

4. 它像一颗

10pts

手玩下容易发现答案为 $1 + \sum_{j=1}^K 3j$ 。

20pts

由 10pts 部分得到，总遍历点数不会超过 $\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{j=1}^{K_i} 3j)$ 可以接受，直接搜即可。

30pts

考虑求在三角形坐标系上两点距离，纵坐标相等时，距离即为横坐标差。

考虑纵坐标不相等的情况，稍微推一下，可以发现三角形坐标系中，有点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $y_1 \geq y_2$ ，则两点距离为 $\Delta y + \max(\Delta x, \Delta y + (x_1 + y_1) \bmod 2 + (x_2 + y_2 + 1) \bmod 2)$ ，可以发现， $\lceil (x_1 + y_1) \bmod 2 + (x_2 + y_2 + 1) \bmod 2 \rceil$ 的部分，实际上就是在对三角形的形状进行讨论，这启示我们将向上的三角形和向下的三角形分开考虑。

所以考虑把平面上的区域按照纵坐标划分为 $(-\infty, y_2), [y_2, y_2], (y_2, y_1), [y_1, y_1], (y_1, +\infty)$ 5 个区域，然后按照上式随便分讨计算一下即可。

50pts

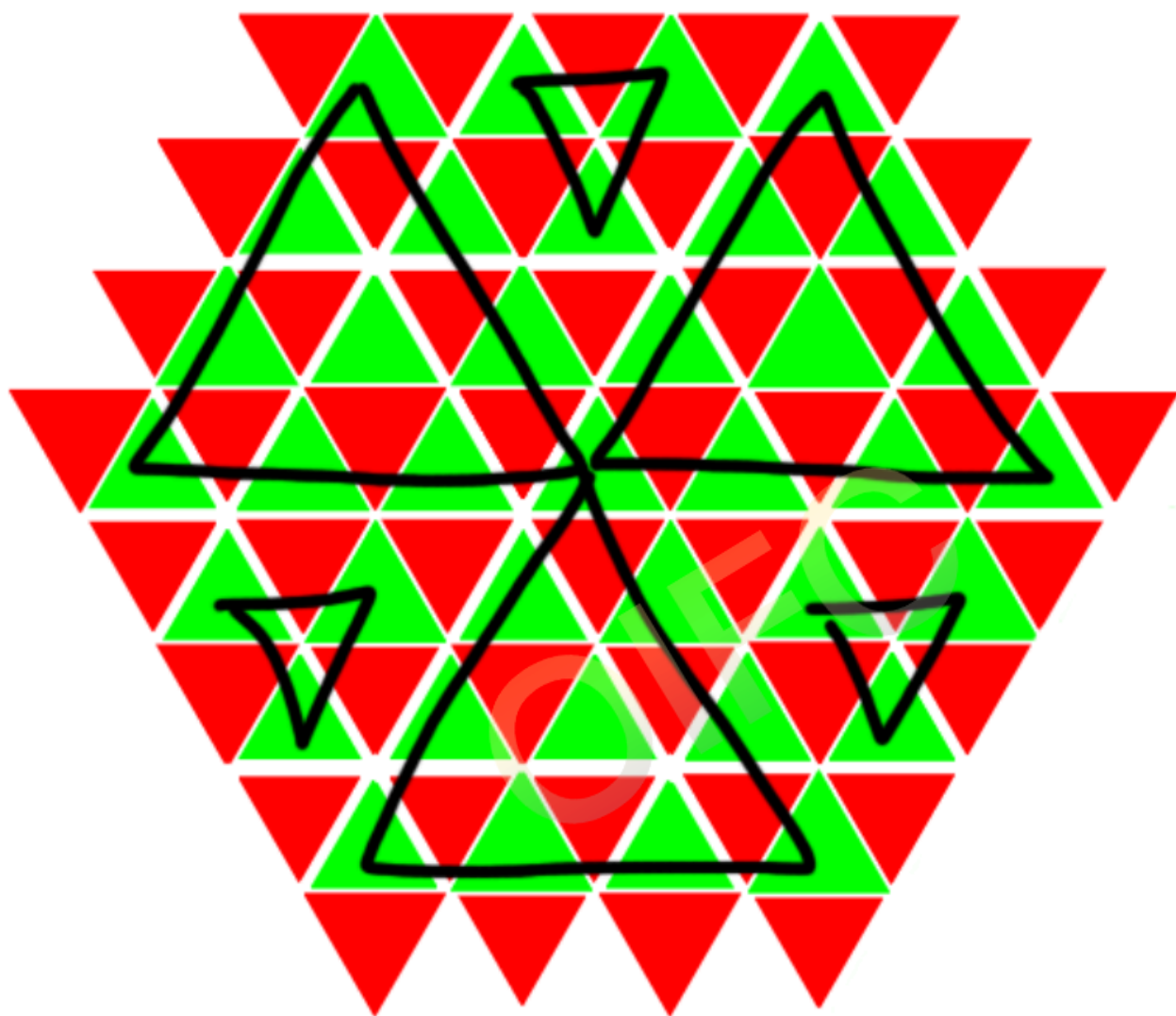
出题人觉得可能有容斥做法，但是不会，就留了这档分。

60pts

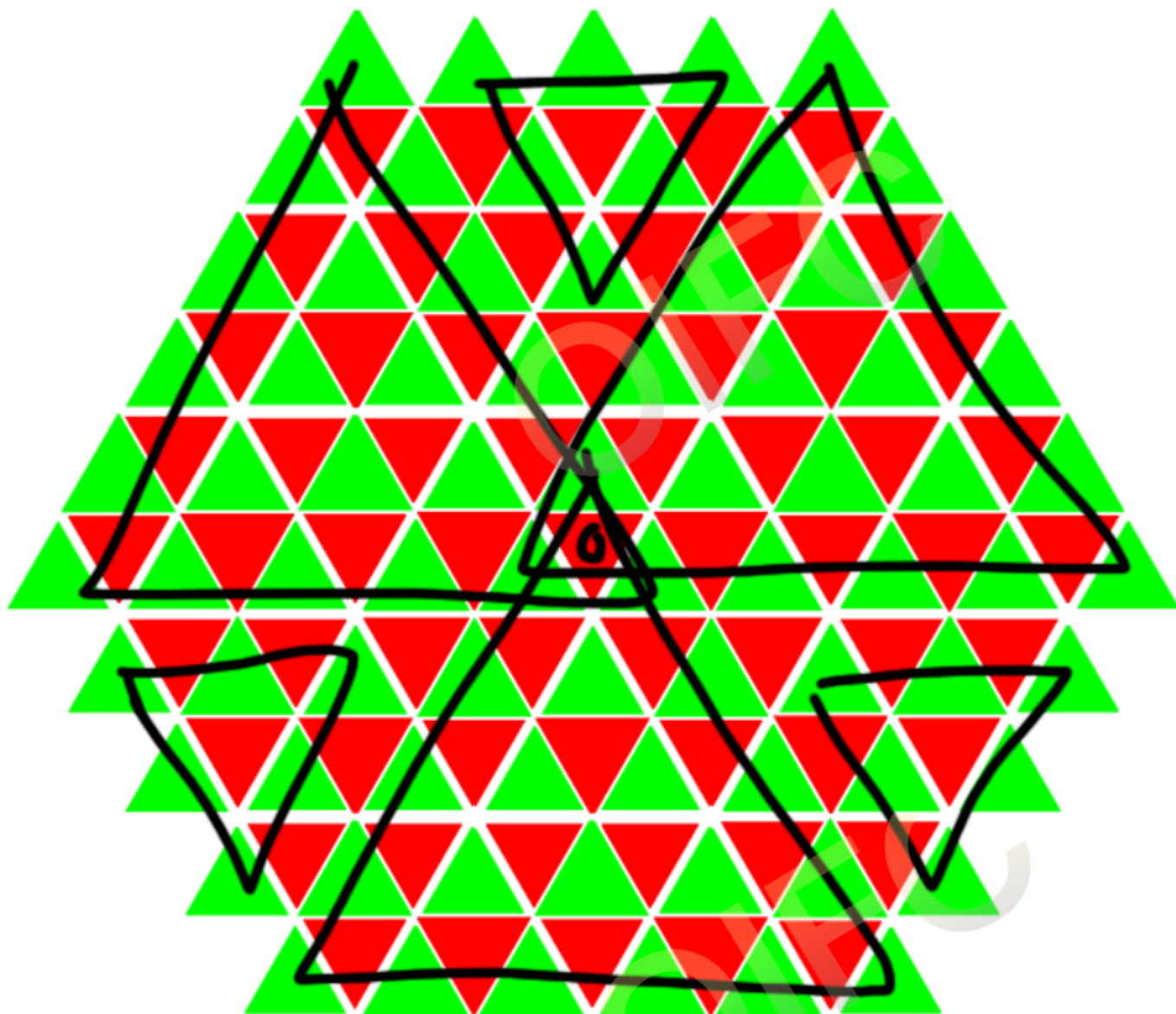
30pts 的部分启示我们可以把向上和向下的两种三角形分开计算，显然这两种三角形不会重叠，贡献可以分开计算，且计算过程是对称的（点按照 $y = 1$ 翻转即可），下文只考虑对尖端向上的三角形的计算。

又发现直接在原图上做没有那么好做。考虑构造一种映射的方案将问题转化到平面直角坐标系中。

观察上三角形在中间和上三角形不在中间的两种情况：

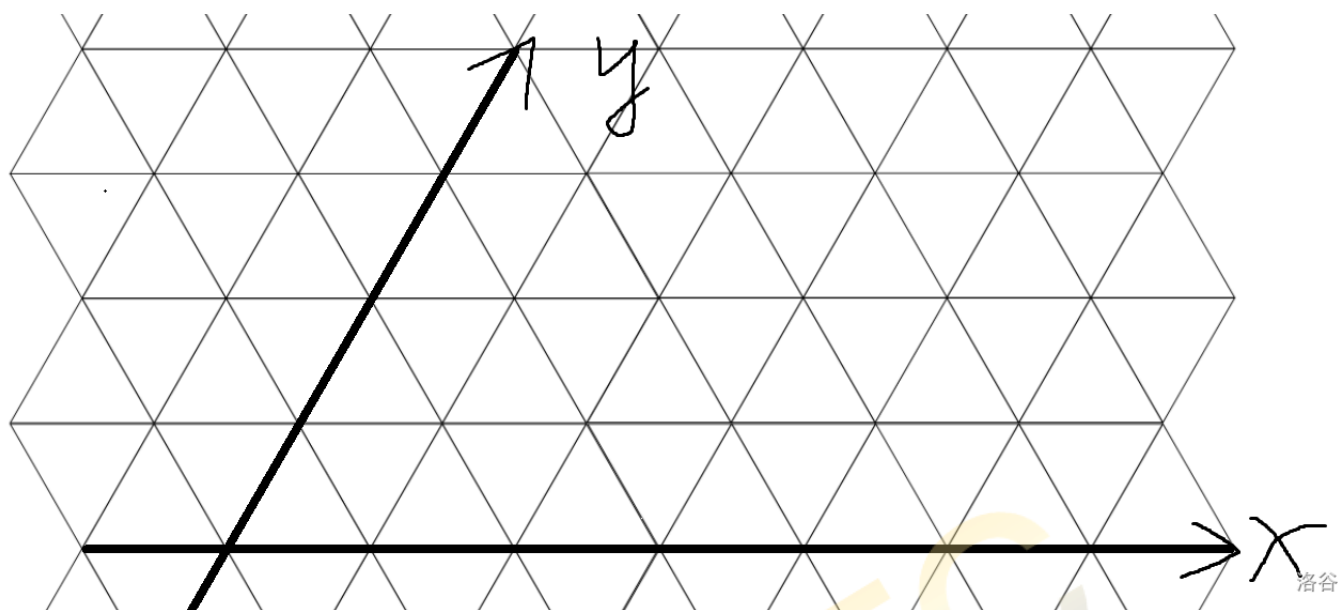


OIFC



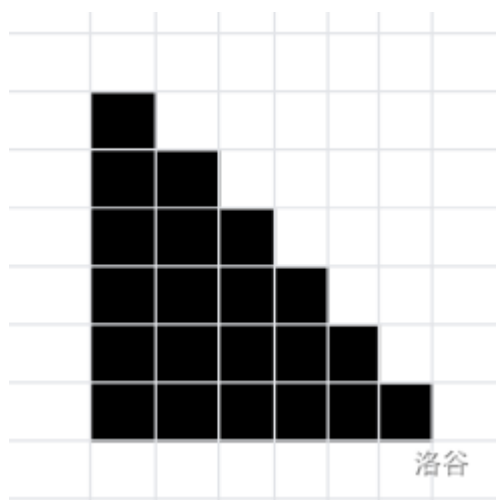
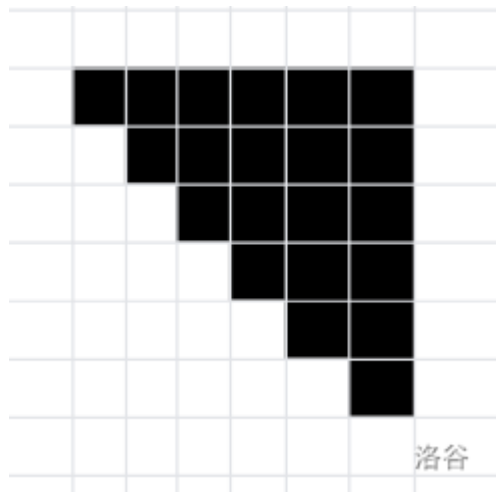
发现都可以划分为图上两类三角形。

然后考虑直接将坐标系转成这样：



就可以视为平面直角坐标系了。从坐标变换的角度上，就是： $x = \frac{x' - y'}{2}$ ， $y = y'$ 。

然后题目就变成了：在平面直角坐标系中，求若干个形如这两种三角形：



的图形的面积并。

因为 $n \leq 50$ ，随便做下就行了，这档是为看出了这个转化但不会快速求面积并的情况准备的。

~~100~~ 85pts

将上图的形状一列列考虑贡献，发现每列的贡献可以转化为上边界的纵坐标 - 下边界的纵坐标，所以把上下边界的贡献分开考虑，对于一个上边界，能有正的贡献有且仅有上面一个是空格，下边界下面一个是空格时有贡献。

所以对于每个三角形，将其拆分为横线 and 斜线分别代表上边界和下边界，总线段数是线性的，所以对于每条线段交点数是线性的，线段是否有贡献只有可能在交点处改变。

对于每条线段，求出所有排序之后扫一遍过程中统计贡献即可。复杂度 $\Theta(n^2 \log n)$

使用基排可以做到 $\Theta(n^2)$ 每个点要拆成 6 个三角形，每个三角形要拆成两条线段，所以常数较大。

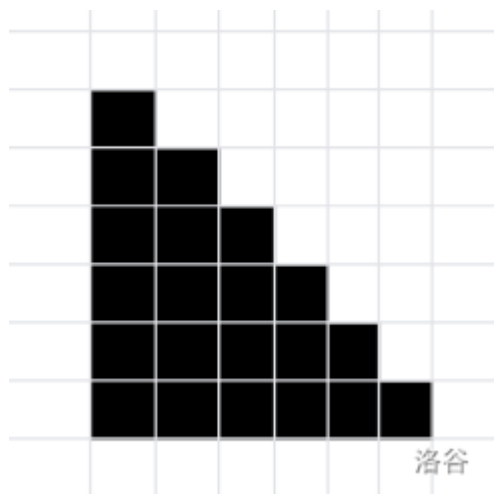
而且被爆标了一个 n qwq

100pts

感谢 zak 爆标!

<https://www.luogu.com.cn/paste/zo58ggog>

首先考虑如果只有一种三角形，如何维护最终并成的图案。不妨考虑这种：



行从下到上，列从左到右 编号递增。

考虑从下到上扫描线。

假设现在在扫第 i 行。对于一个在这一行上面有黑格子的三角形 t ，设他在这一行的黑格子的区间为 (l_t, r_t) （这里 $l_t \leq r_t$ ）。到了第 $i+1$ 行的时候，区间就变成了 $(l_t, r_t - 1)$ 。

注意到如果 $l_i \leq l_j \leq r_j \leq r_i$ ，那么 j 在以后都被 i 偏序了，所以可以把 j 删掉。

那么现在只用维护一堆满足左端点递增且右端点递增的区间序列了，大致如下图所示：



洛谷

会进行 $\Theta(n)$ 次 插入区间/删除区间 的操作。可以用平衡树来维护这个过程。

现在我们考虑如何更具体地表示出这个并：

可以考虑，现在所有三角形的并是 当前三角形的和 减去 相邻三角形的交之和。

插入 X 的时候，假设插入位置左边是 L 右边是 R ，那就：

- 加入 X 。
- 加入 L 和 R 的交。
- 删去 L 和 X 的交。
- 删去 X 和 R 的交。

这样就可以维护出三角形的并了！而且这里维护出来的不只是大小，这些三角形的带权和 就是所有三角形的并。

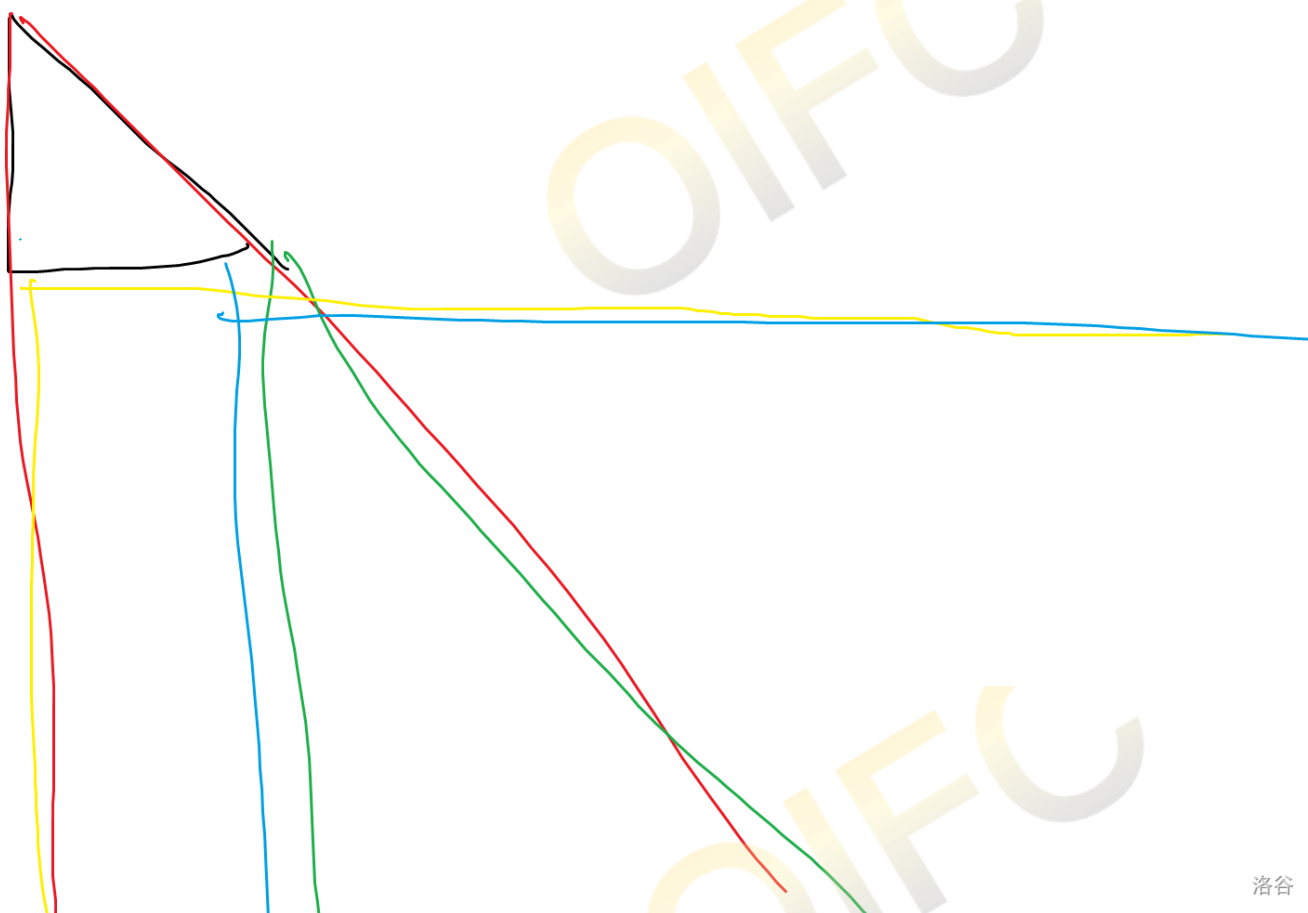
现在有两种三角形了，该怎么办呢！！

首先对这两种三角形都做一遍上面的操作，可以分别得到两种三角形的并。

考虑用两种三角形分别的并减去他们的交。

假设第一种三角形的并，可以用 L 中的三角形之和表示，第二种三角形的并，可以用 R 中的三角形之和表示。做完上面所描述的过程后就能得到 L 和 R 了。

对于第一种三角形，它可以被差分成如下形状（一条边是边界的三角形和两条边是边界的矩形）：



第二种矩形也可以类似地差分。

矩形交矩形，三角形交三角形，三角形交矩形均可以通过二维数点实现；因此总时间复杂度 $\Theta(n \log n)$ ，带一个超级超级大的常数。