不解之题 (aporia)

这题是签。

一些观察

入度出度为 1 的图就是很多个环组成的图。我们先不考虑节点的编号，仅考虑这张图组成的环的大小 $a_1, a_2, \ldots, a_m$,则周期就是 $\operatorname{lcm}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 。

我们考虑加入节点的编号去计数。记录 b_i 表示大小为 i 的环的出现次数，则此可重集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 的贡献为:

$$\operatorname{lcm}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}^k \times \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_m} \times \prod_{i=1}^{n} (i-1)!^{b_i} \frac{1}{b_i!}$$

化简后得到

$$\frac{n!\operatorname{lcm}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}^k}{\prod_{i=1}^{n} i^{b_i} \times b_i!}$$

当 n 不大的时候 lcm 也不会太大，这样应该可以得到一些分。

正解

其实当 n 不大的时候，lcm 的数量也不会太多。所以定义 $f_{i,j}$ 表示目前选出的 $\sum a = i$ ，并且 $\operatorname{lcm} = j$ 的序列 a 的贡献之和。然后开搜就可以了。

也可以从拆分数的角度去做，但是不细讲了。

白日 (ceremony)

对于每一个 S 单独求解。

考虑初始局面的最大值位于节点 x 处，如果 fa_x 被添加进序列 p 中，x 就会被立刻选择。那么我们可以将 fa_x 和 x 合并为一个节点，但是这个节点的权值是一个序列 $\{a_{fa}, a_x\}$ 。我们考虑如何确定序列之间的大小关系？

假设有两个序列 A, B 。记 A_{sum} 表示序列 A 的元素权值和，A_{mn} 表示序列 A 的前缀最小和。如果 A 放在 B 序列的前面会使得 $(A+B)_{mn}$ 比 $(B+A)_{mn}$ 更小，则一定满足：

$$\min\{A_{mn}, A_{sum}+B_{mn}\} < \min\{B_{mn}, B_{sum}+A_{mn}\}$$

这个式子不具备不可比的传递性，所以我们需要分析一些性质。

- 如果 $A_{sum} \geq 0$ ，$B_{sum} < 0$ ，则 A 一定出现在 B 之前。读者自证不难。

所以我们考虑 A_{sum} 和 B_{sum} 正负性相同时的比较。

- $A_{sum}, B_{sum} \geq 0$ ，在 $\min\{A_{mn}, A_{sum}+B_{mn}\} < \min\{B_{mn}, B_{sum}+A_{mn}\}$ 的比较中，$A_{sum}+B_{mn}, B_{sum}+A_{mn}$ 两项就没有意义。比较等价于 $A_{mn} < B_{mn}$ 。
- $A_{sum}, B_{sum} < 0$ ，在 $\min\{A_{mn}, A_{sum}+B_{mn}\} < \min\{B_{mn}, B_{sum}+A_{mn}\}$ 的比较中，A_{mn}, B_{mn} 两项就没有意义。比较等价于 $A_{sum}-A_{mn} < B_{sum}-B_{mn}$ 。

上述比较显然满足严格弱序。

利用 set/可删堆 等数据结构找到上述比较函数意义下，最大的序列并将其与祖先合并即可。对于单个根，重复此流程 $n-1$ 次可以得到答案，时间复杂度为 $O(n\log n)$ 。

时间复杂度 $O(n^2\log n)$ 。

唱 (sing)

先对问题进行简要分析。

题目要求的是第一步期望的运行次数，我们不妨求出一步到位的概率 p ，答案就是 $\frac{1}{p}$ 。由于题目讲到生成每一个排列的概率是相等的，所以进一步转化为计数问题。

将图分为左部点和右部点。以第一步落在左部点为例，考虑之后的每一步：

- 落在左部点：永远合法，因为第一步落在左部点，所以左部点对应黑色。题目意思就是能填黑色就填黑色。所以不论是否有已经着色且与之相邻的右部点，都不影响这个点是黑色。
- 落在右部点：要求存在一个已经着色且与之相邻的左部点。如果没有的话，那么这个右部点会被涂成黑色。但应该是白色才合法。

设 f_S 表示集合 S 内的点都被正确着色的方案数。转移只需要枚举一个不在 S 内的点，按照上述标准判断一个点是否可以被加入集合 S 即可。对于左部点，右部点作为第一步的落点分别跑一次即可。

根据实现的不同，时间复杂度为 $O(n^2 2^n)$ 或 $O(n2^n)$ 。期望得分 $16 \sim 24$ 分。

特殊性质

观察这个性质，发现图可以以 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 作为分界线，看作二分图的左部和右部。也就是说，左部和右部的大小都不大，启发我们去想 $O(n2^{n/2})$ 类似时间复杂度的做法。

我们依旧拿第一步落在左部点为例（本特殊性质中不重要因为左部右部一样大）：

我们发现在状态中记录右部点是十分多余的。令 $N(x)$ 表示与左部点 x 相邻的右部点集合，则当 x 加入到 S 中的时候，$N(x)$ 全部都可以被加入到 S 中。那状态可以更改为 f_S 表示考虑了左部点集合 S 和右部点集合 $\cup_{x\in S}N(x)$ 的方案数。转移可以枚举一个点 $y \notin S$ ，在 y 加入序列的时候，通过组合计数方法将 $N(y) \setminus (\cup_{x\in S}N(x))$ 内的元素提前加入序列中即可。

同样的对于左部右部分别跑一遍，实现良好的话时间复杂度 $O(n2^{n/2})$ 。结合暴力期望得分 48 。

$O(n3^{n/2})$ 做法

当左部点大小和右部点大小明显不一样时，特殊性质的作法可以退化到 $O(n2^n)$ 。根据鸽巢原理，对左部，右部中集合大小较小者运算特殊性质的做法时间复杂度为 $O(n2^{n/2})$ 。假设集合大小较大的是右部，考虑求出第一步落在右部的答案。

注意到左部大小在合理范围内，考虑利用左部来容斥。记录 g_S 表示集合为 S 的左部点全部都被涂成黑色（集合 S 外的左部也可能是黑色）的序列方案数，那么利用 g 容斥出合法的序列数量是容易的。

考虑固定一个 S 如何求解答案?

仔细分析一下对于某一个点 $x \in S$ 不合法的条件? 就是 $N(x)$ 全部在序列中，出现时间晚于 x 。对于全部的 $x \in S$ 同时不合法的情况我们可以构造这么一张图：

- 建立一张图，左部点仅包含 S ，右部点仅包含 $\cup_{x\in S}N(x)$ 。对于该点集的导出子图，认为边的方向为左部指向右部。

对于排列 p ，提取出满足 $p_i \in S$ 或者 $p_i \in \cup_{x\in S}N(x)$ 的 p_i 构成的子序列，是上述图的一个拓扑序。

那么我们只需要求出上图中的拓扑序数量，然后利用组合数学方法填入不在导出子图中的那些点即可。关键在于求出拓扑序数量。

如果蛮力求的话，时间复杂度完全不可接受。但是我们利用特殊性质中做法的思想，将右部点提前加入拓扑序，就可以仅在状态中体现左部点了。

时间复杂度经过分析为 $O(n3^{n/2})$ ，期望得分 72 。

优化

上述方法计算了很多重复的东西，一个简单的优化就可以做到正解时间。

考虑利用 g_S 推出 $g_{S\cup x}$ 。我们钦定 x 被加入到拓扑序的最前面，则已知 $N(x)\setminus(\cup_{y\in S}N(y))$ 中的右部点可以提前加入序列。

实现精良的话可以做到 $O(n2^{n/2})$,期望得分 100 。

海馬成長痛 (hippo)

这题是签。

先对题目进行分析，什么样的序列是合法的，在不添加任何限制的前提下。

考虑将序列 m 个连续的元素看为一组。那么对于根节点而言，每一组内不存在两个 a_i 来自同一个儿子节点的子树内。如果 a 对于每一个非叶子节点都满足上述条件则 a 是合法的，正确性显然。

令 f_i 表示深度为 i 的 m 叉树中合法的序列 a 的数量。转移如下:

$$f_i = f_{i-1}^m \times (m!)^{m^{i-1}}$$

边界是 $f_0 = 1$ 。

正解

考虑如果一个子树内没有任何 a_i 被限制，可以利用 f 计算出答案。而子树内有 a_i 的限制的节点只有 kn 个很少，对于这些节点暴力转移即可。

每一次添加限制只会影响 $O(n)$ 个节点，所以利用任何单 $\log$ 数据结构维护节点内的转移可以做到 $O(n \log m)$ 的修改。

时间复杂度 $O(kn \log k + m)$ ，但是 n 最大只有 59 ，所以根据实现方式的不同期望得分 $90 \sim 100$ 。时间复杂度有 m 的原因是计算了逆元，你也可以不预处理逆元，但是这样会慢一些。