

# Òptica

## Pràctica 6. Difracció de Fraunhofer

Marc Ballesteró Ribó - Grup D2

10 de gener de 2021

### Resum

## 1 Dispositiu experimental

El sistema experimental utilitzat consisteix en un banc òptic sobre el qual s'hi ha col·locat un làser diòde de longitud d'ona  $\lambda = 635 \text{ nm}$  i potència d'emissió regulable, seguit d'una lent difusora  $L_1$  situada de tal manera que el seu pla focal objecte coincideixi amb el punt d'emissió del làser, és a dir, les ones que s'hi propaguen esdevenen planes. A continuació, sobre un peu s'hi ha col·locat les diferents obertures de difracció  $\Sigma$ . A partir d'aquest punt, la llum es comporta segons la difracció de Fresnel. Per tal d'aconseguir difracció de Fraunhofer, s'ha col·locat una lent de Fourier  $L_2$  de focal  $f' = 350 \text{ mm}$  després de l'objecte. Finalment, un sensor CCD de resolució  $640 \times 480 \text{ px}$  i mida de píxel  $6 \mu\text{m}$  s'ha col·locat en el pla focal imatge de  $L_2$  per a captar les ones difractades. La profunditat de color del sensor és de 8 bit, i, atès que la seva resposta és lineal, s'ha considerat que la intensitat ve donada en unitats arbitràries (u.a.) proporcionades pel sensor.

## 2 Perfilis d'intensitat i figures de difracció

En aquesta secció s'estudien les diferents figures de difracció obtingudes per a cada tipus d'obertura, tot calculant els seus paràmetres geomètrics a partir dels perfils d'intensitats obtinguts i els ajustos corresponents.

### 2.1 Obertura rectangular

Un objecte de difracció consistent en una petita obertura rectangular de dimensions  $L_x \times L_y$  es pot modelar mitjançant la *funció rectangle bidimensional*,  $f(x, y) = \text{rect}(x/L_x, y/L_y)$ , que té transmitància 1 per  $(x, y) \in (-L_x/2, L_x/2) \times (-L_y/2, L_y/2)$  i 0 altrament. Així, la distribució d'intensitats de la difracció de Fraunhofer de l'objecte queda<sup>1</sup>

$$I(x, y) \propto \left[ \text{sinc}\left(\frac{L_x x}{\lambda f'}\right) \text{sinc}\left(\frac{L_y y}{\lambda f'}\right) \right]^2 \quad (1)$$

on  $\lambda$  és la longitud d'ona de la font que es propaga per l'escletxa i  $f'$  la focal de la lent de Fourier  $L_2$ .

---

<sup>1</sup>Definim la funció *sinus quotient*  $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\text{sinc } x := \sin(\pi x) / (\pi x)$ , per  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $\text{sinc } 0 := 1$ , per  $x = 0$ .



FIGURA 1: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a l'obertura rectangular.

Els perfils d'intensitats en cada eix  $I(x) := I(x, 0)$  i  $I(y) := I(0, y)$  obtinguts mitjançant l'anàlisi de les dades volcades pel sensor CCD es representen en la figura 2, així com les funcions ajustades per superposició amb la gràfica experimental, donades per

$$\begin{aligned} I(x) &= h_x [\text{sinc}(\Lambda_x(x - \Delta x)) \cos(T_x x)]^2 \\ I(y) &= h_y [\text{sinc}(\Lambda_y(y - \Delta y)) \cos(T_y y)]^2 \end{aligned} \quad (2)$$

que depenen dels paràmetres ajustats manualment sobre la corba empírica  $h_x, h_y$ , anomenats *alçada*,  $\Lambda_x, \Lambda_y$ , als quals es farà referència per *amplada* i  $\Delta x, \Delta y$ , que es designen per *desplaçament*.

Tenint en compte que, per al sensor CCD usat,  $1 \text{ px} = 6 \mu\text{m}$ , per a l'obertura rectangular s'han obtingut els paràmetres que es detallen en la taula 1. S'ha considerat que la seva incertesa està en l'última xifra decimal donada pel *software* de recollida de dades.

$h_x$	(u.a.)	$255 \pm 1$	$h_y$	(u.a.)	$255 \pm 1$
$\Lambda_x$	(mm $^{-1}$ )	$2.317 \pm 0.017$	$\Lambda_y$	(mm $^{-1}$ )	$8.117 \pm 0.017$
$\Delta x$	(mm)	$-0.024 \pm 0.006$	$\Delta y$	(mm)	$0.000 \pm 0.006$
$T_x$	(mm $^{-1}$ )	$0.000 \pm 0.017$	$T_y$	(mm $^{-1}$ )	$0.000 \pm 0.017$

TAULA 1: Paràmetres de l'ajust per a l'obertura rectangular.

Així, comparant (1) amb (2), es poden obtenir les dimensions de l'escletxa a partir dels paràmetres de l'ajust segons

$$\begin{aligned} L_x &= \Lambda_x \lambda f' \\ L_y &= \Lambda_y \lambda f' \end{aligned} \quad (3)$$

, amb la qual cosa s'obté que  $L_x = (0.527 \pm 0.004) \text{ mm}$  i  $L_y = (1.846 \pm 0.004) \text{ mm}$ .

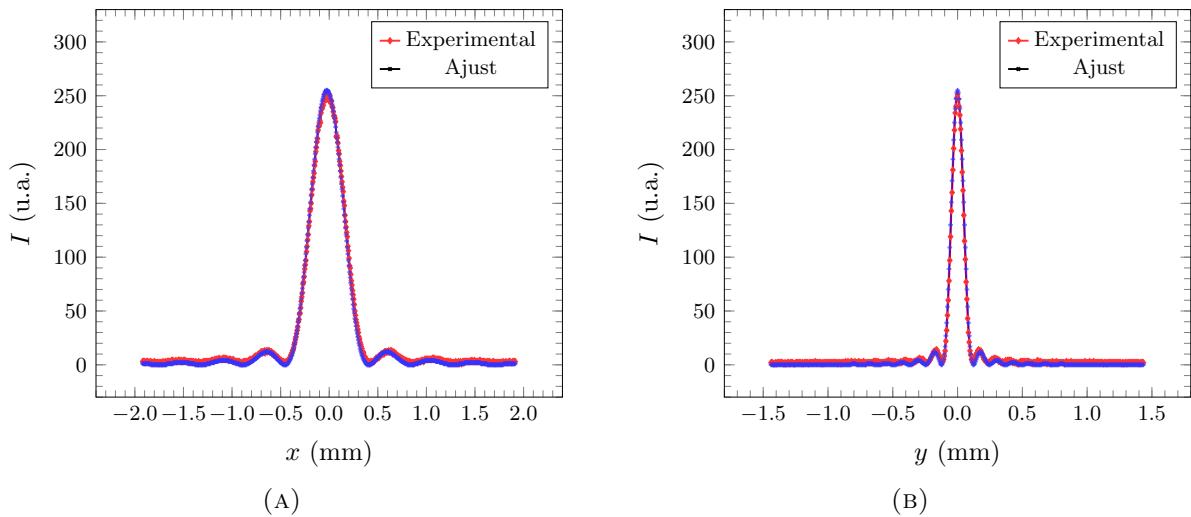


FIGURA 2: (A) Intensitats detectada i ajustada en funció de la posició sobre l'eix horitzontal central  $X$  i (B) sobre l'eix vertical central  $Y$  del sensor CCD, per a l'obertura rectangular.

## 2.2 Obertura circular

En aquest cas, el feix de llum làser es propaga a través d'una obertura circular de radi  $R$ , que en coordenades polars es pot modelitzar per  $f(r) = \text{circ}(r/R)$ , funció de transmitància 1 per  $r \in (0, R)$  i 0 altrament. Així doncs, el seu perfil de difracció ve donat per

$$I(r) \propto \left[ \frac{2J_1(\pi\beta)}{\pi\beta} \right]^2, \quad \beta := \frac{2Rr}{\lambda f'} \quad (4)$$

on  $J_1$  és la funció de Bessel de primera espècie i ordre 1.

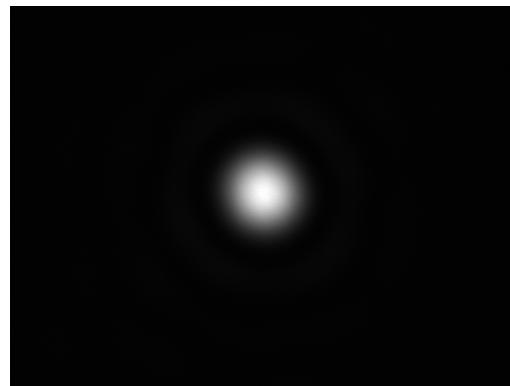


FIGURA 3: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a l'obertura circular.

Mitjançant l'ajust adient del perfil d'intensitats, realitzat amb el *software* de recollida de dades i representat en la figura 4, s'obtenen els paràmetres de la taula 2. En aquest cas, observem que  $\Lambda_x$  i  $\Lambda_y$  són compatibles dins el seu marge d'incertesa, fet coherent amb la simetria radial de l'obertura circular.

$h_x$	(u.a.)	$255 \pm 1$	$h_y$	(u.a.)	$255 \pm 1$
$\Lambda_x$	(mm $^{-1}$ )	$2.450 \pm 0.017$	$\Lambda_y$	(mm $^{-1}$ )	$2.433 \pm 0.017$
$\Delta x$	(mm)	$0.000 \pm 0.006$	$\Delta y$	(mm)	$-0.030 \pm 0.006$
$T_x$	(mm $^{-1}$ )	$0.000 \pm 0.017$	$T_y$	(mm $^{-1}$ )	$0.000 \pm 0.017$

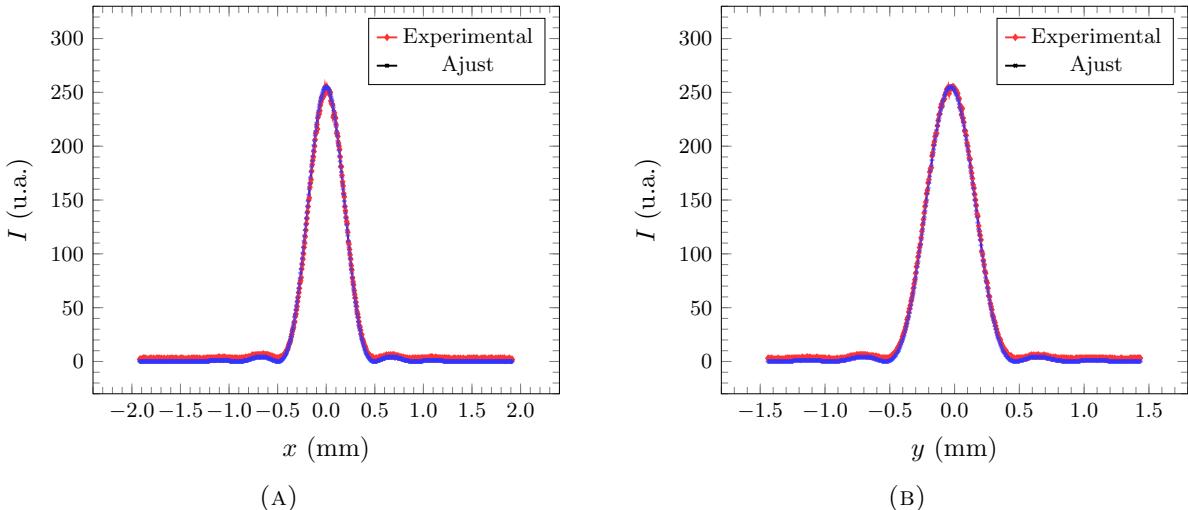
TAULA 2: Paràmetres de l'ajust per a l'obertura circular.

Finalment, el radi de l'obertura es pot obtenir a partir de cadascuna de les amplades de manera independent, segons

$$R = \frac{\Lambda_x \lambda f'}{2} \quad (5)$$

$$R = \frac{\Lambda_y \lambda f'}{2} \quad (6)$$

Si denotem  $R_x$  i  $R_y$  els valors calculats per (5) i (6), respectivament; obtenim que  $R_x = (0.2787 \pm 0.0019)$  mm i  $R_y = (0.2767 \pm 0.0019)$  mm, que són clarament compatibles. S'estima, doncs, el radi de l'escletxa com la mitjana aritmètica d'aquests valors junt amb la corresponent incertesa propagada, d'on  $R = (0.2777 \pm 0.0013)$  mm.

FIGURA 4: (A) Intensitats detectada i ajustada en funció de la posició sobre l'eix horitzontal central  $X$  i (B) sobre l'eix vertical central  $Y$  del sensor CCD, per a l'obertura circular.

### 2.3 Doble obertura rectangular

Si el feix de llum es propaga a través de dues obertures rectangulars paral·leles amb els seus centres separats una distància  $D$  en la direcció de l'eix  $X$ , la distribució d'intensitats de la difracció de Fraunhofer en el pla d'observació ve donada per

$$I(x, y) \propto \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{L_x x}{\lambda f'}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{L_y y}{\lambda f'}\right) \cos\left(\frac{\pi D}{\lambda f'} x\right) \right]^2 \quad (7)$$

és a dir, el perfil (1) modulat pel cosinus al quadrat d'una quantitat proporcional a la separació entre els rectangles i la posició en  $X$ . Notem que aquest terme s'atribueix a l'aparició de franjes en el pla d'observació, fàcilment relacionables amb les interferències de Young.



FIGURA 5: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a la doble obertura rectangular. S'observa l'aparició de franjes d'interferències de Young.

Ajustant el perfil d'intensitats, representat a la figura 6, amb el *software* d'anàlisi de dades, s'obtenen els paràmetres de la taula 3.

$h_x$	(u.a.)	$255 \pm 1$	$h_y$	(u.a.)	$255 \pm 1$
$\Lambda_x$	(mm $^{-1}$ )	$1.967 \pm 0.017$	$\Lambda_y$	(mm $^{-1}$ )	$11.117 \pm 0.017$
$\Delta x$	(mm)	$0.000 \pm 0.006$	$\Delta y$	(mm)	$0.000 \pm 0.006$
$T_x$	(mm $^{-1}$ )	$5.017 \pm 0.017$	$T_y$	(mm $^{-1}$ )	$0.000 \pm 0.017$

TAULA 3: Paràmetres de l'ajust per a la doble obertura rectangular.

Notem que el període  $T_x$  és no nul. Així doncs, tenint en compte (2), les dimensions de les escletxes venen donades per (3), mentres que la seva separació es calcula segons

$$D = \frac{1}{\pi} T_x \lambda f' \quad (8)$$

En conseqüència, s'obté que  $L_x = (0.447 \pm 0.004)$  mm,  $L_y = (2.529 \pm 0.004)$  mm i la distància de separació és  $D = (0.3549 \pm 0.0012)$  mm.

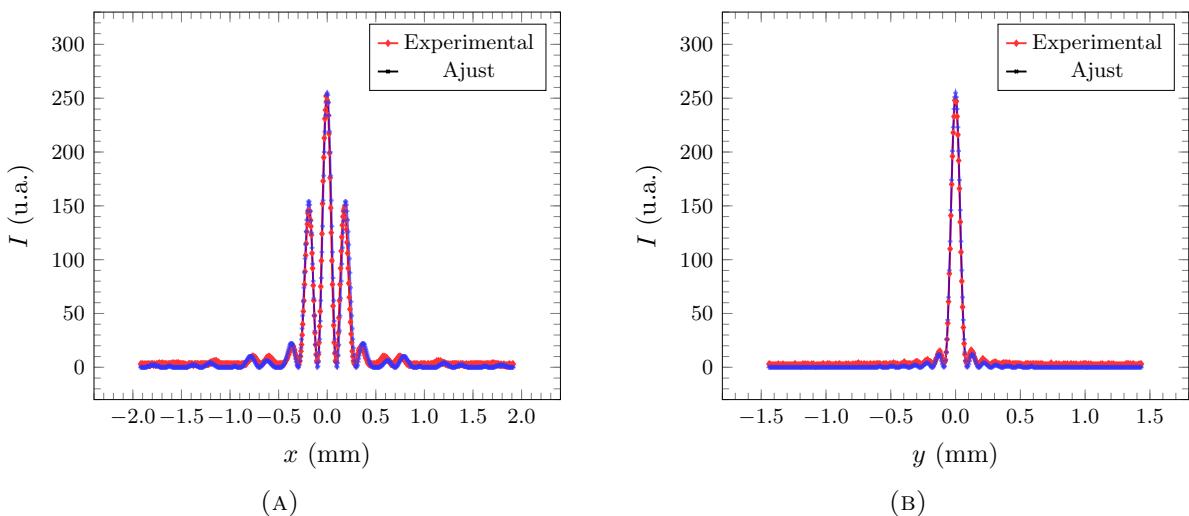


FIGURA 6: (A) Intensitat detectada i ajustada en funció de la posició sobre l'eix horitzontal central  $X$  i (B) sobre l'eix vertical central  $Y$  del sensor CCD, per a la doble obertura rectangular.

## 2.4 Doble obertura circular

Finalment, s'analitza el comportament de la llum quan es propaga a través de dues obertures circulars de radi  $R$  separades una distància  $D$  en l'eix  $X$ . De manera anàloga al cas anterior, es té que

$$I(r) \propto \left[ \frac{2J_1(\pi\beta)}{\pi\beta} \cos\left(\frac{\pi D}{\lambda f'}x\right) \right]^2, \quad \beta := \frac{2Rr}{\lambda f'} \quad (9)$$

és a dir, el producte del perfil d'intensitats (4) d'un sol cercle modulat pel terme cosinus quadrat relacionat amb les interferències de Young.

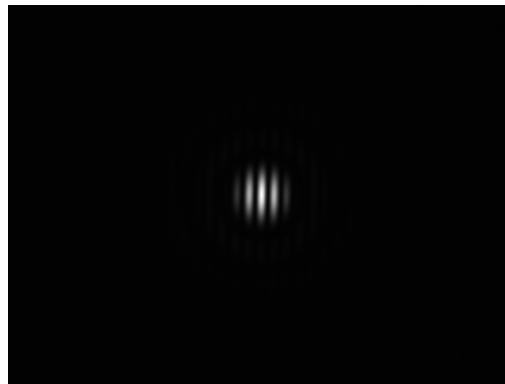


FIGURA 7: Distribució d'intensitats capturada pel sensor CCD en el pla d'observació, per a la doble obertura circular.

Si s'ajusta el perfil d'intensitats, que es representa gràficament a la figura 8, s'obtenen els paràmetres de la taula 4.

$h_x$	(u.a.)	$255 \pm 1$	$h_y$	(u.a.)	$255 \pm 1$
$\Lambda_x$	(mm $^{-1}$ )	$3.367 \pm 0.017$	$\Lambda_y$	(mm $^{-1}$ )	$3.367 \pm 0.017$
$\Delta x$	(mm)	$0.000 \pm 0.006$	$\Delta y$	(mm)	$0.000 \pm 0.006$
$T_x$	(mm $^{-1}$ )	$10.150 \pm 0.017$	$T_y$	(mm $^{-1}$ )	$0.000 \pm 0.017$

TAULA 4: Paràmetres de l'ajust per a la doble obertura circular.

Notem que, d'una banda, el període  $T_x$  no és nul, i de l'altra, les amplades en  $x$  i  $y$  coincideixen, tal com s'espera donada la simetria radial del cercle.

A partir de (9), tenim que el radi dels cercles vindrà donat per (5) i (6), d'on s'obté que  $R_x = (0.3830 \pm 0.0019)$  mm i  $R_y = (0.3830 \pm 0.0019)$  mm, amb la qual cosa s'estima que el radi de les obertures és la mitjana  $R = (0.3830 \pm 0.0013)$  mm. La distància de separació entre les obertures s'obté aplicant (8), d'on  $D = (0.7181 \pm 0.0012)$  mm.

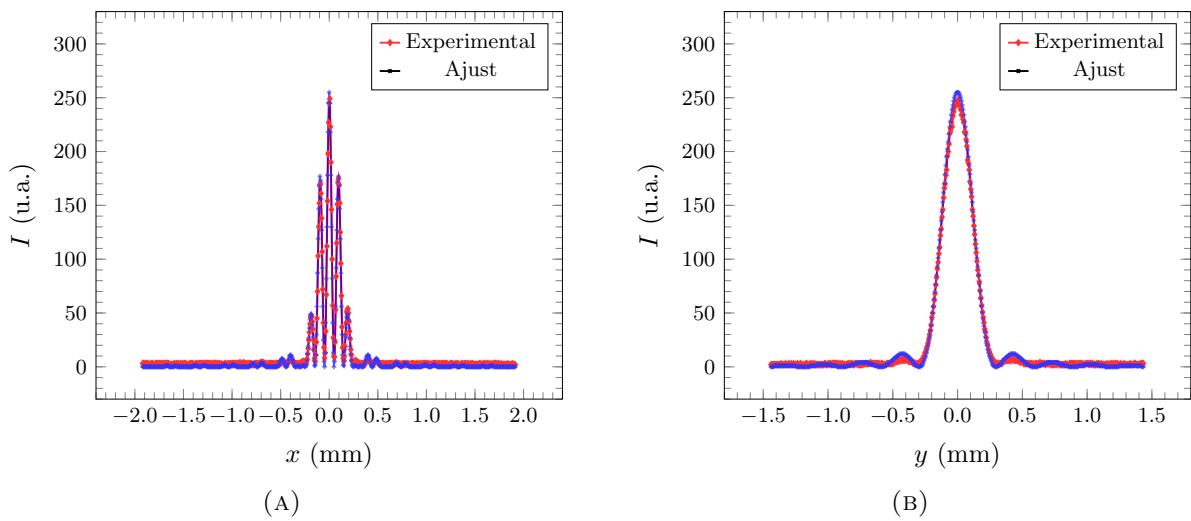


FIGURA 8: (A) Intensitats detectada i ajustada en funció de la posició sobre l'eix horitzontal central  $X$  i (B) sobre l'eix vertical central  $Y$  del sensor CCD, per a la doble obertura circular.

## A Fòrmules estadístiques

### A.1 Paràmetres centrals i de dispersió

Donada una mostra de  $N$  elements  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , definim els següents paràmetres estadístics.

- Mitjana aritmètica

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{A.1})$$

- Desviació estàndard<sup>2</sup>

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (\text{A.2})$$

- Error estàndard

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Estimacions lineals

Per al càlcul de les estimacions lineals s'usa la funció **ESTIMACION.LINEAL** del full de càlcul **Microsoft Excel**, que proporciona el pendent i l'ordenada a l'origen de la recta de regressió amb les seves corresponents incerteses, així com el coeficient de correlació  $R^2$  i l'error estàndard de la regressió.

### A.3 Test $\chi^2$

Donat un ajust lineal  $y = Ax + B$ , amb incertesa en la variable dependent  $\delta y$  i error estàndard de la regressió  $\delta y_{\text{reg}}$ , es defineix el *coeficient*  $\chi^2$  com

$$\chi^2 = \nu \left( \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \right) \quad (\text{A.4})$$

on  $\nu$  es el nombre de graus de llibertat de l'ajust. Amb això, podem definir el *coeficient reduït*  $\chi_\nu^2$  com

$$\chi_\nu^2 = \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \quad (\text{A.5})$$

El valor d'aquest paràmetre ens indica la bondat de l'ajust realitzat. Tenim que

- (a) si  $\underline{\delta y_{\text{reg}}} \ll \delta y$  o  $\underline{\chi_\nu^2} \ll 1$ , l'ajust és acceptable i probablement s'hagi sobreestimat  $\delta y$ ;
- (b) si  $\underline{\delta y_{\text{reg}}} \lesssim \delta y$  o  $\underline{\chi_\nu^2} \lesssim 1$ , l'ajust és acceptable; i
- (c) si  $\underline{\delta y_{\text{reg}}} \gg \delta y$  o  $\underline{\chi_\nu^2} \gg 1$  l'ajust no és acceptable.

---

<sup>2</sup>S'ha fet servir la correcció de Bessel  $\sqrt{N/(N-1)}$  de la desviació estàndard poblacional.