# cdjx 杂题选讲

cdjx 初三 oier

2024.11.5

# LCM Sum (hard version)

## CF1712E2

Describtion:

CF1712E2 LCM Sum (hard version)

给定正整数 $l, r$，求满足 $\operatorname{lcm}(i, j, k) \geq i + j + k$ 且 $l \leq i < j < k \leq r$ 三元组 $(i, j, k)$ 的数量。

共有 $T(1 \leq T \leq 10^5)$ 组数据，每组数据满足 $1 \leq l \leq r \leq 2 \times 10^5$

$3.5s, 500MB$

# LCM Sum (hard version)

## CF1712E2

Hint 1: 计算 $lcm(i,j,k) < i+j+k$ 这样的"坏"三元组的个数

# LCM Sum (hard version)

## CF1712E2

Hint 1: 计算 $lcm(i,j,k) < i+j+k$ 这样的"坏"三元组的个数

Hint 2: 如果出现 $lcm(i,j,k) = k$ 或 $lcm(i,j,k) = 2k \wedge i+j > k$ 则这个三元组是坏的。 而 $lcm(i,j,k) = x$ 意味着 $i,j$ 和 $k$ 都是 $x$ 的整除。

# LCM Sum (hard version)

## CF1712E2

Solution:
我们从前面的提示继续考虑。我们把计算“坏”三元组个数变为对每个 $(i,k)$ 其中 $i|2k$ 计算 $i<j \wedge j|2k$ 的个数。我们可以对于 $k$，考虑它的因子，枚举任意两个然后检查是否是“坏的”，复杂度正确。

我们离线考虑上面的计算，然后查询可以使用单点加范围求和解决

# Yuezheng Ling and Dynamic Tree

CF1491H

Describtion:
Yuezheng Ling and Dynamic Tree

初始给定一个 $n$ 个点的树，编号 $1 \sim n$ ，编号大于 1 的节点 $i$ 的父节点为 $a_i$ ，保证有 $a_i i$ 。

接下来 $q$ 个操作，操作分两种：

1. 给定区间 $[l, r]$ 和正整数 $x$，将所有编号位于区间 $[l, r]$ 内的点 $i$ 的父亲 $a_i$ 赋值为 $\max(a_i - x, 1)$，保证 $l \neq 1$。
2. 给定节点 $u$ 和 $v$ ，你需要求出它们的 LCA。

$n, q \leq 10^5$，1.5，256 MB

Hint1：按编号分块，总时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$

# Yuezheng Ling and Dynamic Tree

## CF1491H

Hint1：按编号分块，总时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$
Hint2：操作 2 时间复杂度为 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$

Hint1：按编号分块，总时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$
Hint2：操作 2 时间复杂度为 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$
Hint3：操作 1 均摊后总复杂度为 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$

# Yuezheng Ling and Dynamic Tree

## CF1491H

Solution:
接下来认为 $n, q$ 同阶。
考虑对编号分块，块长为 $B$。
维护 $b_i$ 表示 $i$ 向祖先跳，跳到的第一个块外的节点，借助数组 $b$ 询问时每次将编号大的点向祖先跳，单次时间复杂度可以做到 $\mathcal{O}(B + \frac{n}{B})$。
考虑如何维护 $b_i$ 。
散块直接暴力更改即可，不会对其它地方造成影响，这部分总时间复杂度 $\mathcal{O}(nB)$。

# Yuezheng Ling and Dynamic Tree

## CF1491H

对于整块，直接重构，显然单次重构时间复杂度可以做到 $\mathcal{O}(B)$，似乎没有更好的维护方法。但是注意到整块在至多被整体减去 $B-1$ 次后，每个点跳一步就可以跳出这个块，操作相当于对这个块整体减，通过打懒标记就可以做到 $\mathcal{O}(1)$ 维护，于是我们额外记录此块总共被减去过多少，在到达 $B$ 后直接 $\mathcal{O}(1)$ 打标记，每一块总时间复杂度 $\mathcal{O}(B^2)$。

整个过程总时间复杂度 $\mathcal{O}(nB+n^2B+B^3)$，$B$ 取 $\sqrt{n}$ 时为 $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$

Describtion:
A Preponderant Reunion

给你一个序列 $p_1 \dots p_n$ 每次可以选择一个 $i > 1$ 花 $\min\{p_i, p_{i-1}\}$ 的代价使 $p_i$ 和 $p_{i-1}$ 同时减小 $\min\{p_i, p_{i-1}\}$

现在要使不存在 $i > 1$ 使得 $\min\{p_i, p_{i-1}\} > 0$

问最小代价并输出方案

Hint1：能否把原问题条件转化为更好 dp 的形式?

## A Preponderant Reunion

### CF933E

Hint1：能否把原问题条件转化为更好 dp 的形式?
Answer1：使不存在 $i > 1$ 使得 $\min\{p_i, p_{i-1}\} > 0$ 等价于选出若干个区间（要求所有区间的间距均恰好唯一）消为 0

# A Preponderant Reunion

## CF933E

Hint2:

如果问题变为
给你一个序列 $p_1 \ldots p_n$ 每次可以选择一个 $i > 1$ 花 $1$ 的代价使 $p_i$ 和 $p_{i-1}$ 同时减小 $1$
现在要使不存在 $i > 1$ 使得 $\min\{p_i, p_{i-1}\} > 0$
问最小代价

和原题有什么关系

Hint2:

如果问题变为
给你一个序列 $p_1 \dots p_n$ 每次可以选择一个 $i > 1$ 花 1 的代价使 $p_i$ 和 $p_{i-1}$ 同时减小 1
现在要使不存在 $i > 1$ 使得 $\min\{p_i, p_{i-1}\} > 0$
问最小代价

和原题有什么关系

Answer 2: 答案一定相等

Hint3：选出的区间是否有什么性质

Answer3:

考虑求解 $f_{l,r}$ 表示将 $l \to r$ 消为 0 的最小代价
记 $c_i$ 表示 $l \to i-1$ 均为 0 后将 $i$ 变为 0 还需的最小代价

$$c_i = \begin{cases} p_i & \text{if } i = l \\ \max\{p_i - c_{i-1}, 0\} & \text{else} \end{cases}$$

# A Preponderant Reunion

## CF933E

若 $r-2 \ge l$

$$f_{l,r} = \sum_{i=l}^{r} c_i$$

$=\sum_{i=l}^{r-2} c_i + c_{r-1} + c_r$
$=\mathrm{f}_{l,r-2} + c_{r-1} + \max\{p_r - c_{r-1}, 0\} \le f_{l,r-2} + p_r$
$=\mathrm{f}_{l,r-2} + f_{r,r}$

于是一定存在一种最优方案使得所有区间长度一定不超过 2

# A Preponderant Reunion

## CF933E

# Cycles in product

## CF997D

Describtion:
Cycles in product

给你大小为 $n_1$ 和 $n_2$ 的两棵树 $T_1$ 和 $T_2$ ，构造一张新图，该图中每一个点的编号为 $(u,v)$ 。如果在 $T_1$ 中，$u_1$ 和 $u_2$ 之间有边，那么在该图上，对于任意 $v$，$(u_1,v)$ 和 $(u_2,v)$ 之间有边。同样，如果在 $T_2$ 中，$v_1$ 和 $v_2$ 之间有边，那么在图上，$(u,v_1)$ 和 $(u,v_2)$ 之间有边。
问你这个图上长度为 $k$ 的环有多少个，定义环为从一个点出发，走$k$ 步回到起点，可以经过重复点和重复边。

$n_1,n_2 \leq 4000, k \leq 75$，答案对 998244353 取模

## Cycles in product

### CF997D

Hint1：

考虑这个关于这个图的路径如何描述。

# Cycles in product

## CF997D

Hint1:
对于点 $(u,v)$, 你有两个操作:
1.换一个 $u'$ 使得 $(u,u') \in E_1$ 。
2.换一个 $v'$ 使得 $(v,v') \in E_2$ 。

注意到这个路径实际上就是两个树上路径合并。序列合并是经典的，使用 EGF 卷积的组合意义即可。
由此可得一个环就是两个树的环合并。

Hint 2:
考虑如何做一个树的环计数。
为了方便描述，我们在 Hint2 中将不再考虑这有两棵树。
我们现在考虑子树内的计数，因为感觉这玩意儿好像很可以换根做。

Hint2:
设状态 $f(u,i)$ 表示以 $u$ 为开头，只能在子树内乱走，环长为 $i$ 的方案数。
令 $En_u$ 表示 $u$ 的最后一个儿子编号，没有则为 $0$ 。$Bro_u$ 表示 $u$ 的上一个兄弟的编号，没有则为 $0$。
令 $f'(v,u,i)$ 表示考虑到了 $u$ 和以 $v$ 结尾的兄弟森林。头为 $u$ ，环长为 $i$ 的环的个数。
转移:
$f'(v,u,i) = f'(Bro_v,u,i) + \sum_{k+2 \le i} f(v,k) \times f'(v,u,i-k-2)$

# Cycles in product

## CF997D

Hint3:
考虑换根。
直接换显然不好做，我们考虑再记一个状态表示 $u$ 只走它父亲那个子树的环。

# Cycles in product
## CF997D

Hint3:
记两个状态 $g(u,i),h(u,i)$ ，与 $f(u,i)$ 定义类似。但是 $g(u,i),h(u,i)$ 的分别表示只走父亲那个子树和全树答案。
$h$ 的计算类似与 $f$ ，只用把当前节点的所有儿子都视为一个子树。
$g$ 的计算也一样。其中 $g$ 的计算稍微特殊点，但很容易想到，所以不作展开讨论。

Solution:
两个 Hint 结合即可。

# Turtle and Three Sequences

## CF2003F

Describtion:
Turtle and Three Sequences

给定长度为 $n$ 的 3 个序列 $a, b, c$，你需要 $m \leq 5$ 个下标 $p_1 \dots p_m$，满足如下条件:

$p_i < p_i + 1$
$a_{pi} \leq a_{pi} + 1$
$b_{pi}$ 两两不同

你需要求 $\sum_{x=1}^{n} c_{px}$ 的最大值

Hint1：如果 $b_i \le 5$，可以怎么做?

Hint1：如果 $b_i \le 5$，可以怎么做?

因为 $b$ 的值域很小，所以我们可以状压 DP 把选了哪些 $b$ 压到状态里.

## Turtle and Three Sequences

2003F

Hint2：考虑将一个有不算低的概率给出正确答案的随机化算法跑多遍.

Hint3：有没有办法将问题转化为 Hint1 并且具有可以接受的正确率？

Hint3：有没有办法将问题转化为 Hint1 并且具有可以接受的正确率?

随机化映射

# Turtle and Three Sequences

## 2003F

Solution:
我们将每种 $b_i$ 分别映射到一个 $[1, m]$ 中的整数，然后跑 Hint1 中的 DP. 这样单次的正确率为

$$\frac{m!}{m^m} \approx 0.384$$

跑个 $T = 500$ 次怎么也过了. (P.S 实测 $T = 120$ 可过)

Describtion:

APC001F XOR Tree

一颗 $n$ 个节点的树，$1 \leq n \leq 10^5$，每条边上有边权 $w(u,v)$，满足 $0 \leq w(u,v) \leq 15$

对这棵树进行操作，一次操作选中一条链和一个数 $x$，将这条链上所有边的边权亦或 $x$

问最小多少次能够将所有边变成 0

# XOR Tree

## APC001F

Hint1:
将链上问题转换到点上
令 $d_u = \bigoplus_{(u,v)\in E} w(u,v)$，则原问题转化为给你一个序列，每次将两个数亦或 $x$，问最小多少次将数列变成 0

Hint2
将一次操作视为两个点连边，则最终一定会形成森林

假设形成环，设环上点为 $a_1, a_2, \ldots, a_k$，连接 $a_i$，$a_{i+1}$ 的边权为 $b_i$，特别的，$b_0$ 为连接 $a_1$，$a_k$ 边的边权
则有：$d_{a_i} = b_{i-1} \oplus b_{i \bmod k}$

## XOR Tree

### APC001F

考虑换一种构造:

每次操作 $a_1$, $a_i$ 一对点 $(i > 1)$, 将它们亦或上 $d_{a_i}$, 则除了 $a_1$ 其他点都会被变成 0

而 $a_1$ 受到的亦或总和为

$$\bigoplus_{i=2}^{k} d_{a_i} = \bigoplus_{i=2}^{k} (b_{i-1} \oplus b_{i \bmod k}) = b_0 \oplus b_1 = d_{a_1}$$

因此 $a_1$ 也被亦或成 0, 故不会形成环

每个连通分量里的点点权亦或和为 0

总操作数 $= n -$ 连通分量个数。

要最小化总操作数, 即最大化连通分量个数

问题转化为选出尽量多的集合, 满足每个集合中元素亦或和为 0

# XOR Tree

## APC001F

Solution：

如果 $d_i = 0$，则独立成为一个集合

如果有 $d_i = d_j \neq 0 (i \neq j)$，新建立一个集合 $\{i, j\}$

将上述点删除后，只会有最多 15 个点

状压