# Capítulo 7: Introdução à Lógica Formal e Demonstrações

Quando falamos sobre afirmações matemáticas, no Capítulo 1, vimos que consideramos sentenças declarativas, que podem ser atômicas ou moleculares (compostas). Essas últimas, combinam outras declarações menores, através de conectivos. Os conectivos são todos verofuncionais, de tal maneira que a veracidade, ou valor-verdade, de uma declaração é determinada pelo valor-verdade de suas partes, dependendo dos conectivos. Os conectivos lógicos são representados por símbolos, a saber: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ .

**Conectivos Lógicos**

- $P \wedge Q$ lê-se "$P$ e $Q$", e chama-se uma conjunção. $P$ e $Q$ são os conjuntores.
- $P \vee Q$ lê-se "$P$ ou $Q$", e chama-se uma disjunção. $P$ e $Q$ são os disjuntores.
- $P \Rightarrow Q$ lê-se "se $P$ então $Q$", e chama-se uma implicação ou condicional. $P$ é o antecedente e $Q$ é o consequente.
- $P \Leftrightarrow Q$ lê-se "$P$ se e somente se $Q$", e chama-se um bicondicional.
- $\neg P$ lê-se "não $P$", e chama-se uma negação.

O valor-verdade dos conectivos é o seguinte:

**Condições de Verdade para os Conectivos.**

- $P \wedge Q$ é verdade quando tanto $P$ como $Q$ são verdadeiras.
- $P \vee Q$ é verdadeira quando $P$ ou $Q$ ou ambas são verdadeiras.
- $P \rightarrow Q$ é verdadeira quando $P$ é falsa ou $Q$ é verdadeira ou ambas.
- $P \leftrightarrow Q$ é verdadeira quando $P$ e $Q$ são ambas verdadeiras, ou ambas são falsas.
- $\neg P$ é verdadeira quando $P$ é falsa.

Note que para nós, o ou é o "ou inclusivo" (e não o, por vezes utilizado, "ou exclusivo"), significa que $P \vee Q$ é verdadeira quando ambas $P$ e $Q$ são verdadeiras. Quanto aos outros conectivos, "e" comporta-se como seria de se esperar, tal como a negação. O bicondicional (se e somente se) pode parecer um pouco estranho, mas você deve pensar nisto como dizendo que os dois lados são equivalentes na medida em que têm o mesmo valor-verdade. Assim, resta apenas o condicional $P \Rightarrow Q$ que tem um significado ligeiramente diferente em matemática do que no uso corrente. Contudo, as implicações são tão comuns e úteis em matemática, que temos de desenvolver fluência com a sua utilização, e como tal, merecem a sua própria subseção.

## 7.1. Implicações

Uma **implicação** ou **condicional** é uma declaração molecular da forma

$$P \Rightarrow Q$$

onde $P$ e $Q$ são declarações. Dizemos que

- $P$ é a **hipótese** (ou **antecedente**).
- $Q$ é a **conclusão** (ou **consequente**).

Uma implicação é verdadeira desde que $P$ seja falsa ou $Q$ seja verdadeira (ou ambas), e falsa em caso contrário. Em particular, a única forma de $P \Rightarrow Q$ ser falsa é $P$ ser verdadeira e $Q$ ser falsa.

Facilmente o tipo de afirmação mais comum em matemática é a implicação. Mesmo afirmações que, à primeira vista, não parecem ter esta forma escondem uma implicação no seu coração. Consideremos o *Teorema de Pitágoras*. Muitos calouros universitários citariam este teorema como "$a^2 + b^2 = c^2$". Isto é totalmente incorreto. Para começar, isto não é uma afirmação, uma vez que tem três variáveis livres nela. Talvez impliquem que isto deveria ser verdade para quaisquer valores das variáveis? Então $1^2 + 5^2 = 2^2$??? Como podemos corrigir isto? Bem, a equação é verdadeira desde que $a$ e $b$ sejam os catetos de um triângulo retângulo e $c$ seja a hipotenusa. Em outras palavras:

> Se $a$ e $b$ são os catetos de um triângulo retângulo com hipotenusa $c$, então $a^2 + b^2 = c^2$.

Esta é uma forma razoável de pensar sobre implicações: a nossa afirmação é que a conclusão (parte "então") é verdadeira, mas no pressuposto de que a hipótese (parte "se") é verdadeira. Não reivindicamos a conclusão em situações em que a hipótese é falsa.

Ainda assim, é importante lembrar que uma implicação é uma afirmação, e portanto ou é verdadeira ou falsa. O valor-verdade da implicação é determinado pelos valores-verdade das suas duas partes. Para concordar com a utilização acima, dizemos que uma implicação é verdadeira ou quando a hipótese é falsa, ou quando a conclusão é verdadeira. Isto deixa apenas uma forma de uma implicação ser falsa: quando a hipótese é verdadeira e a conclusão é falsa.

### Exemplo 7.1.1

Considere a declaração:

> Se Bob receber um 90 na final, então Bob será aprovado na disciplina.

Isto é definitivamente uma implicação: P é a afirmação "Bob recebe um 90 na final", e Q é a afirmação "Bob será aprovado na disciplina".

Suponha que eu fiz essa declaração ao Bob. Em que circunstâncias seria justo chamar-me de mentiroso? E se Bob conseguisse realmente um 90 na final, e passasse na disciplina? Então eu não menti; a minha declaração é verdadeira. No entanto, se Bob obteve um 90 na final e não passou na disciplina, então eu menti, tornando a declaração falsa. O caso complicado é este: e se Bob não obteve um 90 na final? Talvez ele passe na final, talvez não passe. Terei mentido em algum dos casos? Penso que não. Nestes dois últimos casos, P foi falso, e a declaração P ⇒ Q foi verdadeira. No primeiro caso, Q era verdadeiro, assim como P ⇒ Q. Então P ⇒ Q é verdadeiro quando ou P é falso ou Q é verdadeiro.

Só para ser claro, embora por vezes lemos $P \Rightarrow Q$ como "$P$ implica $Q$", não estamos insistindo que existe alguma relação causal entre as declarações $P$ e $Q$. Em particular, se você afirma que $P \Rightarrow Q$ é falso, não está dizendo que $P$ não implica $Q$, mas sim que $P$ é verdadeiro e $Q$ é falso.

**Exemplo 7.1.2**

Decida quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas. Explique sucintamente.

1. Se 1 = 1, então a maioria dos cavalos tem 4 patas.
2. Se 0 = 1, então 1 = 1.
3. Se 8 é um número primo, então o 7624º dígito de π é um 8.
4. Se o 7624º dígito de π é um 8, então 2 + 2 = 4.

**Solução.** Todas as quatro afirmações são verdadeiras. Lembre-se, a única forma de uma implicação ser falsa é a parte "se" ser verdadeira e a parte "então" ser falsa.

1. Aqui tanto a hipótese como a conclusão são verdadeiras, portanto a implicação é verdadeira. Não importa que não haja uma ligação significativa entre o fato matemático verdadeiro e o fato sobre os cavalos.
2. Aqui a hipótese é falsa e a conclusão é verdadeira, por isso a implicação é verdadeira.
3. Não tenho ideia do que é o 7624º dígito de π, mas isto não importa. Uma vez que a hipótese é falsa, a implicação é automaticamente verdadeira.
4. Da mesma forma aqui, independentemente do valor-verdade da hipótese, a conclusão é verdadeira, fazendo com que a implicação seja verdadeira.

É importante compreender as condições em que uma implicação é verdadeira não só para decidir se uma afirmação matemática é verdadeira, mas também para provar que ela é verdadeira. As provas podem parecer assustadoras (especialmente se tivermos tido uma má experiência de geometria no ensino médio), mas tudo o que estamos realmente fazendo é explicar (com muito cuidado) porque é que uma afirmação é verdadeira. Se você compreender as condições de verdade para uma implicação, você já tem o esboço para uma prova.

**Prova Direta para Implicações.**

Para provar uma implicação $P \Rightarrow Q$, basta assumir $P$, e a partir daí, deduzir $Q$.

Talvez uma melhor maneira de dizer isto seja que para provar uma declaração no formato P ⇒ Q diretamente, é necessário explicar porque é que Q é verdade, mas primeiro é preciso assumir que P é verdade. Afinal de contas, você só se interessa se Q é verdade no caso de P também o ser.

Existem outras técnicas para provar declarações (implicações e outras) que iremos encontrar em breve, e novas técnicas de prova são descobertas a toda a hora. Entretanto, a prova direta é o estilo de prova mais fácil e elegante e tem a vantagem de que tal prova faz muitas vezes um grande trabalho de explicação da razão pela qual a afirmação é verdadeira.

### Exemplo 7.1.3

Prove: Se dois números $a$ e $b$ são pares, então a sua soma $a + b$ é par.

**Demonstração.** Suponha que os números $a$ e $b$ são pares. Isto significa que $a = 2k$ e $b = 2j$ para algum par de números inteiros $k$ e $j$. A soma é então $a + b = 2k + 2j = 2(k + j)$. Uma vez que $k + j$ é um número inteiro, isto significa que $a + b$ é par. ■

Note que, uma vez que podemos assumir a hipótese da implicação, temos de imediato um lugar por onde começar. A prova procede essencialmente perguntando e respondendo repetidamente, "o que significa isso?" Eventualmente, concluímos que isso significa a conclusão.

Este tipo de argumento aparece também fora da matemática. Se alguma vez você se viu a começar um argumento com "hipoteticamente, vamos assumir ...", então você tentou uma prova direta da sua conclusão desejada.

Uma implicação é uma forma de expressar uma relação entre duas afirmações. É muitas vezes interessante perguntar se existem outras relações entre as afirmações. Aqui introduzimos um pouco da linguagem comum para abordar esta questão.

### Recíproca e Contrapositiva.

- A **recíproca** de uma implicação $P \Rightarrow Q$ é a implicação $Q \Rightarrow P$. A recíproca NÃO é logicamente equivalente à implicação original. Ou seja, se a recíproca de uma implicação é verdadeira é independente da veracidade da implicação.
- A **contrapositiva** de uma implicação $P \Rightarrow Q$ é a declaração $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Uma implicação e a sua contrapositiva são logicamente equivalentes (ou são ambas verdadeiras ou ambas falsas).

A matemática está repleta de exemplos de implicações verdadeiras que têm uma recíproca falsa. Se um número superior a 2 é primo, então esse número é ímpar. No entanto, só porque um número é ímpar não significa que seja primo. Se uma forma é um quadrado, então é um retângulo. Mas é falso que, se uma forma é um retângulo, então é um quadrado.

No entanto, por vezes a recíproca de uma afirmação verdadeira também é verdade. Por exemplo, o teorema de Pitágoras tem uma recíproca verdadeira: se $a^2 + b^2 = c^2$, então o triângulo com os lados $a$, $b$, e $c$ é um triângulo retângulo. Sempre que você encontrar uma implicação na matemática, é sempre razoável perguntar se a recíproca é verdadeira.

O contrapositivo, por outro lado, tem sempre o mesmo valor-verdade que a sua implicação original. Isto pode ser muito útil para decidir se uma implicação é verdadeira: muitas vezes é mais fácil analisar o contrapositivo.

### Exemplo 7.1.4

Verdadeiro ou falso: Se você tirar quaisquer nove cartas de um baralho normal, então terá pelo menos três cartas, todas do mesmo naipe. A recíproca é verdadeira?

**Solução.**

Verdadeiro. A implicação original é um pouco difícil de analisar porque há tantas combinações diferentes de nove cartas. Mas considere o contrapositivo: Se não tiver pelo menos três cartas do mesmo naipe, então não tem nove cartas. É fácil ver porque é que isto é verdade: você pode ter no máximo duas cartas de cada um dos quatro naipes, para um total de oito cartas (ou menos).

A recíproca: Se tiver pelo menos três cartas do mesmo naipe, então tem nove cartas. Isto é falso. Você pode ter três espadas e nada mais. Note que para demonstrar que a recíproca (uma implicação) é falsa, fornecemos um exemplo onde a hipótese é verdadeira (tem três cartas do mesmo naipe), mas onde a conclusão é falsa (você não tem nove cartas).

A compreensão de recíprocas e contrapositivos pode ajudar a compreender as implicações e os seus valores-verdade:

## Exemplo 7.1.5

Suponha que eu digo à Sueli que se ela conseguir 93% na sua prova, então ela terá um A na disciplina. Assumindo que o que eu disse é verdade, o que se pode concluir nos seguintes casos:

1. Sueli obtém 93% na sua prova.
2. Sueli recebe um A na disciplina.
3. Sueli não obtém 93% na sua prova.
4. Sueli não recebe um A na disciplina.

**Solução.** Note primeiro que sempre que $P \Rightarrow Q$ e $P$ forem ambas declarações verdadeiras, $Q$ deve também ser verdade. Para este problema, considere $P$ como significando "Sueli recebe um 93% na sua prova" e $Q$ como significando "Sueli receberá um A na disciplina".

1. Temos $P \Rightarrow Q$ e $P$, portanto $Q$ segue-se. Sueli recebe um A.
2. Não se pode concluir nada. Sueli poderia ter obtido o A porque ela fez um crédito extra, por exemplo. Note-se que não sabemos que se Sueli receber um A, então ela obteve um 93% na sua final. Este é o inverso da implicação original, por isso pode ou não ser verdade.
3. O contrapositivo da recíproca de $P \Rightarrow Q$ é $\neg P \Rightarrow \neg Q$, que afirma que se Sueli não obtiver um 93% na final, então ela não obterá um A na classe. Mas isto não decorre da implicação original. Mais uma vez, não podemos concluir nada. A Sueli poderia ter feito um crédito extra.
4. O que aconteceria se a Sueli não obtivesse um A mas recebesse um 93% na final? Então o $P$ seria verdadeiro e o $Q$ seria falso. Isto faz com que a implicação $P \Rightarrow Q$ seja falsa! É preciso que a Sueli não tenha obtido um 93% na final. Note que temos agora a implicação $\neg Q \Rightarrow \neg P$ que é a contrapositiva de $P \Rightarrow Q$. Uma vez que $P \Rightarrow Q$ é assumida como verdadeira, sabemos que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ também é verdadeira.

Como dissemos acima, uma implicação não é logicamente equivalente à sua recíproca, mas é possível que tanto a implicação como a sua recíproca sejam verdadeiras. Neste caso, quando tanto $P \Rightarrow Q$ como $Q \Rightarrow P$ são verdadeiras, dizemos que P e Q são equivalentes e escrevemos P ⇔ Q. Este é o bicondicional que mencionamos anteriormente.

**Se somente se.**

$$P \Leftrightarrow Q \text{ é logicamente equivalente a } (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

Exemplo: Dado um número inteiro $n$, é verdade que $n$ é par se e somente se $n^2$ for par. Ou seja, se $n$ é par, então $n^2$ é par, assim como o inverso: se $n^2$ é par, então $n$ é par.

Você pode pensar em declarações "se e somente se" como tendo duas partes: uma implicação e a sua recíproca. Poderíamos dizer que uma é a parte "se", e a outra é a parte "somente se". Também podemos dizer que as declarações "se e somente se" têm duas direções: uma direção para a frente ($P \Rightarrow Q$) e uma direção para trás ($P \Leftarrow Q$, que é, na verdade, apenas uma notação descuidada para $Q \Rightarrow P$).

Pensemos um pouco sobre que parte é qual. Será $P \Rightarrow Q$ a parte "se" ou a parte "somente se"? Considere um exemplo.

**Exemplo 7.1.6**

Suponha que é verdade que eu canto se e somente se estiver no chuveiro. Sabemos que isto significa que se eu cantar, então estou no chuveiro, e também o inverso, que se estou no chuveiro, então canto. Seja $P$ a afirmação, "Eu canto," e $Q$ seja, "Estou no chuveiro". Assim $P \Rightarrow Q$ é a afirmação "se eu cantar, então estou no chuveiro". Que parte da declaração "se e somente se" é essa?

O que estamos na realidade perguntando é o significado de "Eu canto se estou no chuveiro" e "Eu canto apenas se estou no chuveiro". Quando é que a primeira (a parte do "se") é falsa? Quando estou no chuveiro mas não estou a cantar. Essa é a mesma condição de ser falsa que a declaração "se estou no chuveiro, então eu canto". Então a parte "se" é $Q \Rightarrow P$. Por outro lado, dizer "só canto se estou no chuveiro" é equivalente a dizer "se estou a cantar, então estou no chuveiro", então a parte "somente se" é $P \Rightarrow Q$.

Não é muito importante saber que parte é a parte "se" ou "somente se", mas isto ilustra algo muito, muito importante: *há muitas maneiras de afirmar uma implicação!*

**Exemplo 7.1.7**

Reformule a implicação, "se eu sonho, então estou dormindo" de tantas maneiras diferentes quanto possível. Depois faça o mesmo para a recíproca.

**Solução.** As frases seguintes são todas equivalentes à implicação original:

1. Estou dormindo, se sonhar.
2. Sonho apenas se estiver dormindo.
3. Para poder sonhar, tenho de estar dormindo.

4. Para sonhar, é necessário que eu esteja dormindo.
5. Para dormir, é suficiente sonhar.
6. Não estou sonhando a menos que esteja dormindo.

As frases seguintes são equivalentes à recíproca (se estou dormindo, então sonho):

1. Eu sonho se estou dormindo.
2. Só estou dormindo se estiver sonhando.
3. É necessário que eu sonhe para estar dormindo.
4. É suficiente que eu esteja dormindo para poder sonhar.
5. Se eu não sonhar, então não estou dormindo.

Tomara que você concorde com o exemplo acima. Incluímos as versões "necessárias e suficientes" porque estas são comuns quando se discute matemática. De fato, vamos concordar de uma vez por todas com o seu significado.

**Necessária e Suficiente.**

- "$P$ é necessária para $Q$" significa que $Q \Rightarrow P$.
- "$P$ é suficiente para $Q$" significa que $P \Rightarrow Q$.
- Se $P$ é necessária e suficiente para $Q$, então $P \Leftrightarrow Q$.

Para ser honesto, tenho problemas com isto se não for muito cuidadoso. Acho que ajuda ter um exemplo padrão para referência.

**Exemplo 7.1.8**

Relembrando do Cálculo, se uma função é diferenciável num ponto $c$, então é contínua em $c$, mas o inverso desta afirmação não é verdadeiro (por exemplo, $f(x) = |x|$ no ponto 0). Reafirme este fato utilizando uma linguagem do tipo "necessário e suficiente".

É verdade que para que uma função seja diferenciável num ponto $c$, é necessário que a função seja contínua em $c$. No entanto, não é necessário que uma função seja diferenciável em $c$ para que seja contínua em $c$.

É verdade que para ser contínua em $c$, é suficiente que a função seja diferenciável em $c$. No entanto, não é o caso que ser contínua em $c$ seja suficiente para que uma função seja diferenciável em $c$.

Pensar acerca de condições de necessidade e suficiência pode também ajudar a escrever demonstrações e a justificar conclusões. Se você quiser estabelecer algum fato matemático, é útil pensar que outros fatos seriam capazes de provar o seu fato (serem suficientes). Se tiver uma hipótese, pense no que também deve ser necessário se essa hipótese for verdadeira.

## 7.2. Predicados e Quantificadores

Seria conveniente utilizar variáveis nas nossas sentenças matemáticas. Por exemplo, suponha que queremos afirmar que se $n$ é primo, então $n + 7$ não é primo. Isto parece ser uma implicação. Eu gostaria de escrever algo como

$$P(n) \Rightarrow \neg P(n + 7)$$

onde $P(n)$ significa "$n$ é primo". Mas isto não está totalmente correto. Por um lado, porque esta sentença tem uma **variável livre** (ou seja, uma variável sobre a qual não especificamos nada), logo não é uma afirmação. Uma sentença que contém variáveis é chamada de **predicado**.

Agora, se plugarmos um valor específico para $n$, obtemos uma declaração. De fato, acontece que, independentemente do valor que plugarmos para $n$, obtemos uma verdadeira implicação neste caso. O que realmente queremos dizer é que *para todos os valores de $n$*, se n é primo, então $n + 7$ não é. Precisamos de *quantificar* a variável.

Embora existam muitos tipos de *quantificadores* na linguagem natural (por exemplo, muitos, poucos, a maioria, etc.) em matemática, nós, quase sempre, limitamo-nos a dois: o existencial e o universal.

**Quantificadores Existenciais e Universais.**

O quantificador existencial é ∃ e lê-se "existe" ou "há". Por exemplo,

$$\exists x(x < 0)$$

afirma que há um número inferior a 0.

O quantificador universal é ∀ e é lido "para todos" ou "todos". Por exemplo,

$$\forall x(x \geq 0)$$

afirma que todo número é maior ou igual a 0.

Como com todas as afirmações matemáticas, gostaríamos de decidir se as afirmações quantificadas são verdadeiras ou falsas. Considere a afirmação

$$\forall x \exists y(y < x).$$

Você leria isto assim, "para todo $x$ há algum $y$ tal que $y$ é menor do que $x$". Será que isto é verdade? A resposta depende de qual é o nosso domínio do discurso: quando dizemos "para todo" $x$, queremos dizer todos os inteiros positivos ou todos os números reais, ou todos os elementos de algum outro conjunto? Normalmente, esta informação está implícita. Na matemática discreta, quase sempre quantificamos sobre os números naturais, 0, 1, 2, …, portanto, tomemos aqui isso como o nosso domínio do discurso.

Para que a afirmação seja verdadeira, precisamos que aconteça que, independentemente do número natural que selecionamos, há sempre algum número natural que é estritamente menor que ele. Talvez pudéssemos fazer com que $y$ fosse $x - 1$? Mas aqui está o problema: e se $x = 0$? Então $y = -1$ e isso não é um número! (no nosso domínio do discurso). Assim, vemos que a afirmação é falsa porque existe um número que é inferior ou igual a todos os outros números. Em símbolos,

$$\exists x \forall y (y \geq x).$$

Para mostrar que a afirmação original é falsa, provamos que a negação era verdadeira. Repare como a negação e a declaração original se relacionam. Isto é típico.

**Quantificadores e Negação.**

$\neg \forall x P(x)$ é equivalente a $\exists x \neg P(x)$.

$\neg \exists x P(x)$ é equivalente a $\forall x \neg P(x)$.

Essencialmente, podemos passar o símbolo de negação por cima de um quantificador, mas isso faz com que o quantificador troque de tipo. Isto não deve ser surpreendente: se nem tudo tem uma propriedade, então algo não tem essa propriedade. E se não houver algo com uma propriedade, então tudo não tem essa propriedade.

**Quantificadores implícitos.** É sempre uma boa ideia ser preciso em matemática. Por vezes, porém, podemos relaxar um pouco, desde que todos estejamos de acordo numa convenção. Um exemplo de tal convenção é assumir que as sentenças contendo predicados com variáveis livres são consideradas como afirmações, pois todas as variáveis livres são assumidas como universalmente quantificadas.

Por exemplo, você acredita que se uma forma é um quadrado, então é um retângulo? Mas como pode isso ser verdade se não é uma afirmação? Para ser um pouco mais preciso, temos dois predicados: $S(x)$ que significa "$x$ é um quadrado" e $R(x)$ que significa "$x$ é um retângulo". A sentença que estamos analisando é,

$$S(x) \Rightarrow R(x).$$

Isto não é verdadeiro nem falso, pois não é uma afirmação. Mas vamos lá! Todos nós sabemos que pretendemos considerar a declaração,

$$\forall x (S(x) \Rightarrow R(x)),$$

e é isto que a nossa convenção nos diz para considerar.

Do mesmo modo, seremos frequentemente um pouco descuidados quanto à distinção entre um predicado e uma afirmação. Por exemplo, podemos escrever, seja $P(n)$ a afirmação, "n é primo", o que é tecnicamente incorreto. Está implícito que estamos a definir $P(n)$ como sendo um predicado, que para cada n se torna a afirmação, $n$ é primo.

## 7.3. Lógica Proposicional

Em lógica, uma **proposição** é uma ideia expressa por uma sentença afirmativa. Na lógica proposicional nossas sentenças afirmativas são formadas por letras proposicionais (sentenças atômicas, tais como, $A$, $B$, $P$, $Q$), conectivos ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ ), e parênteses. Quando usamos a linguagem formal da lógica proposicional para escrevermos nossas sentenças afirmativas, estas não possuem nenhuma ambiguidade, ou seja, para cada sentença afirmativa (ou declaração) *corresponde exatamente uma proposição*. Dessa maneira, *no contexto da lógica proposicional* (bem como na *lógica de predicados*, que mencionaremos em breve), podemos tratar proposição e sentença como termos intercambiáveis. Dessa forma, a Lógica Proposicional também é conhecida como **Lógica Sentencial**.

A lógica proposicional estuda as formas como as declarações podem interagir umas com as outras. É importante lembrar que a lógica proposicional não se preocupa realmente com o conteúdo das afirmações. Por exemplo, em termos de lógica proposicional, as afirmações, “se a lua é feita de queijo, então as bolas de basquete são redondas”, e “se as aranhas têm oito pernas, então Samuel caminha mancando” são exatamente as mesmas, quanto à sua forma. Ambas são implicações: declarações da forma, $P \Rightarrow Q$.

### 7.3.1 Tabelas-verdade

Frequentemente temos de decidir quando uma proposição, como por exemplo (P ⇒ Q) ∨ (Q ⇒ R), é verdadeira. Utilizando as definições dos conectivos que relembramos no começo desse capítulo, vemos que para que isto seja verdade, ou P ⇒ Q deve ser verdade ou Q ⇒ R deve ser verdade (ou ambas). Estas, por sua vez, são verdadeiras se P for falsa ou Q for verdadeira (no primeiro caso) e Q for falsa ou R for verdadeira (no segundo caso). Assim, fica um pouco confuso. Felizmente, podemos lançar mão de uma forma de representação para acompanhar todas as possibilidades. Entram em jogo as tabelas-verdade. A ideia é esta: em cada linha, listamos uma possível combinação de V's e F's (para verdadeiro e falso) para cada uma das letras sentenciais, e depois escrevemos se a afirmação em questão é verdadeira ou falsa nesse caso. Fazemos isto para cada combinação possível de V's e F's. Depois podemos ver claramente em que casos a afirmação é verdadeira ou falsa. Para declarações complicadas, vamos primeiro preencher valores para cada parte da declaração, como forma de dividir a nossa tarefa em partes menores e mais manejáveis.

Uma vez que o valor-verdade de uma afirmação é completamente determinada pelos valores-verdade das suas partes e pela forma como estão ligadas, tudo o que é realmente necessário saber são as tabelas-verdade para cada um dos conectivos lógicos. Aqui estão elas:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | T |
| F | F | T |

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | T |

A tabela-verdade para negação é a seguinte:

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Nenhuma destas tabelas de verdade deve ser uma surpresa; todas elas estão apenas reafirmando as definições dos conectivos. Vamos tentar outra.

### Exemplo 7.3.1

Faça uma tabela-verdade para a afirmação $\neg P \vee Q$.

**Solução.** Note que esta declaração não é $\neg(P \vee Q)$, a negação pertence apenas a $P$. Aqui está a tabela-verdade:

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

Acrescentamos uma coluna para $\neg P$ para facilitar o preenchimento da última coluna. As entradas na coluna $\neg P$ foram determinadas pelas entradas na coluna $P$. Depois, para preencher a última coluna, olhamos apenas para a coluna para $Q$ e a coluna para $\neg P$ e utilizamos a regra para o $\vee$.

### Exemplo 7.3.2

Analise, usando tabelas-verdade, a afirmação "Se a lua for feita de queijo então Elvis ainda está vivo, ou então, se Elvis ainda está vivo, unicórnios têm 5 patas".

**Solução.** Primeiramente transcreva a afirmação na linguagem da lógica proposicional, ou seja, por símbolos como $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R)$, onde $P$ representa "a lua é feita de queijo", $Q$ é "Elvis ainda está vivo", e $R$ é a afirmação "unicórnios têm 5 patas". Agora faça uma tabela-verdade.

A tabela-verdade precisa conter 8 linhas para poder levar em conta toda combinação possível dos valores verdade de P, Q e R. Aqui está a tabela-verdade completa:

| $P$ | $Q$ | R | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow$ R | (P ⇒ Q) ∨ (Q ⇒ R) |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | V |
| V | F | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | F | V |
| F | F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V |

As três primeiras colunas são simplesmente uma listagem sistemática de todas as combinações possíveis de $V$ e $F$ para as três letras sentenciais (você enxerga como listaria as 16 combinações possíveis para quatro letras?). As duas colunas seguintes são determinadas pelos valores de $P$, $Q$, e $R$ e pela definição da implicação. Então, a última coluna é determinada pelos valores das duas colunas anteriores e pela definição do ∨. É com esta última coluna que nos importamos.

Note que em cada um dos oito casos possíveis, a afirmação em questão é verdadeira. Portanto, a nossa afirmação sobre a lua, Elvis e unicórnios é verdadeira (independentemente de que seja feita a lua, se Elvis morreu, ou quantas patas têm os unicórnios).

A afirmação acima é um exemplo de uma **verdade lógica** (ou **tautologia**), uma afirmação que é verdadeira apenas com base na sua forma lógica. As tautologias são sempre verdadeiras, mas não nos dizem muito sobre o mundo. Não foi necessário qualquer conhecimento sobre a veracidade das sentenças atômicas que a compõe para determinar que a afirmação era verdadeira.

### 7.3.2 Equivalência Lógica

Você pode ter notado no Exemplo 7.3.1 que a coluna final na tabela-verdade para $\neg P \vee Q$ é idêntica à coluna final na tabela-verdade para $P \Rightarrow Q$:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

Isto nos diz que não importa o que são $P$ e $Q$, as declarações $\neg P \vee Q$ e $P \Rightarrow Q$ ou são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Por conseguinte, dizemos que estas afirmações são logicamente equivalentes.

**Equivalência Lógica.**

Duas declarações (moleculares) $P$ e $Q$ são logicamente equivalentes, na condição de $P$ ser verdadeiro exatamente quando $Q$ for verdadeiro. Ou seja, $P$ e $Q$ têm o mesmo valor-verdade sob qualquer atribuição de valores-verdade às suas partes atômicas.

Para verificar se duas afirmações são logicamente equivalentes, pode-se fazer uma tabela-verdade para cada uma e verificar se as colunas para as duas afirmações são idênticas.

O reconhecimento de duas afirmações como logicamente equivalentes pode ser muito útil. Reescrever uma declaração matemática pode muitas vezes dar uma ideia mais clara do que se está dizendo, ou como prová-la ou refutá-la. Utilizando tabelas-verdade, podemos verificar sistematicamente que duas afirmações são de fato logicamente equivalentes.

## Exemplo 7.3.3

As declarações, “não vai chover ou nevar” e “não vai chover e não vai nevar” são logicamente equivalentes?

**Solução.** Queremos saber se $\neg(P \vee Q)$ é logicamente equivalente a $\neg P \wedge \neg Q$. Faça uma tabela-verdade que inclua ambas as afirmações:

| $P$ | $Q$ | $\neg(P \vee Q)$ | $\neg P \wedge \neg Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | F |
| V | F | F | F |
| F | V | F | F |
| F | F | V | V |

Uma vez que em cada linha os valores-verdade para as duas declarações são iguais, as duas declarações são logicamente equivalentes.

Note que este exemplo nos dá uma forma de “distribuir” uma negação sobre uma disjunção (um “ou”). Temos uma regra semelhante para distribuir sobre conjunções (“e”s):

## Leis de De Morgan.

$\neg(P \wedge Q)$ é logicamente equivalente a $\neg P \vee \neg Q$.

$\neg(P \vee Q)$ é logicamente equivalente a $\neg P \wedge \neg Q$.

Isto sugere que pode haver uma espécie de “álgebra” que se pode aplicar a declarações (está bem, há: chama-se *álgebra booleana*) para transformar uma declaração em outra. Podemos começar a reunir exemplos úteis de equivalência lógica, e aplicá-los sucessivamente a uma afirmação, em vez de escrevermos uma complicada tabela-verdade.

As leis de De Morgan não nos ajudam diretamente com implicações, mas como vimos acima, cada implicação pode ser escrita como uma disjunção:

**Implicações são Disjunções.**

$$P \Rightarrow Q \text{ é logicamente equivalente a } \neg P \vee Q.$$

Exemplo: "Se um número é um múltiplo de 4, então é par" é equivalente a, "um número não é um múltiplo de 4 ou (caso contrário) é par".

Com isto e com as leis de De Morgan, você pode pegar qualquer declaração e simplificá-la ao ponto das negações só serem aplicadas a letras sentenciais. Bem, na verdade não, porque você poderia ter múltiplas negações empilhadas. Mas isto pode ser facilmente resolvido:

**Dupla Negação.**

$$\neg\neg P \text{ é logicamente equivalente a } P.$$

Exemplo: "Não é o caso que $c$ não é ímpar" significa "$c$ é ímpar".

Vejamos como podemos aplicar as equivalências que encontramos até agora.

**Exemplo 7.3.4**

Prove que as declarações $\neg(P \Rightarrow Q)$ e $P \wedge \neg Q$ são logicamente equivalentes sem utilizar tabelas-verdade.

**Solução.** Queremos começar com uma das declarações, e transformá-la na outra através de uma sequência de declarações logicamente equivalentes. Comece por $\neg(P \Rightarrow Q)$. Podemos reescrever a implicação como uma disjunção, o que é logicamente equivalente a

$$\neg(\neg P \vee Q).$$

Agora aplique a lei De Morgan para obter

$$\neg\neg P \wedge \neg Q.$$

Finalmente, utilize a dupla negação para chegar a $P \wedge \neg Q$.[1]

Note que o exemplo acima ilustra que a negação de uma implicação NÃO é uma implicação: é uma conjunção!

**Negação de uma Implicação.**

A negação de uma implicação é uma conjunção:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \text{ é logicamente equivalente a } P \wedge \neg Q.$$

Ou seja, a única forma de uma implicação ser falsa é que a hipótese seja verdadeira E a conclusão seja falsa.

1 Na verdade aqui utilizamos ainda uma outra regra, a **Substituição de Equivalentes Lógicos**. Grosso modo, ela nos diz que podemos substituir uma subsentença por uma sentença equivalente a ela numa sentença maior. Neste caso, nossa subsentença é $\neg\neg P$ e a sentença equivalente a ela é $P$.

Para verificar se duas declarações são logicamente equivalentes, pode-se utilizar tabelas-verdade ou uma sequência de substituições logicamente equivalentes. O método das tabelas-verdade, embora trabalhoso, tem a vantagem de poder verificar que duas afirmações NÃO são logicamente equivalentes.

**Exemplo 7.3.5**

As declarações $(P \vee Q) \Rightarrow R$ e $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$ são logicamente equivalentes?

**Solução.** Note que embora pudéssemos começar a reescrever estas declarações com substituições logicamente equivalentes na esperança de transformar uma em outra, nunca teremos a certeza de que o nosso fracasso se deve à falta de equivalência lógica e não à nossa falta de imaginação. Por isso, em vez disso, façamos uma tabela-verdade:

| $P$ | $Q$ | R | $(P \vee Q) \Rightarrow R$ | $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | F |
| V | F | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V |
| F | F | V | V | V |
| F | F | F | V | V |

Veja a quarta (ou sexta) linha. Neste caso, $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$ é verdadeira, mas $(P \vee Q) \Rightarrow R$ é falsa. Por conseguinte, as declarações não são logicamente equivalentes.

Embora não tenhamos equivalência lógica, acontece que sempre que $(P \vee Q) \Rightarrow R$ é verdade, o mesmo acontece com $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$. Isto diz-nos que podemos deduzir $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$ a partir de $(P \vee Q) \Rightarrow R$, mas não a direção inversa.

### 7.3.3 Além de proposições

Como vimos na seção 7.2, nem todas as afirmações podem ser analisadas utilizando apenas conectivos lógicos e letras sentenciais. Por exemplo, podemos querer trabalhar com a declaração:

Todos os primos maiores que 2 são ímpares.

Para escrever esta afirmação simbolicamente, precisamos utilizar quantificadores. Podemos transcrever da seguinte forma:

$$\forall x((P(x) \wedge x > 2) \Rightarrow O(x)).$$

Neste caso, estamos usando $P(x)$ para denotar “$x$ é primo” e $O(x)$ para denotar “$x$ é ímpar”.

É importante salientar que a lógica de predicados estende a lógica proposicional (muito na forma como a mecânica quântica estende a mecânica clássica). Você notará que a nossa afirmação acima ainda utilizava os conectivos lógicos (proposicionais). Tudo o que aprendemos sobre equivalência lógica ainda se aplica. Contudo, a lógica de predicados permite-nos analisar as afirmações com uma resolução mais alta, mergulhando nas proposições individuais P, Q, etc.

Um tratamento completo da lógica de predicados está para além do escopo do presente texto. Em vez disso, terminamos com um exemplo de equivalência lógica, para despertar o seu interesse.

**Exemplo 7.3.6**

Suponha que afirmamos que não existe um número menor que todos os outros. Podemos traduzir isto em símbolos como

$$\neg\exists x\forall y(x \leq y)$$

(literalmente, "não é verdade que exista um número $x$ tal que para todos os números $y$, $x$ seja inferior ou igual a $y$").

No entanto, sabemos como a negação interage com os quantificadores: podemos passar uma negação sobre um quantificador trocando o tipo de quantificador (entre universal e existencial). Assim, a afirmação acima deve ser *logicamente equivalente* a

$$\forall x\exists y(y < x).$$

Note que $y < x$ é a negação de $x \leq y$. Isto diz literalmente, "para cada número $x$ há um número $y$ que é menor que $x$". Vemos que esta é outra forma de fazer a nossa reivindicação original.

## 7.4. Demonstrações

Quem não acredita que existe criatividade em matemática não tentou, evidentemente, escrever demonstrações. Encontrar uma forma de convencer o mundo de que uma determinada afirmação é necessariamente verdadeira é um empreendimento poderoso e pode muitas vezes ser bastante desafiante. Não existe um caminho garantido para o sucesso na procura de provas. Por exemplo, no verão de 1742, um matemático alemão de nome Christian Goldbach perguntou-se se todos os números inteiros superiores a 2 poderiam ser escritos como a soma de dois primos. Séculos mais tarde, ainda não temos uma prova deste fato aparente (os computadores verificaram que a "Conjectura de Goldbach" vale para todos os números inferiores a $4 \times 10^{18}$, o que deixa apenas infinitamente muitos mais números por verificar).

Escrever provas é um pouco de arte. Como qualquer arte, para ser verdadeiramente grande, é preciso algum tipo de inspiração, bem como certa técnica fundamental. Tal como os músicos podem aprender a dedilhar corretamente, e os pintores podem aprender a maneira adequada de segurar um pincel, podemos olhar para a maneira adequada de construir argumentos. Um bom ponto de partida pode ser estudar um clássico.

**Exemplo 7.4.1**[2]

**Teorema:** Existe um número infinito de números primos.

**Demonstração.** Vamos supor que esse não seja o caso. Ou seja, existe apenas um número finito de números primos, assim listados, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Seja $N$ o número

$$N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1.$$

Como todo número inteiro maior que 1 pode ser escrito como um número primo ou como um produto de dois ou mais números primos, $N$ também deve poder ser escrito dessa forma. $N$ não pode ser primo, porque todos os números primos estariam na lista $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $N$ é maior do que todos eles. Logo, teremos que ter fatores primos de $N$ na nossa lista $p_1, p_2, \ldots, p_n$ . No entanto nenhum deles pode ser fator de $N$, porque, se algum deles fosse fator de $N$, também dividiria 1, o que é absurdo. Então os fatores de $N$ têm que estar fora da lista $p_1, p_2, \ldots, p_n$, o que é uma contradição, pois assumimos que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ é a lista de todos os primos. Há, portanto, um número infinito de números primos.

■

Esta prova é um exemplo de uma prova por contradição, um dos estilos padrão de prova matemática. Em primeiro lugar e acima de tudo, a prova é um **argumento**. Ela contém uma sequência de afirmações, sendo a última a *conclusão* que se segue às afirmações anteriores. O argumento é **válido**, o que significa que a conclusão deve ser verdadeira se as premissas forem verdadeiras. Vejamos a demonstração linha a linha.

1. Suponha que exista um número finito de primos. [isto é uma *premissa*. Note o uso de “suponha”.]
2. Podemos listar todos números primos com uma lista finita $p_1, p_2, \ldots, p_n$ [decorre de 1, dado que o conjunto de números primos seria finito.]
3. Seja $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$ [basicamente é simplesmente notação, embora seja a parte mais inspirada da demonstração, olhar para $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$ é a ideia chave.]
4. $N$ pode ser escrito como um número primo ou como um produto de dois ou mais números primos [decorre do Teorema Fundamental da Aritmética.]
5. $N$ não pode ser primo [pela definição de $N$ (linha 3) e nossa lista $p_1, p_2, \ldots, p_n$ conter todos os primos (linha 2), $N$ é maior que todos eles]
6. Nenhum dos números na lista pode ser fator de $N$ [porque eles teriam que ser também divisores de 1]
7. Os fatores primos de $N$ têm que estar fora da lista [devido a 5 e 6]
8. Isto é uma contradição [devido a 2]
9. Portanto existe uma quantidade infinita de números primos [devido as linhas 1 e 8: nossa única premissa inicial nos leva a uma contradição, logo a premissa é falsa].

2 Essa demonstração foi fornecida por Euclides, na sua famosa obra *Os Elementos*.

Note que, toda vez que passamos de uma linha para a seguinte, mantemos o argumento válido, pois cada linha segue-se de linhas anteriores (diz-se que a cada passo, **preservamos a verdade**). Portanto, se as premissas forem verdadeiras, a conclusão deve ser verdadeira. No entanto, chegamos a uma contradição, que obviamente não pode ser verdadeira. Qual a única coisa que estar errada? A nossa premissa inicial. Ela tem que ser falsa.

O tipo de análise linha a linha que fizemos acima é uma ótima maneira de compreender o que realmente está acontecendo. Sempre que se deparar com uma prova num livro texto, você deve assegurar-se de compreender exatamente o que cada linha está dizendo e porque é que é verdade. Além disso, é igualmente importante compreender a estrutura geral da prova. É aqui que a utilização de ferramentas da lógica é útil. Felizmente, há um número relativamente pequeno de estilos de provas padrão que surgem repetidamente. Estar familiarizado com estes pode ajudar a compreender a prova, bem como dar ideias de como escrever as suas próprias demonstrações.

### 7.4.1 Prova Direta

O estilo de prova mais simples (de uma perspectiva lógica) é uma prova direta. Muitas vezes, tudo o que é necessário para provar algo é uma explicação sistemática do que tudo significa. As provas diretas são especialmente úteis quando se trata de provar implicações. O formato geral para provar $P \Rightarrow Q$ é este:

Assumir $P$. Explicar, explicar, ..., explicar. Portanto, $Q$.

Muitas vezes queremos provar declarações universais, talvez da forma $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Mais uma vez, vamos querer assumir que $P(x)$ é verdadeira e deduzir $Q(x)$.

Mas e quanto ao $x$? Queremos que isto funcione para todos os $x$. Conseguimos isto através da fixação do $x$ como um elemento arbitrário (do tipo em que estamos interessados).

Aqui estão alguns exemplos. Primeiro, criaremos a estrutura de prova para uma prova direta, depois preencheremos os detalhes.

**Exemplo 7.4.2**

Provar: Para todo inteiro $n$, se $n$ é par, então $n^2$ é par.

**Solução.** O formato da prova será este: Seja $n$ um número inteiro arbitrário. Assuma que $n$ é par. Explicar explicar explicar. Portanto $n^2$ é par.

Para preencher os detalhes, vamos basicamente explicar o que significa $n$ ser par, e depois ver o que isso significa para $n^2$. Aqui está uma prova completa.

**Demonstração.** Seja $n$ um número inteiro arbitrário. Suponha que $n$ é par. Então $n = 2k$ para algum inteiro $k$. Agora $n^2 = (2k)^2=4k^2=2(2k^2)$. Uma vez que $2k^2$ é um número inteiro, $n^2$ é par.

■

**Exemplo 7.4.3**

Provar: Para todos os inteiros $a$, $b$, e $c$, se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$. (Aqui $x|y$, leia-se "$x$ divide $y$" significa que $y$ é um múltiplo de $x$, ou seja, que o resto da divisão de $y$ por $x$ é zero).

**Solução.** Mesmo antes de sabermos o significado do símbolo "divide", podemos criar o esquema de uma prova direta para esta afirmação. Será algo parecido com isto: Sejam $a$, $b$, e $c$ inteiros arbitrários. Assuma que $a|b$ e $b|c$. Três pontinhos. Portanto, $a|c$.

Como é que preenchemos os três pontinhos? Dizemos o que a nossa hipótese ($a|b$ e $b|c$) realmente significa e porque é que isto nos leva a concluir o que ($a|c$) realmente significa. Outra forma de dizer que $a|b$ é dizer que $b = ka$ para algum inteiro $k$ (isto é, que $b$ é um múltiplo de $a$). Onde queremos chegar? Que $c = la$, para um número inteiro $l$ (porque queremos que $c$ seja um múltiplo de $a$). Aqui está a prova completa.

**Demonstração.** Sejam $a$, $b$, e $c$ números inteiros. Assuma que $a|b$ e $b|c$. Em outras palavras, $b$ é um múltiplo de $a$ e $c$ é um múltiplo de $b$. Então existem inteiros $k$ e $j$ tais que $b = ka$ e $c = jb$. Combinando estes (através de substituição) obtemos que $c=jka$. Mas $jk$ é um inteiro, portanto isto diz que $c$ é um múltiplo de $a$. Portanto $a|c$.

■

### 7.4.2 Prova por Contrapositivo

Lembre-se de que uma implicação $P \Rightarrow Q$ é logicamente equivalente à sua contrapositiva $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Há muitos exemplos de afirmações que são difíceis de provar diretamente, mas cujas contrapositivas podem ser facilmente provadas diretamente. Isto é tudo o que a prova por contrapositivo faz. Fornece uma prova direta da contraposição da implicação. Isto é suficiente porque o contrapositivo é logicamente equivalente à implicação original.

O esqueleto da prova de $P \Rightarrow Q$ por contrapositivo será sempre mais ou menos parecido com isto:

Assuma $\neg Q$. Explicar, explicar, ... explicar. Portanto $\neg P$.

Como antes, se existirem variáveis e quantificadores, definimo-los como sendo elementos arbitrários do nosso domínio. Aqui estão dois exemplos:

**Exemplo 7.4.4**

A afirmação "para todo número inteiro $n$, se $n^2$ é par, então $n$ é par" é verdadeira?

**Solução.** Esta é a recíproca da afirmação que provamos acima usando uma prova direta. Ao tentarmos alguns exemplos, esta afirmação parece ser definitivamente verdadeira. Portanto, vamos prová-la.

Uma prova direta desta afirmação exigiria a fixação de um $n$ arbitrário e partir do princípio de que $n^2$ é par. Mas não é de todo claro como isto nos permitiria concluir algo sobre $n$. Só porque $n^2 = 2k$ não sugere por si só como poderíamos escrever $n$ como um múltiplo de 2.

Tente outra coisa: escreva o contrapositivo da afirmação. Obtemos, para todo número inteiro $n$, se $n$ é ímpar então $n^2$ é ímpar. Isto parece muito mais promissor. A nossa prova será algo semelhante a isto:

Seja $n$ um número inteiro arbitrário. Suponha que $n$ não é par. Isto significa que … Em outras palavras: … Mas isto é o mesmo que dizer … Portanto $n^2$ não é par.

Agora preenchemos os detalhes:

**Demonstração.** Provaremos o contrapositivo. Seja $n$ um número inteiro arbitrário. Suponha que $n$ não é par, e portanto ímpar. Então $n = 2k + 1$ para algum inteiro $k$. Agora $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Uma vez que $2k^2 + 2k$ é um número inteiro, vemos que $n^2$ é ímpar e, portanto, não é par.

■

## Exemplo 7.4.5

Prove: para todos os inteiros $a$ e $b$, se $a + b$ é ímpar, então $a$ é ímpar ou $b$ é ímpar.

**Solução.** O problema de tentar uma prova direta é que será difícil separar $a$ e $b$ de saber algo sobre $a + b$. Por outro lado, se soubermos algo sobre $a$ e $b$ separadamente, então combiná-los poderá dar-nos informações sobre $a + b$. O contrapositivo da afirmação que estamos a tentar provar é: para todos os inteiros $a$ e $b$, se $a$ e $b$ são pares, então $a + b$ é par. Assim, a nossa prova terá o seguinte formato:

Sejam $a$ e $b$ números inteiros. Assuma que $a$ e $b$ são ambos pares. la la la la. Portanto, $a + b$ é par.

Aqui está uma prova completa:

**Prova.** Sejam $a$ e $b$ números inteiros. Assuma que $a$ e $b$ são pares. Então $a = 2k$ e $b = 2l$ para algum par de inteiros $k$ e $l$. Agora $a + b = 2k + 2l = 2(k + l)$. Uma vez que $k + l$ é um número inteiro, vemos que a + b é par, completando a prova.

Note que a nossa suposição de que $a$ e $b$ são pares é realmente a negação de que $a$ ou $b$ é ímpar. Utilizamos aqui a lei de De Morgan.

■

Vimos como provar algumas afirmações sob a forma de implicações: diretamente ou por contrapositivos. Algumas afirmações não são formuladas inicialmente como implicações.

## Exemplo 7.4.6

Considere a seguinte declaração: para todo número primo $p$, ou $p = 2$ ou $p$ é ímpar. Podemos reformular isto: para todo número primo $p$, se $p \neq 2$, então $p$ é ímpar. Agora tente provar isso.

**Solução.**

Prova. Seja $p$ um número primo arbitrário. Assuma que $p$ não é ímpar. Assim, $p$ é divisível por 2. Uma vez que $p$ é primo, ele deve ter exatamente dois divisores, e ele tem 2 como divisor, assim, $p$ deve ser divisível apenas por 1 e 2. Portanto, $p = 2$. Isto completa a prova (por contrapositivo).

■

### 7.4.3 Prova por Contradição

Pode haver declarações que realmente não podem ser reformuladas como implicações. Por exemplo, "$\sqrt{2}$ é irracional". Neste caso, é difícil saber por onde começar. O que podemos supor? Bem, digamos que queremos provar a afirmação $P$. E se pudéssemos provar que $\neg P \Rightarrow Q$ onde $Q$ era falso? Se esta implicação for verdadeira, e $Q$ for falso, o que podemos dizer sobre $\neg P$? Também deve ser falso, o que torna $P$ verdadeiro!

É por isso que a prova por contradição funciona. Se conseguirmos provar que $\neg P$ conduz a uma contradição, então a única conclusão é que $\neg P$ é falso, por isso $P$ é verdadeiro. Era isso o que queríamos provar. Em outras palavras, se é impossível que $P$ seja falso, $P$ tem que ser verdadeiro.

Aqui estão três exemplos de provas por contradição:

**Exemplo 7.4.7**

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

**Solução.**

Prova: Suponha que não é o caso. Então $\sqrt{2}$ é igual a uma fração racional $\frac{a}{b}$. Sem perda de generalidade, assuma que $\frac{a}{b}$ está na sua forma irredutível (caso contrário, simplifique a fração). Então,

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2.$$

Então $a^2$ é par, e portanto $a$ é par (como vimos no Exemplo 7.4.4). Então $a = 2k$ para algum inteiro $k$, e $a^2 = 4k^2$. Nós temos, portanto,

$$2b^2 = 4k^2$$
$$b^2 = 2k^2.$$

Portanto $b^2$ é par, e assim $b$ é par. Como $a$ também é par, nós vemos que $\frac{a}{b}$ não pode estar na sua forma irredutível, uma contradição. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

■

**Exemplo 7.4.8**

Prove: Não há números inteiros $x$ e $y$ tais que $x^2 = 4y + 2$.

**Demonstração.** Procedemos por contradição. Assim, suponha que existem números inteiros $x$ e $y$ tais que $x^2 = 4y + 2 = 2(2y + 1)$. Portanto, $x^2$ é par. Vimos que isto implica que $x$ é par. Então $x = 2k$ para algum número inteiro $k$. Logo $x^2 = 4k^2$. Isto, por sua vez, resulta em $2k^2 = (2y + 1)$. Mas $2k^2$ é par, e $2y+1$ é ímpar, pelo que estes não podem ser iguais. Assim, temos uma contradição, por isso não pode haver quaisquer inteiros $x$ e $y$ tais que $x^2 = 4y + 2$.

■

**Exemplo 7.4.9**

O **Princípio da Casa de Pombos**: Se mais do que $n$ pombos voarem para $n$ casas de pombos, então pelo menos uma casa de pombos conterá pelo menos dois pombos. Prove isto!

**Solução.**

Prova. Suponha, ao contrário do estipulado, que cada uma das casas de pombos contém, no máximo, um pombo. Então, no máximo, haverá $n$ pombos. Mas assumimos que existem mais do que $n$ pombos, pelo que isto é impossível. Assim, tem de haver uma casa de pombos com mais do que um pombo.

■

Embora tenhamos formulado esta prova como uma prova por contradição, poderíamos também ter usado uma prova por contraposição, uma vez que a nossa contradição era simplesmente a negação da hipótese. Por vezes isto acontecerá, caso em que se pode usar qualquer um dos dois estilos de prova. Há exemplos, porém, em que a contradição ocorre "muito longe" da afirmação original.

### 7.4.4 Prova por (Contra-)Exemplo

Quase NUNCA é correto provar uma declaração apenas com um exemplo. Certamente que nenhuma das declarações provadas acima pode ser provada através de um exemplo. Isto porque em cada um desses casos estamos tentando provar que algo é válido para todos os números inteiros. Afirmamos que $n^2$ ser par implica que $n$ é par, independentemente do número inteiro que escolhemos. Mostrar que isto funciona para $n = 4$ não é nem de perto suficiente.

Isto não pode ser enfatizado o suficiente. Se estiver tentando provar uma declaração no formato $\forall x P(x)$, você NÃO PODE absolutamente provar isto com um exemplo.

No entanto, declarações existenciais podem ser provadas desta forma. Se quisermos provar que existe um número inteiro $n$ tal que $n^2 - n + 41$ não é primo, tudo o que precisamos fazer é encontrar um tal $n$. Isto pode parecer uma coisa fácil de se provar até tentarmos alguns valores para $n$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2 - n + 41$ | 41 | 43 | 47 | 53 | 61 | 71 | 83 |

Até agora só obtivemos primos. Você pode sentir-se tentado a conjecturar: "Para todos os inteiros positivos $n$, o número $n^2 - n + 41$ é primo". Se quisesse provar isto, teria de usar uma prova direta, uma prova por contrapositivo, ou outro estilo de prova, mas certamente não é suficiente dar nem mesmo 7 exemplos. Na verdade, podemos provar que esta conjectura é falsa, provando a sua negação: "Há um número inteiro positivo tal que $n^2 - n + 41$ não é primo". Uma vez que esta é uma afirmação existencial, é suficiente mostrar que existe de fato um tal número.

Realmente, podemos ver rapidamente que $n = 41$ dará $41^2$ que certamente não é primo. Poder-se-ia dizer que isto é um contra-exemplo para a conjectura de que $n^2 - n + 41$ é sempre primo. Uma vez que tantas afirmações em matemática são universais, tornando as suas negações existenciais, podemos muitas vezes provar que uma afirmação é falsa (se for), fornecendo um contra-exemplo.

**Exemplo 7.4.10**

Acima provamos, "para todos os inteiros $a$ e $b$, se $a + b$ é ímpar, então $a$ é ímpar ou $b$ é ímpar". A recíproca é verdadeira?

**Solução.** A recíproca é a afirmação, "para todos os inteiros $a$ e $b$, se $a$ for ímpar ou $b$ for ímpar, então $a + b$ é ímpar". Isto é falso! Como é que provamos que é falso? Temos de provar a negação da recíproca. Vejamos os símbolos. A recíproca é

$$\forall a \forall b((O(a) \vee O(b)) \Rightarrow O(a + b))).$$

Queremos provar a sua negação:

$$\neg\forall a \forall b((O(a) \vee O(b)) \Rightarrow O(a + b))).$$

Simplifique utilizando as regras das seções anteriores:

$$\exists a \exists b((O(a) \vee O(b)) \wedge \neg O(a + b))).$$

À medida que a negação passou pelos quantificadores, estes mudaram de ∀ para ∃. Foi então necessário tomar a negação de uma implicação, o que equivale a afirmar a parte do se e não a parte do então.

Agora sabemos o que fazer. Para provar que o inverso é falso, precisamos encontrar dois inteiros $a$ e $b$ tais que $a$ é ímpar ou $b$ seja ímpar, mas $a + b$ não é ímpar (portanto é par). Isso é fácil: 1 e 3. (lembre-se, "ou" significa um ou outro ou ambos). Ambos são ímpares, mas $1 + 3 = 4$ não é ímpar.

■

## 7.4.5 Prova por Casos

A ideia da prova por casos é provar que $P$ é verdade, provando que $Q \Rightarrow P$ e $\neg Q \Rightarrow P$ para alguma afirmação $Q$. Assim, independentemente de $Q$ ser ou não verdade, sabemos que $P$ é verdade. Na verdade, poderíamos generalizar isto. Suponhamos que queremos provar $P$. Sabemos que pelo menos uma das declarações $Q_1$, $Q_2$, …, $Q_n$ é verdade. Se pudermos mostrar que $Q_1 \Rightarrow P$ e $Q_2 \Rightarrow P$ e assim por diante até $Q_n \Rightarrow$ P, então podemos concluir $P$. O essencial é que queremos ter a certeza de que um dos nossos casos (os $Q_i$'s) tem de ser verdade, aconteça o que acontecer.

Se esse último parágrafo foi confuso, talvez um exemplo possa tornar as coisas mais claras.

**Exemplo 7.4.11**

Prove: Para qualquer inteiro $n$, o número $(n^3 - n)$ é par.

**Solução.**

É difícil saber por onde começar isto, porque não sabemos quase nada sobre $n$. Poderíamos ser capazes de provar que $n^3 - n$ é par se soubéssemos que $n$ era par. Na verdade, poderíamos provavelmente provar que $n^3 - n$ era par se $n$ fosse ímpar. Mas como $n$ tem que ser par ou ímpar, isto será suficiente. Aqui está a prova.

Prova. Consideramos dois casos: Se $n$ for par ou se $n$ for ímpar.

Caso 1: $n$ é par. Então $n = 2k$ para algum inteiro $k$. Isso nos dá

$$\begin{aligned} n^3 - n &= 8k^3 - 2k \\ &= 2(4k^2 - k), \end{aligned}$$

e como $4k^2 - k$ é um inteiro, isso significa que $n^3 - n$ é par.

Caso 2: $n$ é ímpar. Então $n = 2k + 1$ para algum inteiro $k$. Isso nos dá

$$\begin{aligned} n^3 - n &= (2k + 1)^3 - (2k + 1) \\ &= 8k^3 + 6k^2 + 6k + 1 - 2k - 1 \\ &= 2(4k^3 + 3k^2 + 2k), \end{aligned}$$

e como $4k^3 + 3k^2 + 2k$ é um inteiro, vemos que $n^3 - n$ é novamente par.

Como $n^3 - n$ é par em ambos os casos exaustivos, vemos que $n^3 - n$ é realmente sempre par.

■

Poderíamos seguir apresentando diferentes estilos de prova. Por exemplo, deixamos de mencionar aqui as **provas combinatoriais**. No entanto, vamos terminar falando um pouco mais sobre um tipo de prova que vimos no capítulo passado, a prova por indução.

### 7.4.6 Prova por Indução

No capítulo passado, vimos um estilo de prova extremamente útil: a prova por indução. Lembre-se que se quisermos provar que uma determinada propriedade $P$ é verdadeira para todos os números inteiros maiores ou iguais a $n$, usamos os seguintes passos:

- Provamos que $P(n)$ é verdadeira. Este é o caso base.
- Provamos que Se P($k$) é verdadeira estão $P(k + 1)$ é verdadeira, para qualquer $k \geq n$. Este é o passo indutivo.
- Uma vez provados o caso base e o passo indutivo, a propriedade é verdadeira para todo número inteiro maior ou igual a $n$.

Vejamos mais um exemplo:

**Exemplo 7.4.12**

Você aprendeu no ensino médio que $(ab)^n = a^n b^n$. Comprove isto por indução matemática.

**Solução.** Seja $P(n)$ a proposição que $(ab)^n = a^n b^n$.

1. Caso base. Provamos que P(1) é verdade simplesmente plugando-o. Fazendo $n = 1$ temos

   $(ab)^1 = ab$

   $a^1 b^1 = ab$

2. Passo indutivo. Temos agora de provar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. Em outras palavras, assumimos que $P(k)$ é verdade, e depois usamos essa suposição para provar que $P(k + 1)$ também é verdade.

   Sejamos absolutamente claros onde queremos chegar com isto. Assumindo que P(k) é verdade significa que podemos contar com o fato de que

   $$(ab)^k = a^k b^k.$$

   O que precisamos fazer, então, é provar que $P(k + 1)$ é verdade, o que equivale a provar que

   $$(ab)^{k+1} = a^{k+1} b^{k+1}.$$

   Agora sabemos, pela própria definição de expoentes, que:

   $$(ab)^{k+1} = ab(ab)^k.$$

   Acrescentando a nossa hipótese indutiva permite-nos então determinar:

   $$\begin{aligned}(ab)^{k+1} &= ab(ab)^k \\ &= ab \cdot a^k b^k \\ &= a \cdot a^k \cdot b \cdot b^k \\ &= a^{k+1} b^{k+1}\end{aligned}$$

Por conseguinte, $\forall n \geq 1\ P(n)$.

■

## *Indução Forte*

Agora, por vezes, precisamos na realidade fazer uma suposição mais forte do que simplesmente “a proposição $P(k)$ é verdadeira”, a fim de provar que $P(k + 1)$ é verdadeira. Em todos os exemplos anteriores, o caso $k + 1$ fluiu diretamente do caso $k$, e apenas o caso $k$. Mas, por vezes, é preciso saber que todos os casos inferiores a $k + 1$ são verdadeiros, a fim de provar o caso $k + 1$. Nessas situações, utilizamos a forma forte da indução matemática. Ela diz:

1. Se um predicado for verdadeiro para um certo número,
2. e o fato de ser verdade para todos os números até um certo número (inclusive), significaria que também é verdade para o número seguinte (ou seja, um número a mais),
3. então ele é verdadeiro para todos os números.

É exatamente o mesmo que a forma fraca, exceto que a hipótese indutiva é mais forte. Em vez de ter de provar

$$P(k) \Rightarrow P(k+1),$$

temos que provar

$$(\forall i \leq k\ P(i)) \Rightarrow P(k+1).$$

À primeira vista, isso pode não parecer mais fácil. Mas se olhar com cuidado, pode ver que adicionamos informações ao lado esquerdo da implicação. Já não precisamos contar apenas com o fato de que $P(5)$ é verdade para provar $P(6)$. Agora podemos tirar partido do fato que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, e $P(5)$ são todos sabidamente verdadeiros quando tentamos provar $P(6)$. E isso pode fazer uma enorme diferença.

### Exemplo 7.4.13

O Teorema Fundamental da Aritmética permite-nos dizer que todo número natural (superior a 2) é exprimível como produto de um ou mais primos. Por exemplo, 6 pode ser escrito como "$2 \cdot 3$", onde 2 e 3 são primos. O número 7 é em si mesmo primo, e por isso pode ser escrito como "7". O número 9.180 pode ser escrito como "$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$", sendo todos eles primos. Como podemos provar que isto é sempre possível, não importa qual seja o número?

**Solução.**

Seja $P(n)$ a proposição de que o número $n$ pode ser expresso como um produto de números primos. A nossa prova fica assim:

1. Caso base. P(2) é verdade, uma vez que 2 pode ser escrito como "2", e 2 é um número primo. (Note que não utilizamos 0 ou 1 como caso base aqui, uma vez que na realidade nenhum desses números é exprimível como um produto de primos. Fato curioso).

2. Passo indutivo. Temos agora de provar que $(\forall i \leq k\ P(k)) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, assumimos que $P(i)$ é verdadeiro para todos os números até $k$, e depois usamos essa suposição para provar que $P(k+1)$ também é verdadeiro.

   Quanto ao número $k+1$, há duas possibilidades: ou ele é primo, ou não é. Se for, então estamos terminados, porque ele pode obviamente ser escrito simplesmente como ele próprio, que consideramos ser o produto de um único primo (23 pode ser escrito como "23"). Mas suponhamos que ele não seja primo. Então, pode ser decomposto como o produto de dois números, cada um deles menor do que ele próprio (21 pode ser decomposto como $7 \cdot 3$; 24 pode ser decomposto como $6 \cdot 4$ ou $12 \cdot 2$ ou $8 \cdot 3$, faça a sua escolha). Agora não sabemos nada de especial sobre esses dois números… exceto o fato de que a hipótese indutiva nos diz que todos os números inferiores a $k+1$ são expressíveis como o produto de um ou mais primos! Portanto, estes dois números, quaisquer que sejam, são expressíveis como produto de primos, e assim, quando os multiplicarmos juntos para obtermos $k+1$, teremos uma cadeia mais longa de primos multiplicados juntos. Portanto, $(\forall i \leq k\ P(k)) \Rightarrow P(k+1)$.

Portanto, pela forte forma da indução matemática, $\forall n \geq 2$, $P(n)$ é verdadeira.

■

Você consegue ver porque precisávamos da forma forte aqui. Se quiséssemos provar que 15 é exprimível como produto de primos, saber que 14 é exprimível como produto de primos não nos faz bem algum. O que precisávamos saber era que 5 e 3 eram exprimíveis dessa forma. Em geral, a forma forte de indução é útil quando se tem de repartir algo em partes menores, mas não há garantia de que as partes sejam "um a menos" do que o original. Apenas se sabe que serão menores do que a original.

## 7.5. Créditos

Todas as seções, com exceção da seção "Prova por Indução", foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [2], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International. A seção "Prova por Indução" foi adaptada (traduzida e modificada) de [1], disponível sob a mesma licença.

## 7.6. Referências


1. Davies, Stephen. *A Cool Brisk Walk Through Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.allthemath.org/vol-i/
2. Levin, Oscar. *Discrete Mathematics: An Open Introduction*. Disponível em http://discrete.openmathbooks.org


## 7.7. Licença


É concedida permissão para copiar, distribuir, transmitir e adaptar esta obra sob a Licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0), disponível em http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/ .