

Òptica

Pràctica 6. Difracció de Fraunhofer

Marc Ballesteró Ribó - Grup D2

10 de gener de 2021

Resum

1 Perfils d'intensitat i figures de difracció

En aquesta secció s'estudien les diferents figures de difracció obtingudes per a cada tipus d'obertura, tot calculant els seus paràmetres geomètrics a partir dels perfils d'intensitats obtinguts i els ajustos corresponents.

1.1 Obertura rectangular

Un objecte de difracció consistent en una petita obertura rectangular de dimensions $L_x \times L_y$ es pot modelar mitjançant la *funció rectangle bidimensional*, $f(x, y) = \text{rect}(x/L_x, y/L_y)$, que té transmitància 1 per $(x, y) \in (-L_x/2, L_x/2) \times (-L_y/2, L_y/2)$ i 0 altrament. Així, la distribució d'intensitats de la difracció de Fraunhofer de l'objecte queda¹

$$I(x, y) \propto \left[\text{sinc} \left(\frac{L_x x}{\lambda f'} \right) \text{sinc} \left(\frac{L_y y}{\lambda f'} \right) \right]^2 \quad (1)$$

on λ és la longitud d'ona de la font que es propaga per l'escletxa i f' la focal de la lent de Fourier L_2 .

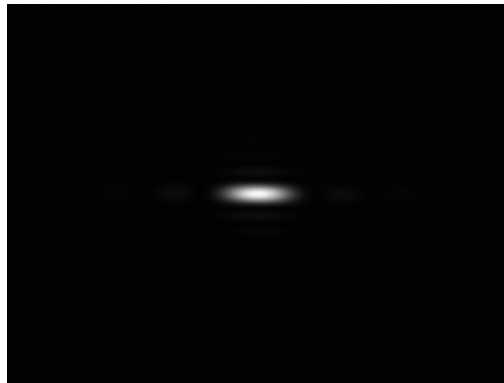


FIGURA 1: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a l'obertura rectangular.

Els perfils d'intensitats en cada eix $I(x) := I(x, 0)$ i $I(y) := I(0, y)$ obtinguts mitjançant l'anàlisi de les dades volcades pel sensor CCD es representen en la figura 2, així com les funcions ajustades

¹Definim la funció *sinus quocient* $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\text{sinc } x := \sin(\pi x) / (\pi x)$, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\text{sinc } 0 := 1$, per $x = 0$.

per superposició amb la gràfica experimental, donades per

$$\begin{aligned} I(x) &= h_x [\text{sinc}(\Lambda_x(x - \Delta x)) \cos(T_x x)]^2 \\ I(y) &= h_y [\text{sinc}(\Lambda_y(y - \Delta y)) \cos(T_y y)]^2 \end{aligned} \quad (2)$$

que depenen dels paràmetres ajustats manualment sobre la corba empírica h_x, h_y , anomenats *alçada*, Λ_x, Λ_y , als quals es farà referència per *amplada* i $\Delta x, \Delta y$, que es designen per *desplaçament*.

Tenint en compte que, per al sensor CCD usat, $1 \text{ px} = 6 \mu\text{m}$, per a l'obertura rectangular s'han obtingut els paràmetres que es detallen en la taula 1. S'ha considerat que la seva incertesa està en l'última xifra decimal donada pel *software* de recollida de dades.

| | | | | | |
|-------------|---------------------|--------------------|-------------|---------------------|-------------------|
| h_x | (u.a.) | 255 ± 1 | h_y | (u.a.) | 255 ± 1 |
| Λ_x | (mm ⁻¹) | 2.317 ± 0.017 | Λ_y | (mm ⁻¹) | 8.117 ± 0.017 |
| Δx | (mm) | -0.024 ± 0.006 | Δy | (mm) | 0.000 ± 0.006 |
| T_x | (mm ⁻¹) | 0.000 ± 0.017 | T_y | (mm ⁻¹) | 0.000 ± 0.017 |

TAULA 1: Paràmetres de l'ajust per a l'obertura rectangular.

Així, comparant (1) amb (2), es poden obtenir les dimensions de l'escletxa a partir dels paràmetres de l'ajust segons

$$\begin{aligned} L_x &= \Lambda_x \lambda f' \\ L_y &= \Lambda_y \lambda f' \end{aligned} \quad (3)$$

, amb la qual cosa s'obté que $L_x = (0.527 \pm 0.004) \text{ mm}$ i $L_y = (1.846 \pm 0.004) \text{ mm}$.

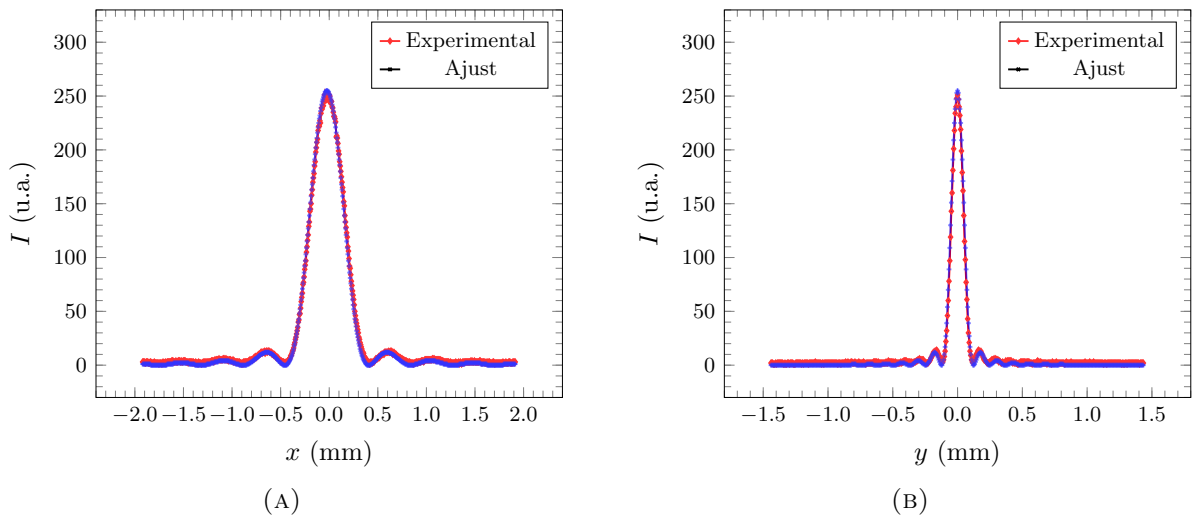


FIGURA 2: (A) Intensitats detectada i ajustada en funció de la posició sobre l'eix horitzontal central X i (B) sobre l'eix vertical central Y del sensor CCD, per a l'obertura rectangular.

1.2 Obertura circular

En aquest cas, el feix de llum làser es propaga a través d'una obertura circular de radi R , que en coordenades polars es pot modelitzar per $f(r) = \text{circ}(r/R)$, funció de transmissió 1 per $r \in (0, R)$ i 0 altrament. Així doncs, el seu perfil de difracció ve donat per

$$I(r) \propto \left[\frac{2J_1(\pi\beta)}{\pi\beta} \right]^2, \quad \beta := \frac{2Rr}{\lambda f'} \quad (4)$$

on J_1 és la funció de Bessel de primera espècie i ordre 1.

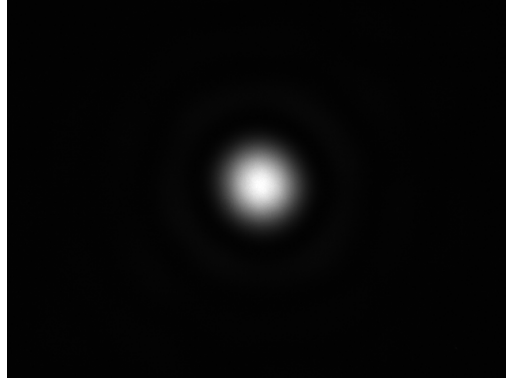


FIGURA 3: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a l'obertura circular.

Mitjançant l'ajust adient del perfil d'intensitats, realitzat amb el *software* de recollida de dades i representat en la figura 4, s'obtenen els paràmetres de la taula 2. En aquest cas, observem que Λ_x i Λ_y són compatibles dins el seu marge d'incertesa, fet coherent amb la simetria radial de l'obertura circular.

| | | | | | |
|-------------|---------------------|-------------------|-------------|---------------------|--------------------|
| h_x | (u.a.) | 255 ± 1 | h_y | (u.a.) | 255 ± 1 |
| Λ_x | (mm ⁻¹) | 2.450 ± 0.017 | Λ_y | (mm ⁻¹) | 2.433 ± 0.017 |
| Δx | (mm) | 0.000 ± 0.006 | Δy | (mm) | -0.030 ± 0.006 |
| T_x | (mm ⁻¹) | 0.000 ± 0.017 | T_y | (mm ⁻¹) | 0.000 ± 0.017 |

TAULA 2: Paràmetres de l'ajust per a l'obertura circular.

Finalment, el radi de l'obertura es pot obtenir a partir de cadascuna de les amplades de manera independent, segons

$$R = \frac{\Lambda_x \lambda f'}{2} \quad (5)$$

$$R = \frac{\Lambda_y \lambda f'}{2} \quad (6)$$

Si denotem R_x i R_y els valors calculats per (5) i (6), respectivament; obtenim que $R_x = (0.2787 \pm 0.0019)$ mm i $R_y = (0.2767 \pm 0.0019)$ mm, que són clarament compatibles. S'estima, doncs, el radi de l'escletxa com la mitjana aritmètica d'aquests valors junt amb la corresponent incertesa propagada, d'on $R = (0.2777 \pm 0.0013)$ mm.

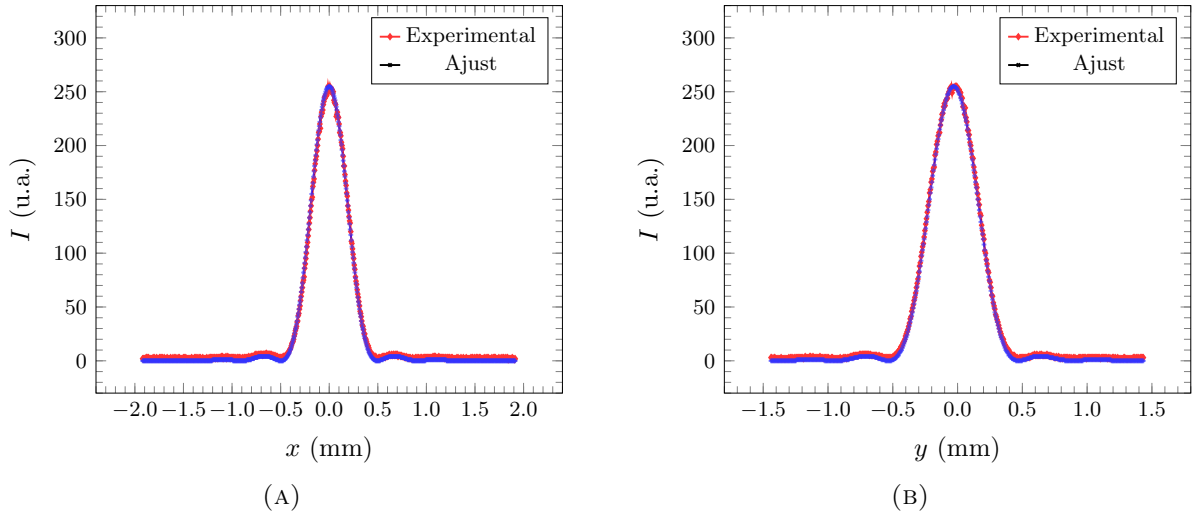


FIGURA 4: (A) Intensitats detectada i ajustada en funció de la posició sobre l'eix horitzontal central X i (B) sobre l'eix vertical central Y del sensor CCD, per a l'obertura circular.

1.3 Doble obertura rectangular

Si el feix de llum es propaga a través de dues obertures rectangulars paral·leles amb els seus centres separats una distància D en la direcció de l'eix X , la distribució d'intensitats de la difracció de Fraunhofer en el pla d'observació ve donada per

$$I(x, y) \propto \left[\text{sinc}\left(\frac{L_x x}{\lambda f'}\right) \text{sinc}\left(\frac{L_y y}{\lambda f'}\right) \cos\left(\frac{\pi D}{\lambda f'} x\right) \right]^2 \quad (7)$$

és a dir, el perfil (1) modulat pel cosinus al quadrat d'una quantitat proporcional a la separació entre els rectangles i la posició en X . Notem que aquest terme s'atribueix a l'aparició de franjes en el pla d'observació, fàcilment relacionables amb les interferències de Young.

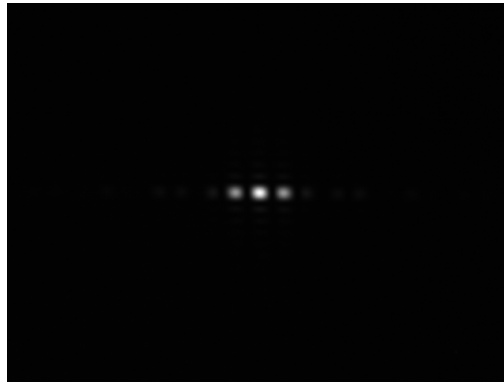


FIGURA 5: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a la doble obertura rectangular. S'observa l'aparició de franjes d'interferències de Young.

Ajustant el perfil d'intensitats, representat a la figura 6, amb el *software* d'anàlisi de dades, s'obtenen els paràmetres de la taula 3.

| | | | | | |
|-------------|---------------------|-------------------|-------------|---------------------|--------------------|
| h_x | (u.a.) | 255 ± 1 | h_y | (u.a.) | 255 ± 1 |
| Λ_x | (mm ⁻¹) | 1.967 ± 0.017 | Λ_y | (mm ⁻¹) | 11.117 ± 0.017 |
| Δx | (mm) | 0.000 ± 0.006 | Δy | (mm) | 0.000 ± 0.006 |
| T_x | (mm ⁻¹) | 5.017 ± 0.017 | T_y | (mm ⁻¹) | 0.000 ± 0.017 |

TAULA 3: Paràmetres de l'ajust per a la doble obertura rectangular.

Notem que el període T_x és no nul. Així doncs, tenint en compte (2), les dimensions de les esclatxes venen donades per (3), mentres que la seva separació es calcula segons

$$D = \frac{1}{\pi} T_x \lambda f' \quad (8)$$

En conseqüència, s'obté que $L_x = (0.447 \pm 0.004)$ mm, $L_y = (2.529 \pm 0.004)$ mm i la distància de separació és $D = (0.3549 \pm 0.0012)$ mm.

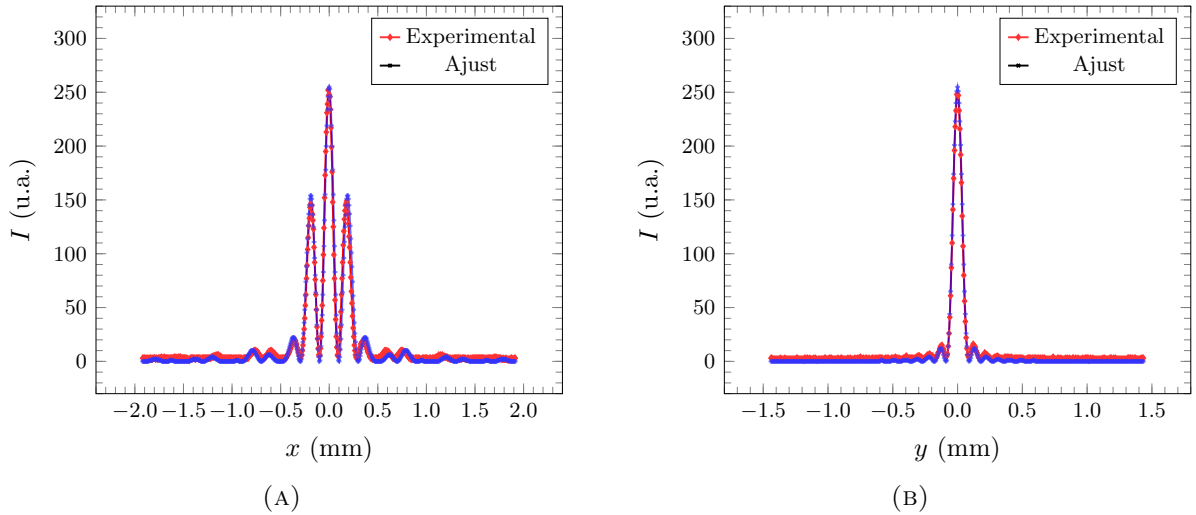


FIGURA 6: (A) Intensitats detectada i ajustada en funció de la posició sobre l'eix horitzontal central X i (B) sobre l'eix vertical central Y del sensor CCD, per a la doble obertura rectangular.

1.4 Doble obertura circular

Finalment, s'analitza el compartament de la llum quan es propaga a través de dues obertures circulars de radi R separades una distància D en l'eix X . De manera anàloga al cas anterior, es té que

$$I(r) \propto \left[\frac{2J_1(\pi\beta)}{\pi\beta} \cos\left(\frac{\pi D}{\lambda f'} x\right) \right]^2, \quad \beta := \frac{2Rr}{\lambda f'} \quad (9)$$

és a dir, el producte del perfil d'intensitats (4) d'un sol cercle modulats pel terme cosinus quadrat relacionat amb les interferències de Young.

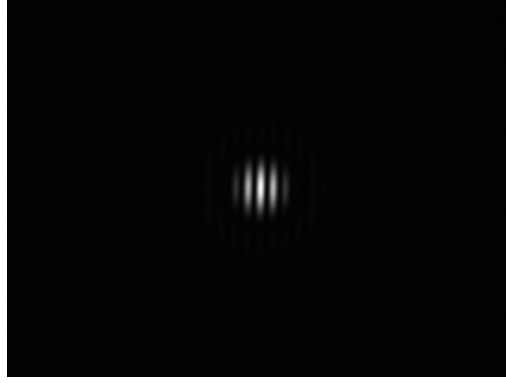


FIGURA 7: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a la doble obertura circular.

Si s'ajusta el perfil d'intensitats, que es representa gràficament a la figura ??, s'obtenen els paràmetres de la taula 4.

| | | | | | |
|-------------|---------------------|--------------------|-------------|---------------------|-------------------|
| h_x | (u.a.) | 255 ± 1 | h_y | (u.a.) | 255 ± 1 |
| Λ_x | (mm ⁻¹) | 3.367 ± 0.017 | Λ_y | (mm ⁻¹) | 3.367 ± 0.017 |
| Δx | (mm) | 0.000 ± 0.006 | Δy | (mm) | |
| T_x | (mm ⁻¹) | 10.150 ± 0.017 | T_y | (mm ⁻¹) | 0.000 ± 0.017 |

TAULA 4: Paràmetres de l'ajust per a la doble obertura circular.

Notem que, d'una banda, el període T_x no és nul, i de l'altra, les amplades en x i y coincideixen, tal com s'espera donada la simetria radial del cercle.

A partir de (9), tenim que el radi dels cercles vindrà donat per (5) i (6), d'on s'obté que $R_x = (0.3830 \pm 0.0019)$ mm i $R_y = (0.3830 \pm 0.0019)$ mm, amb la qual cosa s'estima que el radi de les obetures és la mitjana $R = (0.3830 \pm 0.0013)$ mm. La distància de separació entre les obertures s'obté aplicant (8), d'on $D = (0.7181 \pm 0.0012)$ mm.

A Fórmules estadístiques

A.1 Paràmetres centrals i de dispersió

Donada una mostra de N elements $\{x_1, \dots, x_N\}$, definim els següents paràmetres estadístics.

- Mitjana aritmètica

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{A.1})$$

- Desviació estàndard²

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (\text{A.2})$$

- Error estàndard

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Estimacions lineals

Per al càlcul de les estimacions lineals s'usa la funció `ESTIMACION.LINEAL` del full de càlcul `Microsoft Excel`, que proporciona el pendent i l'ordenada a l'origen de la recta de regressió amb les seves corresponents incerteses, així com el coeficient de correlació R^2 i l'error estàndard de la regressió.

A.3 Test χ^2

Donat un ajust lineal $y = Ax + B$, amb incertesa en la variable dependent δy i error estàndard de la regressió δy_{reg} , es defineix el *coeficient* χ^2 com

$$\chi^2 = \nu \left(\frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \right) \quad (\text{A.4})$$

on ν es el nombre de graus de llibertat de l'ajust. Amb això, podem definir el *coeficient reduït* χ_ν^2 com

$$\chi_\nu^2 = \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \quad (\text{A.5})$$

El valor d'aquest paràmetre ens indica la bondat de l'ajust realitzat. Tenim que

- (a) si $\delta y_{\text{reg}} \ll \delta y$ o $\chi_\nu^2 \ll 1$, l'ajust és acceptable i probablement s'hagi sobreestimat δy ;
- (b) si $\delta y_{\text{reg}} \lesssim \delta y$ o $\chi_\nu^2 \lesssim 1$, l'ajust és acceptable; i
- (c) si $\delta y_{\text{reg}} \gg \delta y$ o $\chi_\nu^2 \gg 1$ l'ajust no és acceptable.

²S'ha fet servir la correcció de Bessel $\sqrt{N/(N-1)}$ de la desviació estàndard poblacional.