

贪心略解

cssyz - wjj

- 相信大家或多或少都接触过贪心
- 本次旨在通过从一些简单题入手，总结一些贪心思考的基本规律

先说几句

- 贪心其实就是在每一步做出一种选择，保证对于全局而言这样做是最优的
- 也就是说，虽然选择是短视的，但从分析上来看必须从大局出发
- 我倾向于把贪心视作一种已经规划好的 dp，也就是不需要“动态”规划的规划

- 对于一个问题先明白是做什么样的“选择”，然后转化问题规模
- 实践过程中往往通过猜策略，然后进行分析
- 一般而言就短视地猜一下，然后直接分析就行，不行就尝试通过适当微调来达到目的
- 如果还是不行就尝试通过 dp 的手段或者**带悔**的手段（带悔的话能解决看起来不那么能直接贪的问题）

- 证明方法通常采用反证法
- 也可以假设我们已经知道最优解的选取方法（一定存在嘛），然后看看会发生什么
- 邻项交换法是一种反证法的变种，挺好用的，但注意得保证邻项交换不优能够导出任意交换不优
- 如果能够选择的可能变少了（即原来的方式选择空间 **包含** 后面的选择空间），我们通常认为是变劣了的

- 本次介绍的是我采用的一种惯用思考方式，供大家借鉴
- 如果大家有更好的思考方式，欢迎大家分享交流

pro1 - luogu1181

有一个长度为 N ($N \leq 10^6$) 的数列 A ($0 \leq A_i \leq 10^6$)。给出常数 K ($K \leq 10^{12}$)，请将其分成尽可能少的连续段，使得每一段的数字总和都不超过 K 。

- 选择是什么？
- 一下子别想多了：每次从头开始选择一段截掉，然后剩下的部分转化为规模更小的子问题
- 选择尽可能长的，不超过限制的一段
- 为什么？
(预设最优答案)
- 考虑我们选短一点，那么剩下的部分就会变长。那么选最长后剩下部分的裁切方法于其他的一定适用，但反过来就不好说了

pro2 - luogu1223

有 N ($N \leq 1000$) 个人在一个水龙头前排队接水，假如每个人接水的时间为 T_i ($1 \leq T_i \leq 10^6$)，请你安排一种排队的顺序，使得他们总等待时间之和的最小。

(从全局考虑)

- 选择是每次选最小的放在前头
- 考虑每一个人对全局的贡献

pro3 - luogu1190

有 N ($N \leq 1000$) 个人在 M ($M \leq 100$) 个水龙头前排队接水, 假如每个人接水的时间为 T_i ($1 \leq T_i \leq 1000$), 请你安排一种排队的顺序, 使得他们总等待时间之和的最小。

- 选择有点多？其实也就两种：选谁，选哪个水龙头？
- 首先确定人的排队顺序，可以在规定了水龙头顺序下考虑（邻项交换）
- 水龙头有空就上。如果等到出现两个水龙头同时空了，这时候这两个水龙头是等价的，而前面会产生时间的浪费

pro4 - luogu1094

你有 N ($N \leq 5000$) 个纪念品, 每一个纪念品都有一个价值 P_i ($1 \leq P_i \leq 10^6$)。现在你要将这些纪念品分成尽可能少的组, 满足:

1. 每一组由 1 件或 2 件纪念品组成;
2. 每一组里所有纪念品的价值之和不能超过常数 W ($W \leq 2 \times 10^6$ 且 $W \geq \max P_i$)。

- 匹配的顺序问题？匹配谁？
- 这里我们先考虑后者（对于一道题，我们可能需要尝试很多次思考顺序之类的，这里直接按照我最直观的思考方法）
- 假设我们确定了第一个，我们尽可能选满足限制的最大的那个跟它匹配（考虑子局面）
- 然后根据这个考虑匹配的顺序，从小小的开始匹配（考虑子局面）
- 考虑数越大能选择的区间越短，选择区间是呈现包涵关系，不先选小的会削减更多的选择

pro5 - luogu1106

给出一个整数 N ($N \leq 10^{250}$)。另给出常数 K ，要求在 N 中删除 K 位，使得得到的数字最小。

- 数位问题就是字典序问题，前面的数字永远比后面的数字重要
- 无脑贪心即可

pro6 - luogu1090

经典合并果子

给出 N ($N \leq 1000$) 堆果子, 第 i 堆果子有 A_i ($A_i \leq 1000$) 个。你每次可以将任意两堆果子合在一起, 需要花费的体力为两堆果子的数量之和。最终你需要将所有果子合并成一堆, 问花费的体力最少是多少。

- 采用哈夫曼树辅助分析
- 假设每一步我们确定了第一个石子堆选什么，则第二颗应当选择剩下的堆中最小的，不然交换的话如果后续采用相同的合并策略会更劣（注意，我们只考虑第一颗石子与第二颗石子之间的贡献关系）
- 重复采用上述优化方法，则可以得到每次选取最少的两个

pro7 - luogu1080

恰逢 H 国国庆，国王邀请 N ($N \leq 1000$) 位大臣来玩一个有奖游戏。首先，他让每个大臣在左、右手上面分别写下一个整数 A, B ($1 \leq A, B \leq 1000$)，国王自己也在左、右手上各写一个整数。然后，让这 N 位大臣排成一排，国王站在队伍的最前面。排好队后，所有的大臣都会获得国王奖赏的若干金币，每位大臣获得的金币数分别是：排在该大臣前面的所有人的左手上的数的乘积除以他自己右手上的数，然后向下取整得到的结果。国王不希望某一个大臣获得特别多的奖赏，所以他想请你帮他重新安排一下队伍的顺序，使得获得奖赏最多的大臣，所获奖赏尽可能的少。

注意，国王的位置始终在队伍的最前面

- 经典题目
- 邻项交换判断即可

pro8 - ABC137D

一共有 N ($N \leq 1000$) 个任务和 M ($M \leq 1000$) 天，一天只能做一个任务，任务只能做一次，任务当天做完。做完任务后可以在做完后的第 A_i ($A_i \leq 1000$) 天拿到 B_i ($B_i \leq 1000$) 的工资，问 M 天内最多可以拿到多少工资？

- 经典的带限制贪心
- 从后往前贪
- 这种带有时间的往往需要考虑更换贪心顺序

pro9 - luogu4377

Farmer John 要带着他的 n 头奶牛，方便起见编号为 $1 \dots n$ ，到农业展览会上去，参加每年的达牛秀！他的第 i 头奶牛重量为 w_i ，才艺水平为 t_i ，两者都是整数。

在到达时，Farmer John 就被今年达牛秀的新规则吓到了：

（一）参加比赛的一组奶牛必须总重量至少为 W （这是为了确保是强大的队伍在比赛，而不仅是强大的某头奶牛）。

（二）总才艺值与总重量的比值最大的一组获得胜利。

FJ 注意到他的所有奶牛的总重量不小于 W ，所以他能够派出符合规则（一）的队伍。帮助他确定这样的队伍中能够达到的最佳的才艺与重量的比值。

$$n \leq 250, W \leq 10^3$$

- 二分答案，然后贪心，为满足限制可以通过背包的方式

pro10 - luogu6187

给定一个长度为 n 的正整数序列 a_i ，下标从 1 开始编号。我们将该序列视为一个首尾相邻的环，更具体地，对于下标为 $i, (i \leq j)$ 的两个数 a_i, a_j ，它们的距离为 $\min(j - i, i + n - j)$ 。现在再给定 m 个整数 k_i ，对每个 k_i ，你需要将上面的序列 a_i 重新排列，使得环上任意两个距离为 k_i 的数字的乘积之和最大。

- 一个环中如何放?
- 如何分配?

基础练习：

把最前面的例题做了就差不多，此处如果认为自己掌握的不是很牢靠，提供另外几道给大家试试水：

1. [luogu1803](#)
2. [luogu3817](#)
3. [luogu1252](#)
4. [luogu1969](#)
5. [luogu3661](#)

