进阶线性代数 part1

cssyz - wjj

先简单说一些

- 虽然给我了一些我感觉奇奇怪怪的知识点（不适合放在这里讲的）
- 但我还是都讲了
- 本课不在于对知识进行过多拓展，仅在一些理解上可能有问题的地方稍作介绍

目录

- 下面将介绍 LGV 引理，BEST 定理，矩阵树定理
- 这三者都是利用行列式进行高效求解
- 能解决不局限于方案数一类的问题（在后面将有所体现）

LGV 引理

给定一个 **具有特殊性质的平面图** DAG，求从起始点集到结束点集（保证这两类点的个数相同）的不相交路径方案数

- 特殊性质：将起始点集以及结束点集像二部图一样分开排列，将线拉直不相交（点集内部不连边，有的话就去除，反正无论如何也不会走，因为不相交）
- 网格图往往是一种典型图例

- 定义 $w(P)$ 为路径 P 上边的权的乘积（为了统计方案数，我们规定每条边的权为 1）
- 定义 $f(s,t)$ 表示从 s 到 t 所有可能路径的 w 之和

$$\begin{matrix} f(A_1,B_1) & f(A_1,B_2) & \dots & f(A_1,B_n) \\ f(A_2,B_1) & f(A_2,B_2) & \dots & f(A_2,B_n) \\ & & \dots & \\ f(A_n,B_1) & f(A_n,B_2) & \dots & f(A_n,B_n) \end{matrix}$$

- 这个矩阵的行列式的绝对值值就为不相交路径方案数

- 考虑假设有一个方案，其中存在相交路径会发生什么
- 任取一条，然后正负将会被抵消
- 对于不相交路径，注意到对于每个方案逆序对个数的奇偶性是一致的

- 如果不是一个具有特殊性质的平面图，仅仅是个 DAG，那么我们统计的结果为 逆序对为奇数 减 逆序对为偶数 不相交路径数
- 或者说，我们可以根据这个判断方案的奇偶性

矩阵树定理

- 统计无向图生成树个数
- 证明：
    1. 关联矩阵
    2. 树与成环的关联矩阵行列式
    3. Binet-Cauchy 公式
    4. 分析矩乘性质：度数矩阵 - 邻接矩阵

有向图?

- 以外向生成树为例
- 入度矩阵 - 出边矩阵
- 内向同理

BEST 定理

- 有向图以 x 为起点 / 终点的欧拉回路计数

$$Ans = D_x \prod (\mathrm{out}_i - 1)!$$

D_x 为以 x 为根的内向树个数

基础练习题：

1. luogu6657
2. luogu6178
3. luogu5807

进阶练习题：

1. luogu7736（推荐，能比较好地理解 LGV）
2. luogu3317
3. luogu4336
4. luogu6624
5. UOJ226 奥林匹克环城马拉松