Álgebra Linear na Construção da Arquitetura de Controle de Robôs Autônomos com Rodas Omnidirecionais

Alexandre Pereira de Freitas
Lucas Rafael de Aguiar Silva
Samuel Morais Barros
Sérgio Reinier Sousa Macário
Vinícius de Freitas Lima Moraes

08/11/2019

Sumário

1 Introdução

1.1 Constituição dos robôs com rodas omnidirecionais

Robôs com movimentação omnidirecional são máquinas capazes de se locomover em todas as direções e ângulos sem a necessidade de rotacionar o seu corpo antes de executar a translação. As peças especiais que permitem isso são as omnirodas, rodas constituídas por várias rodas menores perpendiculares em relação ao plano da roda maior encaixadas ao longo de sua periféria, conforme a figura 1 a seguir:

Figure 1: Omniroda

O princípio de funcionamento dos robôs com omnirodas constitui-se do fato de que, enquanto a roda principal provê tração na direção normal ao eixo do motor, as rodas menores que constituem a roda principal permitem o deslizamento sem atrito (para um estudo ideal) na direção do eixo do motor.

Figure 2: Robô com rodas omnidirecionais

Em geral, utiliza-se três ou quatro rodas omnidirecionais na fabricação de um robô, conforme a figura 2. A composição da tração de cada uma das rodas possibilita a translação e a rotação do robô. O ideal seria utilizar duas rodas omnidirecionais ortogonais, de tal forma que somente a translação fosse permitida, minimizando a complexidade do movimento. Porém, por questões espaciais e de estabilidade, esse arranjo é impossível. Nesse ínterim, o ideal das rodas omnidirecionais constitui da busca pela situação na qual as n rodas empregadas em um robô possibilitam a obtenção da maior velocidade pelo robô com a maior eficiência energética no sentido desejado.

1.2 Fundamentos Físicos

Para a compreensão do movimento, é necessário analisar tanto a translação quanto a rotação do sistema de acordo com a geometria do robô. Para isso, pode-se modelar o robô dotado de n rodas, tal que:

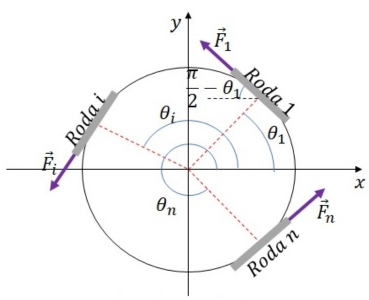

Figure 3: Arranjo de n rodas e as aplicadas forças correspondente

Para a translação, pode-se aplicar a 2º lei de Newton com relação ao centro do robô:

$$\vec{F}_{resultante} = M\vec{a}_{resultante}$$

$$\vec{a} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

Observa-se, por decomposição vetorial, que:

$$a_x = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}F_i\sin\theta_i \text{ (I)}$$

$$a_y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}F_i\cos\theta_i \text{ (II)}$$

Para a rotação, deve-se analisar o torque resultante:

$$\tau_{resultante} = I\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{R}{I}\sum_{i=1}^{n}F_i \text{ (III)}$$

O momento de inércia de uma distribuição de massa qualquer pode ser representado por:

$$I = \alpha M R^2 \text{ , com } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Desse modo, pode-se simplificar as equações (I), (II) e (III) pela seguinte identidade matricial:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ R\dot{\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 & -\sin\theta_2 & \cdots & -\sin\theta_n \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cdots & \cos\theta_n \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \cdots & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad \text{(IV)}$$

Denomina-se a matrix $3 \times n$ da equação acima de matriz de acoplamento de forças, e representa-se por C_α.
Pode-se obter a velocidade final de cada roda bem como a velocidade linear e angular do robô integrando a equação matricial (IV). Porém, é mais interessante analisar a situação em que o robô se apresenta em um espaço Euclidiano, obter a trajetória e, a partir daí, derivar a velocidade de cada roda individualmente. Agrupando as velocidades individuais proporcionadas por cada motor na matriz $m = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^T$ e as velocidades euclidianas e a velocidade de rotação do robô na matriz $v = \begin{pmatrix} v_x & v_y & R\omega \end{pmatrix}^T$, nota-se que o movimento das rodas se decompõem em componentes translacionais e rotacionais, segundo a geometria do robô. Nesse panorama, a seguinte equação representa a relação entre a velocidade dos motores individualmente e a velocidades resultantes no robô.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ R\omega \end{pmatrix}$$

A matriz envolvida no produto matricial acima, bastante semelhante à matriz C_α, é chamada matriz de acoplamento de velocidade, e será denotada por D. Assim, sendo a aceleração do robô representada pelo vetor $a = \begin{pmatrix} a_x & a_y & R\dot{\omega} \end{pmatrix}^T$ e a magnitude (módulo) das forças representada por $f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix}^T$, podem ser constituídas as seguintes igualdades:

$$a = C_\alpha f$$

$$m = Dv$$

Integrando em função de um intervalo de tempo Δt, obtém-se que $\Delta v = \Delta t \times a$. Assim,

$$\Delta m = \Delta t \times D C_\alpha f$$

Os motores possuem um mecanismo que permite a medição da velocidade das rodas em tempo real. Com o fim de controlar o robô, é necessário conhecer o comportamento da matriz v, isto é, é necessário construir uma transformação linear que mapeie os elementos do subespaço gerado pela matriz m nos elementos do subespaço gerado pela matriz v. Para tal, é necessário inverter a matriz m=Dv. Em geral, isso não é possível por a matriz D não ser quadrada e, portanto, não ser invertível. Porém, pode-se utilizar uma matriz pseudo-inversa pela esquerda, denominada D^+, tal que $D^+D = I_n$. Nota-se, ainda, que DD^+ não representa um produto matricial. Nesse ínterim,

$$D^+m = (D^+D)v = Iv$$

$$v = D^+m$$

2 Enunciado do problema

2.1 Deslizamento de Rodas

Considere um robô simétrico, com $m = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}^T$ indicando a velocidade tangencial dos motores, D a matriz de velocidades, e v um vetor tridimensional $\begin{pmatrix} v_x & v_y & R\omega \end{pmatrix}^T$. Dado isso, teste a inconsistência da velocidade dos motores e, consequentemente, se há rodas deslizando.

2.2 Economia de Energia

Considerando o resultado do problema anterior, ou seja, caso seja detectado inconsistência com os motores e alguma das rodas esteja deslizando. É possível corrigir rapidamente esse problema sem alterar a configuração física do robô (número de motores, número de rodas etc.)? Se sim proponha uma solução adequada.

3 Resolução do problema

3.1 Item 1

Consideremos o robô da figura, no qual os ângulos das rodas superiores são α e os da inferiores são β, o vetor $m = \left(v_1, v2, v3, v4\right)^T$ representa as velocidades tangenciais dos motores e o vetor $v = \left(v_x, v_y, Rw\right)^T$ a velocidade total do robô (translacional e rotacional).
Para procurarmos inconsistências nas velocidades dos motores (que indicam deslizamento nas rodas), partiremos da relação inicial dada por:

$$m = Dv$$

Como é possível notar, a matriz D não é quadrada, ela não possuui inversa, então não podemos, inicialmente, isolar o vetor "v", no entanto, podemos achar uma matriz equivalente, chamada de Matriz Pseudoinversa (D^+), que usaremos com intuito de isolar o vetor das velocidades Euclidianas.

Definição Pseudo-inversa (Moore-Penrose)

De acordo com a definição pseudo-inversa de Moore-Penrose, vemos que se D tem seu espaço coluna LI, podemos calcular a sua inversa da seguinte maneira:

$D^+ = (D^*D)^{-1}D^*$

Demonstração da propriedade:

Daí usando a expressão anterior e multiplicando por D pela direita, temos:

$D^+D = (D^*D)^{-1}(D^*D) = I => (D^+$ é a inversa a esquerda de D)

Aplicando a pseudo-inversa na equação inicial, obtemos: $m = Dv => D^+m = D^+Dv => v = D^+m$

Com a constante comunicação do robô e do controlador acerca da situação das velocidades dos motores, podemos sempre testar a inconsistência da matriz m, de modo que se as relações $m = Dv$ e $v = D^+m$ são válidas, então $m = DD^+m$ também o é. Para testar a consistência das velocidades, basta testar a validade da última expressão.

Caso essa igualdade não ocorra, podemos afirmar com certeza que alguma roda está com velocidade inconsistente e portanto, deslizando. Contudo, existe a possibilidade de que múltiplas rodas também estejam deslizando em uma taxa que faça com que a relação permaneça válida, no entando, isto é extremamente improvável.

Assim, vamos trabalhar testando a validade da expressão:

$m = DD^+m => (I - DD^+m) = 0$

Para $\alpha = \pi/6$ e $\beta = \pi/4$, teremos a seguinte relação:

$(v1 - v2) = (v3 - v4)(sqrt2/3)$

Logo, se essa relação **não** for válida, alguma das rodas não está rodando da maneira correta.

3.2 Item 2

Para identificarmos uma possível perda ou desperdício de energia precisamos identificar como funciona o vetor aceleração do robô, dado por: $a = C_\alpha f_k$ Partindo desse ponto, é fácil notar que existem combinações de forças dos motores que geram uma aceleração nula: $a = 0$, como o vetor: $f_o = \big(1, -1, 1, -1\big)$. Em outras palavras, o vetor f_o pertence ao núcleo de C_α.

Essa interessante observação nos permite expandir o raciocínio para resolver o problema de desperdício de energia. Note que se um vetor g pertence ao núcleo de C_α, então qualquer combinação de vetores f que inclua g produz a mesma aceleração que $f - g$, pois:

$a = C_\alpha(f) = C_\alpha(f - g) + C_\alpha(g) = C_\alpha(f - g)$

Como calculado anteriormente na seção 3.1, $dim(C_{alpha}) = 3$, daí, aplicando o teorema do posto-nulidade para C_α, temos:

$Rank(C_\alpha) + Ker(C_\alpha) = Dim(coluna)$

Daí tiramos que $Ker(C_\alpha) = 1$, e portanto qualquer vetor no núcleo de C_α é da forma λf_k.
O fato interessante de se notar é que primeiro, testamos as validades das velocidades através da equação: $(I - DD^+)m = 0$ e agora, concluímos que qualquer vetor no núcleo de C_α gera uma aceleração nula no robô. Podemos estreitar ainda mais essa relação, se usarmos o conceito de operador de projeção ortogonal:

As matrizes $DD^+ e D^+ D$ são operadores de projeção ortogonal, P , ou seja, são hermitianos ($P = P^*$), por definição, e são idempotentes ($P^2 = P$). Daí, as seguintes propriedades se seguem:
DD^+ é o operador de projeção ortogonal na $Im(D)$, e por consequência, $I - DD^+$ é o operador de projeção ortogonal em $ker(A)$.

Se analisarmos as matrizes C_α e D, podemos notar que $C_\alpha = (1/\alpha M)(D^T)$, como nossas matrizes estão no corpo dos R, sabemos que $D^T = D^*$, então podemos ver que C_α é a matriz adjunta de D multiplicada por uma constante! Então, se quisermos corrigir o deslizamento de velocidades, verificando a consistência da equação $(I - DD^+)m = 0$, basta vermos que o operador $(I - DD^+)$ projeta m no $ker(D^*)$, logo a relação que queremos manter válida é que m seja **ortogonal** ao vetor que compõem a base do $ker(C_\alpha)$.

3.3 Correção

Podemos visualizar a correção de deslizamento, identificando o espaço vetorial da transformação $(I - DD^+)$. Nesse espaço, de dimensão $= 4$, existe um subespaço tridimensional de valores consistentes, ou seja, que não deslizam. Ortogonalmente à esse subespaço, possuímos o vetor f_k, sempre que as rodas estão deslizando, estamos gastando energia, pois o vetor das velocidades contém uma componente na direção f_k. Daí, a nossa correção para velocidades inconsistentes gera, consequentemente, uma economia de energia para o sistema do robô.

Além disso, quando mapeamos as acelerações Euclidianas a com as forças dos motores f, sempre obtemos resultados consistentes, através da expressaõ:
$f = C_\alpha^+ a$
Veja que $rank(C_\alpha) = 3$, então pelo teorema do posto-nulidade temos que: $ker(C_\alpha) = 0$. C_α, portanto, mapeia as acelerações a em f (subespaço de 3 dimensões). Se esse espaço possuísse algum elemento u do núcleo de C_α, então deveria existir uma aceleração a, diferente de 0, tal que $u = C_\alpha^+ a$. Como vimos anteriormente que $c_\alpha u = a = 0$, chegaríamos a um absurdo.

4 Conclusão