威佐夫博弈

一个非常神奇的博弈

§ 威佐夫博弈

> 有两堆石子, 数量分别为 A, B, 两人轮流操作, 每次可以进行下列两种操作的中的一个 :
>
> 1. 从一堆中取任意个石子
> 2. 从两堆中取个数相同的石子 (一堆石子取完后就不能再取)
>
> 不能操作者输, 问是否有先手必胜策略

这个玩意比较人类智慧, 我们设 $f(A, B)$ 表示石子数分别为 A, B 时是否有先手必胜策略 (1 为先手必胜, 0 为先手必败), 不妨令 $A \leqslant B$

经过找规律发现 (我也不知道怎么找出来的), 我们 **先手必败** 的状态 (好像学术名称叫奇异局势) 按照一定顺序排列, 分别表示为 $(A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots$ 具有以下特征 :

1. $A_0 = 0, B_0 = 0$, 即 $(A_0, B_0) = (0, 0)$
2. $A_i = \operatorname{mex}\{\ A_j, B_j \mid j \in [0, i)\ \}$, 其中 mex 运算表示集合中没有出现的最小非负整数, 也就是说, A_i 在前面的 $i-1$ 组中都没有出现过
3. $B_i = A_i + i$

这玩意十分神奇, 不知道前人是怎么发现的, 但是, 我们可以试着证明一下

§ 伪证

还是采用归纳法, 我们假设对于 $(A_i, B_i), i \in [0, k)$ 该结论成立, 现在证 (A_k, B_k) 同样成立

(A_k, B_k) 为必败态意味着从这个状态没有办法一步走到另一个必败态, 也就是说没有办法把对手推到一个必败的境地, 我们作如下讨论 (下面要注意我们恒有 (A, B) 中 $A \leqslant B$)

1. A_k 不变, $B_k \to B', B' < A_k$, 那么也就是 $(A_k, B_k) \to (B', A_k)$, 由我们之前发现的特征 2, $A_k = \operatorname{mex}\{\ A_j, B_j \mid j \in [0, k)\ \}$, 说明 (B', A_k) 必不为 k 之前某一个必败态

   而且, 我们注意到一个事实, $B' < A_k$, 说明 k 之后也不会出现一个必败态, 使得 B' 再次作为第一个位置上出现 (实际上, 也永远不会作为第二个位置出现了), 这其实也意味着, 一个非零的自然数在所有的必败态中有且仅会出现一次 (结合特征 3, 根据差值只增不减推得)

2. A_k 不变, $B_k \to B', B' = A_k \Leftrightarrow (A_k, B_k) \to (A_k, A_k)$, 显然, 后手就可以一次性将它取完, 先手必败

3. A_k 不变, $B_k \to B', A_k < B' < B \Leftrightarrow (A_k, B_k) \to (A_k, B')$, 由我们的特征 2 知道, 此前与此后必然没有一个开头依然为 A_k 的必败态, 所以先手必败
4. B_k 不变, $A_k \to A', A' < A < B_k$, 由特征 2 知道, 只有 k 前面可能出现一个必败态 (A', B_k), 但由特征 3, 有 $B_k - A' > B_k - A_k = k$, 所以前面不存在 A, B 差值大于 k 的必败态, 故先手必败
5. $(A_k, B_k) \to (A_k - C, B_k - C)$, 其状态的差值不变, 由特征 3, 前面不存在 A, B 差值等于 k 的必败态, 故先手必败

综上, 我们之前的结论成立

对于其他情况, 我们总有办法将一个情况变为必败态

1. $k = B - A$, $A > A_k$, 显然, 我们可以在两堆中取一样个数的石子, 把 (A, B) 变为 (A_k, B_k)
2. $k = B - A, A < A_k$, 那么由我们之前的分析, k 之前必然存在一个必败态 i, 满足 $A_i = A, (B_i - A_i = i) < (B - A = k)$, 我们只用在 B 中取石子就好了

§ Beatty 定理

一般而言我们不是很方便将所有的必败态给弄出来, 我们希望快速求解, 这个需要一定的数学知识

> Beatty **定理**
>
> a, b 为正 **无理数**, 若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 那么对于两个集合 (排列后也可以看做序列) $A = \{\ \lfloor ma \rfloor\ \}, B = \{\ \lfloor nb \rfloor\ \}$ (其中 $n, m \in \mathbb{N}_+$), 有 $A \cap B = \varnothing, A \cup B = \mathbb{N}_+$
>
> 后面的结论说人话就是 A, B 恰好为 $\mathbb{N}_+$ 的一个划分, 也就是说 A, B 恰好不重不漏地包含了所有的正整数

这个定理的证明看起来挺棘手的 (确实如此), 可能大概有数竞难度

我们一个一个来证明, 首先证 A 自身中没有重复元素, B 同样

由 a, b 为正无理数, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 知道, $a, b > 1$, 而我们又是下取整操作, 所以对于一个整数 $x \in A$, $x + a > x + 1 \to \lfloor x + a \rfloor \geqslant x + 1$, 所以得证, B 同理

然后, 我们来证 $A \cap B = \varnothing$, 正难则反, 考虑反证

假设存在整数 $x \in A, x \in B$, 那么 $\exists\, n, m \in \mathbb{N}_+$, 满足 $\lfloor ma \rfloor = \lfloor nb \rfloor = x$, 由下取整函数的性质, 会有 $x < ma < x + 1, x < nb < x + 1$ (注意, 由于 a 为无理数, 所以 ma 不为整数, 所以并不是 $x \leqslant ma < x + 1$, b 同理), 我们希望能够往我们的大前提上靠, 凑出 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$, 所以经过初等变换后, 会有 $\frac{m}{x+1} < \frac{1}{a} < \frac{m}{x}, \frac{n}{x+1} < \frac{1}{b} < \frac{n}{x}$

所以有 $\frac{m+n}{x+1} < (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1) < \frac{m+n}{x}$, 再变换会有 $x < m+n < x+1$

显然, 这个不等式意味着 $m+n$ 不为整数, 而 m,n 都为整数, 所以矛盾, 原结论成立

最后, 证明 $A\cup B=\mathbb{N}^+$

依然考虑反证, 假设存在正整数 x, 满足 $x\notin A, x\notin B$, 假设存在整数 n,m, 满足 $\lfloor ma\rfloor < x \leqslant \lfloor (m+1)a\rfloor -1$, 由于 a 为无理数, 我们可以得到 $ma < x < ma+a-1$, 初等变换得到 $\frac{m}{x} < \frac{1}{a} < \frac{m+1}{x+1}$, 同理会有 $\frac{n}{x} < \frac{1}{b} < \frac{n+1}{x+1}$

自然而然会有, $\frac{m+n}{x} < (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1) < \frac{m+n+2}{x+1}$, 然后会有 $m+n < x < m+n+1$

而 x 为整数, 很显然又矛盾了, 故原结论成立

§ 公式

有了 Beatty 定理, 我们就可以操作了, 由于我们之前已经说明每个正整数恰好在必败态中出现一次, 联系一下 Beatty 定理, 不就是说的这个吗 ?

令 $A=\{A_i\}, B=\{B_i\}$, 其中的 A_i, B_i 均是必败态中的数, 我们希望构造正无理数 a,b, 使得 $A=\{\ \lfloor ma\rfloor\ \}, B=\{\ \lfloor nb\rfloor\ \}$, 由 A 集合中不包含相同的整数, 显然 $\lfloor ma\rfloor$ 就是 A_m, B 同理

由我们之前发现的特征 3, $B_m=A_m+m=\lfloor ma+m\rfloor=\lfloor m(a+1)\rfloor$, 即令 $n\leftarrow m$, 此时会有 $b=a+1$

那么, 根据 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, 有 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1$

解得, $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 黄金分割数

所以 $A_k=\lfloor ak\rfloor$, 那么对于一个状态 (A,B), 令 $k=B-A$, 我们只用判断 A 是否等于 $\lfloor ak\rfloor$ 即可, 是则先手必败, 否则先手必胜

§ 参考

- csdn 博客1
- csdn 博客2
- beatty 定理证明