

MINISTÉRIO DA DEFESA  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
(Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho - 1792)



# Álgebra Linear na Construção da Arquitetura de Controle de Robôs Autônomos com Rodas Omnidirecionais

Alexandre Pereira de Freitas  
Lucas Rafael de Aguiar Silva  
Samuel Morais Barros  
Sérgio Reinier Sousa Macário  
Vinícius de Freitas Lima Moraes

08/11/2019

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Constituição dos robôs com rodas omnidirecionais . . . . .	2
1.2	Fundamentos Físicos . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Enunciado do problema</b>	<b>5</b>
2.1	Deslizamento de Rodas . . . . .	5
2.2	Economia de Energia . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Resolução do problema</b>	<b>6</b>
3.1	Item 1 . . . . .	6
3.1.1	Definição Pseudo-inversa (Moore-Penrose) . . . . .	6
3.1.2	Demonstração da propriedade . . . . .	6
3.1.3	Teste de velocidades inconsistentes . . . . .	6
3.2	Item 2 . . . . .	7
3.3	Correção do deslizamento . . . . .	8

# 1 Introdução

## 1.1 Constituição dos robôs com rodas omnidirecionais

Robôs com movimentação omnidirecional são máquinas capazes de se locomover em todas as direções e ângulos sem a necessidade de rotacionar o seu corpo antes de executar a translação. As peças especiais que permitem isso são as omnirodas, rodas constituídas por várias rodas menores perpendiculares em relação ao plano da roda maior encaixadas ao longo de sua periferia, conforme a figura 1 a seguir:



Figura 1: Omniroda

O princípio de funcionamento dos robôs com omnirodas constitui-se do fato de que, enquanto a roda principal provê tração na direção normal ao eixo do motor, as rodas menores que constituem a roda principal permitem o deslizamento sem atrito (para um estudo ideal) na direção do eixo do motor.



Figura 2: Robô com rodas omnidirecionais

Em geral, utiliza-se três ou quatro rodas omnidirecionais na fabricação de um robô, conforme a figura 2. A composição da tração de cada uma das rodas possibilita a translação e a rotação do robô. O ideal seria utilizar duas rodas omnidirecionais ortogonais, de tal forma que somente a translação fosse permitida, minimizando a complexidade do movimento. Porém, por questões espaciais e de estabilidade, esse arranjo é impossível. Nesse ínterim, o ideal das rodas omnidirecionais constitui da busca pela situação na qual as  $n$  rodas empregadas em um robô possibilitam a obtenção da maior velocidade pelo robô com a maior eficiência energética no sentido desejado.

## 1.2 Fundamentos Físicos

Para a compreensão do movimento, é necessário analisar tanto a translação quanto a rotação do sistema de acordo com a geometria do robô. Para isso, pode-se modelar o robô dotado de  $n$  rodas, tal que:

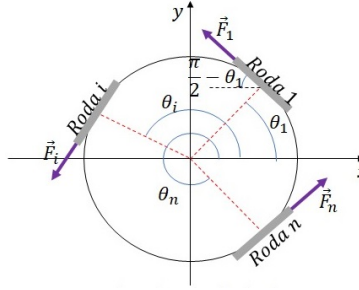


Figura 3: Arranjo de  $n$  rodas e as aplicadas forças correspondente

Para a translação, pode-se aplicar a 2ª lei de Newton com relação ao centro do robô:

$$\vec{F}_{resultante} = M\vec{a}_{resultante}$$

$$\vec{a} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Observa-se, por decomposição vetorial, que:

$$a_x = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n F_i \sin \theta_i \quad (\text{I})$$

$$a_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n F_i \cos \theta_i \quad (\text{II})$$

Para a rotação, deve-se analisar o torque resultante:

$$\tau_{resultante} = I\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{R}{I} \sum_{i=1}^n F_i \quad (\text{III})$$

O momento de inércia de uma distribuição de massa qualquer pode ser representado por:

$$I = \alpha MR^2, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Desse modo, pode-se simplificar as equações (I), (II) e (III) pela seguinte identidade matricial:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ R\dot{\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & \cdots & -\sin \theta_n \\ \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cdots & \cos \theta_n \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \cdots & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (\text{IV})$$

Denomina-se a matrix  $3 \times n$  da equação acima de matriz de acoplamento de forças, e representa-se por  $C_\alpha$ .

Pode-se obter a velocidade final de cada roda bem como a velocidade linear e angular do robô integrando a equação matricial (IV). Porém, é mais interessante analisar a situação em que o robô se apresenta em um espaço Euclidiano, obter a trajetória e, a partir daí, derivar a velocidade de cada roda individualmente.

Agrupando as velocidades individuais proporcionadas por cada motor na matriz  $m = (v_1, \dots, v_n)^T$  e as velocidades euclidianas e a velocidade de rotação do robô na matriz  $v = (v_x, v_y, R\omega)^T$ , nota-se que o movimento das rodas se decompõem em componentes translacionais e rotacionais, segundo a geometria do robô. Nesse panorama, a seguinte equação representa a relação entre a velocidade dos motores individualmente e a velocidades resultantes no robô.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \theta_n & \cos \theta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ R\omega \end{pmatrix}$$

A matriz envolvida no produto matricial acima, bastante semelhante à matriz  $C_\alpha$ , é chamada matriz de acoplamento de velocidade, e será denotada por  $D$ .

Assim, sendo a aceleração do robô representada pelo vetor  $a = (a_x, a_y, R\dot{\omega})^T$  e a magnitude (módulo) das forças representada por  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ , podem ser constituídas as seguintes igualdades:

$$a = C_\alpha f$$

$$m = Dv$$

Integrando em função de um intervalo de tempo  $\Delta t$ , obtém-se que  $\Delta v = \Delta t \times a$ . Assim,

$$\Delta m = \Delta t \times DC_\alpha f$$

Os motores possuem um mecanismo que permite a medição da velocidade das rodas em tempo real. Com o fim de controlar o robô, é necessário conhecer o comportamento da matriz  $v$ , isto é, é necessário construir uma transformação linear que mapeie os elementos do subespaço gerado pela matriz  $m$  nos elementos do subespaço gerado pela matriz  $v$ . Para tal, é necessário inverter a matriz  $m = Dv$ . Em geral, isso não é possível por a matriz  $D$  não ser quadrada e, portanto, não ser invertível. Porém, pode-se utilizar uma matriz pseudo-inversa pela esquerda, denominada  $D^+$ , tal que  $D^+D = I_n$ . Assim, temos

$$D^+m = (D^+D)v = Iv$$

$$v = D^+m$$

## 2 Enunciado do problema

### 2.1 Deslizamento de Rodas

Considere o robô omnidirecional da figura.

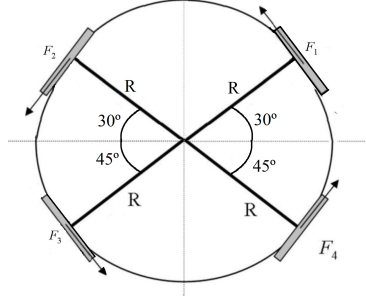


Figura 4: Geometria das rodas

Tem-se que  $m = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$  é o vetor em  $\mathbb{R}^4$  da velocidade tangencial dos motores,  $D$  é a matriz de acoplamento de velocidade, e  $v$  é um vetor tridimensional  $(v_x, v_y, R\omega)^T$ . Dado a modelagem matemática do movimento do robô, discuta como um algoritmo pode ser criado para a identificação de velocidades inconsistentes entre os motores. Em outras palavras, crie um método para identificar o deslizamento nas rodas do robô.

### 2.2 Economia de Energia

Considerando o resultado do problema anterior, caso seja detectado uma roda deslizando, qual a influência do deslizamento no gasto energético do robô? Proponha uma correção adequada para as velocidades dos motores, de modo a corrigir o deslizamento e aumentar a eficiência energética da direção.

### 3 Resolução do problema

#### 3.1 Item 1

Consideremos o robô da figura, no qual os ângulos das rodas superiores são  $\alpha = 30^\circ$  e os da inferiores são  $\beta = 45^\circ$ , o vetor  $m = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$  representa as velocidades tangenciais dos motores e o vetor  $v = (v_x, v_y, R\omega)^T$  a velocidade total do robô (translacional e rotacional).

Para procurarmos inconsistências nas velocidades dos motores (que indiquem deslizamento nas rodas), partiremos da relação inicial dada por:

$$m = Dv$$
$$D = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} & 1 \\ -\sin \frac{\pi}{6} & -\cos \frac{\pi}{6} & 1 \\ \sin \frac{\pi}{4} & -\cos \frac{\pi}{4} & 1 \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Como é possível notar, a matriz  $D$  não é quadrada e, por tanto, não possui inversa. Assim não podemos, inicialmente, isolar o vetor  $v$ . No entanto, podemos calcular uma matriz, chamada Matriz Pseudoinversa ( $D^+$ ), tal que  $D^+D = I$ . Usaremos essa matriz com o intuito de isolar o vetor  $v$ .

##### 3.1.1 Definição Pseudo-inversa (Moore-Penrose)

De acordo com a definição de pseudo-inversa de Moore-Penrose, vemos que, se  $D$  tem seu espaço coluna LI, podemos calcular a sua inversa da seguinte maneira:

$$D^+ = (D^*D)^{-1}D^*$$

Assim, temos:

$$D^+ = \begin{pmatrix} -0,4142 & -0,4142 & 0,4142 & 0,4142 \\ 0,3464 & -0,3464 & -0,2828 & 0,2828 \\ 0,2929 & 0,2929 & 0,2071 & 0,2071 \end{pmatrix}$$

##### 3.1.2 Demonstração da propriedade

Assim, usando a expressão anterior e multiplicando por  $D$  pela direita, temos:

$$D^+D = (D^*D)^{-1}(D^*D) = I \Rightarrow (D^+ \text{ é a inversa a esquerda de } D)$$

##### 3.1.3 Teste de velocidades inconsistentes

Aplicando a pseudo-inversa na equação inicial, obtemos:

$$m = Dv \Rightarrow D^+m = D^+Dv \Rightarrow v = D^+m$$

Com a constante comunicação do robô e do controlador acerca da situação das velocidades dos motores, podemos sempre testar a inconsistência da matriz  $m$ , de modo que se as relações  $m = Dv$  e  $v = D^+m$  são válidas, então  $m = DD^+m$  também o é. Assim, para testar a consistência das velocidades, basta testar a validade da seguinte expressão:

$$m = DD^+m \Rightarrow (I - DD^+)m = 0$$

Temos que:

$$(I - DD^+) = \begin{pmatrix} 0,2000 & -0,2000 & 0,2449 & -0,2449 \\ -0,2000 & 0,2000 & -0,2449 & 0,2449 \\ 0,2449 & -0,2449 & 0,3000 & -0,3000 \\ -0,2449 & 0,2449 & -0,3000 & 0,3000 \end{pmatrix}$$

Se  $m$  for consistente, a igualdade ocorrerá. Caso não ocorra, podemos afirmar com certeza que pelo menos uma roda está com velocidade inconsistente e, portanto, deslizando. Existe, porém, a possibilidade de que múltiplas rodas também estejam deslizando em uma taxa que faça com que a relação permaneça válida, no entanto, isto é extremamente improvável.

Para  $\alpha = \pi/6$  e  $\beta = \pi/4$ , teremos a seguinte relação:

$$0,2(v_1 - v_2) = 0,2449(v_4 - v_3)$$

Logo, se essa relação **não** for válida, teremos identificado que há deslizamento no movimento do robô.

### 3.2 Item 2

Se detectarmos que  $m$  não é consistente, então temos que uma ou mais rodas estão desperdiçando energia ao rodar em falso. Para entendermos esse desperdício de energia precisamos identificar como funciona o vetor aceleração do robô, dado por:  $a = C_\alpha f$ .

$$C_{alpha} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ \cos \frac{\pi}{6} & -\cos \frac{\pi}{6} & -\cos \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

Partindo desse ponto, é fácil notar que existem combinações de forças dos motores que geram uma aceleração nula:  $a = 0$ . Temos como exemplo o vetor:  $f_o = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -1, 1\right)$ . Em outras palavras, o vetor  $f_o$  pertence ao núcleo de  $C_\alpha$ .

Essa interessante observação nos permite expandir o raciocínio para resolver o problema de desperdício de energia. Note que se um vetor  $g$  pertence ao núcleo de  $C_\alpha$ , então qualquer combinação de vetores  $f$  que inclua  $g$  produz a mesma aceleração que  $f - g$ , pois:

$$a = C_\alpha(f) = C_\alpha(f - g) + C_\alpha(g) = C_\alpha(f - g)$$



Como calculado anteriormente na seção 3.1,  $\dim(C_{\alpha}) = 3$ , daí, aplicando o teorema do posto-nulidade para  $C_{\alpha}$ , temos:

$$\text{Rank}(C_{\alpha}) + \text{Ker}(C_{\alpha}) = \text{Dim}(\text{coluna})$$

Daí tiramos que  $\text{Ker}(C_{\alpha}) = 1$ , e portanto qualquer vetor no núcleo de  $C_{\alpha}$  é da forma  $\lambda f_k$ .

O fato interessante de se notar é que primeiro, testamos as validades das velocidades através da equação:  $(I - DD^+)m = 0$  e agora, concluimos que qualquer vetor no núcleo de  $C_{\alpha}$  gera uma aceleração nula no robô. Podemos estreitar ainda mais essa relação, se usarmos o conceito de operador de projeção ortogonal:

As matrizes  $DD^+eD^+D$  são operadores de projeção ortogonal,  $P$ , ou seja, são hermitianos ( $P = P^*$ ), por definição, e são idempotentes ( $P^2 = P$ ). Daí, as seguintes propriedades se seguem:

$DD^+$  é o operador de projeção ortogonal na  $\text{Im}(D)$ , e por consequência,  $I - DD^+$  é o operador de projeção ortogonal em  $\text{ker}(D^*)$ . Se analisarmos as matrizes  $C_{\alpha}$  e  $D$ , podemos notar que  $C_{\alpha} = (1/\alpha M)(D^T)$ , como nossas matrizes estão no corpo dos  $\mathbb{R}$ , sabemos que  $D^T = D^*$ , então podemos ver que  $C_{\alpha}$  é a matriz adjunta de  $D$  multiplicada por uma constante!

Então, concluimos que a transformação  $(I - DD^+)$  projeta  $m$  no  $\text{ker}(D^*)$ . Além disso, sabemos que  $m$  é consistente se  $(I - DD^+)m = 0$ . Por tanto, chegamos que  $m$  é consistente se é ortogonal ao vetor que compõem a base do  $\text{ker}(C_{\alpha})$ .

### 3.3 Correção do deslizamento

Do que foi mostrado anteriormente, concluimos também que as velocidades dos motores são inconsistentes se existe uma projeção de  $m$  na direção do vetor  $f_o$ , que é base do espaço nulo de  $C_{\alpha}$ . Por tanto, para corrigir o deslizamento, nós calcularemos a projeção de  $m$  na direção do vetor unitário na direção de  $f_o$  e subtrairemos essa projeção de  $m$ .

Podemos visualizar a correção de deslizamento da seguinte maneira: o espaço vetorial de  $m$  tem dimensão = 4. nesse espaço, existe um subespaço tridimensional (um hyperplano tridimensional) de valores consistentes, ou seja, que não deslizam. Ortogonalmente à esse subespaço, possuímos o vetor  $f_k$ . Sempre que as rodas estão deslizando, estamos gastando energia, pois o vetor das velocidades contém uma componente na direção  $f_k$ .

$$m_{\text{corrigido}} = m - (m \cdot f_o)f_o$$

Daí, a nossa correção para velocidades inconsistentes gera, consequentemente, uma economia de energia para o sistema do robô.

Além disso, quando mapeamos as acelerações Euclidianas  $a$  com as forças dos motores  $f$ , sempre obtemos resultados consistentes, através da expressão:

$$f = C_{\alpha}^+ a$$

Veja que  $\text{rank}(C_\alpha) = 3$ , então pelo teorema do posto-nulidade temos que:  $\ker(C_\alpha) = 0$ .  $C_\alpha$ , portanto, mapeia as acelerações  $a$  em  $f$  (subespaço de 3 dimensões). Se esse espaço possuísse algum elemento  $u$  do núcleo de  $C_\alpha$ , então deveria existir uma aceleração  $a$ , diferente de 0, tal que  $u = C_\alpha^+ a$ . Como vimos anteriormente que  $c_\alpha u = a = 0$ , chegaríamos a um absurdo.