组合数学

wrpwrp

Huazhong University of Science and Technology

2024 年 7 月 10 日

Agenda

1. 序言
2. 插板法
3. 小球进盒子
4. Catalan 数与折线法
5. 斯特林数
6. 简单模型选讲

1 序言

2 插板法

3 小球进盒子

4 Catalan 数与折线法

5 斯特林数

6 简单模型选讲

Today

今天主要是讲解一些常用的定理和方法，然后是一些经典的模型。

常用公式

递推公式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

吸收恒等式

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$$

常用公式

上指标求和

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

" 平行恒等式"（其实就是上面那个）

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i}=\binom{m+n+1}{n}$$

常用公式

范德蒙德卷积

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

二项式定理

懒得打字了，反正大家都知道。

1 序言

2 **插板法**

3 小球进盒子

4 Catalan 数与折线法

5 斯特林数

6 简单模型选讲

插板法

问题 1

给你 n 个相同的球和 m 个不同的盒子，问有多少种办法把这 n 个球放进盒子？盒子不可以空。

插板法

问题 1

给你 n 个相同的球和 m 个不同的盒子，问有多少种办法把这 n 个球放进盒子？盒子不可以空。

- **考虑在间隔里面插板子，答案显然是 $\binom{n-1}{m-1}$。**

插板法

问题 2

给你 n 个相同的球和 m 个不同的盒子，问有多少种办法把这 n 个球放进盒子？盒子可以空。

插板法

问题 2

给你 n 个相同的球和 m 个不同的盒子，问有多少种办法把这 n 个球放进盒子？盒子可以空。

- **考虑转化上一个问题，我们考虑借 m 个元素过来，那么答案就是 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 。**

插板法

问题 2

给你 n 个相同的球和 m 个不同的盒子，问有多少种办法把这 n 个球放进盒子？盒子可以空。

- 考虑转化上一个问题，我们考虑借 m 个元素过来，那么答案就是 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 。
- 这样我们构造出来的所有方案种盒子里东西个数都 ≥ 1 ，那么人为地 -1 以后所有盒子里东西个数非负，并且一一对应了所有盒子中个数非负的方案。所有原方案盒子中球个数 $+ 1$ 对应转化后得到的方案。

插板法

问题 2

给你 n 个相同的球和 m 个不同的盒子，问有多少种办法把这 n 个球放进盒子？盒子可以空。

- 考虑转化上一个问题，我们考虑借 m 个元素过来，那么答案就是 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 。
- 这样我们构造出来的所有方案种盒子里东西个数都 ≥ 1 ，那么人为地 -1 以后所有盒子里东西个数非负，并且一一对应了所有盒子中个数非负的方案。所有原方案盒子中球个数 $+1$ 对应转化后得到的方案。
- 故答案就是 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 。

插板法

问题 3(不定方程解数计数)

有不定方程 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S$，每个量都是非负整数，对于每个 X_i, 有限制 $X_i \le K$ ，计数这样的不定方程的解数。
$n \le 10^5, K \le 10^5$

插板法

问题 3(不定方程解数计数)

有不定方程 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S$，每个量都是非负整数，对于每个 X_i, 有限制 $X_i \leq K$ ，计数这样的不定方程的解数。
$n \leq 10^5, K \leq 10^5$

- 不好直接做，考虑容斥。

插板法

问题 3(不定方程解数计数)

有不定方程 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S$，每个量都是非负整数，对于每个 X_i，有限制 $X_i \le K$ ，计数这样的不定方程的解数。
$n \le 10^5, K \le 10^5$

- 不好直接做，考虑容斥。
- 枚举至少有几个大于 K，S 变成 $S-(K+1)\times i$ 问题转化为没有限制的问题。

插板法

问题 3(不定方程解数计数)

有不定方程 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S$，每个量都是非负整数，对于每个 X_i, 有限制 $X_i \leq K$ ，计数这样的不定方程的解数。
$n \leq 10^5, K \leq 10^5$

- 不好直接做，考虑容斥。
- 枚举至少有几个大于 K, S 变成 $S-(K+1)\times i$ 问题转化为没有限制的问题。
- 没有限制的问题就是问题 2。

插板法

问题 4 (CCPC2023 秦皇岛热身赛)

有人连着下 n 局棋，一个赢了 m 局，最长连胜了 k 局，求他的战绩一共有多少种不同的情况。战绩可以看成一个长度为 n 的 01 字符串（0 败，1 胜），两种战绩不同当且仅当这两个字符串不同。$n, m, k \leq 10^5$

插板法

问题 4 (CCPC2023 秦皇岛热身赛)

有人连着下 n 局棋，一个赢了 m 局，最长连胜了 k 局，求他的战绩一共有多少种不同的情况。战绩可以看成一个长度为 n 的 01 字符串（0 败，1 胜），两种战绩不同当且仅当这两个字符串不同。$n, m, k \leq 10^5$

- 思考一下，因为限制在赢的场次上，所以把连续赢的场次看成变量，输的看成分割符

插板法

问题 4 (CCPC2023 秦皇岛热身赛)

有人连着下 n 局棋，一个赢了 m 局，最长连胜了 k 局，求他的战绩一共有多少种不同的情况。战绩可以看成一个长度为 n 的 01 字符串（0 败，1 胜），两种战绩不同当且仅当这两个字符串不同。$n, m, k \leq 10^5$

- 思考一下，因为限制在赢的场次上，所以把连续赢的场次看成变量，输的看成分割符
- 那么问题就是有不定方程 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S$，每个量都是正整数，有限制 $\max\{X_i\} = K$

插板法

问题 4 (CCPC2023 秦皇岛热身赛)

有人连着下 n 局棋，一个赢了 m 局，最长连胜了 k 局，求他的战绩一共有多少种不同的情况。战绩可以看成一个长度为 n 的 01 字符串（0 败，1 胜），两种战绩不同当且仅当这两个字符串不同。$n, m, k \leq 10^5$

- 思考一下，因为限制在赢的场次上，所以把连续赢的场次看成变量，输的看成分割符
- 那么问题就是有不定方程 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S$，每个量都是正整数，有限制 $\max\{X_i\} = K$
- 我们拆分成 $\leq K$ 的减去 $\leq K-1$ 的就好了，问题完全转变为问题 3 。

1 序言
2 插板法
3 小球进盒子
4 Catalan 数与折线法
5 斯特林数
6 简单模型选讲

小球进盒子

球 (n)	盒 (m)	可空?	答案
相同	相同	可	$\mathrm{partition}(n+m, m)$
相同	相同	否	$\mathrm{partition}(n, m)$
相同	不同	可	$\binom{n+m-1}{m-1}$
相同	不同	否	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	可	$\sum_{i=1}^{n} S(n,i) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}$
不同	相同	否	$S(n, m) = \left\{ {n \atop m} \right\}$
不同	不同	可	m^n
不同	不同	否	$m!S(n, m) = m!\left\{ {n \atop m} \right\}$

$partition(n, m)$ 表示把 n 个相同球放到 m 个相同的盒子，也就是“分拆数”。
$S(n, i)$ 表示第二类斯特林数。

Partition(n, m) = ?

感兴趣可以看 https://oi-wiki.org/math/combinatorics/partition/
一个简单的方法是考虑 dp，

$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-k,k)$$

也就是是单开一个盒子，或者进行前缀 $+1$。

1 序言

2 插板法

3 小球进盒子

4 Catalan 数与折线法

5 斯特林数

6 简单模型选讲

格路计数

问题 5(格路计数)

一个人站在网格图的 $(0,0)$ 位置，每次可以向上或者向右走，求走到 (n,m) 的方案数。

格路计数

问题 5(格路计数)

一个人站在网格图的 $(0,0)$ 位置，每次可以向上或者向右走，求走到 (n,m) 的方案数。

- **显然是** $C(n+m,n)$ 。

Catalan 数

问题 6(Catalan 数)

求长度为 $2n$ 的合法括号序列的个数。

Catalan 数

问题 6(Catalan 数)

求长度为 $2n$ 的合法括号序列的个数。

- 我们认为左括号是向右走，右括号是向上走，问题得到转化

Catalan 数

问题 6(Catalan 数)

求长度为 $2n$ 的合法括号序列的个数。

- 我们认为左括号是向右走，右括号是向上走，问题得到转化
- 一个人站在网格图的 $(0,0)$ 位置，每次可以向上或者向右走，求走到 (n,n)，且始终不会碰到直线 $y=x+1$ 的方案数。

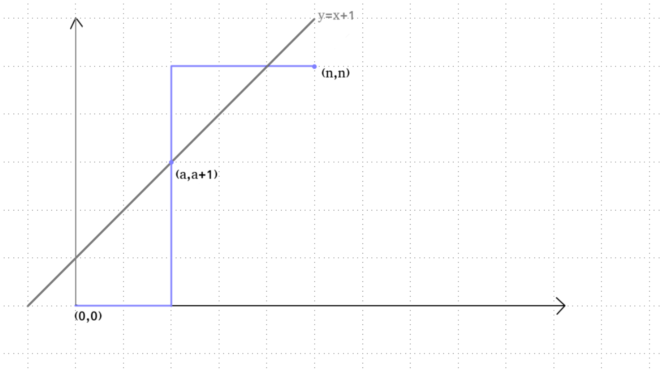
Catalan 数

问题 6(Catalan 数)

求长度为 $2n$ 的合法括号序列的个数。

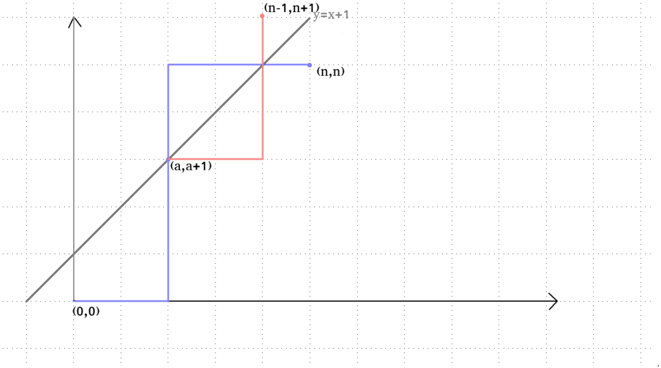
- 我们认为左括号是向右走，右括号是向上走，问题得到转化
- 一个人站在网格图的 $(0,0)$ 位置，每次可以向上或者向右走，求走到 (n,n)，且始终不会碰到直线 $y=x+1$ 的方案数。
- 但是这个也不是很好数，但是直接数没有限制，直接走到 (n,n) 的答案是容易的，我们试试能不能计数不合法的部分。

Catalan 数



Catalan 数

把第一个交点后面的线关于 $y = x + 1$ 做翻折。



Catalan 数

Catalan 数

- 由于所有的不合法路径一定会与 $y = x + 1$ 有交点，所以所有不合法路径都会在翻折以后唯一对应一条到 $(n-1, n+1)$ 的路径。

Catalan 数

- 由于所有的不合法路径一定会与 $y=x+1$ 有交点，所以所有不合法路径都会在翻折以后唯一对应一条到 $(n-1,n+1)$ 的路径。
- 而所有会到 $(n-1,n+1)$ 这个点的路径一定都会和 $y=x+1$ 相交，我们同样是对折第一个交点以后的路径也会得到一条不合法路径

Catalan 数

- 由于所有的不合法路径一定会与 $y = x + 1$ 有交点，所以所有不合法路径都会在翻折以后唯一对应一条到 $(n-1, n+1)$ 的路径。
- 而所有会到 $(n-1, n+1)$ 这个点的路径一定都会和 $y = x + 1$ 相交，我们同样是对折第一个交点以后的路径也会得到一条不合法路径
- 我们构建了一一对应的关系，所以不合法路径总数就是 $C(2n, n-1)$ 。

Catalan 数

- 由于所有的不合法路径一定会与 $y=x+1$ 有交点，所以所有不合法路径都会在翻折以后唯一对应一条到 $(n-1,n+1)$ 的路径。
- 而所有会到 $(n-1,n+1)$ 这个点的路径一定都会和 $y=x+1$ 相交，我们同样是对折第一个交点以后的路径也会得到一条不合法路径
- 我们构建了一一对应的关系，所以不合法路径总数就是 $C(2n,n-1)$ 。
- $\text{Catalan}(n)=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$

Catalan 数

问题 7(生成字符串)

lxhgww 最近接到了一个生成字符串的任务，任务需要他把 n 个 1 和 m 个 0 组成字符串，但是任务还要求在组成的字符串中，在任意的前 k 个字符中，1 的个数不能少于 0 的个数。现在 lxhgww 想要知道满足要求的字符串共有多少个，聪明的程序员们，你们能帮助他吗？
对于 100% 的数据，保证 $1 \leq m \leq n \leq 10^6$。

Catalan 数

问题 7(生成字符串)

lxhgww 最近接到了一个生成字符串的任务，任务需要他把 n 个 1 和 m 个 0 组成字符串，但是任务还要求在组成的字符串中，在任意的前 k 个字符中，1 的个数不能少于 0 的个数。现在 lxhgww 想要知道满足要求的字符串共有多少个，聪明的程序员们，你们能帮助他吗？
对于 100% 的数据，保证 $1 \leq m \leq n \leq 10^6$。

- $$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n-1}$$

Catalan 数

问题 5 给出了卡特兰数的一个组合意义，实际上卡特兰数的组合意义非常丰富。
大家可以参见 oiwiki 上的部分：
https://oi-wiki.org/math/combinatorics/catalan/

折线法的进一步拓展

折线法的进一步拓展

- 如果有两条直线都不能触碰呢？

折线法的进一步拓展

- 如果有两条直线都不能触碰呢？
- 考虑一条折线是 A，另外一条是 B，那么我们如果每次经过一条线就写下来对应字母，缩起来相同的字母可以得到一个跨越直线的序列。

折线法的进一步拓展

- 如果有两条直线都不能触碰呢？
- 考虑一条折线是 A，另外一条是 B，那么我们如果每次经过一条线就写下来对应字母，缩起来相同的字母可以得到一个跨越直线的序列。
- 答案是总数 - 跨越序列以 A 开头的方案数 - 跨越序列以 B 开头的方案数

折线法的进一步拓展

- 如果有两条直线都不能触碰呢？
- 考虑一条折线是 A，另外一条是 B，那么我们如果每次经过一条线就写下来对应字母，缩起来相同的字母可以得到一个跨越直线的序列。
- 答案是总数 - 跨越序列以 A 开头的方案数 - 跨越序列以 B 开头的方案数
- 把终点对 A 翻折，减去答案，再对 B 翻折，加上答案，在对 A 翻折，如此循环可计算以 A 开头的序列结尾的答案，把终点对 B 翻折，减去答案，再对 A 翻折，加上答案，在对 B 翻折，如此循环可计算以 B 开头的序列结尾的答案。

折线法的进一步拓展

- 如果有两条直线都不能触碰呢？
- 考虑一条折线是 A，另外一条是 B，那么我们如果每次经过一条线就写下来对应字母，缩起来相同的字母可以得到一个跨越直线的序列。
- 答案是总数 - 跨越序列以 A 开头的方案数 - 跨越序列以 B 开头的方案数
- 把终点对 A 翻折，减去答案，再对 B 翻折，加上答案，在对 A 翻折，如此循环可计算以 A 开头的序列结尾的答案，把终点对 B 翻折，减去答案，再对 A 翻折，加上答案，在对 B 翻折，如此循环可计算以 B 开头的序列结尾的答案。
- 感觉不太会做到更严格清晰的说明（

折线法的进一步拓展

折线法的进一步拓展

- 假如不能触碰的其中一条线是 $y = x + k$，(x, y) 对着这条线翻折以后有：

折线法的进一步拓展

- 假如不能触碰的其中一条线是 $y=x+k$，(x,y) 对着这条线翻折以后有：
- $x'=x-k, y'=y+k$ 。

折线法的进一步拓展

- 假如不能触碰的其中一条线是 $y = x + k$，(x, y) 对着这条线翻折以后有：
- $x' = x - k, y' = y + k$ 。
- 按照上一页 ppt 的步骤进行计算即可。

折线法的进一步拓展

- 假如不能触碰的其中一条线是 $y = x + k$，(x, y) 对着这条线翻折以后有：
- $x' = x - k, y' = y + k$ 。
- 按照上一页 ppt 的步骤进行计算即可。
- 下面给出一个终点是 $(n + m + 1, n)$，两条不可触碰折线分别是 $y = x + 1$ 和 $y = -(m + 2)$ 的代码示例。

折线法的进一步拓展-代码

```cpp
int n, m;
void rev1(int &x, int &y) { std :: swap(x, y); x --; y ++; }
void rev2(int &x, int &y) { std :: swap(x, y); y -= m + 2; x += m + 2; }
int calc() {
        int ans = 0;
        int x = n + m + 1, y = n, d;
        pls (ans, C(x + y, x)); d = 1;
        x = n + m + 1, y = n; d = 1;
        while (x >= 0 && y >= 0) {
                if (d) rev1(x, y); else rev2(x, y);
                if (d) sub (ans, C(x + y, x));
                else pls (ans, C(x + y, x));
                d ^= 1;
        }
        x = n + m + 1, y = n; d = 1;
        while (x >= 0 && y >= 0) {
                if (d) rev2(x, y); else rev1(x, y);
                if (d) sub (ans, C(x + y, x));
                else pls (ans, C(x + y, x));
                d ^= 1;
        }
        return ans;
}
```

折线法的进一步拓展

观察代码可以发现，如果这两条线就是 $y = x + a, y = x + b$，那么计算次数大概就是 $\frac{m+n}{|a-b|}$ 次。

[JLOI2015] 骗我呢

问题 8([JLOI2015] 骗我呢)

有一个 $n \times m$ 的数组 x，满足：

$$x_{i,j} < x_{i,j+1}, x_{i,j} < x_{i-1,j+1}, 0 \leq x_{i,j} \leq m$$

求 x 数组的个数，答案对 10^9+7 取模。
$n, m \leq 10^6$

[JLOI2015] 骗我呢

[JLOI2015] 骗我呢

- 观察到每行递增，那么恰好会有一个 $[0, m]$ 中的数没有出现过。

[JLOI2015] 骗我呢

- 观察到每行递增，那么恰好会有一个 $[0, m]$ 中的数没有出现过。
- 设 $f_{i,j}$ 表示第 i 行没有出现的数是 j，前 i 行的方案数。

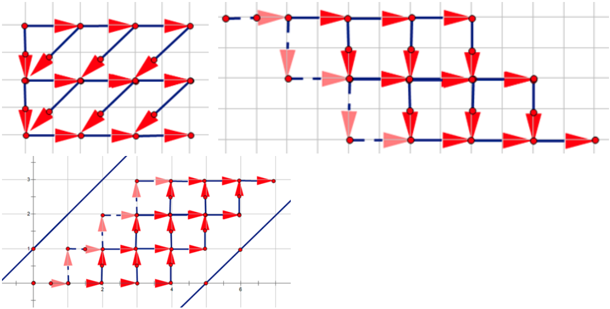
[JLOI2015] 骗我呢

- 观察到每行递增，那么恰好会有一个 $[0, m]$ 中的数没有出现过。
- 设 $f_{i,j}$ 表示第 i 行没有出现的数是 j，前 i 行的方案数。
- $f_{i,j} = \sum_{k=0}^{j+1} f_{i-1,k} = f_{i,j-1} + f_{i-1,j+1}$

[JLOI2015] 骗我呢

- 观察到每行递增，那么恰好会有一个 $[0, m]$ 中的数没有出现过。
- 设 $f_{i,j}$ 表示第 i 行没有出现的数是 j，前 i 行的方案数。
- $f_{i,j} = \sum_{k=0}^{j+1} f_{i-1,k} = f_{i,j-1} + f_{i-1,j+1}$
- 这个式子的系数很简单，考虑在网格图上考虑这个问题。

[JLOI2015] 骗我呢



[JLOI2015] 骗我呢

[JLOI2015] 骗我呢

- 问题变成不接触 $y = x + 1, y = x - (m + 2)$ 这两条线，到达 $(n + m + 1, n)$ 的路径条数。
- 使用折线法容斥的方法解决即可。

1. 序言
2. 插板法
3. 小球进盒子
4. Catalan 数与折线法
5. **斯特林数**
6. 简单模型选讲

第一类斯特林数

问题 9(第一类斯特林数)

求把 n 个不同元素构成 m 个非空圆排列的方案数。

第一类斯特林数

问题 9(第一类斯特林数)

求把 n 个不同元素构成 m 个非空圆排列的方案数。

- 一般记作 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ 。

第一类斯特林数

问题 9(第一类斯特林数)

求把 n 个不同元素构成 m 个非空圆排列的方案数。

- 一般记作 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ 。
- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$

第一类斯特林数

问题 9(第一类斯特林数)

求把 n 个不同元素构成 m 个非空圆排列的方案数。

- 一般记作 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ 。
- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$
- 要么新开一个圆排列，要么加入前面的。

第二类斯特林数

问题 10(第二类斯特林数)

求把 n 个不同元素划分 m 个非空子集的方案数。

第二类斯特林数

问题 10(第二类斯特林数)

求把 n 个不同元素划分 m 个非空子集的方案数。

- 一般记作 $\left\{ n \atop m \right\}$。

第二类斯特林数

问题 10(第二类斯特林数)

求把 n 个不同元素划分 m 个非空子集的方案数。

- 一般记作 $\left\{ {n \atop m} \right\}$。
- $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$

第二类斯特林数

问题 10(第二类斯特林数)

求把 n 个不同元素划分 m 个非空子集的方案数。

- 一般记作 $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$。
- $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$
- 要么新开一个集合，要么加入前面的。

斯特林数-公式

斯特林数-公式

- 首先给个公式

斯特林数-公式

- 首先给个公式
- $m^n = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} m^{\underline{i}}$

斯特林数-公式

- 首先给个公式
- $m^n = \sum_{i=0}^{m} \left\{ {n \atop i} \right\} m^{\underline{i}}$
- 建议熟练背诵这个公式，是处理 m^n 形式的有力工具。

斯特林数-公式

- 首先给个公式
- $m^n = \sum_{i=0}^{m} \left\{ {n \atop i} \right\} m^{\underline{i}}$
- 建议熟练背诵这个公式，是处理 m^n 形式的有力工具。
- 证明？

斯特林数-公式

- 首先给个公式
- $m^n = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} m^{\underline{i}}$
- 建议熟练背诵这个公式，是处理 m^n 形式的有力工具。
- 证明？
- 考虑组合意义，都是在计算 n 个有标号球放到 m 个有标号盒子里的方案数。

Card

问题 11(CF1278F Card)

有 m 张牌，其中一张是王牌。现在你执行 n 次如下操作：洗牌后查看第一张牌是什么。
令 x 为洗牌后第一张牌为王牌的次数，现在假设洗牌时 $m!$ 种牌的排列出现的概率均相等，求 x^k 的期望值。
$n, m < 998244353, k \leq 5000$ 。

Card

Card

- 斯特林数常常用来拆 x^k 类型的贡献。

Card

- 斯特林数常常用来拆 x^k 类型的贡献。
- 考虑枚举出现了多少次王牌:

Card

- 斯特林数常常用来拆 x^k 类型的贡献。
- 考虑枚举出现了多少次王牌:
- $$ans = \sum_{i\geq 0} i^k \binom{n}{i} (\frac{1}{m})^i (\frac{m-1}{m})^{n-i}$$

Card

- 斯特林数常常用来拆 x^k 类型的贡献。
- 考虑枚举出现了多少次王牌:
- $$ans = \sum_{i \geq 0} i^k \binom{n}{i} (\frac{1}{m})^i (\frac{m-1}{m})^{n-i}$$
- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} (m-1)^{n-i}$$

Card

- 斯特林数常常用来拆 x^k 类型的贡献。
- 考虑枚举出现了多少次王牌:
- $$ans = \sum_{i \geq 0} i^k \binom{n}{i} (\frac{1}{m})^i (\frac{m-1}{m})^{n-i}$$
- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} (m-1)^{n-i}$$

Card

Card

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} (m-1)^{n-i}$$

Card

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} (m-1)^{n-i}$$

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (m-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} i^{\underline{j}}$$

Card

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} (m-1)^{n-i}$$

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (m-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} i^{\underline{j}}$$

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (m-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{i}{j} j!$$

Card

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} (m-1)^{n-i}$$

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (m-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} i^{\underline{j}}$$

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (m-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{i}{j} j!$$

Card

Card

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ {k \atop j} \right\} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} (m-1)^{n-i}$$

Card

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ k \atop j \right\} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} (m-1)^{n-i}$$

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ k \atop j \right\} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} (m-1)^{n-i}$$

Card

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ {k \atop j} \right\} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} (m-1)^{n-i}$$
- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ {k \atop j} \right\} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} (m-1)^{n-i}$$
- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n} \binom{n-j}{i-j} (m-1)^{n-i}$$

Card

- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ {k \atop j} \right\} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} (m-1)^{n-i}$$
- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ {k \atop j} \right\} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} (m-1)^{n-i}$$
- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n} \binom{n-j}{i-j} (m-1)^{n-i}$$
- $$= \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{k} j! \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{n}{j} m^{n-j}$$

自然数幂和

问题 12(自然数幂和)

求

$$\sum_{i=1}^{n} i^k$$

$n \le 10^9, k \le 5000$

自然数幂和

自然数幂和

- $$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{i}{j} j!$$

自然数幂和

- $$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{i}{j} j!$$

- $$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{i}{j} j!$$

自然数幂和

- $$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{i}{j} j!$$
- $$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} \left\{ {k \atop j} \right\} \binom{i}{j} j!$$
- $$= \sum_{j=0}^{n} \left\{ {k \atop j} \right\} j! \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j}$$

自然数幂和

- $$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \left\{ k \atop j \right\} \binom{i}{j} j!$$

- $$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} \left\{ k \atop j \right\} \binom{i}{j} j!$$

- $$= \sum_{j=0}^{n} \left\{ k \atop j \right\} j! \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j}$$

- $$= \sum_{j=0}^{n} \left\{ k \atop j \right\} j! \binom{n+1}{j+1}$$

自然数幂和

自然数幂和

- 递推计算右边那一堆即可做到 k^2，且不需要使用逆元。

自然数幂和

- 递推计算右边那一堆即可做到 k^2，且不需要使用逆元。
- 使用多项式方法计算斯特林数的话可以做到 $k\log_2 k$，可以自行在掌握简单多项式后进行学习。

自然数幂和

- 递推计算右边那一堆即可做到 k^2，且不需要使用逆元。
- 使用多项式方法计算斯特林数的话可以做到 $k\log_2 k$，可以自行在掌握简单多项式后进行学习。
- 当然这个问题也有很简单的做法，考虑拉格朗日插值可以轻松做到 $O(K)$ 。

拉格朗日插值

拉格朗日插值

如果我们有一个 n 次多项式的 $n+1$ 个不同的点值 (x_i, y_i)，我们可以通过拉格朗日插值公式还原这个多项式。

$$f(k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{i \neq j} \frac{k - x_j}{x_i - x_j}$$

拉格朗日插值

拉格朗日插值

如果我们有一个 n 次多项式的 $n+1$ 个不同的点值 (x_i, y_i)，我们可以通过拉格朗日插值公式还原这个多项式。

$$f(k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{i \neq j} \frac{k - x_j}{x_i - x_j}$$

- 正确性是显然的，因为我们把这 n 个点带进去显然是对的。

自然数幂和-拉格朗日插值

结论

$\sum_{i=1}^{n} i^k$ 是一个关于 n 的 $k+1$ 次多项式。

自然数幂和-拉格朗日插值

结论

$\sum_{i=1}^{n} i^k$ 是一个关于 n 的 $k+1$ 次多项式。

- 于是我们只需要求出 $n = 1, 2, \cdots k+2$ 的时候的和，作为点值带入拉格朗日插值公式即可计算。

自然数幂和-拉格朗日插值

结论

$\sum_{i=1}^{n} i^k$ 是一个关于 n 的 $k+1$ 次多项式。

- 于是我们只需要求出 $n=1,2,\cdots k+2$ 的时候的和，作为点值带入拉格朗日插值公式即可计算。
- 按照公式暴力计算是 $O(k^2)$ 的，因为此处的 x 我们人为取 $1,2,\cdots k+2$，预处理乘积以后可以 $O(k)$ 或 $O(k\log_2 k)$ 计算。

1. 序言
2. 插板法
3. 小球进盒子
4. Catalan 数与折线法
5. 斯特林数
6. **简单模型选讲**

AGC013E Placing Squares

问题 13

https://www.luogu.com.cn/problem/AT_agc013_e

AGC013E Placing Squares 拆贡献为组合意义

AGC013E Placing Squares 拆贡献为组合意义

- 贡献看起来很奇怪，但是里面有一个平方项，考虑利用其组合意义。

AGC013E Placing Squares 拆贡献为组合意义

- 贡献看起来很奇怪，但是里面有一个平方项，考虑利用其组合意义。
- 相当于划分序列为若干段，每段里面恰好有 2 个带标号球的方案数。

AGC013E Placing Squares 拆贡献为组合意义

- 贡献看起来很奇怪，但是里面有一个平方项，考虑利用其组合意义。
- 相当于划分序列为若干段，每段里面恰好有 2 个带标号球的方案数。
- $f_{i,j}$ 表示考虑到第 i 个位置，这一段里面已经有了 j 个球，矩阵快速幂分段转移即可。

AGC013D

问题 14

一开始有 n 个颜色为黑白的球，但不知道黑白色分别有多少，m 次操作，每次先拿出一个球，再放入黑白球各一个，再拿出一个球，最后拿出的球按顺序排列会形成一个颜色序列，求颜色序列有多少种。答案对 10^9+7 取模。

$n, m \leq 3000$

AGC013D 代表元

AGC013D 代表元

- 有一个简单的想法是设 $f(i,j)$ 表示当前考虑到第 i 位，当前有 j 个黑球的时候有多少条路径。转移的时候就直接像 DAG 上数路径一样讨论 4 个情况然后转移。

AGC013D 代表元

- 有一个简单的想法是设 $f(i,j)$ 表示当前考虑到第 i 位，当前有 j 个黑球的时候有多少条路径。转移的时候就直接像 DAG 上数路径一样讨论 4 个情况然后转移。
- 但是有个问题是这个题目初始状态和结束状态有多少黑球你并不知道，如果把所有的初始状态全都设置成 1 的话会算重复。

AGC013D 代表元

- 有一个简单的想法是设 $f(i,j)$ 表示当前考虑到第 i 位，当前有 j 个黑球的时候有多少条路径。转移的时候就直接像 DAG 上数路径一样讨论 4 个情况然后转移。
- 但是有个问题是这个题目初始状态和结束状态有多少黑球你并不知道，如果把所有的初始状态全都设置成 1 的话会算重复。
- 怎么办？

AGC013D

AGC013D

- 解决办法写在标题上了。

AGC013D

- 解决办法写在标题上了。
- 如果我们把操作看成横轴，当前有多少黑球看成纵轴，那么一个合法的序列对应了一个任意时刻横坐标都在 $[0, n]$ 之间的路径。

AGC013D

- 解决办法写在标题上了。
- 如果我们把操作看成横轴，当前有多少黑球看成纵轴，那么一个合法的序列对应了一个任意时刻横坐标都在 $[0, n]$ 之间的路径。
- 可以发现，对于这样一条路径，我们把它上下平移，只要满足任意时刻都在 $[0, n]$ 之间就是合法的。

AGC013D

- 解决办法写在标题上了。
- 如果我们把操作看成横轴，当前有多少黑球看成纵轴，那么一个合法的序列对应了一个任意时刻横坐标都在 $[0, n]$ 之间的路径。
- 可以发现，对于这样一条路径，我们把它上下平移，只要满足任意时刻都在 $[0, n]$ 之间就是合法的。
- 那么不妨考虑一个“代表元”。我们强制使得这条路径在贴着下边界的时候被我们计入答案。

AGC013D

- 解决办法写在标题上了。
- 如果我们把操作看成横轴，当前有多少黑球看成纵轴，那么一个合法的序列对应了一个任意时刻横坐标都在 $[0, n]$ 之间的路径。
- 可以发现，对于这样一条路径，我们把它上下平移，只要满足任意时刻都在 $[0, n]$ 之间就是合法的。
- 那么不妨考虑一个“代表元”。我们强制使得这条路径在贴着下边界的时候被我们计入答案。
- 设 $f(i, j, 0/1)$ 表示当前第 i 次操作，有 j 个点，有没有贴边界。

AGC013D

- 解决办法写在标题上了。
- 如果我们把操作看成横轴，当前有多少黑球看成纵轴，那么一个合法的序列对应了一个任意时刻横坐标都在 $[0, n]$ 之间的路径。
- 可以发现，对于这样一条路径，我们把它上下平移，只要满足任意时刻都在 $[0, n]$ 之间就是合法的。
- 那么不妨考虑一个“代表元”。我们强制使得这条路径在贴着下边界的时候被我们计入答案。
- 设 $f(i, j, 0/1)$ 表示当前第 i 次操作，有 j 个点，有没有贴边界。
- 最后的答案就是 $\sum f(n, i, 1)$ 。

小综合

问题 15(cf1895f)

求有多少长度为 n 的非负整数数组满足下列条件：
1. 数组中至少有一个元素在 $x, x+1, x+2, \cdots, x+k-1$ 中。
2. 数组之中连续的元素最多相差 k 。
答案对质数取模。
$n, k \leq 10^9, 0 \leq x \leq 40$ 。

cf1895f

cf1895f

- 这个 x 的范围很有意思，我们从 x 的范围着手。

cf1895f

- 这个 x 的范围很有意思，我们从 x 的范围着手。
- 计算 $\min\{a_i\} \le x+k-1$ 的答案，减去 $\max\{a_i\} \le x-1$ 的答案即可得到最终答案。

cf1895f

- 这个 x 的范围很有意思，我们从 x 的范围着手。
- 计算 $\min\{a_i\} \le x+k-1$ 的答案，减去 $\max\{a_i\} \le x-1$ 的答案即可得到最终答案。
- 对于限制 $\min\{a_i\} \le x+k-1$，我们考虑 a_i 的差分数组，一共有 $(2k+1)^{n-1}$ 个不同的差分数组，枚举最小值的大小，得到不同的数组一共有 $(x+k)(2k+1)^{n-1}$。

cf1895f

- 这个 x 的范围很有意思，我们从 x 的范围着手。
- 计算 $\min\{a_i\} \le x+k-1$ 的答案，减去 $\max\{a_i\} \le x-1$ 的答案即可得到最终答案。
- 对于限制 $\min\{a_i\} \le x+k-1$，我们考虑 a_i 的差分数组，一共有 $(2k+1)^{n-1}$ 个不同的差分数组，枚举最小值的大小，得到不同的数组一共有 $(x+k)(2k+1)^{n-1}$。
- 对于 $\max\{a_i\} \le x-1$，因为 x 很小，直接矩阵乘法优化 DP 即可。

甜品

问题 16(CSA)

给定一棵树，求有多少个排列 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 满足：$p_1, p_2 \cdots p_n$ 的任意一个前缀 $p_1, p_2 \cdots p_i$ 在树上是连通的
树的大小 $n \le 10^6$ 。

CSA

CSA

- 考虑固定根节点。

CSA

- 考虑固定根节点。
- 然后我们可以发现问题等价于给这棵树标号，使得父节点编号始终比子节点小，换根 dp 即可。

Thanks!