

Òptica

Pràctica 6. Difracció de Fraunhofer

Marc Ballesteró Ribó - Grup D2

10 de gener de 2021

Resum

1 Perfs d'intensitat i figures de difració

En aquesta secció s'estudien les diferents figures de difració obtingudes per a cada tipus d'obertura, tot calculant els seus paràmetres geomètrics a partir dels perfils d'intensitats obtinguts i els ajustos corresponents.

1.1 Obertura rectangular

Un objecte de difració consistent en una petita obertura rectangular de dimensions $L_x \times L_y$ es pot modelar mitjançant la *funció rectangle bidimensional*, $f(x, y) = \text{rect}(x/L_x, y/L_y)$, que té transmitància 1 per $(x, y) \in [-L_x/2, L_x/2] \times [-L_y/2, L_y/2]$ i 0 altrament. Així, la distribució d'intensitats de la difració de Fraunhofer de l'objecte queda¹

$$I(x, y) \propto \left[\text{sinc}\left(\frac{L_x x}{\lambda f'}\right) \text{sinc}\left(\frac{L_y y}{\lambda f'}\right) \right]^2 \quad (1)$$

on λ és la longitud d'ona de la font que es propaga per l'escletxa i f' la focal de la lent de Fourier L_2 .



FIGURA 1: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a l'obertura rectangular.

Els perfils d'intensitats en cada eix $I(x) := I(x, 0)$ i $I(y) := I(0, y)$ obtinguts mitjançant l'anàlisi de les dades volcades pel sensor CCD es representen en la figura 2, així com les funcions ajustades

¹Definim la funció *sinus quocient* $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\text{sinc } x := \sin(\pi x) / (\pi x)$, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\text{sinc } 0 := 1$, per $x = 0$.

per superposició amb la gràfica experimental, donades per

$$I(x) = h_x [\text{sinc}(\Lambda_x(x - \Delta x)) \cos(T_x x)]^2 \quad (2)$$

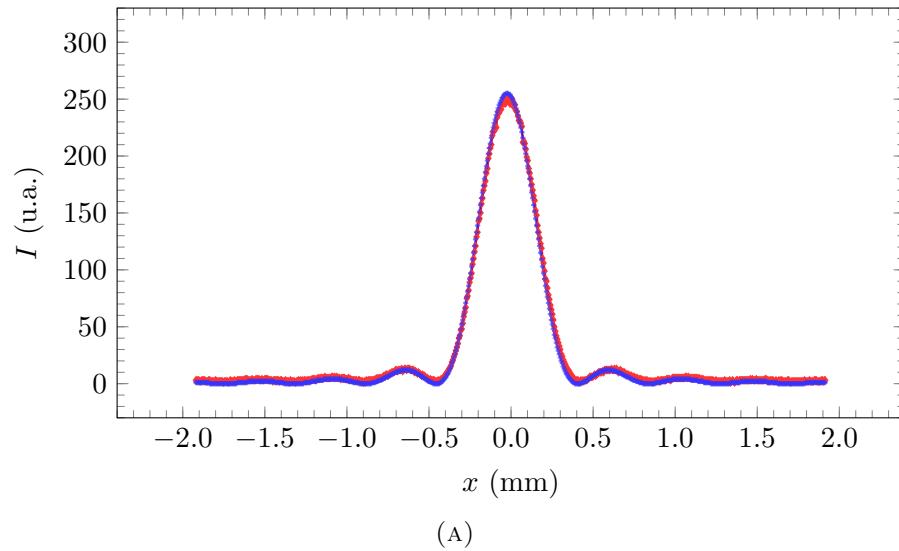
$$I(y) = h_y [\text{sinc}(\Lambda_y(y - \Delta y)) \cos(T_y y)]^2 \quad (3)$$

que depenen dels paràmetres ajustats manualment sobre la corba empírica h_x, h_y , anomenats *alçada*, Λ_x, Λ_y , als quals es farà referència per *amplada* i $\Delta x, \Delta y$, que es designen per *desplaçament*.

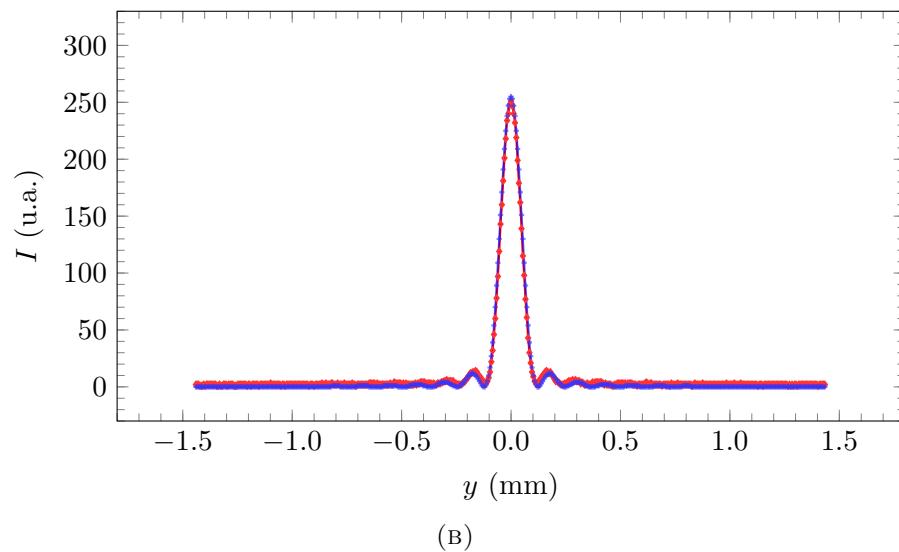
Tenint en compte que, per al sensor CCD usat, $1 \text{ px} = 6 \mu\text{m}$, per a l'obertura rectangular s'han obtingut els paràmetres que es detallen en la taula 1. S'ha considerat que la seva incertesa està en l'última xifra decimal donada pel *software* de recollida de dades.

h_x	(mm)	1.530 ± 0.006	h_y	(mm)	1.530 ± 0.006
Λ_x	(mm $^{-1}$)	2.317 ± 0.017	Λ_y	(mm $^{-1}$)	8.117 ± 0.017
Δx	(mm)	-0.024 ± 0.006	Δy	(mm)	0.000 ± 0.006
T_x	(mm $^{-1}$)	0.000 ± 0.017	T_y	(mm $^{-1}$)	0.000 ± 0.017

TAULA 1: Paràmetres de l'ajust per a l'obertura rectangular.



(A)



(B)

FIGURA 2: (A) Intensitats detectada i ajustada en funció de la posició sobre l'eix horitzontal central X i (B) sobre l'eix vertical central Y del sensor CCD.

A Fòrmules estadístiques

A.1 Paràmetres centrals i de dispersió

Donada una mostra de N elements $\{x_1, \dots, x_N\}$, definim els següents paràmetres estadístics.

- Mitjana aritmètica

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{A.1})$$

- Desviació estàndard²

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (\text{A.2})$$

- Error estàndard

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Estimacions lineals

Per al càlcul de les estimacions lineals s'usa la funció **ESTIMACION.LINEAL** del full de càlcul **Microsoft Excel**, que proporciona el pendent i l'ordenada a l'origen de la recta de regressió amb les seves corresponents incerteses, així com el coeficient de correlació R^2 i l'error estàndard de la regressió.

A.3 Test χ^2

Donat un ajust lineal $y = Ax + B$, amb incertesa en la variable dependent δy i error estàndard de la regressió δy_{reg} , es defineix el *coeficient* χ^2 com

$$\chi^2 = \nu \left(\frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \right) \quad (\text{A.4})$$

on ν es el nombre de graus de llibertat de l'ajust. Amb això, podem definir el *coeficient reduït* χ_ν^2 com

$$\chi_\nu^2 = \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \quad (\text{A.5})$$

El valor d'aquest paràmetre ens indica la bondat de l'ajust realitzat. Tenim que

- (a) si $\underline{\delta y_{\text{reg}}} \ll \delta y$ o $\underline{\chi_\nu^2} \ll 1$, l'ajust és acceptable i probablement s'hagi sobreestimat δy ;
- (b) si $\underline{\delta y_{\text{reg}}} \lesssim \delta y$ o $\underline{\chi_\nu^2} \lesssim 1$, l'ajust és acceptable; i
- (c) si $\underline{\delta y_{\text{reg}}} \gg \delta y$ o $\underline{\chi_\nu^2} \gg 1$ l'ajust no és acceptable.

²S'ha fet servir la correcció de Bessel $\sqrt{N/(N-1)}$ de la desviació estàndard poblacional.