

基本线性代数

cssyz - wjj

- 本次力在扫盲
- 如果已经确认完全掌握可以自行练习，后面给出三档题目

目录

1. 线性代数简单介绍
2. 向量以及线性特征
3. 矩阵及其运算
4. 高斯消元
5. 高斯消元应用拓展
6. 练习题指引（仅提供题目，不作讲解）

简单介绍

- 线性代数是关于线性变换的探讨。典型的便是矩阵，然而这种结构只要具有线性性则相当一部分特征可以拓展。
- 在 OI 中，常用的便为矩阵运算，高斯消元，行列式之类。
- 本次主要是对线性代数知识进行入门，不会过多地涉及到题目。

- 线性代数的教学一直是一个大难题，很多高校的教学堪称一团乱麻。
- 在这里我尽力带大家快速入门。
- 如果想了解线性代数的本质，推荐 b 站上的：3Blue1Brown 的线性代数专题。
- 如果想了解线性代数更加深入的代数运算，推荐 b 站上：mit线性代数课程。
- 当然，这个当零食吃好了，真心想好好学大学再说吧（：

向量

- 坐标 (a, b) (静态的)
- 从原点走到 (a, b) 这么一个过程 (动态的) , 记为 $\vec{x} = (a, b)$
- 维度的扩展
- 当然, 你在别的学科中会对向量这个东西会有着不同的理解

特殊的向量：

- $\vec{0}$
- \hat{i}
- \hat{j}
- \hat{k}
- ...

线性

- 直观理解线性（关系）代表一种与直线有关的性质
- 向量之间的加和
- 向量的数乘（注意是数乘）

最重要的线性结构：矩阵

- (手绘得了)
- $n \times m$ 矩阵
- n 阶方阵 (通常研究这种)
- 矩阵的加和
- 矩阵的数乘
- 矩阵的转置

站在矩阵上面看向量

- 行向量
- 列向量（常用）
- 向量的点乘

矩阵乘法

- $N \times Q$ 的矩阵 A
- $Q \times M$ 的矩阵 B
- $A \times B = C$

$$c_{ij} = \sum_{k=1} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

- 有结合律
- 没有交换律，方阵也不行（除非一些极为特殊的矩阵）

一些重要的矩阵

- 单位阵
- 零矩阵

- 很多 DP 式子可以写成矩阵乘法
- 很多复杂的变换也可以写成矩阵乘法
- 通过研究矩阵，来对这些进行优化

关于线性空间? emmm

感觉对 OI 不重要, 想了解更多请观看 3b1b

矩阵快速幂

pro1

- 给定 f_0, f_1 快速计算 f_n
- $n \leq 10^9$

pro2

- 给一张 n 个点的有向图, 询问从某个点 s 出发走恰好 k 步能够到达哪些点?
- $n \leq 100, k \leq 10^9$

pro3 (找不到适合的题, 随便手搓一个)

第 i 个操作为

1. 移动 (a, b)
2. 当前坐标数乘 λ
3. 绕原点旋转一定度数 θ (如果没学过三角函数可以忽略这个操作)

可单点修改操作序列

每次问你从 (x, y) 出发, 顺序执行 $[l, r]$ 的操作走到的点

$n, Q \leq 2 \times 10^5$

- 这种题可能后面内部考试中会见的比较多, 注意补题
- 本质就是动态 dp 入门

高斯消元

- 用于求解行列式以及方程组（以后你还可能学到求解特征向量）

行列式 det

- 几何意义
- 仅针对方阵
- 代数式子

$$\sum (-1)^\sigma \prod_{i=1}^n a_i$$

- 基本运算法则
 - i. 交换两行（列）
 - ii. 倍乘一行（列）
 - iii. 倍加到另一行（列）
 - iv. 行列式拆分运算
 - v. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- 求解方法

解方程组

- 可用于求取一些有后效性的期望方程之类

解异或方程组

- 有 n 个开关, m 盏灯, 每次开关第 i 号开关可以改变若干个灯的状态
- 一开始所有灯都是熄灭的, 问你是否有一种办法将所有灯泡变到目标状态
- 高效通过此题请学习 `bitset`

$$n, m \leq 200$$

求解逆矩阵

- 行列式不为 0

涵盖上面知识点的基础练习题：

1. luogu1962

2. luogu3389

3. luogu7112

4. poj1222

普通练习:

1. luogu2044

2. luogu2886

3. luogu1397

进阶练习（强度可能跳的有点大，看情况做吧，因为涉及到线代的内容除了套路题基本比较难了）：

1. [luogu3746](#)

2. [luogu6573](#)

3. [luogu3193](#)

4. [luogu3328](#)

5. [luogu2447](#)

6. [luogu3211](#)

