

二分图匹配

cssyz-wjj

- 本 ppt 主要是对二分图匹配的一些知识点进行梳理
- 其他涉及的题目放在杂题选讲中

二分图

- 二分图基本概念
- 二分图最大匹配
- 染色判二分图
- Dinic 跑二分图 $O(m\sqrt{n})$

匹配

- 增广路

点覆盖

- 点覆盖：二分图中找一些点，使得每一条边都至少有一个端点在这个点集中
- 最小点覆盖 = 二分图最大匹配

证明

- 由最大匹配能构造出一个点覆盖
- 最大匹配中所有的匹配边都至少有一个端点在点覆盖中，这些边没有的公共端点

最小点覆盖输出方案

- 遍历一边的点（假设为左侧）
- 从没有匹配的点开始，沿着增广路走
- 最终左侧没有被访问到的点与右侧被访问到的点组成最小点覆盖
- 感性证明正确性：增广路的集合代表了匹配，考虑到对于所有可能的增广路，输出的总是点少的那一部分

独立集

- 独立集：二分图中找一些点，这些点两两间没有边存在
- 最大独立集 = 点的总数 - 最小点覆盖
- 证明：一个独立集对应了一个点覆盖的补集

独立团

- 独立团：一个为完全图的子图
- 独立团为补图上的独立集，反之同理
- 二分图独立团：一个为完全二分图的子图
- 二分图独立团的求法类似

路径（链）覆盖

- 有向图中，找到一些路径，若这些路径经过的点的并集为原图的点集。**以下讨论有向图均为DAG。**
- 最小不相交路径覆盖：所有点拆成入点与出点，建图。最小不相交路径覆盖 = 原图点数 - 最大匹配数
- 感性证明：相当于一开始有 n 条路径，每匹配一次相当于把两条路径合成一条。输出方案同理。
- 最小可相交路径覆盖：传递闭包，跑最小不相交路径覆盖

Dilworth 定理

- 偏序集 (DAG) 能划分成的最少的全序集个数等于最大反链 (反链不是链, 是一个集合) 的元素个数
- 人话描述: 最长反链 = 最小路径覆盖。试下自己证明?
- 偏序关系: 一般有 \leq 之类的

证明

- 最小路径覆盖对应一个反链
- 最小路径覆盖中，每一条链中的点最多在反链集合中出现一个

hall 定理

- 二分图完美匹配存在 等价于 二分图左部 k 个元素在右部共有至少 k 个相邻元素
- 一种可能的证明可见我写的另一个 md

Thanks!