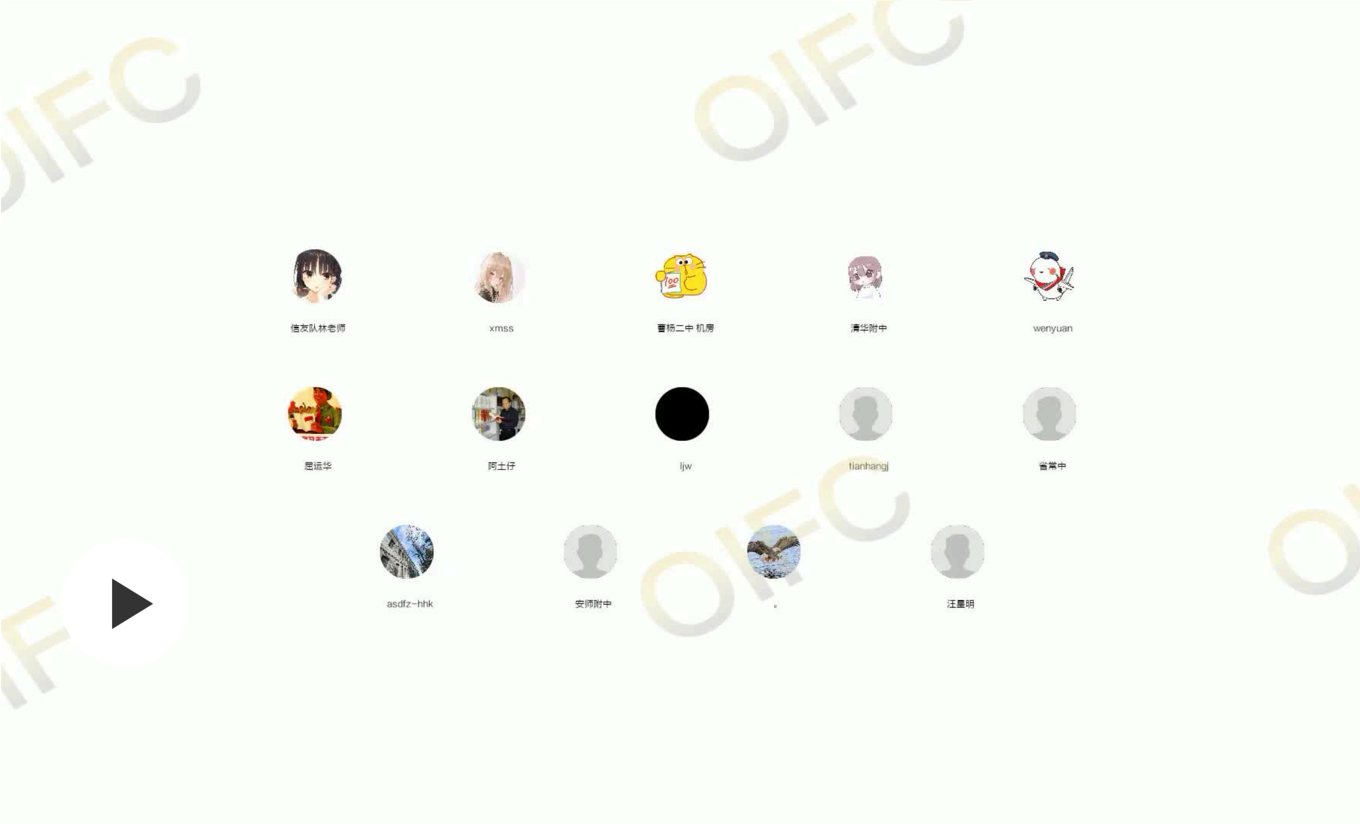
3. 大魔术师



不妨设 $y > z \geq 1$。则 $x^2 - yz = 1 \iff x^2 \equiv 1 \pmod{y}$。因此记 $r(n)$ 为 $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ 的解数，则有答案为 $2\sum_{i=2}^{n} r(i)$。

注意到，$x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ 可以被拆分如下：

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha 1}} \\ x^2 \equiv 1 \pmod{p_2^{\alpha 2}} \\ \dots \\ x^2 \equiv 1 \pmod{p_k^{\alpha k}} \end{cases}$$

其中 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$。则有 $r(n) = \prod_{i=1}^{k} r(p_i^{\alpha_i})$。接下来讨论 $r(p^\alpha)$ 的取值：

当 $p \geq 3$ 时：则有 $p^\alpha \mid (x-1)(x+1)$。由于 $(x-1, x+1) \leq 2$，因此必然有 $p^\alpha \mid x-1$ 或 $p^\alpha \mid x+1$，于是 $x \equiv \pm 1 \pmod{p^\alpha}, r'(p^\alpha) = 2$。

当 $p = 2$ 时：

- 若 $\alpha = 1$，有 $r(2) = 1$。
- 若 $\alpha = 2$，有 $r(4) = 2$。
- 若 $\alpha \geq 3$，则 $2^\alpha \mid (x-1)(x+1)$。显然 $2 \nmid x$，因此 $(x-1, x+1) = 2$。从而必然有 $2^{\alpha-1} \mid x-1$ 或 $2^{\alpha-1} \mid x+1$。从而 $r(2^\alpha) = 4$。

因此我们得到了 $r(n)$ 的表达式：设 $n = 2^{\alpha_0} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$，则

$$r(n)=\begin{cases}2^k & \alpha_0\le 1\\ 2^{k+1} & \alpha_0=2\\ 2^{k+2} & \alpha_0\ge 3\end{cases}$$

不难发现，我们如果能够求 $f(n)=\sum_{i=1}^n 2^{\omega(i)}$ 和 $f'(n)=\sum_{i=1,2\nmid i}^n 2^{\omega(i)}$，那么通过一些简单的容斥即可求出答案。现在考虑如何求 $f(n)=\sum_{i=1}^n 2^{\omega(i)}$，$f'(n)$ 的计算则大同小异。注意到 $2^{\omega(n)}=\sum_{d_1d_2=n}[d_1\perp d_2]$，因此有

$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{i=1}^n 2^{\omega(i)}\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{d_1d_2=n}[d_1\perp d_2]\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{d_1d_2=n}\sum_{T\mid(d_1,d_2)}\mu(T)\\&=\sum_{T=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\mu(T)\sum_{xy\le\lfloor n/T^2\rfloor}1\end{aligned}$$

记 $h(n)=\sum_{xy\le n}1$，枚举 x 即有 $h(n)=\sum_{i=1}^n\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$，使用整除分块可以在 $\Theta(\sqrt{n})$ 的复杂度内计算 $h(n)$。因此枚举 T 并整除分块计算 $h(\lfloor\frac{n}{T^2}\rfloor)$ 就有 $\sum_{T=1}^{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{T^2}}=\sqrt{n}\sum_{T=1}^{\sqrt{n}}\frac{1}{T}=\Theta(\sqrt{n}\log n)$ 的时间复杂度内计算 $f(n)$。于是本题得解。

在求 $h(n)$ 时，可以利用 $h(n)=2\sum_{i=1}^{\sqrt{n}}\lfloor\frac{n}{i}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2$ 优化常数。