

杂题选讲

中山纪念中学

2024.10.22

T1

有三堆牌，分别有 a, b, c 张。每张牌上写着数字 1, 2, 3 中的一个。

先从牌堆 1 中抽一张，接下来，牌上写着几就从几号牌堆抽取。

求在所有的可能的 3^{a+b+c} 种（即每一张都可能取 1, 2, 3）方案中，先把牌堆 1 抽空的方案数。

答案对 $10^9 + 7$ 取模。

$a, b, c \leq 3 \times 10^5$ ，时限 3s。

样例输入：

```
1 1 1
```

样例输出：

```
17
```

样例解释：

- 如果牌堆 1 第一张牌是“1”，一定能先抽空牌堆 1，有 $3 * 3 = 9$ 方案。
- 如果牌堆 1 第一张牌是“2”，那么只有牌堆 2 的牌是“1”，或者牌堆 2 的牌是“3”而牌堆 3 的牌是“1”时才行，有4种方案。
- 如果牌堆 1 第一张牌是“3”，那么只有牌堆 3 的牌是“1”，或者牌堆 3 的牌是“2”而牌堆 2 的牌是“1”时才行，有4种方案。

因此，总共有 $9 + 4 + 4 = 17$ 种方案能先抽空牌堆 1 。

T2

有 n 个实体，每个实体有一个能量属性 a_i .

现在执行如下操作 10^{100} 次：

- 逐一执行 n 次互相攻击，第 1 个实体攻击第 2 个实体，第 2 个实体攻击第 3 个.....
第 n 个实体攻击第 1 个.

定义第 x 个实体攻击第 y 个实体的效果为，使第 y 个实体的能量减去第 x 个实体的能量，与 0 取最大值，即 $a_y \leftarrow \max(0, a_y - a_x)$.

输出操作结束之后，能量不为 0 的实体的编号.

$$2 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, 0 \leq a_i \leq 10^9.$$

E1 的数据范围为 $2 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, 0 \leq a_i \leq 2 \cdot 10^5$.

T3

定义一个序列是否是 11 的倍数为：该序列从左往右数字首尾相接形成的数字是否是 11 的倍数。

比如序列 $\{1, 21\}$ 是 11 的倍数。

给出长为 n 的序列 a_1, a_2, \dots, a_n ，求 a 的全部排列中是 11 的倍数的排列个数对 998244353 取模的结果。

$1 \leq \sum n \leq 2000, 1 \leq a_i \leq 10^9$ 。多测。2s, 512MB。

输入

4

2

1 1

3

1 31 12

3

12345 67 84

9

1 2 3 4 5 6 7 8 9

输出

2

2

2

31680

注意第一组答案为 2。

第二组：{13, 1, 12} 和 {1, 12, 31}。

第三组：{12345, 67, 84} 和 {12345, 84, 67}。

T4

给定一棵树，初始所有边都是轻边。有以下两种操作共 m 次：

1. 给定两个点 a, b ，首先对于 a 到 b 路径上的点 x ，将与 x 相连的边变成轻边，然后再将路径上的所有边变成重边。
2. 查询 a 到 b 路径上有多少条重边。

3 组数据， $n, m \leq 10^5, 1s$ 。

T5

给定 n, k , 求有多少个满足有长度为 $2n$ 的数组, 满足:

1. 含有 n 个 1 和 n 个 -1 。
2. 有恰好 k 个非空的, 和为 0 的区间。

$n \leq 30, 1 \leq k \leq n^2$ 。

T6

对于 $[1, n]$ 的排列，给 m 个限制，第 i 个限制描述 b_i 出现在 a_i, c_i 之间。保证存在一个排列满足所有限制。

构造一个 n 的排列至少满足 $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ 个限制。

$3 \leq n \leq 100000, 1 \leq m \leq 100000$ 。

T7

有 n 个数 d_1, d_2, \dots, d_n , 你需要做如下操作 m 次:

- 选择一个下标 $1 \leq x \leq n$ 或是两个下标 $1 \leq x, y \leq n$ 。
- 若只选择了一个下标, 令 $d_x \leftarrow d_x - k$; 否则选择一个正整数 $1 \leq a < k$, 令 $d_x \leftarrow d_x - a, d_y \leftarrow d_y - (k - a)$ 。
- 你需要保证每次操作完所有 $d_i \geq 0$ 。

保证 $\sum_{i=1}^n d_i = m \times k$, 显然如果存在方案那最后一定有 $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$ 。

构造方案或报告无解。多组数据。

相信大家一定能做出来的! 但是做之前最好看一下数据范围。

测试点约束

对于所有测试点：

$$1 \leq T \leq 10, \quad 1 \leq n \leq 500, \quad n - 2 \leq m \leq 5000, \quad m \geq 1, \quad 1 \leq k \leq 5000,$$

$$\sum_{i=1}^n d_i = m \times k。$$

测试点编号	n	m	k
1 ~ 3	≤ 4	≤ 4	≤ 50
4 ~ 5	≤ 10	≤ 10	$\leq 5 \times 10^3$
6 ~ 7	≤ 500	$= n - 1$	$\leq 5 \times 10^3$
8 ~ 9	≤ 500	$n - 1 \leq m \leq 5 \times 10^3$	$\leq 5 \times 10^3$
10	≤ 25	$\leq 5 \times 10^3$	$\leq 5 \times 10^3$
11 ~ 12	≤ 25	$\leq 5 \times 10^3$	≤ 500
13 ~ 14	≤ 50	$\leq 5 \times 10^3$	≤ 500
15 ~ 17	≤ 100	$\leq 5 \times 10^3$	$\leq 5 \times 10^3$
18 ~ 20	≤ 500	$\leq 5 \times 10^3$	$\leq 5 \times 10^3$