SJ 定理

- SJ 定理

对于一种游戏 S, 我们规定 **必胜态** : **所有子游戏的** $\mathrm{sg}_i(i \in S)$ **为** 0 (不一定是其它某个值取到 0, 但一定是 sg 取到 0)

我们有结论 : 当下面两点 **同时满足或不满足时, 先手必胜** :

1. $\bigoplus_{i \in S} sg_i = 0$ (性质 A)
2. $\max_{i \in S} sg_i \leqslant 1$ (性质 B)

- SJ 定理的证明

考虑归纳证明, 对于边界显然满足

当前为必胜态 :

- 同时满足 A, B : 我们只要证明此状态下存在一个后继为必败态即可, 显然我们不存在一种方法使得 B2 不满足, 我们只用考虑如何使 A 不满足, 显然如果没有到边界情况, 我们任意取即可, 因为 0 异或不为 0 的数不为 0
- 同时不满足 A, B : 按照普通 Nim 游戏的证明, 我们存在一种方法使得 A 不满足, 我们只需要证在这种方法下 B 依然满足

  如果存在一种情况使得 B 不满足, 那么意味着原来仅存在一处 sg 大于 1, 显然, 我们可以通过控制这个 sg 使其变为 0 或 1, 来完成对奇偶的控制, 进而决定胜败

当前为必败态 :

- 满足 A, 不满足 B : 我们只用证明此状态下所有的后继均为必胜态, 首先可以确定的是操作后 A 必然不被满足, 我们只要证明依然不满足 B 即可

  如果存在一种情况使得 B 被满足, 那么以为着仅存在一处 sg 大于 1, 而在这种情况下, 原来无论如何都不会满足 A 性质, 因为此时 sg 必然存在一位非最低位的 1, 而这个 1 不存在另一个数将其抵消
- 不满足 A, 满足 B : 这种情况意味着有奇数个 1, 显然只存在一种操作方案, 最后导出后手必胜

- 参考

- cnblogs