

# Òptica

## Práctica 2. Polarització de la llum

Marc Ballester Ribó - Grup D2

12 de novembre de 2020

### 1 Polarització lineal

En aquest apartat ens proposem estudiar el comportament d'un feix de llum natural quan passa per un sistema de dos polaritzadors lineals consecutius i enfrontats. Així doncs, s'ha col·locat, davant de la font de llum LED, un primer polaritzador lineal al qual ens referirem com a *polaritzador* i tot seguit un altre dispositiu similar que anomenarem *analitzador*, tot procurant que en els estats de màxima transmissió no se saturi el díode detector col·locat al final de la línia de llum. Aquest element és el que, connectat a un amperímetre en escala de  $\mu\text{A}$ , ens informa sobre la intensitat de la llum un cop ha travessat el sistema òptic. Com que la resposta del díode a la il·luminació és lineal, considerarem que la intensitat mesurada per l'amperímetre ens dóna la mesura de la intensitat lumínica en unitats arbitràries (u.a.).

Fixat el polaritzador, s'han pres mesures d'intensitat modificant l'angle de l'eix de l'analitzador  $\beta$  en intervals de  $(5 \pm 1)^\circ$ , els punts experimentals associats a les quals es representen en la figura 1.

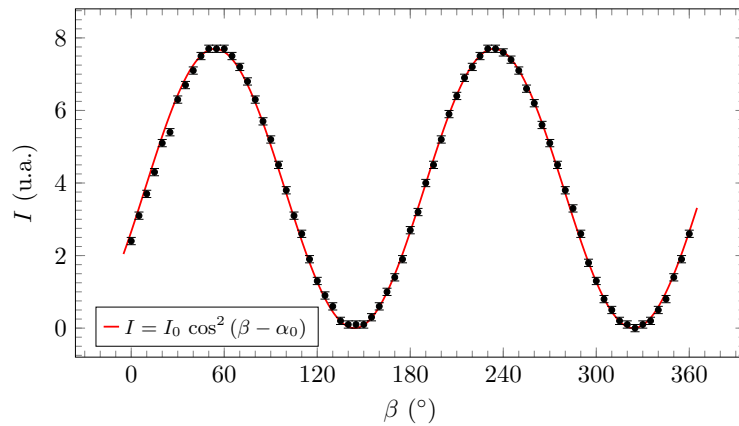


FIGURA 1: Intensitat detectada pel díode en funció de l'angle de l'escala de l'analitzador, amb la relació teòrica de la llei de Malus superposada.

La llei de Malus relaciona, en un sistema com aquest, la intensitat detectada vers l'angle relatiu entre els eixos dels polaritzadors, segons

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \quad (1)$$

on  $I_0$  és la intensitat abans de transmetre's pels polaritzadors i  $\alpha$  l'angle relatiu entre els eixos del polaritzador i l'analitzador.

Per tal d'establir l'origen de fases i el paràmetre d'intensitat màxima, s'han mesurat els punts

on el valor marcat pel díode és extrem<sup>1</sup>, obtenint que

$$\begin{aligned} [\beta_{\max}, I_{\max}] &= [(54 \pm 1)^\circ, (7.7 \pm 0.1) \text{ u.a.}] \\ [\beta_{\min}, I_{\min}] &= [(144 \pm 1)^\circ, (0.0 \pm 0.1) \text{ u.a.}] \end{aligned}$$

Notem que es compleix que  $|\beta_{\max} - \beta_{\min}| = (90 \pm 1)^\circ$ , la qual cosa ens indica que les mesures realitzades s'ajusten a la predicció teòrica.

Prendrem, doncs, com a origen de fases l'angle per al qual la intensitat és màxima, amb la qual cosa tindrem que  $[\alpha_0, I_0] = [(54 \pm 1)^\circ, (7.7 \pm 0.1) \text{ u.a.}]$ . Amb això, podem calcular l'angle relatiu entre el polaritzador i l'analitzador com

$$\alpha := \beta - \alpha_0. \quad (2)$$

Amb aquesta relació s'ha ajustat la corba que se superposa als punts de la figura 1, que, vist que talla tots els punts experimentals i les corresponents barres d'error, ens indica que les dades preses s'ajusten al model teòric que prediu (1).

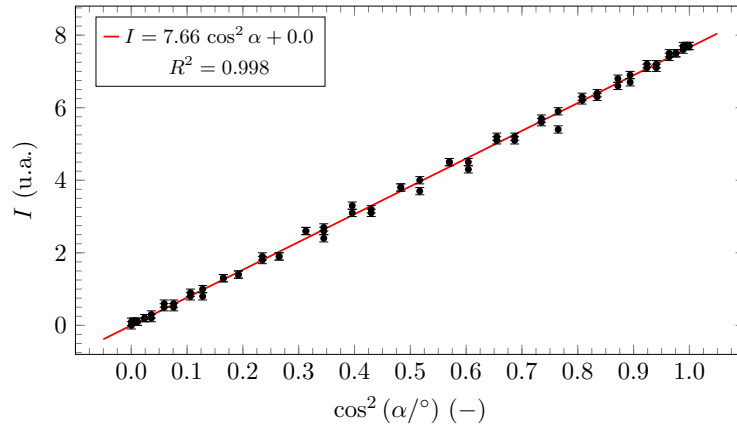


FIGURA 2: Intensitat detectada pel díode en funció de cosinus al quadrat de l'angle relatiu entre els eixos dels polaritzadors, amb el corresponent ajust lineal.

Encara més, s'han representat els punts  $I(\cos^2 \alpha)$  i s'han ajustat a una recta de regressió de la forma  $I = I'_0 \cos^2 \alpha + I_r$ , tot representat a la figura 2. Els paràmetres obtinguts es presenten a la taula 1.

$I'_0$ (u.a.)	$7.66 \pm 0.04$
$I_r$ (u.a.)	$0.0 \pm 0.3$
$R^2$	0.998
$(\delta I)_{\text{reg}}$ (u.a.)	0.13

TAULA 1: Paràmetres de l'ajust lineal  $I = I'_0 \cos^2 \alpha + I_r$ , amb les corresponents incerteses.

Primerament, observem que els valors de la intensitat màxima obtinguts experimentalment i a partir de l'ajust satisfan que

$$0.04 \text{ u.a.} = |I_0 - I'_0| \leq \sqrt{(\delta I_0)^2 + (\delta I'_0)^2} = 0.11 \text{ u.a.}$$

<sup>1</sup>Malgrat es podrien haver fet servir els valors obtinguts prèviament, s'ha repetit la mesura per evitar l'error de discretització associat a prendre dades en intervals de  $(5 \pm 1)^\circ$ .

i, per tant, són compatibles.

D'altra banda, l'ordenada a l'origen de l'ajust  $I_r$  ens informa de la intensitat residual detectada pel díode, que correspon a la radiació lumínica de fons del laboratori. Malgrat prendre's les dades en condicions de foscor, no es pot anul·lar totalment. Tot i així, notem que el valor de  $I_r$  és clarament compatible amb zero.

## 2 Polarització el·líptica

En aquesta secció estudiarem el comportament d'un feix de llum polaritzada el·lípticament. Per aconseguir aquest estat de polarització, s'ha fet servir el mateix sistema experimental que en l'apartat 1, amb una làmina retardadora de quart d'ona (també l'anomenarem *làmina*  $\lambda/4$ ) entre el polaritzador i l'analitzador. Amb això s'aconsegueix obtenir llum amb una el·lipse de polarització més o menys excèntrica segons l'angle  $\varphi$  entre l'eix del polaritzador i un dels eixos principals de la làmina. Per a la recollida de dades s'ha escollit un valor de  $\varphi = (20 \pm 1)^\circ$ .

S'han pres valors de la intensitat marcada per l'amperímetre en intervals de  $(5 \pm 1)^\circ$  per a l'angle de l'escala de l'analitzador, obtenint les dades que es representen en la figura 3.

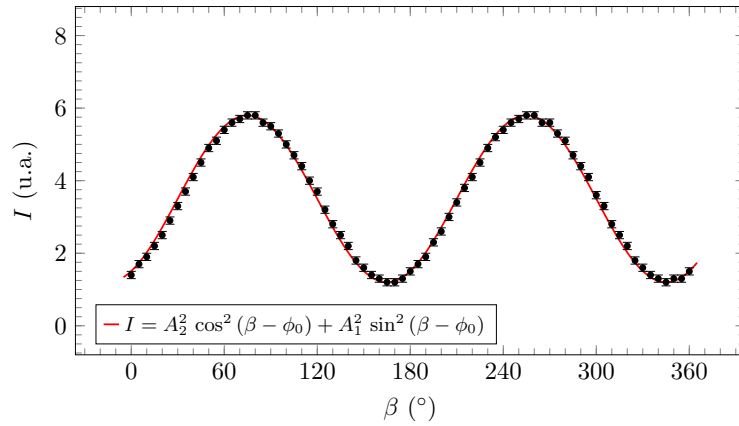


FIGURA 3: Intensitat detectada pel díode en funció de l'angle de l'escala de l'analitzador, amb la relació teòrica deduïda de la llei de Malus superposada.

Sigui  $\phi$  l'angle entre l'eix de l'analitzador i l'eix major de l'el·lipse de polarització. Per calcular la intensitat de la llum que arriba al díode, apliquem la llei de Malus a cadascuna de les components perpendiculars de la llum polaritzada el·lípticament, d'on

$$I(\phi) = A_2^2 \cos^2 \phi + A_1^2 \sin^2 \phi = (A_2^2 - A_1^2) \cos^2 \phi + A_1^2 \quad (3)$$

on  $A_1, A_2$  són els semieixos de l'el·lipse de polarització.

Per fixar l'origen de fases i trobar els semieixos de l'el·lipse, s'han mesurat els punts on la intensitat és extrema, obtenint

$$\begin{aligned} [\beta_{\max}, I_{\max}] &= [(75 \pm 1)^\circ, (5.8 \pm 0.1) \text{ u.a.}] \\ [\beta_{\min}, I_{\min}] &= [(165 \pm 1)^\circ, (1.2 \pm 0.1) \text{ u.a.}] \end{aligned}$$

Així doncs, l'origen de fases correspon al punt pel qual la intensitat és màxima,  $\phi_0 = (75 \pm 1)^\circ$ , i introduint a (3) els valors mesurats, obtenim les longituds dels semieixos  $A_1 = (1.10 \pm 0.05) \text{ u.a.}$  i  $A_2 = (2.41 \pm 0.02) \text{ u.a.}$  L'angle  $\phi$  l'obtenim fent la transformació

$$\phi := \beta - \phi_0 \quad (4)$$

on  $\beta$  és l'angle mesurat en l'escala de l'analitzador.

Amb aquests valors s'ha ajustat la corba teòrica superposada als punts de la figura 3, que, atès que talla tots els punts i barres d'error, ens indica que les dades experimentals s'ajusten al model teòric (3).

Encara més, podem calcular l'excentricitat de l'el·lipse segons

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}} \quad (5)$$

d'on s'obté que  $\varepsilon = 0.891 \pm 0.010$ .

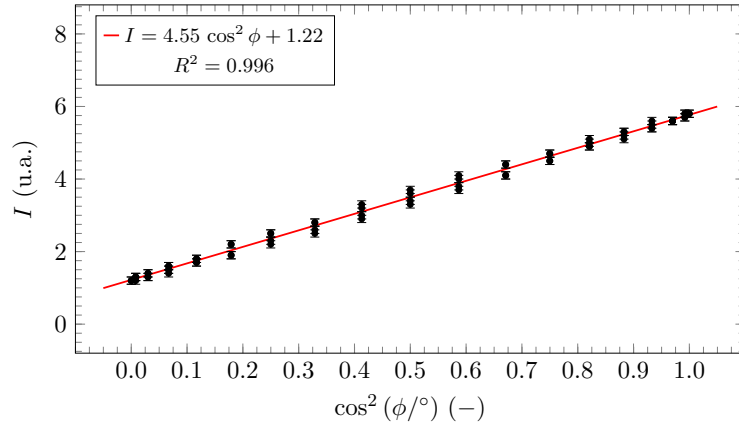


FIGURA 4: Intensitat detectada pel díode en funció de cosinus al quadrat de l'angle entre l'eix de l'analitzador i l'eix major de l'el·lipse de polarització.

Finalment, s'han representat els punts  $I(\cos^2 \phi)$  a la figura 4 i s'han ajustat a una recta de regressió de la forma  $I = (A_2^2 - A_1^2)' \cos^2 \phi + (A_1^2)'$ , obtenint els paràmetres de la taula 2.

$(A_2^2 - A_1^2)'$ (u.a.)	$4.55 \pm 0.04$
$(A_1^2)'$ (u.a.)	$1.22 \pm 0.02$
$R^2$	0.996
$(\delta I)_{\text{reg}}$ (u.a.)	0.11

TAULA 2: Paràmetres de l'ajust lineal  $I = (A_2^2 - A_1^2)' \cos^2 \phi + (A_1^2)'$ , amb les corresponents incerteses.

Observem que es compleix que

$$0.05 \text{ u.a.} = |(A_2^2 - A_1^2) - (A_2^2 - A_1^2)'| \leq \sqrt{[\delta(A_2^2 - A_1^2)]^2 + [\delta(A_2^2 - A_1^2)']^2} = 0.15 \text{ u.a.}$$

$$0.02 \text{ u.a.} = |A_1^2 - (A_1^2)'| \leq \sqrt{[\delta A_1^2]^2 + [\delta(A_1^2)']^2} = 0.10 \text{ u.a.}$$

i per tant els valors obtinguts mitjançant l'ajust són compatibles amb els predits amb l'equació (3).

### 3 Polartizació circular

En aquest últim apartat estudiem el comportament de la llum quan es polaritza circularment. Aquest estat de polarització s'ha aconseguit col·locant la làmina quart d'ona de manera que la

direcció de polarització de la llum lineal que hi incideix formi un angle de  $45^\circ$  amb els eixos de la làmina. Empíricament, s'ha determinat que l'angle adequat per obtenir llum polaritzada circularment és de  $(47 \pm 1)^\circ$  en l'escala de la làmina.

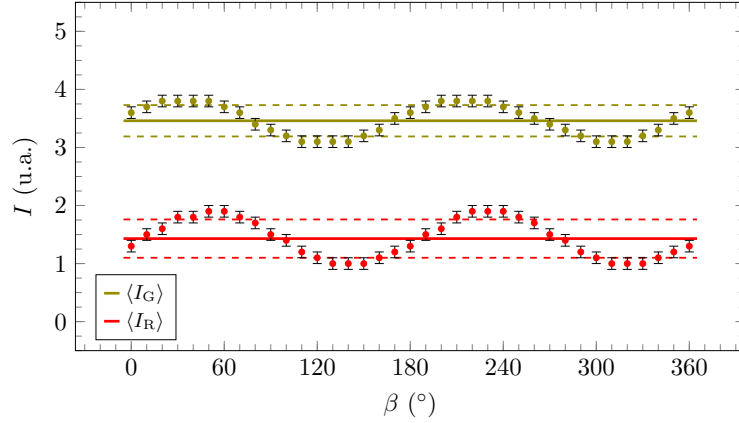


FIGURA 5: Intensitat detectada pel díode en funció de l'angle de l'escala de l'analitzador, amb la representació de les mitjanes i desviacions estàndards corresponents.

S'han pres dades de la intensitat detectada pel díode en funció de l'angle de l'escala de l'analitzador en intervals de  $(10 \pm 1)^\circ$ , per a llum de color verd i llum de color vermell, tot representant els punts experimentals en la figura 5.

Malgrat esperaríem que la llei de variació de la intensitat vers l'angle de l'analitzador fos constant, observem que els punts oscil·len lleugerament. De fet, la mitjana i la desviació estàndard de les intensitats per cada color, calculades segons (A.1) i (A.2) respectivament, són

$$\begin{aligned}\langle I_G \rangle &= (3.46 \pm 0.04) \text{ u.a.} \quad \sigma_{I_G} = 0.27 \text{ u.a.} \\ \langle I_R \rangle &= (1.43 \pm 0.05) \text{ u.a.} \quad \sigma_{I_R} = 0.33 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

i, en efecte, les desviacions estàndard dels punts experimentals són significatives. Això es deu, més enllà dels errors aleatoris i sistemàtics intrínsecs al sistema experimental, a que el comportament del material birefringent que forma la làmina quart d'ona (en particular els seus índexs de refracció) depenen de la longitud de l'ona incident, és a dir del seu color. És per això que en el cas del color verd la desviació estàndard de les intensitats és lleugerament inferior a del color vermell, i en cap dels casos la llum que surt del sistema té una polarització perfectament circular.

### 3.1 Ulleres de cinema 3D

Per acabar la pràctica, analitzem el comportament del feix de llum polaritzada circularment quan travessa els oculars d'unes ulleres de cinema en 3D. El sistema usat en aquest àmbit per aconseguir l'efecte visual de profunditat consisteix en gravar amb dos càmeres diferents els punts de vista corresponents a cada ull i projectar-los amb polaritzacions circulars de sentits oposats, de manera que cada ocular de les ulleres de l'espectador tingui un polaritzador circular<sup>2</sup> del sentit que correspongui. Així doncs, per simular aquestes condicions, s'ha substituït l'analitzador del sistema experimental per cadascun dels oculars de les ulleres.

Definim la transmitància òptica com

$$\tau = \frac{I}{I_0} \quad (6)$$

<sup>2</sup>Un sistema format per una làmina birefringent i un polaritzador lineal

on  $I_0$  és la intensitat del raig incident i  $I$  la intensitat detectada.

Fent servir el superíndex l per a l'ocular esquerre i r per al dret, tenim que les intensitats detectades intercalant cada ocular per a cada color de la llum són

$$\begin{aligned} I_G^l &= (6.3 \pm 0.1) \text{ u.a.} & I_G^r &= (0.1 \pm 0.1) \text{ u.a.} \\ I_R^l &= (2.5 \pm 0.1) \text{ u.a.} & I_R^r &= (0.2 \pm 0.1) \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Prenent  $I_0 = I_G = (8.3 \pm 0.1) \text{ u.a.}$  per a la llum de color verd i  $I_0 = I_R = (3.5 \pm 0.1) \text{ u.a.}$  per a la de color vermell, obtenim les transmissibilitats de cada ocular en cada cas

$$\begin{aligned} \tau_G^l &= 0.759 \pm 0.015 = (75.9 \pm 1.5) \% & \tau_G^r &= 0.012 \pm 0.012 = (1.2 \pm 1.2) \% \\ \tau_R^l &= 0.71 \pm 0.04 = (71 \pm 4) \% & \tau_R^r &= 0.06 \pm 0.03 = (6 \pm 3) \% \end{aligned}$$

i veiem que en tots dos casos l'ocular dret té una transmissibilitat pràcticament nul·la (de fet ambdós valors són compatibles amb zero) i l'ocular esquerre transmet entre un 70% i un 80% de la llum que hi incideix. Això es deu, efectivament, al fet que el disseny de les ulleres és tal que els oculars siguin polaritzadors circulars de sentits oposats.

## A Fórmules estadístiques

### A.1 Paràmetres centrals i de dispersió

Donada una mostra de  $N$  elements  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , definim els següents paràmetres estadístics.

- Mitjana aritmètica

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{A.1})$$

- Desviació estàndard<sup>3</sup>

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (\text{A.2})$$

- Error estàndard

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Estimacions lineals

Per al càlcul de les estimacions lineals s'usa la funció `ESTIMACION.LINEAL` del full de càlcul `Microsoft Excel`, que proporciona el pendent i l'ordenada a l'origen de la recta de regressió amb les seves corresponents incerteses, així com el coeficient de correlació  $R^2$  i l'error estàndard de la regressió.

### A.3 Test $\chi^2$

Donat un ajust lineal  $y = Ax + B$ , amb incertesa en la variable dependent  $\delta y$  i error estàndard de la regressió  $\delta y_{\text{reg}}$ , es defineix el *coeficient*  $\chi^2$  com

$$\chi^2 = \nu \left( \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \right) \quad (\text{A.4})$$

on  $\nu$  es el nombre de graus de llibertat de l'ajust. Amb això, podem definir el *coeficient reduït*  $\chi_\nu^2$  com

$$\chi_\nu^2 = \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y} \quad (\text{A.5})$$

El valor d'aquest paràmetre ens indica la bondat de l'ajust realitzat. Tenim que

- (a) si  $\delta y_{\text{reg}} \ll \delta y$  o  $\chi_\nu^2 \ll 1$ , l'ajust és acceptable i probablement s'hagi sobreestimat  $\delta y$ ;
- (b) si  $\delta y_{\text{reg}} \lesssim \delta y$  o  $\chi_\nu^2 \lesssim 1$ , l'ajust és acceptable; i
- (c) si  $\delta y_{\text{reg}} \gg \delta y$  o  $\chi_\nu^2 \gg 1$  l'ajust no és acceptable.

---

<sup>3</sup>S'ha fet servir la correcció de Bessel  $\sqrt{N/(N-1)}$  de la desviació estàndard poblacional.