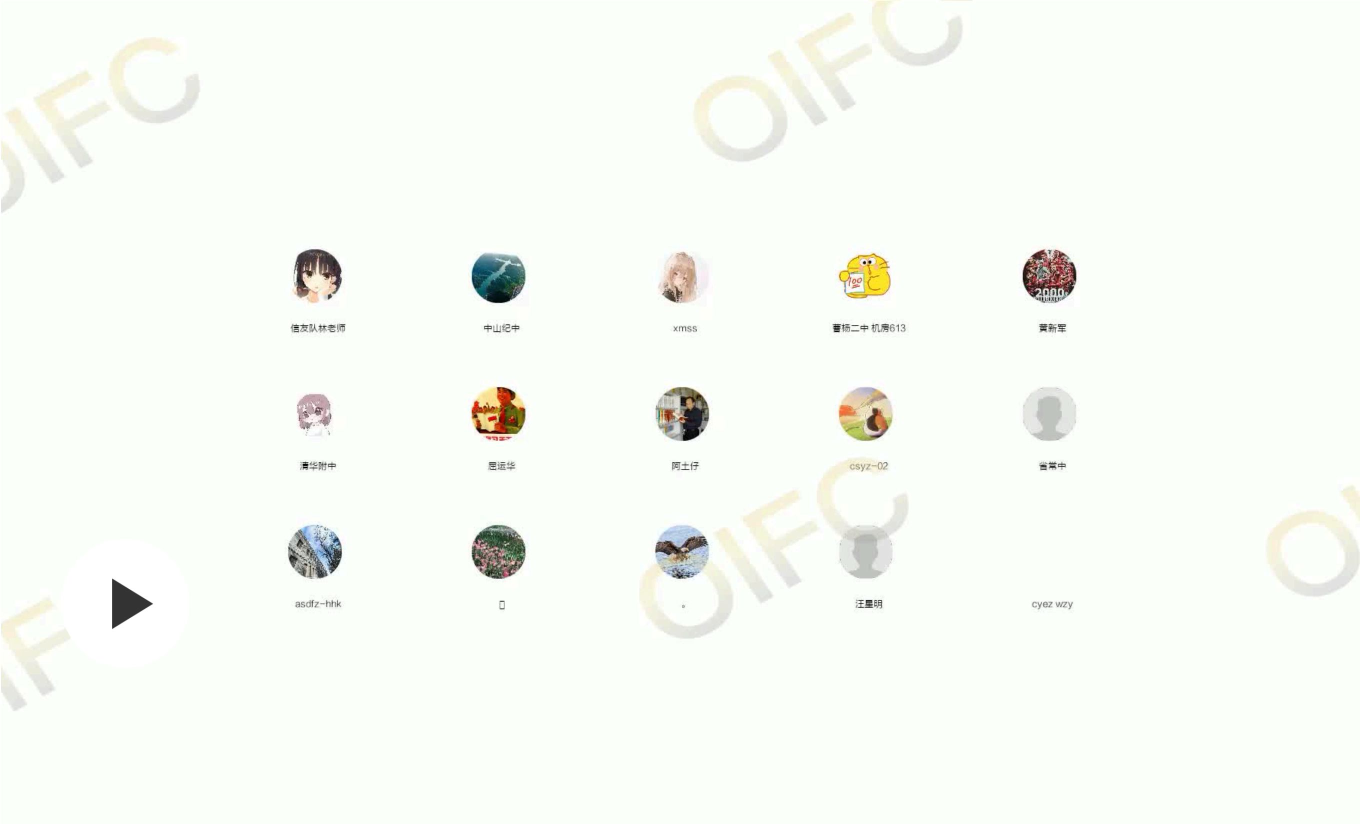
1. 分组



【算法一】

暴力枚举所有划分方式并检验，时间复杂度为贝尔数，期望得分 10 分。

【算法二】

定义 g_S 表示 S 中的人划分为一组是否可行（可行为 1，不可行为 0）

定义 f_S 表示集合 S 内部的答案，转移即

$$f_S = \sum_{T \subseteq S,\ g_T = 1} f_{S-T}$$

用枚举子集优化，时间复杂度为 $O(3^n)$，期望得分 20 分。

【算法三】

搜索剪枝或高次多项式复杂度的算法，期望得分 40 分。

【算法四】

由于所有人是等价的，不妨按 a 从小到大排序。

限制仅由每组中 a 最小的人产生，即确定 a 最小的人后，此后的人仅需关心于数量。

定义 $f_{i,j}$ 表示确定前 i 个人分组情况且之后有 j 个人所在分组在其中，转移即

$$
\begin{cases}
j \cdot f_{i-1,j} \to f_{i,j-1} & j \ge 1 \\
\forall t \in [1, a_i],\ \frac{f_{i-1,j}}{(t-1!)} \to f_{i,j+t-1} & i+j+t-1 \le n
\end{cases}
$$

时间复杂度为 $O(n^3)$，期望得分 70 分。

【算法五】

定义 $f_{i,j}$ 表示确定了人数 $\le i$ 的组且有 j 个 $a_t > i$ 的人加入，设有 x 个 $a_t = i$ 和 y 个 $a_t > i$，转移即

$$
\forall t \in \left[\left\lceil \frac{\max(x-j,0)}{i} \right\rceil, \left\lfloor \frac{x+y-j}{i} \right\rfloor\right], \frac{(j+it)!}{(j+it-x)!} \frac{f_{i-1,j}}{t!(i!)^t} \to f_{i,j+it-x}
$$

根据调和级数，时间复杂度为 $O(n^2 \log n)$，期望得分 100 分。