斐波那契博弈

这是一个 ~~休闲~~ 的博弈论游戏, 其证明十分 ~~休闲~~

§ 斐波那契博弈

> 有一堆石子个数为 n $(n \geqslant 2)$ 的石子, A 与 B 轮流取石子, 不能行动者输, 规则如下 :
>
> 1. 每次取石子的个数至少为 1, 至多为对手上一次取石子数的 2 倍
> 2. 先手第一次能取任意个石子 (显然不能为 0), 但不能将石子取光
>
> 问先手是否有必胜策略 ?

有一种手段, 对于博弈论都是先算小的情况, 然后推出规律, 然后证明 (不要觉得这样不科学)

由于这个叫斐波那契博弈, 所以 **当 n 为斐波那契数的时候, 先手必败** (雾

我们归纳证明一下, 记 $f(n)$ 表示 有 n 个石子的时候是先手必胜还是先手必败, 先手必败为 0, 先手必胜为 1, 同时记 Fib_i 表示第 i 个斐波那契数, $\text{Fib}_0 = \text{Fib}_1 = 1$

显然, $f(2) = 0$

不妨先考虑 n 为第 k 个斐波那契数, 即 $n = \text{Fib}_k$, 假设对于 2 ~ $k-1$ 的 $n = \text{Fib}_i$ 都成立

对于这堆石子, 我们可以将其看做两堆, 一堆大小为 Fib_{k-2}, 另一堆为 Fib_{k-1}, 因为 $\text{Fib}_{k-2} + \text{Fib}_{k-1} = \text{Fib}_k$

我们不妨让先手先取 Fib_{k-2} 这一堆, 显然, 先手不能一次性将这一堆取完, 因为恒有 $\text{Fib}_{k-1} \leqslant 2 \cdot \text{Fib}_{k-2}$, 取超过 Fib_{k-2} 的显然也是不行的

由于我们之前假设的结论, 显然, 后手总是有办法将这一堆的最后一个石子取到手, 那么先手仍然会成为取 Fib_{k-1} 这一堆石子的先手

假设后手取完第一堆石子的最后一步取了 x 个石子, 再由于之前的假设, 要让先手必败, 那么有 $x < \frac{\text{Fib}_{k-1}}{2}$

所以我们只要证明上面那个不等式恒成立即可

假设先手第一次取了 a 个石子

1. $a > \frac{\text{Fib}_{k-2}}{3}$, 那么后手可以直接取完, $x = \text{Fib}_{k-2} - a < \frac{2 \cdot \text{Fib}_{k-2}}{3}$

   要比较 $\frac{2 \cdot \text{Fib}_{k-2}}{3}$ 与 $\frac{\text{Fib}_{k-1}}{2}$ 的大小, 实际上就是比较 $4 \cdot \text{Fib}_{k-2}$ 与 $3 \cdot \text{Fib}_{k-1}$ 的大小

   作差, 会有

$$4 \cdot \mathrm{Fib}_{k-2} - 3 \cdot \mathrm{Fib}_{k-1} = \mathrm{Fib}_{k-2} - 3 \cdot \mathrm{Fib}_{k-3} < 0$$

所以得到这种情况先手必败

2. $a \leqslant \frac{\mathrm{Fib}_{k-2}}{3}$, 由于之前的假设, 后者在 Fib_{k-2} 中有必胜策略, 然而现在的情形意味着后手肯定不能在这一次取完, 那么按照最优策略行动, 必然存在某一时刻, 先手与后手总共取掉的石子个数必然大于 $\frac{\mathrm{Fib}_{k-2}}{3}$, 而且这次没有将 Fib_{k-2} 整个取完 (因为这之前的所有行动都会在 $[1, \frac{\mathrm{Fib}_{k-2}}{3}]$ 中), 并且在之后的操作过程中, 所有的操作都 小于等于 $\frac{2 \cdot \mathrm{Fib}_{k-2}}{3}$, 自然也就小于 $\frac{\mathrm{Fib}_{k-1}}{2}$

   再由于之前的假设, 按照最优策略还是后手最后取完这堆 Fib_{k-2} 的石子

综上 **当 n 为斐波那契数的时候, 先手必败**

那么, 若 n 不为斐波那契数的时候是否先手必胜 ?

我们先考虑一个引理

> $\mathrm{Zeckendorf}$ **定理 / 齐肯多夫定理**
>
> 任何正整数可以表示为若干个不连续的 $\mathrm{Fibonacci}$ 数之和
>
> 即 $n = \mathrm{Fib}_{k_1} + \mathrm{Fib}_{k_2} + \ldots \mathrm{Fib}_{k_m}$
>
> 其中 $\forall i \in [1, m), k_i < k_{i+1} - 1$

一个很 蠢 显然的事实, $n = \sum_{i=1}^{n} 1$, 而 $\mathrm{Fib}_0 = \mathrm{Fib}_1 = 1$

我们想象动态维护一个集合 S, 一开始, 这个集合里有 n 个 Fib_1 (也可以看做 Fib_0), 然后像消消乐一样, 若 S 当前存在一个 Fib_k 与一个 Fib_{k+1}, 就将它们拿掉, 放入一个 Fib_{k+2}, 其数学原理就是 $\mathrm{Fib}_{k+2} = \mathrm{Fib}_k + \mathrm{Fib}_{k+1}$

显然, 我们最后会得到一个不再变化的集合, 里面不存在相邻的 Fib, 否则就会继续消

所以回到原来的问题, 我们将 n 分解一下 (按照上面的式子分解方式, 那么 Fib_{k_1} 是最小的, 然后后面依次变大), 设先手第一次取了 a 个石子

那么 a 应当等于 Fib_{k_1} , 这样的话, 就把行动权交给了后手, 那么由于上面的引理, $2 \cdot \mathrm{Fib}_{k_1} < \mathrm{Fib}_{k_2}$, 说明无论怎样, 后手都不能一次性地将下一个 Fib 取完, 然后就跟我们之前的证明很像了, 先手一直能保证他总是最后取完任意一个 Fib 堆

所以, 一个非斐波那契数, 由于其总能分解成至少两个 Fib, 所以总是 **先手必胜**

综上, 斐波那契博弈的规律是

1. n 为斐波那契数, 先手必败
2. n 不为斐波那契数, 先手必胜

§ 参考

- csdn 博客