necessidade de avaliar um problema de autovalor de dimensão quatro. Não era evidente que o algoritmo seria



suficiente rápido para o Magsat. Assim, um método mais rápido era necessário. Uma manipulação do algoritmo de Davenport, feita pelo autor, conduz a este método.

Consideremos de novo a Equação (54), que pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} S & sI \\ \mathbf{Z}^T & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix}_{\max} ; \quad (56)$$

ou

$$\begin{aligned} (S - sI) \mathbf{q} + \mathbf{Z} q_4 &= \mathbf{q}_{\max} ; \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{q} + s q_4 &= q_{4\max} ; \end{aligned} \quad (57)$$

Se dividirmos por  $q_4$  e observarmos que

$$\frac{\mathbf{q}}{q_4} = \tan \frac{\mathbf{n}}{2} = \mathbf{Y} ; \quad (58)$$

estas equações tornam-se

$$(S - sI) \mathbf{Y} + \mathbf{Z} = \mathbf{Y}_{\max} ; \quad (59a)$$

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Y} + s = q_{4\max} ; \quad (59b)$$

A solução é simplesmente

$$\mathbf{Y} = [(q_{4\max} + s)I - S]^{-1} \mathbf{Z} ; \quad (60a)$$

$$q_{4\max} = s + \mathbf{Z}^T [(q_{4\max} + s)I - S]^{-1} \mathbf{Z} ; \quad (60b)$$

que são na verdade muito similares às soluções do método-Y.

Com um bom valor inicial para  $\mathbf{Y}$  ou para  $q_{4\max}$ , estas equações podem ser iteradas efetivamente. Em vez de determinar como Davenport o valor de  $\mathbf{Y}_0$  a partir do algoritmo TRIAD, examinamos o valor de  $q_{4\max}$ . Das Equações (21), (23) e (55), segue que

$$q_{4\max} = g(q) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} a_k j \mathbf{W}_k - A \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{V}_k j^2 ; \quad (61)$$

Assim, se os erros de medida forem de ordem  $\epsilon$ , então

$$q_{4\max} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (1 + O(\epsilon^2)) ; \quad (62)$$

Se definirmos agora

$$\mathbf{Y}_0 = [(q_{4\max 0} + s)I - S]^{-1} \mathbf{Z} ; \quad (63)$$

onde

$$q_{4\max 0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 ; \quad (64)$$

então,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 (1 + O(\epsilon^2)) ; \quad (65)$$

A quantidade  $\theta^2$  é muito pequena mesmo para sensores de exatidão modesta. Para erros de ordem de 0,5 graus,  $\theta^2 \approx 20$  segundos de arco, e para erros de ordem de 10 segundos de arco,  $\theta^2 \approx 0,0005$  segundos de arco. Assim, a solução de ordem zero do problema é muito simples e precisa.

As etapas são as seguintes:

Construir  $B$ ,  $s$ ,  $S$ , e  $Z$  dos dados.

Calcular  $\max_0 = \sum_P a_k$ .

Resolver  $[(\max_0 + s)I - S]Y_0 = Z$  por eliminação gaussiana.

Uma exatidão maior é possível por substituição repetida.

Essa é certamente a solução para uma pessoa inteligente. Infelizmente, esse não é o método que existe nos programas do NASA Goddard Space Flight Center. O resto deste artigo tratará da história de como o QUEST tornou-se obscura.

## O desenvolvimento do QUEST—a verdadeira história (1977–1981)

### O problema do autovalor

Na verdade, a forma de desenvolvimento do algoritmo QUEST a partir do algoritmo-q de Davenport foi muito diferente. O começo (no outono de 1977) não foi a partir das Equações (59) e (64), que eram o caminho que teria seguido uma pessoa razoável, mas sim as Equações (60). A razão era que o autor que tinha buscado uma solução mais eficiente, não era engenheiro nem matemático, mas físico nuclear teórico, e as Equações (60) eram muito mais similares às equações de física. O autor não se desencorajou com o conselho normalmente dado aos matemáticos de que o pior método para resolver as equações lineares  $Ax = b$  é o de inverter a matriz  $A$ . Na verdade, ele nunca assistiu a um curso de matemática aplicada e nunca ouviu este conselho. Pela mesma razão ele não sabia que a pior maneira de computar um autovalor era a de resolver a equação característica,  $\det(jK - I) = 0$ . Assim, o autor decidiu inverter a matriz  $[(\max + s)I - S]$  para resolver  $Y$ , e computou  $\max$  pela solução da equação característica. Isso ele fez da maneira mais difícil possível. Estranhamente, este caminho conduz à solução mais eficiente e com o melhor comportamento de todas as soluções do problema de Wahba. Evidentemente a sorte é mais importante do que o bom conselho ou a inteligência.

Como o autor decidiu avaliar  $\max$  é ainda mais estranho. Ele não resolveu simplesmente as Equações (59) para obter as mais bonitas mas menos práticas Equações (60). Em vez disso, ele voltou-se aos princípios básicos (como somente um físico teórico pode considerar com básico, porém) e examinou de novo o problema de Wahba na maneira mais fundamental.

O problema de Davenport era maximizar  $q^T K q$  sujeito ao vínculo que  $q^T q = 1$ , onde  $K$  é real e simétrica. Supondo que escrevamos

$$H = K \quad ; \quad q^T q = 1 \quad (66)$$

---

Peço a paciência do leitor para o resto desta parte do artigo.

o problema é agora similar ao seguinte :

$$\text{Minimizar } \langle \psi | H | \psi \rangle \text{ sujeito a } \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad ; \quad (67)$$

onde  $H$  é hermitiana. Cada físico reconhece na Equação (67) a formulação variacional da mecânica quântica que tem como solução a equação de Schrödinger,

$$H \psi_0 = E \psi_0 \quad ; \quad (68)$$

Como buscamos o autovalor menor de  $H$ , o problema de Davenport é equivalente ao de achar a energia de estado de base de um sistema descrito pelo hamiltoniano  $H$ . Assim, existe uma correspondência entre a Estimação de Atitude e a Mecânica Quântica. A Estimação de Atitude é um assunto que data somente desde o Sputnik em 1957. A Mecânica Quântica, porém, tem aproveitado estudos sérios desde o começo do século e tem acumulado muitos métodos de solução. O autor, por conseguinte, começou a investigação dos métodos da mecânica quântica para achar um método mais rápido para resolver o problema de Wahba.

Começou com a Teoria de Perturbações na Mecânica Quântica. Escreveu

$$H = \begin{pmatrix} S & sI \\ Z^T & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix} = H_0 + V \quad ; \quad (69)$$

onde

$$H_0 = \begin{pmatrix} S & sI \\ 0^T & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad V = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^T & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad (70)$$

Assim,  $H_0$  era o hamiltoniano do sistema não perturbado, e  $V$  era o potencial de perturbação. A equação para a energia do estado de base do sistema não perturbado era

$$H_0 \psi_0 = E_0 \psi_0 \quad ; \quad (71)$$

onde  $E_0$  é a energia do estado de base do sistema não perturbado e  $\psi_0$  é a função ondulatória correspondente. Queremos calcular  $E$ , a energia do sistema perturbado, que satisfaz a

$$H \psi = E \psi \quad ; \quad (72)$$

A teoria de perturbação Rayleigh-Schrödinger [31–32] dá o resultado

$$E = E_0 + \langle \psi_0 | V | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 | V \frac{P}{E_0 - H_0} V | \psi_0 \rangle + \dots \quad ; \quad (73)$$

onde  $P$  é um operador de projeção no subespaço do espaço de Hilbert que é ortogonal ao estado de base não perturbado. O autor consagrou muito tempo aos estudos da expansão perturbadora da atitude. Ele desenvolveu mesmo uma representação diagramática que levou o seu colega, F. L. Markley (físico também)

---

Uma matriz hermitiana satisfaz a  $H^* = H^T = H$  onde  $H$  denota o complexo conjugado de  $H$ . Claramente, cada matriz real e simétrica é hermitiana.

O autor espera que tudo isso seja completamente claro aos engenheiros aeroespaciais!

a declarar: “você realizou o que eu sempre quis fazer, aplicar os diagramas de Feynman aos estudos de atitude [33]”!

Para ângulos pequenos, a perturbação é pequena e a expansão perturbadora converge rapidamente. Infelizmente, não existe razão para crer que os ângulos são sempre pequenos. Assim necessitamos de um outro método.

Logo depois, o autor examinou a teoria das interações efetivas, que tinha sido aplicada à teoria das forças nucleares. A interação fundamental entre nucleons no núcleo é muito forte, mas a soma de todas as interações entre os nucleons conduz a uma força muito mais débil (mas ainda muito forte em comparação com as outras interações entre partículas no núcleo: eletromagnética, fraca e gravitacional). Assim, ele buscou uma interação efetiva da forma

$$H_e = H_o + V \frac{P}{E - H} V ; \quad (74)$$

que satisfaz a

$$\mathcal{U}_0^H H_e \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0^H H \mathcal{U}_0 : \quad (75)$$

Esta última equação é equivalente a

$$\mathbf{z}_{\max} = \mathbf{s} + \mathbf{Z}^T \frac{1}{(\mathbf{z}_{\max}^T \mathbf{z}_{\max} + \mathbf{s}^T \mathbf{s})} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{\max} ;$$

que é simplesmente a Equação (60b). Desta maneira o autor encontrou pela primeira vez a Equação (60b). Estas idéias de Mecânica Quântica são documentadas parcialmente na Referência [34]. Embora a Mecânica Quântica não seja indicada explicitamente (tinha dúvida se isso seria recebido com muita alegria pelo cliente da NASA), a sua presença foi evidente aos colegas do autor na Computer Sciences Corporation, dos quais muitos tinham o doutorado em Física. Nesta época o autor apresentou uma conferência bizarra na Computer Sciences Corporation com o título “Aplicações dos Métodos da Física Nuclear Teórica à Estimação de Atitude,” que teve uma assistência muito grande.

Os engenheiros que acham a apresentação do algoritmo QUEST difícil de entender podem estar agora agradecidos porque não necessitaram ler as pesquisas anteriores do autor sobre este assunto. Felizmente, quando o autor se familiarizou mais com este problema, abandonou completamente as associações com a mecânica quântica e começou a apresentar o algoritmo em uma maneira quase compreensível.

### Crimes adicionais – a computação de atitude

Se a tentativa do autor de achar alternativas sobre a estimação da atitude na mecânica quântica não sobreviveu à primavera de 1978 e agora está desaparecido

---

A maioria dos colaboradores do *Spacecraft Attitude Determination and Control*, organizado por J. R. Wertz, eram, na verdade, físicos. Poucos eram químicos, matemáticos e astrônomos. Wertz mesmo fez o doutorado em Relatividade Geral e a sua filosofia geométrica na estimação de atitude tem sua origem neste assunto muito geométrico

Talvez, porque o autor tenha feito uma grande publicidade, de que seria apresentado antes da conferência um programa de diapositivos: “Moças da Praia de Tel-Aviv”!

sem traços, outras decisões mal aconselhadas existem ainda. Como o autor observou anteriormente, a matriz

$$[(\lambda_{\max} + s)I - S]^{-1}$$

aparece nas Equações (60) para a computação do quatérnion ótimo e para a computação do autovalor,  $\lambda_{\max}$ . Assim, pensou o autor, a chave da melhor solução do problema era achar uma expressão melhor para o inverso desta matriz. Naturalmente, não é aconselhável se inverter a matriz explicitamente. Mas o autor não soube isso.

Na busca de uma maior obscuridade, o autor recebeu um jeitinho do seu amigo e colega F. Landis Markley. Em 1968, Markley tinha estudado as simetrias quebradas das partículas elementares (um tópico muito obscuro para engenheiros aeroespaciais) e no curso das suas computações [35] ele utilizou o Teorema Cayley-Hamilton [36] para inverter uma matriz. Por conseguinte, ele mostrou ao autor como obter um resultado similar no desenvolvimento de um algoritmo para estimar a atitude ótima.

O Teorema Cayley-Hamilton [36] declara o seguinte: Se tivermos uma matriz quadrada  $M$  de dimensão  $n$ , cuja equação característica é escrita na forma

$$\det(jM - I) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 = 0 \quad ; \quad (76)$$

então, será também verdadeiro que

$$c_n M^n + c_{n-1} M^{n-1} + \dots + c_1 M + c_0 I = 0 \quad ; \quad (77)$$

Por conseguinte,  $M^n$  pode ser escrita como uma soma de potências menores e, por extensão, cada série de Taylor em  $M$  (ou, equivalentemente, qualquer função analítica em  $M$ ) pode ser escrita como polinômio de grau não superior a  $n - 1$ . Por exemplo, a matriz de rotação, que é uma função analítica do eixo de rotação, pode ser escrita

$$\begin{aligned} R(\mathbf{n}; \theta) &= \expf[\theta \mathbf{n}]g \\ &= I + \sin \theta [\mathbf{n}] + (1 - \cos \theta) [\mathbf{n}]^2 \quad ; \end{aligned} \quad (78)$$

um polinômio do segundo grau ( $3 - 1 = 2$ ).

Para aplicar este resultado no problema presente, observamos que o polinômio característico para  $S$  é

$$S^3 + 2sS^2 - (s^2 + \lambda_0^2)S + \lambda_0^2 I = 0 \quad ; \quad (79)$$

onde

$$s = \frac{1}{2} \text{tr}[S] \quad ; \quad \lambda_0^2 = \text{tr}[\text{adj}(S)] \quad ; \quad \lambda_0^2 = \det S \quad (80)$$

(a nomenclatura  $\text{tr}[\text{adj}(S)]$  denota o traço da matriz adjunta de  $S$ ). Da aplicação do Teorema Cayley-Hamilton a  $[(\lambda_{\max} + s)I - S]^{-1}$ , pode-se escrever imediatamente

$$[(\lambda_{\max} + s)I - S]^{-1} = \frac{1}{\lambda_{\max} + s} I + \frac{S}{\lambda_{\max} + s} + \frac{S^2}{\lambda_{\max} + s} \quad ; \quad (81)$$

---

O autor conheceu Markley quando era aluno de pós-graduação e Markley era doutor. O autor e James R. Wertz moraram simultaneamente no mesmo alojamento dos alunos na universidade. G. M. Lerner, um outro nome conhecido na estimação de atitude foi durante quase dois anos o companheiro de quarto do autor.

Escrevemos os coeficientes da expansão como  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , e  $\alpha_2$  por causa do fato seguinte :

$$[(\alpha_0 + s)I - S]^{-1} = \frac{\text{adj}[(\alpha_0 + s)I - S]}{\det[(\alpha_0 + s)I - S]} : \quad (82)$$

Como a matriz adjunta e o determinante são separadamente funções analíticas do seu argumento matricial, segue que a expansão Cayley-Hamilton do lado esquerdo da Equação (82) deve ter a forma da Equação (81) com  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , e  $\alpha_2$  polinômios finitos em  $\alpha_0$ . Não é difícil mostrar que

$$= \det[(\alpha_0 + s)I - S] : \quad (83)$$

Para resolver a Equação (81) para os coeficientes, necessitamos multiplicar os dois lados daquela equação por  $[(\alpha_0 + s)I - S]$ , aplicar o Teorema Cayley-Hamilton para substituir um polinômio cúbico para o termo em  $S^4$ , e equacionar os coeficientes. O resultado é

$$= \alpha_0^2 S^2 + \alpha_1 S + \alpha_2 = (\alpha_0 + s) \alpha_0 : \quad (84)$$

Necessitamos agora calcular  $\alpha_0$ . Uma pessoa inteligente (se forçado a aplicar a equação característica ) calcularia  $\det(jK - I)j$ , para obter um polinômio simples de grau 4. A raiz maior daquele polinômio pode ser calculado rapidamente pela aplicação do método Newton-Raphson com  $\alpha_0$  definido pela Equação (64) como valor inicial. Um caminho tão direto não agradou aos sentimentos estéticos do autor, que infelizmente, foi mais atraído pela Equação (60b).

Examinamos a Equação (60b), que é

$$\alpha_0 = s + Z^T [(\alpha_0 + s)I - S]^{-1} Z : \quad (85)$$

Se substituirmos a Equação (79) obtemos diretamente

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= s + Z^T (I + S + S^2) Z \\ &= s + Z^T Z + Z^T S Z + Z^T S^2 Z : \end{aligned} \quad (86)$$

Agora, se multiplicarmos os dois lados da equação por  $\alpha_0$  e coletarmos os termos, obtém-se

$$\alpha_0^4 (a + b) \alpha_0^2 + c \alpha_0 + (ab + cs - d) = 0 ; \quad (87)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= s^2 & ; & \quad b = s^2 + Z^T Z ; \\ c &= \alpha_0 Z^T S Z & ; & \quad d = Z^T S^2 Z : \end{aligned} \quad (88)$$

Como as Equações (60) são as mesmas para cada autovalor e autovetor correspondente da matriz K, segue que a Equação (87) deve ser idêntica à equação característica para K. O cálculo simples de  $\det(jK - \alpha_0 I)j$  conduziria a um resultado rápido e útil. Porém, um tal caminho abandonaria a obscuridade refinada das Equações (79)–(88).

Podemos agora calcular  $\mathbf{Y}$  diretamente. A substituição da Equação (81) na Equação (60a) conduz diretamente a

$$\mathbf{Y} = {}^1\mathbf{X} ; \quad (89)$$

onde

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} + \mathbf{SZ} + \mathbf{S}^2\mathbf{Z} ; \quad (90)$$

Como o vetor de Rodrigues é dado por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{q} = q_4 ; \quad (91)$$

segue que

$$\mathbf{q} = c\mathbf{X} ; \quad q_4 = c ; \quad (92)$$

para uma constante  $c$  e, por conseguinte,

$$q = \frac{1}{2 + \mathbf{j}\mathbf{X}\mathbf{j}^2} \mathbf{X} ; \quad (93)$$

Assim, o vetor de Rodrigues nunca necessita ser computado explicitamente. As Equações (79) até (93) são o coração do método de determinação de atitude desenvolvido para o satélite Magsat [37–38] . O programa se chama QUEST (QUatérnion ESTimator), e esse tornou-se o nome do algoritmo também [38] .

### **A verdade estranha**

Esta solução bizarra para calcular o quatérnion ótimo parece ser o método mais eficiente. Era, por exemplo, muito mais rápida do que SNAPLS, o programa para a missão HEAO, que continha o método- $q$  de Davenport e que resolveu o problema completo de autovalor para  $K$  pela aplicação do método de Householder (na missão HEAO, porém, a atitude foi calculada muito infreqüentemente e um algoritmo mais rápido não era necessário). O algoritmo QUEST era mais rápido porque o processamento de limite foi aplicado a um escalar em vez de a um vetor. A utilização do polinômio característico para calcular um autovalor não é aconselhável porque este método tem problemas se dois autovalores são próximos. Felizmente, isso acontece unicamente quando a atitude não pode ser bem determinada de nenhuma maneira. Também apesar do aparecimento complicado das Equações (79)–(88), na verdade, elas necessitam do mesmo número de operações que as 72 multiplicações necessárias para o cálculo direto de  $\det \mathbf{J} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{j}$ . Como benefício adicional, os vetores  $\mathbf{SZ}$  e  $\mathbf{S}^2\mathbf{Z}$ , que figuram no cálculo do quatérnion ótimo na Equações (89)–(93), já são calculados na computação de  $\lambda_{\max}$ . Assim, há menos etapas neste método complicado. Na verdade depois da publicação do QUEST, Tietze [39] tentou desenvolver um algoritmo “correto” para o problema de Wahba. Embora ele pretendesse que o seu método fosse mais rápido em dez por cento, a diferença era o resultado de uma inconsistência na programação. O algoritmo do Tietze era na verdade cinquenta por cento mais lento [40] .

### **Análise de covariância**

Nem o trabalho anterior sobre o problema de Wahba [8–30] nem a primeira publicação do QUEST [37] tentou avaliar a exatidão da atitude ótima computada.

Parcialmente esta situação existiu porque não era claro como parametrizar a exatidão da atitude. Um entendimento mais profundo desta questão era também um produto das pesquisas sobre o QUEST [38] .

Para parametrizar a exatidão da atitude, começamos com a definição dos ângulos de erro. Escrevemos

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{003} & \mathcal{E}_{002} & \mathcal{E}_{001} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} A^{\text{verdade}} ; \quad (94)$$

onde  $A$  é a atitude estimada e  $A^{\text{verdade}}$  é a atitude verdadeira. Os ângulos de erro,  $\mathcal{E}_{001}$ ,  $\mathcal{E}_{002}$  e  $\mathcal{E}_{003}$ , são os três componentes do vetor de rotação infinitesimal que liga a atitude verdadeira com a atitude computada (ao menos, esperamos que a rotação seja infinitesimal). Geralmente esperamos que as medidas de atitude não tenham qualquer tendenciosidade. Assim,

$$E\mathcal{E}_{00} \mathbf{g} = \mathbf{0} ; \quad (95)$$

A matriz de covariância é definida como

$$P = E\mathcal{E}_{00} \mathcal{E}_{00}^T \mathbf{g} ; \quad (96)$$

A definição de matriz de covariância em função de ângulos de uma rotação infinitesimal, permite uma parametrização da covariância que é independente da própria atitude. Assim, se o sistema de referência terrestre mudar, a matriz não será alterada. Ao contrário, se a matriz de covariância de atitude fosse definida em função de erros nos ângulos de Euler, ela seria muito sensível à definição do sistema terrestre e poderia ser muito grande, mesmo quando a atitude fosse bem determinada.

Antes de podermos computar a matriz de covariância necessitamos de um modelo dos erros de medida. Dado que as medidas são vetores unidade,

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{W}_k^{\text{verdade}} + \mathcal{E}_{00} \mathbf{W}_k ; \quad (97)$$

deve ser verdade que

$$\mathbf{W}_k^{\text{verdade}} \mathcal{E}_{00} \mathbf{W}_k = \mathbf{0} ; \quad (98)$$

Isso pode não ser exato por causa do vínculo do vetor unidade, que necessita de que

$$\mathbf{W}_k^{\text{verdade}} \mathcal{E}_{00} \mathbf{W}_k = \mathbf{0} ; \quad (99)$$

cujo valor é sempre pequeno (da ordem  $j\mathcal{E}_{00} \mathbf{W}_k^2$ ) e pode ser negligenciado sem problema. A análise de covariância do QUEST supôs o modelo mais simples que satisfaz à Equação (98). Isso era

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{W}_k^{\text{verdade}} + \mathcal{E}_{00} \mathbf{W}_k ; \quad (100)$$

---

Se o estimador tiver um tendenciosidade, devemos definir a matriz de covariância como  $P = E\mathcal{E}_{00} \mathcal{E}_{00}^T \mathbf{g} = E\mathcal{E}_{00} \mathbf{g} E\mathcal{E}_{00}^T \mathbf{g}$

No programa do QUEST [38] os erros eram definidos em função dos componentes vetoriais do quatérnio infinitesimal, que é equivalente. A matriz de covariância é diferente neste caso de um fator de 4.



com

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{W}_k \mathbf{g}\} &= \mathbf{0} ; \\ E\{\mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{g}\} &= \frac{1}{k} [I - \mathbf{W}_k^{\text{verdade}} \mathbf{W}_k^{\text{verdade}T}] : \end{aligned} \quad (101)$$

Naturalmente,

$$\mathbf{W}_k^{\text{verdade}} = \mathbf{A}^{\text{verdade}} \mathbf{V}_k : \quad (102)$$

Para sensores com campo visual restrito, esta aproximação é excelente [41] .

Antes de calcular a covariância necessitamos definir o estimador mais completamente. As constantes  $a_k$  que parecem na função de custo ainda não tem um valor específico. A filosofia de mínimos quadrados diz que estas devem ter o valor

$$a_k = c = \frac{1}{k} ; \quad (103)$$

onde  $c$  é uma constante, cujo valor não é importante por que isso muda o valor de função de custo sem mudar a dependência analítica. Com esta hipótese para o modelo de medida e para as constantes na função de custo, a matriz de covariância do algoritmo QUEST é simplesmente [38]

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} (I - \mathbf{W}_k^{\text{verdade}} \mathbf{W}_k^{\text{verdade}T}) : \quad (104)$$

As computações de covariância de atitude anteriormente eram feitas através de simulação das medidas com realizações diferentes para os erros de ruído seguido da computação da covariância observada a partir dos desvios da atitude computados. A expressão simples da Equação (104) simplificou enormemente a análise de missão.

## Um dividendo imprevisto

Foi uma outra vantagem do algoritmo QUEST, que não tinha sido reconhecido imediatamente. A determinação de atitude para os satélites anteriores era muito lento por causa de dois fatores. Primeiro, o algoritmo de otimização que necessitava normalmente de muitas diferenciações das funções trigonométricas era frequentemente muito vagaroso. Segundo, o tratamento de dados necessitava da intervenção constante do analista de missão e era ainda mais lento. A otimização feita pelo QUEST era muito mais rápido. Também, parece que a verificação de dados pode ser feita automaticamente pelo QUEST.

Observamos que

$$g(q) = \max : \quad (105)$$

Assim,

$$J(q) = \max_0 \quad g(q) = \max_0 \quad \max : \quad (106)$$

A diferença entre o valor de  $\max_0$  e o valor inicial na iteração Newton-Raphson dá um índice de desempenho que pode servir com medida da qualidade dos dados. Na verdade,

$$\text{test} = 1 - \frac{\max}{\max_0}$$

---

Para o Magsat  $c$  era determinada para que  $\max_0 = 1$ .

é simplesmente uma média dos quadrados dos desvios entre os  $\mathbf{V}_k$  e os  $\mathbf{W}_k$ ,  $k = 1; \dots; N$ . Os dados ruins são normalmente o resultado de uma reflexão imprevista em um sensor ou de uma estrela identificada incorretamente. A tentativa do QUEST de rodar os vetores de referência nos vetores observados não pode resultar em um valor pequeno da função de custo. O QUEST computa a função de custo muito rapidamente (para dados de uma exatidão de 10 segundos de arco, uma só iteração Newton-Raphson é suficiente para exaurir a exatidão de dupla precisão de um computador de grande porte IBM). Assim, foi possível eliminar os dados de má qualidade em função do valor de “test”. Por causa da experiência do Seasat, existiu uma ansiedade profunda de que o processamento dos dados do Magsat poderia precisar de muito tempo. Por causa disso, um outro sistema de determinação de atitude (chamado definitivo intermediário) foi desenvolvido para determinar a atitude a partir dos sensores de precisão limitada (menos do que 0,5 grau) e com frequência de cálculo muito menor. Este sistema forneceria os resultados intermediários aos cientistas. Mas depois de algumas semanas de operações de missão, o sistema definitivo preciso (do qual o algoritmo foi o QUEST) mostrou-se mais rápido do que o sistema definitivo intermediário, que foi então abandonado. Por causa do algoritmo QUEST o processamento de dados do Magsat acabou quase um ano mais cedo do que o previsto!

### Outras complicações

Suponhamos que  $q_4 = 0$ . Neste caso não é possível construir o vetor de Rodrigues. A atitude não apresenta dificuldade, mas no caso de um ângulo de rotação de 180 graus, o vetor de Rodrigues é infinito. Que fazer?

Examinemos as equações originais para o quatérnion ótimo, que escrevemos na forma mais direta mas menos elegante:

$$\begin{aligned} K_{11} q_1 + K_{12} q_2 + K_{13} q_3 + K_{14} q_4 &= \max q_1 ; \\ K_{21} q_1 + K_{22} q_2 + K_{23} q_3 + K_{24} q_4 &= \max q_2 ; \\ K_{31} q_1 + K_{32} q_2 + K_{33} q_3 + K_{34} q_4 &= \max q_3 ; \\ K_{41} q_1 + K_{42} q_2 + K_{43} q_3 + K_{44} q_4 &= \max q_4 ; \end{aligned} \quad (107)$$

O vetor de Rodrigues é obtido pela divisão por  $q_4$  de cada uma das quatro equações. O quatérnion tem a norma unidade. Por conseguinte,

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 ; \quad (108)$$

e a magnitude de ao menos um componente de  $\mathbf{q}$  necessita ser maior do que ou igual a 1=2. Em vez de dividir por  $q_4$ , dividimos pelo componente maior (suponhamos que seja  $q_1$ ), e então, definimos um vetor de Rodrigues modificado

$$\mathbf{Y}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ q_2=q_1 \\ 4 \\ q_3=q_1 \\ 5 \\ q_4=q_1 \end{pmatrix} ; \quad (109)$$

---

O desenvolvimento do sistema definitivo intermediário era a preocupação do autor deste artigo. O desenvolvimento do algoritmo QUEST era realmente a responsabilidade de um outro grupo. O autor desenvolveu o algoritmo um pouco como “hobby”.

O vetor de Rodrigues modificado ótimo e o autovalor satisfazem correspondentemente a

$$\begin{matrix} 2 & & 3 & & 2 & 3 \\ K_{22} & K_{23} & K_{34} & & K_{21} & \\ 4 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 5 & Y^0 + 4 & K_{31} & 5 = \max Y^0 ; \\ & K_{42} & K_{43} & K_{44} & & & K_{41} \end{matrix} \quad (110)$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ K_{21} & \\ K_{11} + 4 & K_{31} & 5 & Y^0 = \max ; \\ & K_{41} \end{matrix} \quad (111)$$

que são equivalentes às Equações (59).

Esta filosofia de calcular a atitude é muito razoável mas inestética, e nós não podemos utilizar os resultados elegantes e complicados que desenvolvemos anteriormente. Naturalmente, foi possível que o ângulo não fosse verdadeiramente bem próximo a 180 graus. Para o Magsat, por exemplo, para o qual a atitude foi computada cada 0,25 segundos, foi estimado que os erros numéricos provindos deste efeito seriam maiores do que 1 segundo de arco somente uma vez em 20.000 anos! A missão mesma não demorou mais do que oito meses. Mas, para fazer um algoritmo correto, mesmo a 180 graus exatos, buscamos uma solução deste problema.

O remédio do algoritmo para poder tratar as rotações de 180 graus se chama o Método das Rotações Sequenciais. Examinemos uma matriz de rotação arbitrária,  $R(\mathbf{n}; \cdot)$ . Podemos definir três matrizes de rotação associadas,

$$\begin{aligned} R(\mathbf{n}; \cdot) R(\mathbf{x}; \cdot) &= R(\mathbf{n}^0; \cdot) ; \\ R(\mathbf{n}; \cdot) R(\mathbf{y}; \cdot) &= R(\mathbf{n}^0; \cdot) ; \\ R(\mathbf{n}; \cdot) R(\mathbf{z}; \cdot) &= R(\mathbf{n}^0; \cdot) ; \end{aligned} \quad (112)$$

onde  $R(\mathbf{x}; \cdot)$  denota uma rotação de  $\pi$  em torno do eixo-x. Estas três equações definem os três ângulos  $\theta$ ,  $\phi$ , and  $\psi$ . É possível mostrar [42] que ao menos um dos quatro ângulos

$$\theta, \phi, \psi, \text{ and } \pi - \theta - \phi - \psi ;$$

não é maior do que  $\pi/3$ .

Por que é isso interessante?

Suponhamos que para uma coleção de  $\mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{W}_k$ , a matriz de atitude ótima seja  $R(\mathbf{n}; \cdot)$ . Então, se substituirmos para os vetores de referência  $\mathbf{V}_k$  uma coleção equivalente  $\mathbf{V}_k^0$  definida segundo

$$\mathbf{V}_k^0 = R(\mathbf{x}; \cdot) \mathbf{V}_k \quad k = 1; \dots; N ; \quad (113)$$

segue que a matriz de atitude ótima, que transforma os novos vetores de referência nos vetores observados, é simplesmente  $R(\mathbf{n}; \cdot)$ . Temos o resultado correspondente para os outros dois eixos. Se  $\theta$  for pertinho de  $\pi$ , então, ao menos um dos outros três ângulos será longe de  $\pi$ .

---

Em [38] o autor declarou incorretamente que foi possível mostrar que ao menos um dos quatro ângulos não era maior do que  $\pi/2$ .

É mais fácil discutir o tópico presente em função da matriz de rotação em vez do quatérnion. As duas representações são, naturalmente, equivalentes.

Esta operação não é complicada. Notamos a propriedade importante em que a atitude ótima do QUEST depende somente da matriz B. A partir da Equação (27), porém, vemos que a matriz B que corresponde aos vetores transformados da Equação (113) é simplesmente

$$B^0 = B R(\mathbf{x}; ) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} & & \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{matrix} & & \begin{matrix} B_{12} \\ B_{22} \\ B_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{matrix} \end{matrix} : \quad (114)$$

Assim, a rotação intermediária de 180 graus em torno do eixo-x de todos os vetores de referência é executada pela mudança de seis sinais. Os resultados são similares para as outras duas rotações intermediárias [38] .

Isso é somente a metade da história. Suponhamos que o quatérnion ótimo calculado a partir de  $B^0$  seja denotado por  $q^0$  (para uma nomenclatura mais clara suprimimos o asterisco neste momento).

$$q^0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} & & \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} q_1^0 \\ q_2^0 \\ q_3^0 \\ q_4^0 \end{matrix} & & & \end{matrix} : \quad (115)$$

O quatérnion ótimo  $q$  que corresponde a B, a matriz de perfil de atitude original, pode ser computado a partir do  $q^0$  segundo

$$q = q^0 \quad q(\mathbf{x}; ) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} & & \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} q_4^0 \\ q_3^0 \\ q_2^0 \\ q_1^0 \end{matrix} & & & \end{matrix} ; \quad (116)$$

e similarmente para os outros dois eixos [38] .

Assim, a mudança de alguns sinais e a transposição de alguns componentes do quatérnion permite tratar os ângulos de rotação de 180 graus. Naturalmente, necessitamos saber se o ângulo de rotação é próximo do 180 graus antes de computar o vetor de Rodrigues,  $\mathbf{Y}$  . Senão, o programa pode tentar dividir por zero. Parece porém, que a quantidade dada pela Equação (84) é um bom critério para isso. É possível mostrar que

$$= c_{\max} 0 j 1 + \cos j ; \quad (117)$$

onde o valor de c é perto de um. Assim, da verificação de , sabemos se o método de rotações sequenciais será necessária.

Todas estas características foram utilizadas no sistema de determinação de atitude para a missão Magsat, no qual o comportamento do algoritmo QUEST foi ótimo [43] .

## QUEST e TRIAD

É possível mostrar que a atitude de TRIAD é dado por um valor de limite do algoritmo QUEST [38]. Notamos que o algoritmo TRIAD dá uma atitude que

transforma  $\mathbf{V}_1$  em  $\mathbf{W}_1$  exatamente e que transforma o componente de  $\mathbf{V}_2$  perpendicular a  $\mathbf{V}_1$  no componente de  $\mathbf{W}_2$  perpendicular a  $\mathbf{W}_1$ . Assim, se considerarmos a função de custo de Wahba para dois vetores observados

$$J(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 a_k \|\mathbf{W}_k - \mathbf{A} \mathbf{V}_k\|^2 ; \quad (118)$$

será claro que

$$\mathbf{A}^{\text{QUEST}} = \mathbf{A}^{\text{TRIAD}} \quad \text{quando} \quad a_2 = a_1 \neq 0 ; \quad (119)$$

### **Propriedades estatísticas do QUEST (1989)**

O algoritmo QUEST tem muitas propriedades estatísticas interessantes. Examinemos o modelo para as medidas que foi utilizado para calcular a matriz de covariância do QUEST. Suponhamos que não nos fosse dado a função de custo de Wahba mas soubessemos aquele modelo de medidas, e suponhamos que quiséssemos determinar a atitude ótima a partir daquele modelo de medidas segundo a teoria de máxima verosimilhança [44]. O resultado seria exatamente o algoritmo QUEST [45].

Este fato conduz a um outro resultado. Recordamos que a atitude ótima pode ser computada completamente a partir da matriz do perfil de atitude,  $\mathbf{B}$ , sem outras informações. É possível mostrar que a matriz de covariância de atitude pode ser computada também completamente a partir de  $\mathbf{B}$  como

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B}^T} ; \quad (120)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz de atitude ótima, que computamos a partir do  $\mathbf{q}$ , que depende somente de  $\mathbf{B}$ . Da mesma maneira, dado  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{A}$ , podemos computar  $\mathbf{B}$  segundo

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} ; \quad (121)$$

Se utilizarmos este  $\mathbf{B}$  no QUEST, obteremos  $\mathbf{A}$  como a matriz de atitude ótima, e se substituirmos este  $\mathbf{B}$  e a matriz de atitude,  $\mathbf{A}$ , correspondente na Equação (120), recuperaremos a matriz de covariância original (mais ou menos: a expressão para a matriz de covariância não é exata mas depende da negligência de termos superiores a segunda ordem). Assim, a matriz de perfil de atitude pode ser considerada como uma representação da atitude e da covariância de atitude.

O resultado mais importante, porém, é que o QUEST pode ser considerado como um estimador de máxima verosimilhança. Assim, muitos resultados gerais da teoria de estimação por máxima verosimilhança podem ser aplicados ao algoritmo QUEST. A Equação (120) é um daqueles resultados.

### **QUEST filtro! (1989)**

O filtro de Kalman pode ser tratado como um estimador linear de mínima variância ou como um estimador de máxima verosimilhança com um modelo de

ruído gaussiano. Como o QUEST tem sido mostrado ser um estimador de máxima verossimilhança, a questão óbvia é se o QUEST pode ser formulado como filtro de Kalman.

A resposta é afirmativa [46]. Consideremos um sistema no qual a cinemática é conhecida exatamente (a atitude não é conhecida exatamente). Assim, para cada intervalo, conhecemos a matriz de transição,  $\mathcal{V}_{R-1}$ , que liga a atitude de uma época à atitude de uma outra.

$$A_k = A(t_k) = \mathcal{V}_{R-1} A_{k-1} ; \quad (122)$$

Suponhamos que em cada instante  $t_k$  haja uma medida vetorial  $\mathbf{W}_k$ . O algoritmo QUEST pode ser adaptado na forma de um filtro de Kalman na maneira seguinte: A equação de propagação é simplesmente

$$B_{k|k-1} = \mathcal{V}_{R-1} B_{k-1|k-1} ; \quad (123)$$

e a equação da atualização é

$$B_{k|k} = B_{k|k-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k} \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^T ; \quad (124)$$

Se não tivermos um conhecimento *a priori* do sistema na época  $t_0$ , a matriz de perfil de atitude será inicializada como

$$B_{o|o} = 0 ; \quad (125)$$

Senão, se uma estimativa *a priori* da atitude for disponível,  $B$  será inicializada segundo a Equação (121). QUEST filtro não é uma adaptação perfeita ao filtro de Kalman para qualquer sistema porque não existe um método para incluir o ruído de processamento no QUEST. Um jeito para compensar esta falta é mudar o QUEST filtro em um filtro com memória débil. Este filtro foi mostrado desempenhar-se bem em comparação com um verdadeiro filtro de Kalman [46]. As mesmas técnicas foram aplicadas ao desenvolvimento de um filtro/suavizador baseado no QUEST, do tipo Rauch-Tung-Striebel [47].

## O método de Varotto, Orlando e Lopes (1985–1987)

Uma aplicação muito interessante originou-se no INPE. Temos mostrado que a matriz de perfil de atitude pode ser tratada como representação de atitude. Este fato pode parecer um pouco estranho porque a matriz de perfil de atitude é construída a partir das medidas. Igualmente, Varotto, Orlando, e Lopes [48] têm mostrado que o quatérnion do algoritmo QUEST pode ser tratado como medida.

Para ver como isso acontece, notamos que o quatérnion estimado pelo QUEST pode ser escrito como

$$\mathbf{q}_k^{\text{QUEST}} = \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k ; \quad (126)$$

onde  $\mathbf{q}_k$  é o quatérnion de ruído,  $\mathbf{q}_k$  é o quatérnion verdadeiro, que queremos estimar, e “ $\cdot$ ” denota a operação de composição do quatérnion. O quatérnion de ruído deve ter a forma

$$\mathbf{q}_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{j}_k \mathbf{j}_k^2}} ; \quad (127)$$

onde  $\mathbf{q}_k$  é um vetor de três dimensões que normalmente é gaussiano e de média zero.

Geralmente, quando atualizamos o quatérnion em um filtro do Kalman [7], escrevemos

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k \mathbf{q}_{k|k-1} ; \quad (128)$$

onde  $\mathbf{q}_{k|k-1}$  é o quatérnion propagado e  $\mathbf{q}_k$  é um quatérnion infinitesimal que estimamos para fazer a atualização. A substituição da Equação (128) na Equação (127) conduz a

$$\mathbf{q}_k^{\text{QUEST}} = \mathbf{q}_k \mathbf{q}_{k|k-1} ; \quad (129)$$

Escrevemos a Equação (126) como

$$\mathbf{q}_k^{\text{QUEST}} \mathbf{q}_{k|k-1}^{-1} = \mathbf{q}_k ; \quad (130)$$

onde notamos que o inverso do quatérnion é simplesmente

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* ; \quad (131)$$

Como  $\mathbf{q}_k$  e  $\mathbf{q}_{k|k-1}$  são separadamente quatérnions infinitesimais, o lado direito desta equação é com boa aproximação, simplesmente

$$\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k|k-1}^* ; \quad (132)$$

O lado esquerdo, seguindo as regras de composição como nas Equações (47) e (48), pode ser escrito

$$\mathbf{q}_{k|k-1}^T \mathbf{q}_k^{\text{QUEST}} ; \quad (133)$$

onde  $\mathbf{q}_{k|k-1}^T$  é dado por

$$\mathbf{q}_{k|k-1}^T = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & q_1 \\ q_2 & q_1 & q_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} ; \quad (134)$$

Assim, se definirmos a medida efetiva como

$$\mathbf{z}_k^{\text{QUEST}} = \mathbf{q}_{k|k-1}^T \mathbf{q}_k^{\text{QUEST}} ; \quad (135)$$

teremos como resultado que

$$\mathbf{z}_k^{\text{QUEST}} = \mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k|k-1}^* ; \quad (136)$$

Daqui, a implementação no filtro de Kalman é direto.

Varotto, Orlando, e Lopes implementaram este método com grande efeito para desenvolver um filtro de Kalman muito eficiente para um satélite estabilizado por gradiente gravitacional e com o emprego de um modelo dinâmico pela propagação da atitude [48]. Um relatório muito detalhado deste trabalho pode ser achado

na tese de mestrado de Varotto [49] . Mais tarde Fisher et alii aplicaram esta técnica para um satélite provido de um rastreador de estrelas CCD com resultados igualmente favoráveis [50] .

### Desenvolvimentos de Markley (1987–1990)

Recentemente Markley reexaminou as soluções ao problema de Wahba em função da matriz de atitude [51] . A sua inovação foi a aplicação do Teorema de Decomposição em Valores Singulares. Examinemos a matriz de perfil de atitude. Segundo o Teorema de Decomposição em Valores Singulares [52] , esta matriz pode ser escrita como

$$B = U S V^T ; \quad (137)$$

onde  $U$  e  $V$  são matrizes ortogonais e  $S$  é diagonal. Na maioria dos casos,  $S$  será definida positiva e  $U$  e  $V$  serão ortogonais e com determinante positivo (senão, um pouco mais de trabalho é necessário como no trabalho de Farrell e Stuelpnagel [10] ).

Markley mostrou que a matriz de atitude é dada tipicamente para

$$A = U V^T \quad (138)$$

(no caso em que  $U V^T$  não tem determinante positivo, o resultado é um pouco mais complicado mas similar). Esta solução é na verdade muito similar à de Farrell e Stuelpnagel, como pode ser visto se escrevemos a Equação (137) na forma

$$B = (U S U) (U V^T) : \quad (139)$$

Tipicamente, na estimação de atitude o primeiro fator é positivo definido e o segundo fator é ortogonal e com determinante positivo. Este resultado é interessante porque existem agora métodos muito rápidos para avaliar a decomposição em valores singulares [52] . O método é mais lento do que o QUEST, porém.

Markley estendeu este trabalho também na estimação das outras quantidades [53–54] . No seu trabalho estimam-se simultaneamente a atitude ótima e outros parâmetros que minimizam a função de custo

$$J(A; \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \|\mathbf{W}_k - A \mathbf{V}_k\|^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{W}_x^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : \quad (140)$$

O método foi examinado para o caso da estimação da atitude e das derivas do girômetros (o vetor  $\mathbf{x}$ ). Infelizmente o método não pode tratar uma correlação inicial entre a atitude e os outros parâmetros. Assim, como o QUEST filtro, o seu emprego é limitado. Porém, como o QUEST filtro, que esta sendo aplicado atualmente aos dados reais da missão COBE [55] , o estimador de Markley pode achar uma aplicação séria também.

### Outras aplicações

Recentemente, o modelo de medida do QUEST foi empregado no desenvolvimento de um estimador muito eficiente para os alinhamentos dos sensores [56] . Este estimador dos alinhamentos foi aplicado à missão Solar Maximum (SMM) [57] .



## **Observações finais**

Traçamos as origens do algoritmo QUEST a partir do problema proposto por Wahba, as soluções mais antigas de Farrell e Stuelpnagel e de Wessner, o trabalho inovador e penetrante de Davenport, o aperfeiçoamento e os toques finais deste autor, o trabalho do grupo do INPE e o trabalho “semi-clássico” do Markley.

As idéias do algoritmo QUEST não foram aceitas imediatamente sem um pouco de resistência, por razão de uma desconfiança sadia da inovação. Depois da sua aplicação com sucesso evidente na missão Magsat, tornou-se instrumento útil muito popular. Na verdade o programa do QUEST não mudou depois da primeira programação para o Magsat, finalizada em janeiro de 1979. O programa ainda não fez a transição do FORTRAN IV ao FORTRAN 77. Por um lado, uma parte deste conservadorismo tem sua origem no conselho de não consertar o que funciona bem. Mas, por outro lado, esta hesitação origina-se também na dificuldade de compreender toda a análise sobre a qual o QUEST se baseou (ver os juízos no começo deste artigo). Por esta razão os novos sistemas de determinação da NASA escritos *em dupla precisão* que empregam o QUEST mudam todos os insumos na precisão simples porque o sistema do Magsat (*em 1979!*) foi em precisão simples. Ainda mais interessante é que o QUEST faz todos os cálculos interiores em dupla precisão. Esta situação infeliz mudará em breve e novos programas para o QUEST e para o QUEST filtro estão sendo escritos atualmente.

O problema de Wahba e o QUEST, a sua solução mais popular, parecem ter muita vida em si mesmos. No futuro, veremos certamente resultados ainda mais interessantes.

## **Reconhecimento**

O autor deseja agradecer os diretores do Primeiro Simpósio Brasileiro de Tecnologia Aeroespacial pela oportunidade de apresentar uma palestra sobre este tópico. Agradece também o Centro de Tecnologia Aeroespacial e o Instituto de Pesquisas Espaciais pela sua hospitalidade durante o simpósio e a calorosa acolhida de todos os brasileiros. O autor reconhece os esforços consideráveis de João Francisco Bezerra de Washington, D. C. (EUA), e de Hélio Koiti Kuga do INPE, que melhoraram em muitos lugares a expressão portuguesa deste artigo.

## **Referências**

- [1] ELKIN, D., (comunicação privada).
- [2] LOPES, R. V. F., (comunicação privada).
- [3] KUGA, H. K., (comunicação privada).
- [4] BLACK, H. D., “A Passive System for Determining the Attitude of a Satellite,” *AIAA Journal*, 2(7) : 1350–1351, July 1964.
- [5] WERTZ, J. R. (ed.), *Spacecraft Attitude Determination and Control*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1978.

---

Supomos que a própria solução de Wahba mesma, que não apareceu em *SIAM Review*, fosse similar a uma das soluções publicadas.

- [ 6 ] SHUSTER, M. D., *Détermination d'attitude des Véhicules Spatiaux*, CEPADUES Editions, Toulouse (em preparação).
- [ 7 ] LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D., "Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 5(5):417-429, Sept.-Oct. 1982.
- [ 8 ] G. WAHBA, "Problem 65-1: A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude," *Siam Review*, 7(3):409 July 1965.
- [ 9 ] FARRELL, J. L.; STUELPNAGEL, J. C., "Solution to Problem 65-1," *Siam Review*, 8(3):384-386, July 1966.
- [ 10 ] FARRELL, J. L., *Integrated Aircraft Navigation*, John Wiley and Sons, New York 1976.
- [ 11 ] WESSNER, R. H., "Solution to Problem 65-1," *Siam Review*, 8(3):386, July 1966.
- [ 12 ] VELLMAN, J. R., "Solution to Problem 65-1," *ibid.*
- [ 13 ] BROCK, J. E., "Solution to Problem 65-1," *ibid.*
- [ 14 ] BROCK, J. E., "Optimal Matrices Describing Linear Systems," *AIJA Journal*, 6(7):1292-1296, July 1968.
- [ 15 ] BAR-ITZHACK, I. Y.; FEGLEY, K. A., "Orthogonalization Techniques of a Direction Cosine Matrix," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-5(5):798-804, Sept. 1969.
- [ 16 ] FRAITURE, L., "A Least Squares Estimate of the Attitude of a Satellite," *Journal of Spacecraft and Rockets*, 7(5):619-620, May 1970.
- [ 17 ] BJÖCK, A.; BOWIE, C., "An Iterative Algorithm for Computing the Best Estimate of an Orthogonal Matrix," *Siam Journal on Numerical Analysis*, 8(20):358-364, June 1971.
- [ 18 ] CARTA, D. G.; LACKOWSKI, D. H., "Estimation of Orthogonal Transformations in Strapdown Inertial Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-17(1):97-100, Feb. 1972.
- [ 19 ] BAR-ITZHACK, I. Y., "Iterative Optimal Orthogonalization of the Strapdown Matrix," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-11(1):30-37, Jan. 1975.
- [ 20 ] GIARDINA, C. R.; BRONSON, R.; WALLEN L., "An Optimal Normalization Scheme," *IEEE Transactions in Aerospace and Electronics Systems*, AES-11(4):443-446 July 1975.
- [ 21 ] BAR-ITZHACK, I. Y.; MEYER, J.; FUHRMANN, P. A., "Strapdown Matrix Orthogonalization: the Dual Iterative Algorithm," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-12(1):32-37, Jan. 1976.
- [ 22 ] BAR-ITZHACK, I. Y.; MEYER, J., "On the Convergence of Iterative Orthogonalization Processes," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-12(2):146-151, Mar. 1976.

- [ 23 ] MEYER, J.; BAR-ITZHACK, I. Y., "Practical Comparison of Iterative Matrix Orthogonalization Algorithms," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **AES-13**(3):230–235, May 1977.
- [ 24 ] DAVENPORT, P. B., *A Vector Approach to the Algebra of Rotations with Applications*, NASA X-514-71-312, Nov. 1965.
- [ 25 ] DAVENPORT, P. B., *A Vector Approach to the Algebra of Rotations with Applications*, NASA TN-D-4696, Aug. 1968.
- [ 26 ] RODRIGUES, O., "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **5**:380–440, 1840.
- [ 27 ] DAVENPORT, P. B., "The Attitude Determination System for the Orbiting Astronomical Observatory," *Proceedings, Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corporation Report, TR-0066(5306)-12, Vol. 1, Sept.–Oct. 1969.
- [ 28 ] KEAT, J., *Analysis of Least Squares Attitude Determination Routine DOAOP*, Computer Sciences Corporation, CSC/TM-77/6034, Feb. 1977.
- [ 29 ] FALLON, L. III; STURCH, C. R., "Performance of Ground Attitude Determination Procedures for HEAO-1," *Atas, Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium*, NASA Goddard Space Flight Center, p. 219–236, Oct. 1977.
- [ 30 ] FALLON, L. III; HARROP, I. H.; STURCH, C. R., "Ground Attitude Determination and Gyro Calibration Procedures for the HEAO Missions," *Proceedings, AIAA 17th Aerospace Sciences Meeting*, New Orleans, Louisiana, Jan. 1979.
- [ 31 ] MESSIAH, A., *Mécanique Quantique*, Dunod, Paris 1957, 1959. (Tradução inglês: *Quantum Mechanics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961, 1962.)
- [ 32 ] NAYFEH, A. H., *Perturbation Methods*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [ 33 ] MARKLEY, F. L., (comunicação privada).
- [ 34 ] SHUSTER, M. D., *Algorithms for Determining Optimal Attitude Solutions*, Computer Sciences Corporation, CSC/TM-78/6056, Apr. 1978.
- [ 35 ] KIM, Y. S.; MARKLEY, F. L., "Spontaneously Broken  $SU_3$  and Massive Vector Mesons," *Il Nuovo Cimento*, Serie X, **63A**:60–74, 1969.
- [ 36 ] HOFFMAN, K.; KUNZE, R., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961.
- [ 37 ] SHUSTER, M. D., "Approximate Algorithms for Fast Optimal Attitude Computation," *Proceedings, AIAA Guidance and Control Conference*, Palo Alto, California, Aug. 1978.
- [ 38 ] SHUSTER, M. D.; OH, S. D., "Three-Axis Attitude Determination from Vector Observations," *Journal of Guidance and Control*, **4**(1):70–77, Jan.-Feb. 1981.
- [ 39 ] TIETZE, J. L., "Fast Three-Axis Attitude Determination Using Vector Observations and Inverse Iteration," *Journal of the Astronautical Sciences*, **30**(2):171–179, Apr.–June 1982.

- [40] SHUSTER, M. D., "A Comment on Fast Three-Axis Attitude Determination Using Vector Observations and Inverse Iteration," *Journal of the Astronautical Sciences*, **31**(4):579–584, Oct.–Dec. 1983.
- [41] SHUSTER, M. D., "Kalman Filtering of Spacecraft Attitude and the QUEST Model," *Journal of the Astronautical Sciences* **38**(3): 377–393, July–Sept., 1990.
- [42] NATANSON, G., (comunicação privada).
- [43] ABSHIRE, G.; McCUTCHEON, R.; SUMMERS, G.; VANLANDINGHAM, F.; MEYERS, G., "High Precision Attitude Determination for Magsat", *Proceedings, International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics*, Darmstadt, República Federal da Alemanha, 1981.
- [44] SORENSON, H., *Parameter Estimation*, Marcel Dekker, New York, 1980.
- [45] SHUSTER, M. D., "Maximum Likelihood Estimation of Spacecraft Attitude," *Journal of the Astronautical Sciences*, **37**(1): 79–88, Jan.–Feb. 1989.
- [46] SHUSTER, M. D., "A Simple Filter and Smoother for Spacecraft Attitude," *Journal of the Astronautical Sciences*, **37**(1): 89–106, Jan.–Feb. 1989.
- [47] RAUCH, H. E.; TUNG, F.; STRIEBEL, C. T., "Maximum Likelihood Estimation of Linear Dynamic Systems," *AIAA Journal*, **3**(8): 1445–1450, 1965.
- [48] VAROTTO, S. E. C.; ORLANDO, V.; LOPES, R. V. F., "Um procedimento para determinação da atitude de satélites artificiais utilizando técnicas de estimação ótima estática e dinâmica," *Atas, 6º Congresso Brasileiro de Automática*, Belo Horizonte, p. 946–951, 1986.
- [49] VAROTTO, S. E. C., "Determinação da Atitude de Satélites Artificiais através da Aplicação Conjunta de Técnicas de Estimação Ótima Estática e Dinâmica" Instituto de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos (SP), Brazil, Publicação Nº. INPE-4415-TDL/306, 1987.
- [50] FISHER, H. L.; SHUSTER, M. D.; STRIKWERDA, T. E., "Attitude Determination for the Star Tracker Mission," Paper No. AAS 89-365, *AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, Stowe, Vermont, August 6–10, 1989, reimpresso em *Astrodynamics 1989*, Vol. 71 de *Advances in the Astronautical Sciences*, p. 139–150, 1990.
- [51] MARKLEY, F. L. "Attitude Determination using Vector Observations and the Singular Value Decomposition," *Journal of the Astronautical Sciences*, **36**(3): 245–258, July–Sept. 1988.
- [52] GOLUB, G. H.; REINSCH, C., "Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions," *Numerical Mathematics*, **14**: 403–420, 1971.
- [53] MARKLEY, F. L., "Attitude Determination and Parameter Estimation Using Vector Observations: Theory" *Journal of the Astronautical Sciences*, **37**(1): 41–58, Jan.–Feb. 1989.
- [54] MARKLEY, F. L., "Attitude Determination and Parameter Estimation Using Vector Observations: Application," Paper No. AAS-89-364, *AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, Stowe, Vermont, August 1989, a aparecer no *Journal of the Astronautical Sciences*.

- [ 55] CHU, D., (comunicação privada).
- [ 56] SHUSTER, M. D.; PITONE, D. S.; BIERMAN, G. J., “Batch Estimation of Spacecraft Sensor Alignments, a aparecer no *Journal of the Astronautical Sciences*.
- [ 57] PITONE, D. S.; SHUSTER, M. D., “Attitude Sensor Alignment Calibration for the Solar Maximum Mission,” *Proceedings, Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium*, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, p. 21–40, May 22–23, 1990.

### **Abstract**

In 1965 Grace Wahba proposed the problem of determining the attitude which minimizes the cost function

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \|W_k - A V_k\|^2 :$$

During the succeeding twenty-five years a large number of solutions have been developed for this estimation problem, many of which have been applied to attitude estimation for some spacecraft. Currently, the most efficient, popular and poorly understood of these algorithms is QUEST, published in 1981. The report will trace the development of attitude determination methods from the earliest beginnings, the particular conditions in the late 1970's which lead to QUEST, the development of QUEST, and developments since then, both extensions of QUEST and hybrid algorithms, such as the method of Varotto, Orlando, and Lopes.