



# Álgebra Linear na Construção da Arquitetura de Controle de Robôs Autônomos com Rodas Omnidirecionais

Alexandre Pereira de Freitas  
Lucas Rafael de Aguiar Silva  
Samuel Morais Barros  
Sérgio Reinier Sousa Macário  
Vinícius de Freitas Lima Moraes

08/11/2019

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Constituição dos robôs com rodas omnidirecionais . . . . .	2
1.2	Fundamentos Físicos . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Enunciado do problema</b>	<b>5</b>
2.1	Deslizamento de Rodas . . . . .	5
2.2	Economia de Energia . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Resolução do problema</b>	<b>5</b>
3.1	Item 1 . . . . .	5
3.2	Item 2 . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>8</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Constituição dos robôs com rodas omnidirecionais

Robôs com movimentação omnidirecional são máquinas capazes de se locomover em todas as direções e ângulos sem a necessidade de rotacionar o seu corpo antes de executar a translação. As peças especiais que permitem isso são as omnirodas, rodas constituídas por várias rodas menores perpendiculares em relação ao plano da roda maior encaixadas ao longo de sua periferia, conforme a figura 1 a seguir:



Figure 1: Legenda

O princípio de funcionamento dos robôs com omnirodas constitui-se do fato de que, enquanto a roda principal provê tração na direção normal ao eixo do motor, as rodas menores que constituem a roda principal permitem o deslizamento sem atrito (para um estudo ideal) na direção do eixo do motor.



Figure 2: Legenda

Em geral, utiliza-se três ou quatro rodas omnidirecionais na fabricação de um robô, conforme a figura 2. A composição da tração de cada uma das rodas possibilita a translação e a rotação do robô. O ideal seria utilizar duas rodas omnidirecionais ortogonais, de tal forma que somente a translação fosse permitida, minimizando a complexidade do movimento. Porém, por questões espaciais e de estabilidade, esse arranjo é impossível. Nesse ínterim, o ideal das rodas omnidirecionais constitui da busca pela situação na qual as  $n$  rodas omnidirecionais empregadas em um robô possibilitam a obtenção da maior velocidade pelo robô no sentido desejado.

## 1.2 Fundamentos Físicos

Para a compreensão do movimento, é necessário analisar tanto a translação quanto a rotação do sistema de acordo com a geometria do robô. Para isso, pode-se modelar o robô dotado de  $n$  rodas, tal que:



Figure 3: Legenda

Para a translação, pode-se aplicar a 2ª lei de Newton com relação ao centro do robô:

$$\vec{F}_{resultante} = M\vec{a}_{resultante}$$

$$\vec{a} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Observa-se, por decomposição vetorial, que:

$$a_x = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n F_i \sin \theta_i \quad (\text{I})$$

$$a_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n F_i \cos \theta_i \quad (\text{II})$$

Para a rotação, deve-se analisar o torque resultante:

$$\tau_{resultante} = I\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{R}{I} \sum_{i=1}^n F_i \quad (\text{III})$$

O momento de inércia de uma distribuição de massa qualquer pode ser representado por:

$$I = \alpha MR^2, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Desse modo, pode-se simplificar as equações (I), (II) e (III) pela seguinte identidade matricial:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ R\dot{\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & \cdots & -\sin \theta_n \\ \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_n \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \cdots & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

Denomina-se a matrix  $3 \times n$  da equação acima de matriz de acoplamento de forças, e representa-se por  $C_\alpha$ .

Pode-se obter a velocidade final de cada roda bem como a velocidade linear e angular do robô integrando a equação matricial (IV). Porém, é mais interessante analisar a situação em que o robô se apresenta em um espaço Euclidiano, obter a trajetória e, a partir daí, derivar a velocidade de cada roda individualmente. Agrupando as velocidades individuais proporcionadas por cada motor na matriz  $m = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$  e as velocidades euclidianas e a velocidade de rotação do robô na matriz  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ , nota-se que o movimento das rodas se decompõem em componentes translacionais e rotacionais, segundo a geometria do robô. Nesse panorama, a seguinte equação representa a relação entre a velocidade dos motores individualmente e a velocidades resultantes no robô.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ -\sin \theta_n & \cos \theta_n & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ R\omega \end{pmatrix}$$

A matriz envolvida no produto matricial acima, bastante semelhante à matriz  $C_\alpha$ , é chamada matriz de acoplamento de velocidade, e será denotada por  $D$ . Assim, sendo a aceleração do robô representada pelo vetor  $a = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$  e a magnitude (módulo) das forças representada por  $f = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ , podem ser constituídas as seguintes igualdades:

$$a = C_\alpha f$$

$$m = Dv$$

Integrando em função de um intervalo de tempo  $\Delta t$ , obtém-se que  $\Delta v = \Delta t \times a$ . Assim,

$$\Delta m = \Delta t \times DC_{\alpha} f$$

Os motores possuem um mecanismo que permite a medição da velocidade das rodas em tempo real. Com o fim de controlar o robô, é necessário conhecer o comportamento da matriz  $v$ , isto é, é necessário construir uma transformação linear que mapeie os elementos do subespaço gerado pela matriz  $m$  nos elementos do subespaço gerado pela matriz  $v$ . Para tal, é necessário inverter a matriz  $m=Dv$ . Em geral, isso não é possível por a matriz  $D$  não ser quadrada e, portanto, não ser invertível. Porém, pode-se utilizar uma matriz pseudo-inversa pela esquerda, denominada  $D^+$ , tal que  $D^+D = I_n$ . Nota-se, ainda, que  $DD^+$  não representa um produto matricial. Nesse ínterim,

$$D^+m = (D^+D)v = Iv$$

$$v = D^+m$$

## 2 Enunciado do problema

### 2.1 Deslizamento de Rodas

Considere um robô simétrico, com  $m = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$  indicando a velocidade tangencial dos motores,  $D$  a matriz de velocidades, e  $v$  um vetor tridimensional  $(v_x, v_y, Rw)^T$ . Dado isso, teste a inconsistência da velocidade dos motores e, consequentemente, se há rodas deslizando.

### 2.2 Economia de Energia

Considerando o resultado do problema anterior, ou seja, caso seja detectado inconsistência com os motores e alguma das rodas esteja deslizando. É possível corrigir rapidamente esse problema sem alterar a configuração física do robô (número de motores, número de rodas etc.)? Se sim proponha uma solução adequada.

## 3 Resolução do problema

### 3.1 Item 1

Consideremos o robô da figura, no qual os ângulos das rodas superiores são  $\alpha$  e os da inferiores são  $\beta$ , o vetor  $m = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$  representa as velocidades tangenciais dos motores e o vetor  $v = (v_x, v_y, Rw)^T$  a velocidade total do robô (translacional e rotacional).

Para procurarmos inconsistências nas velocidades dos motores (que indicam deslizamento nas rodas), partiremos da relação inicial dada por:

$$m = Dv$$

Como é possível notar, a matriz  $D$  não é quadrada, ela não possui inversa, então não podemos, inicialmente, isolar o vetor "v", no entanto, podemos achar uma matriz equivalente, chamada de Matriz Pseudoinversa ( $D^+$ ), que usaremos com intuito de isolar o vetor das velocidades Euclidianas.

Definição Pseudo-inversa (Moore-Penrose)

De acordo com a definição pseudo-inversa de Moore-Penrose, vemos que se  $D$  tem seu espaço coluna LI, podemos calcular a sua inversa da seguinte maneira:

$$D^+ = (D^*D)^{-1}D^*$$

Demonstração da propriedade:

Daí usando a expressão anterior e multiplicando por  $D$  pela direita, temos:  
 $D^+D = (D^*D)^{-1}(D^*D) = I \Rightarrow (D^+ \text{ é a inversa a esquerda de } D)$

Aplicando a pseudo-inversa na equação inicial, obtemos:  $m = Dv \Rightarrow D^+m = D^+Dv \Rightarrow v = D^+m$

Com a constante comunicação do robô e do controlador acerca da situação das velocidades dos motores, podemos sempre testar a inconsistência da matriz  $m$ , de modo que se as relações  $m = Dv$  e  $v = D^+m$  são válidas, então  $m = DD^+m$  também o é. Para testar a consistência das velocidades, basta testar a validade da última expressão.

Caso essa igualdade não ocorra, podemos afirmar com certeza que alguma roda está com velocidade inconsistente e portanto, deslizando. Contudo, existe a possibilidade de que múltiplas rodas também estejam deslizando em uma taxa que faça com que a relação permaneça válida, no entanto, isto é extremamente improvável.

Assim, vamos trabalhar testando a validade da expressão:

$$m = DD^+m \Rightarrow (I - DD^+)m = 0$$

Para  $\alpha = \pi/6$  e  $\beta = \pi/4$ , teremos a seguinte relação:

$$(v1 - v2) = (v3 - v4)(\sqrt{2}/3)$$

Logo, se essa relação **não** for válida, alguma das rodas não está rodando da maneira correta.

### 3.2 Item 2

Para identificarmos uma possível perda ou desperdício de energia precisamos identificar como funciona o vetor aceleração do robô, dado por:  $a = C_\alpha f_k$ . Partindo desse ponto, é fácil notar que existem combinações de forças dos motores que geram uma aceleração nula:  $a = 0$ , como o vetor:  $f_o = (1, -1, 1, -1)$ . Em outras palavras, o vetor  $f_o$  pertence ao núcleo de  $C_\alpha$ .

Essa interessante observação nos permite expandir o raciocínio para resolver

o problema de desperdício de energia. Note que se um vetor  $g$  pertence ao núcleo de  $C_\alpha$ , então qualquer combinação de vetores  $f$  que inclua  $g$  produz a mesma aceleração que  $f - g$ , pois:

$$a = C_\alpha(f) = C_\alpha(f - g) + C_\alpha(g) = C_\alpha(f - g)$$

Como calculado anteriormente na seção 3.1,  $\dim(C_{alpha}) = 3$ , daí, aplicando o teorema do posto-nulidade para  $C_\alpha$ , temos:

$$Rank(C_\alpha) + Ker(C_\alpha) = Dim(coluna)$$

Daí tiramos que  $Ker(C_\alpha) = 1$ , e portanto qualquer vetor no núcleo de  $C_\alpha$  é da forma  $\lambda f_k$ .

O fato interessante de se notar é que primeiro, testamos as validades das velocidades através da equação:  $(I - DD^+)m = 0$  e agora, concluímos que qualquer vetor no núcleo de  $C_\alpha$  gera uma aceleração nula no robô. Podemos estreitar ainda mais essa relação, se usarmos o conceito de operador de projeção ortogonal:

As matrizes  $DD^+eD^+D$  são operadores de projeção ortogonal,  $P$ , ou seja, são hermitianos ( $P = P^*$ ), por definição, e são idempotentes ( $P^2 = P$ ). Daí, as seguintes propriedades se seguem:

$DD^+$  é o operador de projeção ortogonal na  $Im(D)$ , e por consequência,  $I - DD^+$  é o operador de projeção ortogonal em  $ker(A)$ .

Se analisarmos as matrizes  $C_\alpha$  e  $D$ , podemos notar que  $C_\alpha = (1/\alpha M)(D^T)$ , como nossas matrizes estão no corpo dos  $R$ , sabemos que  $D^T = D^*$ , então podemos ver que  $C_\alpha$  é a matriz adjunta de  $D$  multiplicada por uma constante! Então, se quisermos corrigir o deslizamento de velocidades, verificando a consistência da equação  $(I - DD^+)m = 0$ , basta vermos que o operador  $(I - DD^+)$  projeta  $m$  no  $ker(D^*)$ , logo a relação que queremos manter válida é que  $m$  seja **ortogonal** ao vetor que compõem a base do  $ker(C_\alpha)$ .

Correção:

Podemos visualizar a correção de deslizamento, identificando o espaço vetorial da transformação  $(I - DD^+)$ . Nesse espaço, de dimensão = 4, existe um subespaço tridimensional de valores consistentes, ou seja, que não deslizam. Ortogonalmente à esse subespaço, possuímos o vetor  $f_k$ , sempre que as rodas estão deslizando, estamos gastando energia, pois o vetor das velocidades contém uma componente na direção  $f_k$ . Daí, a nossa correção para velocidades inconsistentes gera, consequentemente, uma economia de energia para o sistema do robô.

Além disso, quando mapeamos as acelerações Euclidianas  $a$  com as forças dos motores  $f$ , sempre obtemos resultados consistentes, através da expressão:

$$f = C_\alpha^+ a$$

Veja que  $rank(C_\alpha) = 3$ , então pelo teorema do posto-nulidade temos que:



$\ker(C_\alpha) = 0$ .  $C_\alpha$ , portanto, mapeia as acelerações  $a$  em  $f$  (subespaço de 3 dimensões). Se esse espaço possuísse algum elemento  $u$  do núcleo de  $C_\alpha$ , então deveria existir uma aceleração  $a$ , diferente de 0, tal que  $u = C_\alpha^+ a$ . Como vimos anteriormente que  $c_\alpha u = a = 0$ , chegaríamos a um absurdo.

## 4 Conclusão