

其它博弈

- Chomp 博弈

有一个 $n \times m$ 的棋盘, 每次可以选择一个尚未被删去的点 (x_0, y_0) , 将所有 $x \leq x_0$ and $y \leq y_0$ 的点删去, 不能操作者输, 问先手是否必胜

结论是, 当棋盘非空的时候, 先手必胜

这个结论的证明很强, 可惜不是构造性证明

Proof :

假设存在后手必胜的方案, 那么先手先取掉 $(1, 1)$, 假设后手必胜的策略下一步是取 (x, y) (注意这样依然会覆盖 $(1, 1)$ 这个位置) 那么先手不妨在第一步就取 (x, y) , 先手然后就依照后手必胜的策略走, 那么就变成先手必胜了

- 删数游戏:

有数 $1 \sim n$, 每次选择一个未被删去的数 x , 将 x 的所有约数删去, 问是否有先手必胜策略

证明与上面类似, 考虑先手先拿去 1 即可

综上发现, 这种问题实际上相当于给了一个 DAG, 每次选择 DAG 上一个未被删去的点, 将它所能到达的点全部删去, 不能操作者输, 问是否有先手必胜策略

注意, 在这种情况下, 我们需要保证有且仅有一个出度为 0 的点, 然后证明考虑先手先取掉这个出度为 0 的点, 然后按照上面的同理可得