

杂题选讲

杭州学军中学

2024 年 11 月 1 日

Die Siedler 题意

有 n 种牌和 m 种牌包，第 i 种牌包有 $s_{i,j}$ 张第 j 种牌。

初始时你有 c_j 张第 j 种牌。你可以以任意顺序执行下列操作之一任意多次：

- 选择 $1 \leq j \leq n$ ，要求有 $\geq 2j$ 个第 j 类牌。
- 扔掉 $2j$ 张第 j 类牌，并获得 1 张第 $j \bmod n + 1$ 类牌。

最小化最终剩余牌数。

$$2 \leq n \leq 16, 1 \leq m \leq 50$$

Ceste 题意

有一个无向图，给定 n 个顶点和 m 条边，第 i 条边连接 A_i 和 B_i 两个点且有两个代价 T_i 和 C_i 。

从第 i 个顶点经过一些边到第 j 个顶点花费的代价为这些边的 T 之和乘以 C 之和。

问题是，对于每一个 $k(2 \leq k \leq n)$ ，求从 1 号点出发到 k 号点花费的最小代价。

$$1 \leq n, m, T_i, C_i \leq 2000, 1 \leq A_i, B_i \leq n$$

Do you like query problems?

有一个长度为 n 的序列 a ，初始全为 0，你有三种操作：

操作 1：给出 l, r, v ，让区间 $[l, r]$ 对 v 取 \min 。

操作 2：给出 l, r, v ，让区间 $[l, r]$ 对 v 取 \max 。

操作 3，给出 l, r ，求区间和，将其累加进一个叫 sum 的变量里。

你并不需要维护这个数据结构，而是统计一共有 q 个操作的情况下，所有不同的操作序列中 3 操作得到的 sum 的总和，对 998244353 取模。你需要保证 $v \in [0, m - 1]$ 。

$$1 \leq n, m, q \leq 2 \times 10^5$$

Moving Pieces on Line

设 $X = 10^{100}$ 。现在有一张节点编号从 $-X$ 到 X 的图，点 i 到点 $i+1$ ($-X \leq i \leq X-1$) 之间有一条无向边，初始时所有边都是红色的。

有 N 个棋子在这张图上，其中第 i 个在点 a_i 上。

Maroon 可以重复以下操作：选择一个棋子 i ，将它移动到 $a_i - 1$ 或 $a_i + 1$ 上，并把它所经过的边由红色染成蓝色，如果经过的边是蓝色的，那就染成红色。

Maroon 想把这张图染成他想要的颜色组合。他会给出 K 个数字 t_1 到 t_K （保证严格单调递增且 K 为偶数），意思是将节点 t_1 左边的边染成红色， t_1 到 t_2 之间的边染成蓝色……以此类推，最后把 t_K 右边的边染成红色。

求出达到要求的最少的操作次数，如果无解，输出 -1 。

$N, K \leq 5000$

Adjacent XOR

给定长度为 n 的非负整数列 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 。

判断能否对数列 a 进行以下操作最多 70000 次, 使得数列 a 与 b 一致, 如果能, 给出一个可行的操作步骤。

一次操作为选择整数 $k (1 \leq k \leq n)$ 。对于所有 $i (2 \leq i \leq k)$, 从大到小使 $a_i \leftarrow a_{i-1} \oplus a_i$ 。

$$2 \leq N \leq 1000, 0 \leq A_i, B_i \leq 2^{60}$$

RGB Card Game

Alice 和 Bob 正在使用红、绿、蓝三种颜色的卡片进行游戏。

游戏开始时, Alice 有三种颜色的卡片 R_1, G_1, B_1 枚, Bob 有三种颜色的卡片 R_2, G_2, B_2 枚。双方互相知道对方的卡牌数量。游戏开始时, Alice 进攻, Bob 防守, 并重复以下过程:

- 进攻方首先从手牌中任意挑一张牌打出。
- 然后防守方选择打出一张与这张牌颜色相同的牌或者不出, 如果防守方选择出牌, 则双方互换身份, 否则进攻方继续出牌。

先出完牌的玩家获胜, 你需要确定在两人都以最优策略来进行游戏时, 游戏的胜者。

你需要 $O(1)$ 判断。

Perishable Roads 题意

给定一张 n 个点的无向完全图， (i, j) 之间的边权为 $w_{i,j}$ 。

你需要对所有点：构造一棵以点 p 为根的生成树，求出 $\sum_{i=1}^n s(p, i)$ 的最小值。其中 $s(p, i)$ 表示生成树上 $p \rightarrow i$ 的路径上的边权最小值。

$n \leq 2000$, 3s, 250MB

Unordered Swaps 题意

给定 m 个二元组和一个 n 阶排列 p 。

另有一个 n 阶排列 a ，初始为 $1 \sim n$ 。请将 m 个二元组任意排序，使得按照顺序遍历每个二元组 (x, y) ，并将 (a_x, a_y) 交换后， a 最终变成排列 p 。

保证： m 是将 a 交换成 p 所需的最少操作数。

$1 \leq m < n \leq 2 \times 10^5$, 2s, 250MB

加强版：求方案数，要求 $O(n^2)$ 时间复杂度。

Pumping Lemma 题意

给定长度为 n 的字符串 S 和长度为 m 的字符串 T 。

计算满足以下条件的字符串三元组 (x, y, z) 的个数：

- $S = x + y + z$
- $T = x + ky + z$

$$n < m \leq 10^7, 2s, 1000MB$$