Módulo III

Contagem: princípios fundamentais

Se o título deste capítulo parece pouco estimulante, é apenas porque o tipo de contagem que aprendemos quando crianças era, na sua maioria, de um tipo simples. Neste capítulo, vamos aprender a responder a algumas perguntas mais difíceis como “quantos horários semestrais diferentes um estudante universitário poderia ter?” e “quantas senhas diferentes pode um cliente escolher para este site de comércio eletrônico?” e “qual a probabilidade de este buffer de rede estourar, dado que os seus pacotes são dirigidos a três destinos diferentes?”

O nome mais impressionante para este tópico é combinatória. Na combinatória, concentramo-nos em duas tarefas: contar coisas (para descobrir quantas existem), e enumerar coisas (para as listar sistematicamente como indivíduos). Algumas coisas revelam-se difíceis de contar mas fáceis de enumerar, e vice-versa.

O Teorema Fundamental da Contagem

Começamos com uma regra básica que recebe o nome pomposo de Teorema Fundamental da Contagem. Ele diz o seguinte:

> Se um todo pode ser particionado em k componentes, e há n_i escolhas para o i-ésimo componente, então há $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ maneiras de fazer o todo.

Exemplo: Jane vai encomendar uma nova Lamborghini. Ela tem doze cores diferentes de pintura à escolha (incluindo Vermelho Suave e Amarelo Ousado), três interiores diferentes (Couro Premium, Couro Costurado, ou Vinil), e três sistemas de multimídia diferentes. Deve também escolher entre transmissão automática e manual, e pode obter chave convencional ou de presença. Quantas configurações diferentes Jane tem para escolher? Dito de outra forma, quantos tipos diferentes de carro poderiam sair da linha de montagem para ela?

A chave é que cada uma das suas escolhas é independente de todas as outras. A escolha de um exterior Verde Invejoso não limita a sua escolha de transmissão, multimídia, ou qualquer outra coisa. Assim, não importa qual das 12 cores de pintura ela escolha, ela pode escolher independentemente qualquer um dos três interiores, e independentemente destas duas primeiras escolhas, ela pode escolher livremente qualquer uma das opções de multimídia etc. Tudo pode ser misturado e combinado. Portanto, a resposta é:

$$12 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 432 \text{ opções.}$$

A propósito, aqui está uma notação alternativa que encontrará para isto:

$$\prod_{i=1}^{k} n_i$$

que é simplesmente uma maneira mais curta de escrever

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k \ .$$

A notação $\prod$ (chamamos de **produtório**) é essencialmente um loop com um contador, e ele diz para multiplicar a expressão à sua direita para cada valor do contador (a razão porquê os matemáticos escolheram o símbolo $\prod$ (pi) para isso é simplesmente porque "pi" começa com a mesma letra que "produto").

Podemos de fato obter muitas aplicações apenas com o teorema fundamental. Quantos PINs diferentes são possíveis para um cartão de banco? Supondo que são quatro dígitos, cada um dos quais pode ter qualquer valor de 0 a 9 (dez valores totais). A resposta é, portanto:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000 \text{ PINs diferentes.}$$

Assim, um ladrão num caixa eletrônico introduzindo freneticamente PINs ao acaso (esperando quebrar a sua conta antes que você ligue e bloqueie seu cartão extraviado) teria de tentar cerca de 5.000 vezes, em média, antes de quebrar o código. Ainda bem que o banco bloquearia o cartão automaticamente muito antes disso.

No estado da Virgínia, nos EUA, as regras para placas de automóveis são bastante flexíveis. Elas podem conter entre 1 e 7 caracteres, e cada um desses pode ser livremente um dígito ou uma letra do alfabeto.

Isso nos dá muitas possibilidades. Quantas combinações diferentes de placas de matrícula estão disponíveis?

Este problema requer um pouco mais de reflexão, uma vez que nem todas as placas têm o mesmo número de caracteres. Além de "SED4756" e "PXY1927" também podemos ter "DAWG" ou "LUVME" ou mesmo "U2". Como podemos contá-las?

O truque é dividir o nosso conjunto em subconjuntos mutuamente exclusivos, e depois somar as cardinalidades dos subconjuntos. Se apenas 7 caracteres cabem numa matrícula, então claramente cada número de matrícula tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou 7 caracteres. E nenhuma matrícula tem dois destes (ou seja, não há matrícula que tenha simultaneamente 5 caracteres e 6 caracteres). Por conseguinte, são subconjuntos mutuamente exclusivos, sendo seguro somar suas cardinalidades. Este último ponto não é, muitas vezes, considerado, levando a erros. Cuidado para não acrescentar descuidadamente as cardinalidades de conjuntos não mutuamente exclusivos! Acabará por contar duplamente alguns itens.

Assim, sabemos que o número de matrículas possíveis é igual a:

o # de placas de 7 caracteres +
o # de placas de 6 caracteres +
o # de placas de 5 caracteres +
… +

o # de placas de 1 caractere.

Muito bem. Podemos agora descobrir cada um deles separadamente. Como é que sabemos quantas placas de 7 caracteres existem? Bem, se cada caractere deve ser uma letra ou um dígito, então temos $26 + 10 = 36$ escolhas para cada caractere. Isto implica 36^7 possíveis placas diferentes de 7 caracteres. O número total de matrículas é, portanto:

$$36^7 + 36^6 + 36^5 + 36^4 + 36^3 + 36^2 + 36 = 80.603.140.212 \text{ matrículas}$$

o que é cerca de 10 vezes a população do planeta em 2021, então por enquanto vai ser o suficiente.

Aqui está uma interessante experiência mental para testar a sua intuição sobre números. Olhe para o cálculo acima, e pergunte-se: "E se o estado da Virgínia decidisse, por uma questão de coerência, que todas as matrículas tinham de ter todos os 7 caracteres? Isso reduziria significativamente o número total de matrículas possíveis"? A minha primeira inclinação seria dizer "sim", porque estamos acrescentando sete coisas nessa equação, e se exigíssemos placas de 7 caracteres para todos, eliminaríamos 6 dos 7. Certamente correríamos o risco de ficar sem matrículas para dar a todos os carros! Mas na realidade, o novo número total de matrículas possíveis tornar-se-ia:

$$36^7 = 78.364.164.096 \text{ matrículas.}$$

Uau. Quase não perdemos nada ao eliminarmos todas as placas com menos de 7 caracteres. Acontece que, em comparação com as placas de 7 caracteres, todos os outros comprimentos foram uma gota de água na bacia. Esta é uma ilustração poderosa de crescimento exponencial. Quando se modifica o expoente, passando de algo como 36^6 para 36^7, obtém-se um crescimento astronômico muito, muito rápido. Isto é bom de saber quando tudo o que se quer é uma aproximação rápida de alguma quantidade. Quantas senhas diferentes são possíveis num sistema que exige 6-10 caracteres por senha? Bem, pode-se praticamente ignorar todas as senhas de 6-9 caracteres e contar apenas as senhas de 10 caracteres, porque há muito mais dessas últimas.

Um último exemplo de placas de automóveis. O modelo de matrículas de placas para automóveis do Mercosul tem exatamente 7 caracteres. No entanto, eles estão restritos ao formato AAA0A00, que utilizamos para dizer que os três primeiros caracteres são necessariamente letras do alfabeto, o quarto caractere necessariamente é um dígito, o quinto novamente é uma letra, enquanto que o sexto e o sétimo são necessariamente dígitos. Quantas placas diferentes são possíveis nesse padrão? Neste caso, teremos:

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 10 = 456.976.000 \text{ matrículas,}$$

ou seja, pouco mais de 450 milhões, bem menos que os mais de 78 bilhões que teríamos se cada um dos sete caracteres pudesse ser livremente um número ou uma letra.

Eu disse que seria o último exemplo com placas, mas só para terminar nossa seção de matrículas automotivas, vamos calcular quantas placas diferentes eram possíveis no antigo padrão brasileiro, que era AAA0000. Tínhamos então:

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000 \text{ matrículas possíveis.}$$

Menos portanto do que a população do Brasil. Se o Brasil tivesse a densidade automotiva de San Marino, onde havia 1,2 veículo por habitante em 2013, isso seria um problema.

Um truque simples

Por vezes temos algo difícil de contar, mas podemos transformar a situação em algo muito mais fácil. Muitas vezes isto implica em contar o complemento de algo, e depois subtrair do total.

Por exemplo, suponha que um determinado site da Internet exige que as senhas dos utilizadores tenham entre 6–10 caracteres – sendo cada caractere uma letra maiúscula, letra minúscula, dígito, ou caractere especial (*, #, @, % ou &) – mas também exija que cada senha tenha pelo menos um dígito ou caratere especial. Quantas senhas diferentes são possíveis?

Sem a parte do "pelo menos um dígito ou caractere especial", é fácil: existem $26 + 26 + 10 + 5 = 67$ escolhas diferentes para cada caractere, então nós temos

$$67^{10} + 67^{9} + 67^{8} + 67^{7} + 67^{6} = 1.850.456.557.795.600.384 \text{ possibilidades.}$$

Mas como lidamos com a parte do "pelo menos um"?

Uma maneira seria listar todas as formas possíveis de se ter uma senha com pelo menos um caractere não-alfabético. O caractere não-alfabético poderia aparecer na primeira posição, ou na segunda, ou na terceira, … ou na décima, mas claro que isto só funciona para senhas de 10 dígitos, e de qualquer forma não é o caso que os outros caracteres não pudessem também ser não-alfabéticos. Fica complicado muito rapidamente.

Há um truque simples, no entanto, uma vez que se percebe que é fácil contar as senhas que não satisfazem a restrição extra. Faça a si mesmo esta pergunta: de todas as cadeias possíveis de 6–10 caracteres, quantas delas não têm pelo menos um caractere não-alfabético? (e são portanto ilegais, de acordo com as regras do site?)

Acontece que é o mesmo que perguntar "quantas cadeias existem com 6-10 caracteres alfabéticos (apenas)", o que é obviamente:

$$52^{10} + 52^{9} + 52^{8} + 52^{7} + 52^{6} = 147.389.519.403.536.384 \text{ senhas (inválidas).}$$

Agora, tudo o que temos de fazer é subtrair para obter:

$$\begin{array}{ccccc} \text{\# total de senhas} & - & \text{\# de senhas inválidas} & = & \text{\# de senhas válidas} \\ 1.850.456.557.795.600.384 & - & 147.389.519.403.536.384 & = & 1.708.735.865.301.022.720 \end{array}$$

senhas válidas. Parece que não perdemos muito ao exigir o caractere não-alfabético.

A lição aprendida é que se contar os elementos em algum conjunto envolve a contabilização de muitos cenários complicados diferentes, vale a pena tentar contar os elementos que não estão no conjunto, e ver se isso é mais fácil.

Permutações

Quando estamos contando coisas, deparamo-nos frequentemente com permutações. Uma **permutação** de n objetos distintos é uma disposição dos mesmos numa sequência. Por exemplo, suponhamos que as três crianças do nosso exemplo de família precisam escovar os dentes, mas apenas uma delas pode usar a pia de cada vez. Em que ordem escovarão os dentes? Uma possibilidade é Luísa, depois J. P., depois Zezinho.

Outra possibilidade é o J. P., depois a Luísa, depois o Zezinho. Outra é o Zezinho, depois a Luísa, depois o J. P. Estas são permutações diferentes da nossa família. Acontece que há seis delas (encontre todas as 6 possíveis).

A contagem do número de permutações é simplesmente uma aplicação especial do Teorema Fundamental da Contagem. Para o exemplo da escovação de dentes, temos $n = 3$ "partes" diferentes para o problema, cada uma das quais tem n_i escolhas para lhe atribuir. Há três crianças diferentes que poderiam escovar os seus dentes primeiro, portanto $n_1 = 3$. Uma vez escolhida essa criança, há então duas crianças restantes que poderiam escovar em segundo lugar, por isso $n_2 = 2$. Depois, uma vez escolhido uma primeira criança para escovar os dentes e uma segunda criança, resta apenas uma escolha para a terceira a escovar, portanto $n_3 = 1$. Isto significa que o número total de possíveis ordens de escovação é:

$$3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Este padrão surge tão frequentemente que os matemáticos estabeleceram uma notação especial para ele:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 1 = n! \text{ (“}n\text{-fatorial”)}$$

Dizemos que existem "3-fatorial" ordens de escovação diferentes para as crianças. Para os nossos propósitos, a noção de fatorial só se aplica a inteiros, portanto não existe o 23.46! ou π!. (Em aplicações avançadas, contudo, os matemáticos definem às vezes o fatorial para não-inteiros). Também definimos 0! como sendo 1, o que pode surpreendê-lo.

Isto surge com muita frequência. Se eu lhe der um conjunto de letras para desembaralhar, como "RLACO", quantos desembaralhamentos diferentes existem? A resposta é 5!, ou 120, um dos quais é CALOR (outras palavras existentes em português são, por exemplo, CLARO, COLAR, CORAL, LACRO, LOCAR). Digamos que embaralho um baralho de cartas tradicional antes de jogar batalha. Quantas possibilidades diferentes existem? A resposta é 52!, uma vez que qualquer uma das cartas do baralho pode ser embaralhada por cima, depois qualquer carta menos essa pode ser a segunda, depois qualquer uma menos essas duas pode ser a terceira, etc. Dez pacotes chegam quase simultaneamente a um roteador de rede. De quantas formas podem ser colocados em fila de espera para transmissão? 10! formas.

A função fatorial cresce muito, muito rapidamente, a propósito, ainda mais depressa do que as funções exponenciais. Uma palavra de cinco letras como "CALOR" tem 120 permutações, mas "PENDURICALHOS" tem 6.227.020.800. O número de formas diferentes de embaralhar um baralho é

$$80.658.175.170.944.942.408.940.349.866.698.506.766.127.860.028.660.283.290.685.487.972.352\ ,$$

por isso não creio que as crianças vão repetir o mesmo jogo de batalha no futuro próximo.

Enumerando permutações

Descobrimos que existem 120 permutações de CALOR, mas como procederíamos para listá-las todas? Pode-se brincar com as crianças da família e encontrar todas as

6 permutações, mas para quantidades maiores é mais difícil. Precisamos de uma forma sistemática que possamos implementar no computador, ou seja, de um algoritmo.

Duas das formas mais fáceis de enumerar permutações envolvem recursividade[1]. Aqui está uma:

> **Algoritmo #1 para enumerar permutações**
>
> 1. Comece com um conjunto de n objetos.
>   a) Se n = 1, há apenas uma permutação; a saber, o próprio objeto.
>   b) Caso contrário, remova um dos objetos, e encontre as permutações dos $n - 1$ objetos restantes. Em seguida, insira o objeto removido em todas as posições possíveis, criando a cada vez uma outra permutação.

Vejamos como o algoritmo funciona com um exemplo. Note que, como sempre ocorre com a recursão, a resolução de um problema maior depende da resolução de problemas menores. Comecemos com ALOR. Já descobrimos pelo exemplo da escovação de dentes que as permutações de LOR são LOR, LRO, OLR, ORL, RLO, e ROL. Assim, para encontrar as permutações de ALOR, inserimos um A em cada local possível para cada uma destas LOR-permutações. Isto fornece-nos:

$$\boxed{\text{A}}\text{LOR}$$
$$\text{L}\boxed{\text{A}}\text{OR}$$
$$\text{LO}\boxed{\text{A}}\text{R}$$
$$\text{LOR}\boxed{\text{A}}$$
$$\boxed{\text{A}}\text{LRO}$$
$$\text{L}\boxed{\text{A}}\text{RO}$$
$$\text{LR}\boxed{\text{A}}\text{O}$$
$$\text{LRO}\boxed{\text{A}}$$
$$\boxed{\text{A}}\text{OLR}$$
$$\ldots$$

e assim por diante. Assim que tivermos as permutações ALOR, podemos gerar as permutações CALOR da mesma forma:

$$\boxed{\text{C}}\text{ALOR}$$
$$\text{A}\boxed{\text{C}}\text{LOR}$$
$$\text{AL}\boxed{\text{C}}\text{OR}$$
$$\text{ALO}\boxed{\text{C}}\text{R}$$
$$\text{ALOR}\boxed{\text{C}}$$
$$\boxed{\text{C}}\text{LAOR}$$

1 Se você ainda não chegou no assunto de recursividade no seu curso de introdução à programação, tenha paciência, você chegará lá. Não será necessário você já ter visto esse assunto em programação para entender esta seção. Todavia, recomendo que quando você já tiver visto recursividade em programação, tente implementar esses métodos de enumeração sistemática de permutações na linguagem de programação que você está estudando.

L $\boxed{\text{C}}$ AOR

LA $\boxed{\text{C}}$ OR

LAO $\boxed{\text{C}}$ R

LAOR $\boxed{\text{C}}$

$\boxed{\text{C}}$ LOAR

...

Um outro algoritmo para alcançar o mesmo objetivo (embora em uma ordem diferente é o seguinte:

Algoritmo #2 para enumerar permutações

2. Comece com um conjunto de *n* objetos.
   a) Se n = 1, há apenas uma permutação; a saber, o próprio objeto.
   b) Caso contrário, remova cada um dos objetos por vez, e acrescente esse objeto como prefixo em cada uma das permutações de todos os objetos restantes, criando uma nova permutação a cada vez.

Acho este um pouco mais fácil de compreender, mas ao final é uma preferência pessoal. As permutações de CALOR são: “C seguida de todas as permutações de ALOR, mais A seguida de todas as permutações do CLOR, mais L seguida de todas as permutações de CAOR etc.”. Assim, as permutações de ALOR seriam:

A $\boxed{\text{LOR}}$

A $\boxed{\text{LRO}}$

A $\boxed{\text{OLR}}$

A $\boxed{\text{ORL}}$

A $\boxed{\text{RLO}}$

A $\boxed{\text{ROL}}$

L $\boxed{\text{AOR}}$

L $\boxed{\text{ARO}}$

L $\boxed{\text{RAO}}$

L $\boxed{\text{ROA}}$

L $\boxed{\text{OAR}}$

L $\boxed{\text{ORA}}$

O $\boxed{\text{ALR}}$

...

E então, para CALOR:

C $\boxed{\text{ALOR}}$

C $\boxed{\text{ALRO}}$

C $\boxed{\text{AOLR}}$

C $\boxed{\text{AORL}}$

$$\begin{array}{l}C\ \boxed{\text{ARLO}}\\ C\ \boxed{\text{AROL}}\\ C\ \boxed{\text{LAOR}}\\ C\ \boxed{\text{LARO}}\\ \quad\dots\end{array}$$

Permutações Parciais (Arranjos)

Por vezes queremos contar as permutações de um conjunto, mas apenas queremos escolher alguns dos itens de cada vez, não todos. Por exemplo, considere um torneio de xadrez em que os dez primeiros colocados (de 45) recebem todos um prêmio em dinheiro, sendo o primeiro colocado o que mais recebe, o segundo colocado recebe uma quantia menor, e assim sucessivamente até o décimo lugar, que recebe um prêmio simbólico. Quantos finais diferentes são possíveis para a premiação do torneio?

Neste caso, queremos saber quantas ordens diferentes de premiados no torneio existem, ou seja, depois do décimo lugar não nos interessa saber em que ordem terminaram. Só nos importa saber os dez primeiros lugares. Se os dez primeiros são 1. Talita, 2. Filipe, 3. Léa, 4. Ronaldo, …, e 10. Beatriz, então não importa se Jacira terminou em 11º ou 45º lugar.

É fácil perceber que há 45 possibilidades de resultado para o primeiro colocado, mas uma vez determinado o primeiro colocado, restam 44 possibilidades para o segundo. Para o terceiro então ainda há 43 possibilidades, e assim por diante, até que quando chegarmos ao décimo, teremos 36 possibilidades restantes. Ou seja, a quantidade de finais diferentes para a premiação do torneio é:

$$45\times44\times43\times42\times41\times40\times39\times38\times37\times36 = 11.576.551.623.436.800 \text{ finais.}$$

Cada um dos finais é chamado de **permutação parcial**, ou **arranjo**. É uma permutação de k itens escolhidos do total de n itens, e é denotada $p_{n,k}$. O número de tais permutações é dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1).$$

A parte "$n - k + 1$" pode parecer confusa, por isso demore o tempo necessário e pense bem no assunto. Para o caso do torneio de xadrez, o nosso termo mais alto foi 45 e o nosso termo mais baixo foi 36. Isto porque n foi 45 e k foi 10, e por isso só queríamos efetuar a multiplicação até 36 (e não 35), e 36 é $45 - 10 + 1$.

Esta fórmula pode ser expressa de forma mais compacta de algumas maneiras diferentes. Em primeiro lugar, podemos usar fatoriais para representá-la:

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) &= \\ \tfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times1}{(n-k)\times(n-k-1)\times(n-k-2)\times\ldots\times1} &= \tfrac{n!}{(n-k)!}\,. \end{aligned}$$

Ou então, poderíamos utilizar uma notação compacta com produtório:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\,.$$

Finalmente, tal como com as permutações (não parciais), esta expressão surge tão frequentemente que os profissionais inventaram uma notação especial para ela. Parece uma potência, mas com um sublinhado sob o expoente:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = n^{\underline{k}}.$$

Chamamos essa expressão de **fatorial descendente**[2]. Lê-se: fatorial descendente de n à *k-ésima*.

Para esclarecer o que significa $n^{\underline{k}}$, pense que é o mesmo que uma simples exponenciação, exceto que a base diminui em vez de permanecer a mesma. Por exemplo, enquanto "17 à 6ª" é

$$17^6 = 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17,$$

o "fatorial descendente de 17 à 6ª" é

$$17^{\underline{6}} = 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12.$$

Em ambos os casos, você está multiplicando o mesmo número de termos, é simplesmente que, no segundo caso, estes termos estão "descendo".

De qualquer modo, à parte a notação, as permutações parciais são abundantes na prática. Um canal de cinema noturno pode exibir quatro filmes clássicos consecutivos todas as noites. Se houver 500 filmes na biblioteca do estúdio, quantas programações noturnas de TV são possíveis? Resposta: $500^{\underline{4}}$, uma vez que há 500 escolhas do que mostrar às 19 horas, depois 499 escolhas para as 21 horas, 498 para as 23 horas, e 497 para a exibição da 1 hora da manhã.

Os 41 automobilistas mais rápidos qualificar-se-ão para a corrida de domingo, e serão colocados a partir da Pole Position para trás, dependendo do seu tempo de qualificação. Se 60 carros participarem na qualificação, então há $60^{\underline{41}}$ diferentes configurações de largada possíveis para o domingo.

Aos alunos do ensino médio que entram no sexto ano será atribuído um horário semestral que consiste diariamente em cinco "blocos" (períodos), cada um dos quais terá uma das treze matérias (ciências, matemática, música, sala de estudos, etc.). Quantos horários diários são possíveis? Adivinhou, $13^{\underline{5}}$. Note que esta é a resposta correta apenas porque não são permitidas repetições: não queremos agendar nenhum aluno para História mais do que uma vez ao dia. Se um aluno pudesse ter a mesma matéria mais de uma vez por dia, então haveria 13^5 (e não "descendo") horários diários diferentes possíveis.

Permutações com Repetição

Em algumas situações desejamos contar o número de permutações de n objetos que não são todos distintos. Por exemplo, a palavra "inconstitucionalissimamente" tem 27 letras, mas as letras U e L não se repetem na palavra. Se pensarmos quantos embaralhamentos diferentes de letras podemos obter com essa palavra, a resposta não será

2 Essa notação foi introduzida no universo da computação por Donald Knuth, um dos mais brilhantes cientistas da computação da história, na sua obra clássica *The Art of Computer Programming* (Vol. 1, 3rd ed., p. 50).

27!, pois sempre que trocarmos apenas a posição de duas letras repetidas entre si obteremos a mesma sequência de letras.

De uma forma geral, dado uma sequência de n objetos dos quais há n_1 objetos idênticos do tipo 1, n_2 objetos idênticos do tipo 2, ..., n_k objetos idênticos do tipo k, quantas permutações distintas de objetos existem? Note que, neste caso, duas permutações são consideradas diferentes se, e somente se, dois objetos em alguma posição das permutações não são idênticos. Para cada uma dessas permutações, nós podemos permutar os n_1 objetos idênticos do tipo 1 de $n_1!$ formas diferentes. Uma vez que esses objetos são considerados idênticos, obtemos cada vez a mesma permutação. De maneira similar, podemos pegar cada uma das $n_2!$ permutações dos n_2 objetos idênticos do tipo 2 e obter permutações idênticas. Para levarmos em conta essas permutações repetidas, nós dividimos pelo número de repetições. Isso nos fornece o seguinte resultado para calcular o número total de permutações diferentes:

> O número de permutações de n objetos com n_1 objetos idênticos do tipo 1, n_2 objetos idênticos do tipo 2, ..., e n_k objetos idênticos do tipo k é
>
> $$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Note que no caso em que todos os objetos são distintos, nós temos $n_1 = n_2 = \ldots n_n = 1$, e usando a fórmula anterior chegamos ao mesmo resultado que tínhamos antes:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_n!} = \frac{n!}{1!1!\ldots 1!} = n!\ .$$

Combinações

Todo o material sobre permutações enfatizou a ordem. Alguém fica em primeiro lugar no torneio de xadrez, e outra pessoa fica em segundo, e você aposta o seu último centavo que é importante qual é qual. Mas e se acontecer que não nos importamos com a ordem? Talvez não nos importemos com quem ficou em que lugar, mas apenas com quais jogadores de xadrez ficaram entre os dez primeiros. Talvez não nos importemos qual o filme que está a ser exibido em que horário, mas apenas quais os filmes que estão na grade de filmes desta noite.

Este cenário de contagem envolve algo chamado combinações em vez de permutações. Uma **combinação** de k objetos dentre n objetos possíveis é uma escolha de qualquer conjunto de k deles, sem levar em conta a ordem. Por exemplo, suponha que as três crianças da família queiram jogar videogame, mas apenas dois podem jogar ao mesmo tempo. Quem irá jogar primeiro depois da escola? Uma possibilidade é Luísa e J.P., outra é Luísa e Zezinho, e a última é J.P. e Zezinho. Estas são as três (e únicas três) combinações de 2 objetos dentre 3.

Para ver como contá-las em geral, vamos voltar ao exemplo do torneio de xadrez. Suponhamos que, além de ganhar dinheiro, os três primeiros classificados do nosso torneio local também avançarão para o torneio regional. Isto é uma grande honra, e traz consigo um potencial de sucesso adicional muito maior do que o dinheiro do torneio local. Pergunta: quantos trios possíveis diferentes poderemos enviar para a competição regional?

À primeira vista, isto parece o mesmo problema de “quantas atribuições de prêmios em dinheiro” de antes, exceto que estamos tomando 3 em vez de 10. Mas há uma reviravolta. No primeiro problema, importava quem era o primeiro vs o segundo vs o terceiro. Agora *a ordem é irrelevante*. Se terminarmos nos três primeiros, avançamos, ponto final. Não se “avança com mais força” por terminar em primeiro lugar localmente em vez de terceiro.

Não é tão óbvio como contar isto, mas é claro que existe um truque. O truque é contar as permutações parciais, *mas depois verificarmos o quanto contamos em excesso, e então compensarmos em conformidade a isso*.

Se contarmos as permutações parciais de 3 dentre 45 jogadores de xadrez, temos $45^{\underline{3}}$ dessas permutações. Uma dessas permutações parciais é:

1. Filipe 2. Beatriz 3. Talita

Outra é:

1. Filipe 2. Talita 3. Beatriz

e outra ainda é:

1. Talita 2. Filipe 3. Beatriz

Agora o importante a reconhecer é que no nosso problema atual – contar o número de possíveis trios de xadrez regionais – todas estas três *diferentes* permutações parciais representam a *mesma combinação*. Nos três casos, são Beatriz, Filipe, e Talita que representarão a nossa associação local de xadrez no concurso regional. Assim, ao contar as três como permutações parciais separadas, contamos a mais as combinações.

Obviamente, queremos contar Beatriz/Filipe/Talita apenas uma vez. Está bem, então. Quantas vezes é que contamos em excesso quando contamos as permutações parciais? A resposta é que contamos este trio uma vez para cada forma que pode ser permutado. As três permutações, acima, foram exemplos disto, e o mesmo acontece com estas três:

1. Talita 2. Beatriz 3. Filipe
1. Beatriz 2. Talita 3. Filipe
1. Beatriz 2. Filipe 3. Talita

Isto faz um total de seis vezes que nós (redundantemente) contamos a mesma combinação quando contamos as permutações parciais. Porquê 6? Porque esse é o valor de 3!, claro. Existem 3! formas diferentes de organizar Beatriz, Filipe e Talita, uma vez que isso é apenas uma simples permutação de três elementos. E assim descobrimos que cada trio que queremos contabilizar, nós contamos 6 vezes.

A forma de obter a resposta correta é, portanto, corrigir esta contagem excessiva, dividindo por 6:

$$\frac{45^{\underline{3}}}{3!} = \frac{45 \times 44 \times 43}{6} = 14.190 \text{ trios diferentes.}$$

E em geral, é tudo o que temos de fazer. Encontrar o número de combinações de k coisas tiradas de um total de n coisas que possuímos:

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ combinações.}$$

Este padrão também surge tão frequentemente que os matemáticos inventaram (ainda) outra notação especial para ele. Parece um pouco estranho no início, quase como uma fração sem uma barra horizontal:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Isto é normalmente pronunciado "combinação de n k a k", ou simplesmente "n em k".

Mais uma vez, os exemplos abundam. Quantas mãos diferentes de pôquer de 5 cartas existem? Resposta: $\binom{52}{5}$, pois não importa em que ordem você possui as cartas, somente quais as 5 cartas que você recebeu. Se existem 1024 setores no nosso disco, mas apenas 256 blocos de cache na memória para os guardar, quantas combinações diferentes de setores podem estar na memória ao mesmo tempo? $\binom{1024}{256}$. Se quisermos escolher 4 ou 5 entre os nossos 10 melhores clientes para participar num grupo focal, quantas combinações diferentes de participantes podemos ter? $\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$, uma vez que queremos o número de maneiras de escolher 4 deles mais o número de maneiras de escolher 5 deles. E para o nosso canal de cinema noturno, claro, existem $\binom{500}{4}$ exibições de filmes possíveis para atrair audiências, se não nos importarmos que filme é exibido a que horas.

Coeficientes binomiais

A notação "combinação de n k a k" $\binom{n}{k}$ tem outro nome: os valores deste tipo são chamados de **coeficientes binomiais**. Isto porque uma forma de gerá-los, acreditem ou não, é multiplicar repetidamente um binômio por si próprio (ou, de forma equivalente, elevar um binômio a uma potência).

Um binômio, lembre-se, é um polinômio com apenas dois termos:

$$x + y.$$

Os coeficientes para este binômio são naturalmente 1 e 1, visto que "x" significa realmente "$1 \times x$". Agora, se multiplicarmos isto por ele próprio, obtemos:

$$(x + y) \times (x + y) = x^2 + 2xy + y^2 .$$

Os coeficientes dos termos são 1, 2, e 1. Fazemo-lo novamente:

$$(x^2 + 2xy + y^2) \times (x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 .$$

Obtendo 1, 3, 3 e 1, e novamente:

$$(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \times (x + y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 .$$

Obtendo agora 1, 4, 6, 4, 1.

Nesta altura, você poderá ter visões do triângulo de Pascal, que talvez tenha aprendido no ensino médio, em que cada entrada numa linha é a soma das duas entradas imediatamente acima (à esquerda e à direita), como na Figura 6.1. (Se nunca aprendeu isso, não se preocupe).

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Figura 1: As primeiras 7 linhas do triângulo de Pascal. [3]

Você pode agora estar a se perguntar onde quero chegar com isto. O que têm truques divertidos de álgebra a ver com a contagem de combinações de itens? A resposta é que os valores de $\binom{n}{k}$ são precisamente os coeficientes destes polinômios multiplicados. Seja *n* igual a 4, o que corresponde ao último polinômio que multiplicamos. Podemos então calcular todas as combinações de itens retirados de um grupo de quatro:

$$\binom{4}{0} = 1,\ \binom{4}{1} = 4,\ \binom{4}{2} = 6,\ \binom{4}{3} = 4,\text{ e } \binom{4}{4} = 1.$$

Em outras palavras, há exatamente uma forma de não tirar nenhum item de 4 (simplesmente não se tira nenhum). Há quatro maneiras de tirar um item de 4 – pode-se tirar o primeiro, ou o segundo, ou o terceiro, ou o quarto. Há seis maneiras de tirar dois itens de quatro; a saber:

1. o primeiro e o segundo
2. o primeiro e o terceiro
3. o primeiro e o quarto
4. o segundo e o terceiro
5. o segundo e o quarto
6. o terceiro e o quarto

E assim por diante.

Agora, estamos de certa forma numa tangente, uma vez que o fato dos valores *“n k a k”* serem os mesmos que os coeficientes binomiais é, sobretudo, apenas uma coincidência interessante. Mas o que quero realmente que reparem aqui – e o que o triângulo de Pascal mostra claramente – é a *simetria* dos coeficientes. Isto surpreende muitos estudantes. E se eu lhe perguntasse qual dos seguintes números é maior: $\binom{1000}{18}$ ou $\binom{1000}{982}$? A maioria dos estudantes supõe que o segundo destes números é muito maior. Na realidade, no entanto, ambos resultam em $\frac{1000!}{18!982!}$ e são portanto exatamente os mesmos. E no exemplo acima, vemos que $\binom{4}{0}$ é igual a $\binom{4}{4}$, e que $\binom{4}{1}$ é igual a $\binom{4}{3}$.

Por que é que isto acontece? Bem, você pode olhar para a fórmula de $\binom{n}{k}$ e ver como funciona algebricamente. Mas é bom ter também uma noção intuitiva do fenômeno. Eis como penso nisso. Volte para o exemplo das crianças da família e o videogame. Dissemos que havia três maneiras diferentes de escolher 2 crianças dentre as três da família para jogar videogame primeiro depois da escola. Em outras palavras, $\binom{3}{2} = 3$.

3 Créditos da Figura: Dimitrios Vrettos, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons.

Muito bem. Mas se pensarmos um pouco mais nisso, então veremos que também deve haver três maneiras diferentes de deixar de fora exatamente uma criança. Se mudarmos o que estamos contando de “combinações de jogadores” para “combinações de não-jogadores” – ambas devem ser iguais, uma vez que, vamos sempre particionar as crianças em jogadores e não-jogadores – então veremos que $\binom{3}{1}$ também tem de ser 3.

E isto é verdade em geral. Se houver $\binom{500}{4}$ combinações diferentes de quatro filmes, então há o mesmo número de combinações de 496 filmes, uma vez que $\binom{500}{4} = \binom{500}{496}$. Conceitualmente, no primeiro caso escolhemos um grupo de quatro e exibimo-los, e no segundo caso escolhemos um grupo de quatro e exibimos *tudo menos eles*. Ou seja, temos sempre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Note também que a forma de se obter o maior número de combinações de n itens é que k seja metade de n. Se tivermos 100 livros na nossa biblioteca, há muito mais formas de tomar emprestado 50 deles do que apenas 5, ou 95. Estranho mas verdadeiro.

Finalmente, certifique-se de compreender os pontos extremos deste fenômeno. $\binom{n}{0}$ e $\binom{n}{n}$ são sempre 1, não importa o que seja n. Isto porque se não se escolher nenhum item, não se tem escolha: só há uma maneira de se chegar ao vazio. E se escolhermos todos os itens, também não temos escolha: somos forçados a escolher tudo.

Resumo

Na maioria das vezes, os problemas de contagem resumem-se todos a uma variação de uma das três situações básicas seguintes:

- n^k – Isto é quando temos k coisas diferentes, cada uma das quais é livre para assumir uma das n escolhas de maneira completamente independente.
- $n^{\underline{k}}$ – Isto é quando estamos tirando uma sequência de k coisas diferentes de um conjunto de n coisas, mas não são permitidas repetições. (Um caso especial disto é $n!$, quando $k = n$.)
- $\binom{n}{k}$ – Isto é quando estamos tirando k coisas diferentes de um conjunto de n, mas a ordem não importa.

Por vezes é complicado deduzir exatamente qual destas três situações se aplica. É preciso pensar cuidadosamente sobre o problema, e perguntar a si próprio se seriam permitidos valores repetidos, e se importa em que ordem os valores aparecem. Isto é frequentemente sutil.

Como exemplo, suponhamos que eu e um amigo nos exercitamos na mesma academia. Esta academia tem 18 máquinas de musculação diferentes à escolha, cada uma das quais exercita um grupo de músculos diferente. Toda manhã, cada um de nós faz uma sessão de exercícios rápida de 30 minutos dividida em seis blocos de 5 minutos, e utilizamos uma das máquinas durante cada bloco. Um dia, este meu amigo pergunta-me: “Olá Sérgio, alguma vez já te perguntaste: quantas sessões diferentes de exercícios são possíveis para nós?”

Eu estava, é claro, imaginando exatamente isso. Mas a resposta correta acaba por se revelar muito dependente do que é exatamente “uma sessão de exercícios”. Se pudéssemos selecionar qualquer máquina de musculação para qualquer bloco de 5 minutos, então a resposta é 18^6, uma vez que temos 18 escolhas para o nosso primeiro bloco, 18 escolhas para o nosso segundo, e assim por diante. (Isto corresponde a 34.012.224 sessões diferentes, se estiver curioso).

No entanto, numa inspeção posterior, poderemos mudar de opinião sobre isto. Será que faz sentido escolher a mesma máquina mais do que uma vez numa sessão de 30 minutos de exercícios? Será que realmente faríamos uma sessão que consistisse em “1.Bíceps 2.Tríceps, 3.Adutores, 4.Bíceps, 5.Bíceps, 6.Bíceps”? Se não (e a maioria dos instrutores recomendaria provavelmente contra tais abordagens monomaníacas de exercício) então a verdadeira resposta é apenas $18^{\underline{6}}$, uma vez que temos 18 escolhas para o nosso primeiro bloco, e depois apenas 17 para o segundo, 16 para o terceiro, etc. (Isto reduz o total para 13.366.080).

Mas talvez a frase “uma sessão de exercícios” signifique algo diferente até mesmo disso. Se eu disser ao meu fisioterapeuta em que consistiu “a minha rotina de exercícios” desta manhã, será que ele se importa realmente se eu fiz tríceps primeiro, por último, ou no meio? Ele provavelmente só se preocupa com *quais foram as máquinas* (e portanto que grupos musculares) eu trabalhei naquela manhã, e não em que ordem as fiz. Se isto for verdade, então a nossa definição de uma sessão de exercícios é um pouco diferente da acima referida. Já não é uma sequência consecutiva de escolhas de máquinas, mas sim um conjunto de seis escolhas de máquinas. Haveria apenas $\binom{18}{6}$ dessas, ou seja, apenas 18.564. Portanto, como pode ver, a resposta depende radicalmente da interpretação precisa dos conceitos, o que significa que para praticar a combinatória com sucesso, é necessário ter calma e pensar muito cuidadosamente.

Créditos

Todas as seções, com exceção da seção “Permutações com Repetição” foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [1], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

Referências

1. Davies, Stephen. *A Cool Brisk Walk Through Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.allthemath.org/vol-i/ .

Licença