

# Òptica

## Pràctica 3. Reflexió de la llum en medis dielèctrics

Marc Ballester Ribó - Grup D2

1 de desembre de 2020

### 1 Determinació visual de l'angle de Brewster

Considerem un feix de llum natural monocromàtica que incideix sobre la superfície d'un medi dielèctric d'índex de refracció  $n_t$ , provinent d'un medi d'índex  $n_i$ , formant un angle  $\theta_i$  amb la direcció normal. La llei de la reflexió ens determina que l'angle que forma el raig reflectit amb la normal és  $\theta_r = \theta_i$  i la llei d'Snell ens dóna el valor de l'angle de deflexió del raig transmès, segons  $\sin \theta_r = (n_i/n_t) \sin \theta_i$ .

Segons les *fórmules de Fresnel*, per a un material dielèctric, les amplituds incidents i reflectides del camp elèctric es relacionen segons

$$\frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad \frac{E_{\parallel}^r}{E_{\parallel}} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad (1)$$

on el subíndex  $\perp$  fa referència a la component perpendicular al pla d'incidència i  $\parallel$  a la paral·lela a l'esmentat pla.

Quan l'angle d'incidència és tal que  $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ , és senzill comprovar que s'anul·la la component  $E_{\parallel}^r$ , és a dir, la llum reflectida queda polaritzada linealment en la direcció perpendicular al pla d'incidència. Aquest angle s'anomena *angle de Brewster* i es denota  $\theta_{iB}$ , i es pot comprovar que satisfà

$$\tan \theta_{iB} = \frac{n_t}{n_i}. \quad (2)$$

L'objectiu d'aquesta secció és determinar l'angle de Brewster d'una làmina dielèctrica de vidre per tempteig visual. El sistema experimental consta d'una làmpada de sodi que dóna una llum que, en molt bona aproximació, es pot considerar monocromàtica de longitud 589 nm, un col·limador que projecta rajos paral·lels sobre la mostra de material dielèctric, i un telescopi per a l'observació del feix reflectit, tot muntat sobre un goniòmetre. Tant sobre el col·limador com sobre el telescopi s'hi

poden acoblar polaritzadors lineals. Anomenarem *analitzador* al polaritzador muntat sobre l'objectiu del telescopi.

Procedint per tempteig, trobem l'angle d'incidència pel qual el feix de llum reflectit s'anul·la totalment per a una determinada posició de l'analitzador sobre el telescopi. En aquesta situació, podem assegurar que l'angle d'incidència és l'angle de Brewster, i que l'eix de l'analitzador és paral·lel al pla d'incidència, la qual cosa ens permet determinar el zero d'aquest polaritzador.

Podem estimar doncs, mitjançant el goniòmetre, que l'angle de Brewster de la mostra és  $\theta_{iB} = 56^{\circ}45' \pm 0^{\circ}1'$ .

Fent servir (2), i tenint en compte que l'índex de refracció de l'aire és  $n_i \approx 1.000$ , podem calcular l'índex de refracció de la mostra segons

$$n_t = n_i \tan \theta_{iB}$$

d'on s'obté el valor  $n_t = 1.5253 \pm 0.0009$ , que pertany al rang d'índexs que presenta el vidre.

### 2 Mesura de l'angle de Brewster mitjançant la polarització

Havent determinat el zero de l'analitzador a la secció 1, podem obtenir un feix de llum monocromàtica polaritzada  $45^{\circ}$  respecte el pla d'incidència, acoblant el polaritzador a la sortida del col·limador.

Amb aquesta configuració, s'han realitzat mesures de l'angle  $\alpha$  de l'eix de l'analitzador pel qual s'asoleix l'anul·lació de la llum, en funció de l'angle d'incidència del feix sobre la mostra. Amb això, s'han construït les dades de la taula 1.

$\theta_i \pm 0.1$ (°)	$\alpha \pm 0.1$ (°)	$ \tan(\alpha/^\circ)  \pm 0.002$
35.0	28.9	0.552
40.0	22.5	0.414
45.0	18.3	0.331
50.0	8.9	0.157
52.0	6.1	0.107
54.0	3.4	0.059
56.0	-0.2	0.003
58.0	-0.6	0.010
60.0	-5.1	0.089
62.0	-7.0	0.123
65.0	-11.9	0.211
68.0	-17.5	0.315

TAULA 1: Dades experimentals i paràmetres calculats a partir d'aquestes.

Així doncs, s'han representat els punts experimentals  $|\tan(\alpha/^\circ)|$  en funció de l'angle d'incidència en la figura 1. A més a més, s'ha realitzat l'ajust lineal<sup>1</sup>  $\tan(\alpha/^\circ)(\theta_i)$ , els paràmetres del qual es detallen en la taula 2.

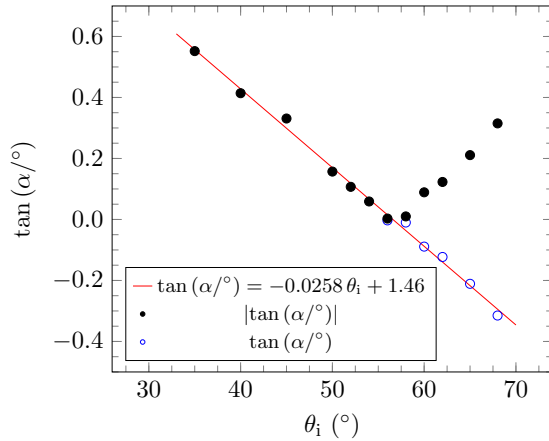


FIGURA 1: Tangent de l'angle de l'eix del polaritzador en funció de l'angle d'incidència, amb el corresponent ajust lineal.

Tenint en compte que quan l'angle d'incidència és l'angle de Brewster, l'angle de l'eix de l'analitzador és nul, per la tria d'orígens realitzada en la secció 1, podem calcular l'angle de Brewster a partir dels paràmetres de l'ajust lineal, segons

$$\theta_i = \theta_{iB} \Rightarrow \tan(\alpha/^\circ) = a\theta_i + b = 0 \Rightarrow \theta_{iB} = \frac{-b}{a}$$

d'on s'obté que  $\theta_{iB} = 56^\circ 36' \pm 1^\circ 48'$ .

Així mateix, s'ha calculat l'índex de refracció del medi dielèctric a partir d'aquest valor, seguint un procediment anàleg al que es

<sup>1</sup>Per a l'ajust, s'ha obviat el valor absolut i s'ha tingut en compte el signe que pren la tangent en funció de l'angle d'incidència.

detalla en la secció 1, obtenint ara que  $n_t = 1.52 \pm 0.10$ .

Notem que tant el valor de l'angle de Brewster com el de l'índex de refracció són compatibles amb els obtinguts en la secció 1.

$a$ (1/°)	$-0.0258 \pm 0.0006$
$b$ (-)	$1.46 \pm 0.03$
$R^2$	$0.995$
$[\delta \tan(\alpha/^\circ)]_{\text{reg}} (-)$	$0.018$

TAULA 2: Paràmetres de l'ajust lineal  $\tan(\alpha/^\circ) = a\theta_i + b$ , amb les corresponents incerteses.

Finalment, tenint en compte que l'angle  $\alpha$  de l'eix de l'analitzador és el seu gir respecte el pla paral·lel al d'incidència i les fórmules (1), tenim la relació teòrica

$$|\tan \alpha| = \left| \frac{E_{||}^r}{E_{\perp}^r} \right| = \left| -\frac{\cos(\theta_i + \theta_t)}{\cos(\theta_i - \theta_t)} \right|. \quad (3)$$

Aplicant la llei de Snell als diferents angles d'incidència, i realitzant els càlculs que indica (3), s'han representat els punts de la sèrie blava de la figura 2.

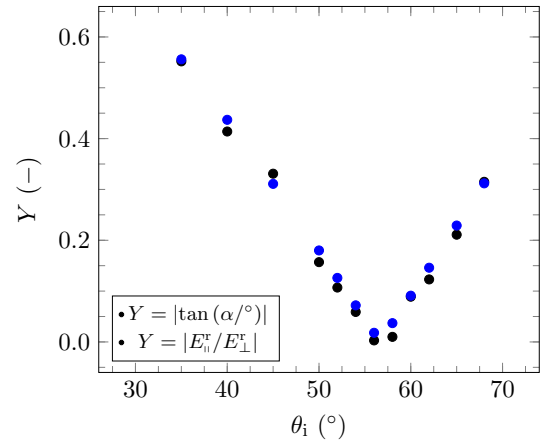


FIGURA 2: Tangent de l'angle de l'eix de l'analitzador (sèrie negra) i quocient entre les amplituds dels components del camp elèctric reflectit (sèrie blava), en funció de l'angle d'incidència.

Notem que les sèries de la gràfica de la figura 2 se superposen dins d'un marge d'incertesa acceptable, la qual cosa confirma que el model teòric (3) s'ajusta a les dades experimentals.

## A Fórmules estadístiques

### A.1 Paràmetres centrals i de dispersió

Donada una mostra de  $N$  elements  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , definim els següents paràmetres estadístics.

- Mitjana aritmètica

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{A.1})$$

- Desviació estàndard<sup>2</sup>

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (\text{A.2})$$

- Error estàndard

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Estimacions lineals

Per al càlcul de les estimacions lineals s'usa la funció `ESTIMACION.LINEAL` del full de càlcul `Microsoft Excel`, que proporciona el pendent i l'ordenada a l'origen de la recta de regressió amb les seves corresponents incerteses, així com el coeficient de correlació  $R^2$  i l'error estàndard de la regressió.

### A.3 Test $\chi^2$

Donat un ajust lineal  $y = Ax + B$ , amb incertesa en la variable dependent  $\delta y$  i error estàndard de la regressió  $\delta y_{\text{reg}}$ , es defineix el *coeficient*  $\chi^2$  com

$$\chi^2 = \nu \left( \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \right) \quad (\text{A.4})$$

on  $\nu$  es el nombre de graus de llibertat de l'ajust. Amb això, podem definir el *coeficient reduït*  $\chi_\nu^2$  com

$$\chi_\nu^2 = \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \quad (\text{A.5})$$

El valor d'aquest paràmetre ens indica la bondat de l'ajust realitzat. Tenim que

- (a) si  $\delta y_{\text{reg}} \ll \delta y$  o  $\chi_\nu^2 \ll 1$ , l'ajust és acceptable i probablement s'hagi sobreestimat  $\delta y$ ;
- (b) si  $\delta y_{\text{reg}} \lesssim \delta y$  o  $\chi_\nu^2 \lesssim 1$ , l'ajust és acceptable; i
- (c) si  $\delta y_{\text{reg}} \gg \delta y$  o  $\chi_\nu^2 \gg 1$  l'ajust no és acceptable.

---

<sup>2</sup>S'ha fet servir la correcció de Bessel  $\sqrt{N/(N-1)}$  de la desviació estàndard poblacional.