Capítulo 5: Sequências

Existe um mosteiro em Hanói, diz a lenda, com uma grande sala contendo três pilares altos. No primeiro pilar encontram-se 64 discos gigantes (ou anilhas), todos de diferentes tamanhos, empilhados do maior ao menor. Os monges são encarregados da seguinte tarefa: devem mover toda a pilha de discos para o terceiro pilar. No entanto, devido ao tamanho dos discos, os monges não podem mover mais do que um de cada vez. Cada disco deve ser colocado num dos pilares antes de se mover o disco seguinte. E como os discos são tão pesados e frágeis, os monges nunca podem colocar um disco maior em cima de um disco menor. Quando os monges finalmente completarem a sua tarefa, o mundo chegará ao fim. A sua tarefa: descubra quanto tempo falta para começarmos a preocupar-nos com o fim do mundo.

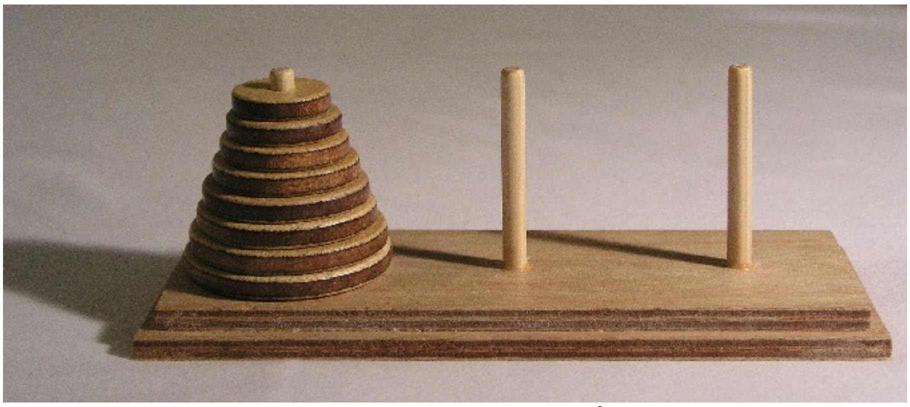


Figura 5.1: Modelo da torre de Hanói, com 8 discos.
(Fonte: Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0)

Este puzzle é chamado de Torre de Hanói. É-lhe atribuída a tarefa de encontrar o número mínimo de movimentos para completar o puzzle. Isto soa certamente como um problema de contagem. Talvez você tenha uma resposta? Se não, o que mais poderíamos tentar?

A resposta depende do número de discos que você deve mover. De fato, poderíamos responder ao puzzle primeiro para 1 disco, depois para 2, depois para 3 e assim por diante. Se listarmos todas as respostas para cada número de discos, obteremos uma sequência de números. O n-ésimo termo na sequência é a resposta à pergunta, "qual é o menor número de movimentos necessários para completar o puzzle da Torre de Hanói com n discos?" Poder-se-ia perguntar porque criaríamos tal sequência em vez de apenas responder à pergunta. Olhando para a forma como a sequência de números cresce, ganhamos compreensão do problema. É fácil contar o número de movimentos necessários para um pequeno número de discos. Podemos então procurar um padrão entre os primeiros termos da sequência. Esperamos que isto sugira um método para encontrar o n-ésimo termo da sequência, que é a resposta à nossa pergunta. Claro que também teremos de verificar se o nosso padrão suspeito está correto, e se este padrão correto nos dá realmente o n-ésimo termo que pensamos que dá, mas é impossível provar que a sua fórmula está correta sem ter uma fórmula com a qual começar.

As sequências são também objetos matemáticos interessantes de estudar por si próprias. Vamos ver porquê.

5.1. Descrevendo Sequências

Uma sequência é simplesmente uma lista ordenada de números. Por exemplo, eis uma sequência: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …. Isto é diferente do conjunto $\mathbb{N}$ porque, enquanto a sequência é uma lista completa de cada elemento do conjunto de números naturais, na sequência preocupamo-nos muito com a ordem em que os números aparecem. Por este motivo, quando utilizarmos variáveis para representar os termos numa sequência, elas terão este aspecto:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Para nos referirmos à sequência inteira de uma só vez, escreveremos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n \geq 0}$, ou por vezes se estivermos sendo descuidados, apenas (a_n) (caso em que assumimos que iniciamos a sequência com a_0).

Podemos substituir o a por outra letra, e por vezes omitimos a_0, começando por a_1, caso em que usaríamos $(a_n)_{n \geq 1}$ para nos referirmos à sequência como um todo. Os números nos subscritos são chamados de **índices**.

Embora muitas vezes pensemos numa sequência apenas como uma lista ordenada de números, trata-se na realidade de um tipo de função. Especificamente, a sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ é uma função com domínio $\mathbb{N}$ onde a_n é a imagem do número natural n. Mais tarde manipularemos sequências da mesma forma que manipulamos funções em álgebra ou cálculo. Podemos deslocar uma sequência para cima ou para baixo, adicionar duas sequências, ou perguntar a taxa de variação de uma sequência. Isto é feito exatamente como se faria para funções.

Dito isto, embora manter a definição matemática rigorosa em mente seja útil, muitas vezes descrevemos sequências escrevendo alguns dos seus primeiros termos.

Exemplo 5.1.1

Você consegue encontrar o próximo termo para as seguintes sequências?

1. 7, 7, 7, 7, 7, …
2. 3, −3, 3, −3, 3, …
3. 1, 5, 2, 10, 3, 15, …
4. 1, 2, 4, 8, 16, 32, …
5. 1, 4, 9, 16, 25, 36, …
6. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …
7. 1, 3, 6, 10, 15, 21, …
8. 2, 3, 5, 7, 11, 13, …
9. 3, 2, 1, 0, −1, …
10. 1, 1, 2, 6, …

Solução. Não, você não consegue. Você pode imaginar que os próximos termos são:

1. 7   2. −3   3. 4   4. 64

5\. 49 6. 34 7. 28 8. 17

9\. −2 10. 24

De fato, estes são os próximos termos das sequências que o autor do exemplo tinha em mente quando o inventou, mas não há forma de ter certeza de que estão corretos.

Ainda assim, faremos isto frequentemente. Dados os primeiros termos de uma sequência, podemos perguntar quais são os padrões na sequência que sugerem quais são os próximos termos.

Dado que nenhum número de termos iniciais numa sequência é suficiente para dizer ao certo com que sequência estamos a lidar, precisamos encontrar outra forma de especificar uma sequência. Consideramos duas formas de fazer isto:

- **Fórmula fechada**: uma fórmula fechada para uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma fórmula para a_n usando um número finito fixo de operações em n. Isto é o que normalmente se pensa como uma fórmula em n, tal como se estivéssemos definindo uma função em termos de n (porque é exatamente isso que estamos fazendo).
- **Definição recursiva**: uma definição recursiva (por vezes chamada de definição indutiva) para uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ consiste numa **relação de recorrência**: uma equação relacionando um termo da sequência com termos anteriores (termos com índice menor) e uma **condição inicial**: uma lista de alguns termos da sequência (um a menos do que o número de termos na relação de recorrência).

É mais fácil de compreender o que se passa aqui com um exemplo.

Exemplo 5.1.2

Aqui estão algumas fórmulas fechadas para sequências:

- $a_n = n^2$.
- $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $a_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}}{\sqrt{5}}$.

Note que em cada fórmula, se lhe for dado n, você pode calcular a_n diretamente: basta substituir n. Por exemplo, para encontrar a_3 na segunda sequência, basta calcular $a_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$.

Aqui estão algumas definições recursivas para sequências:

- $a_n = 2a_{n-1}$ com $a_0 = 1$.
- $a_n = 2a_{n-1}$ com $a_0 = 27$.
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

Nestas fórmulas, se lhe for dado n, você não conseguirá calcular a_n diretamente, primeiro você precisa encontrar a_{n-1} (ou a_{n-1} e a_{n-2}). Por exemplo, na segunda sequência, para encontrar a_3 seria necessário $2a_2$, mas para encontrar $a_2 = 2\ a_1$ seria necessário saber $a_1 = 2a_0$. Isto nós sabemos, de modo que podemos encontrar $a_1 = 54$, $a_1 = 108$ e finalmente $a_3 = 216$, através destas equações.

Você poderia questionar-se sobre o porquê de nos preocuparmos com definições recursivas de sequências. Afinal, é mais difícil encontrar a_n com uma definição recursiva do que com uma fórmula fechada. Isto é verdade, mas também é mais difícil de encontrar uma fórmula fechada para uma sequência do que encontrar uma definição recursiva. Assim, para encontrar uma fórmula fechada útil, podemos primeiro encontrar a definição recursiva, depois usá-la para encontrar a fórmula fechada.

Isto não quer dizer que definições recursivas não sejam úteis para encontrar a_n. É sempre possível calcular a_n dada uma definição recursiva, pode apenas demorar algum tempo.

Exemplo 5.1.3

Encontre a_6 na sequência definida por $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ com $a_0 = 3$ e $a_1 = 4$.

Solução. Sabemos que $a_6 = 2a_5 - a_4$. Então, para encontrar a_6 precisamos primeiro encontrar a_5 e a_4. Bem,

$$a_5 = 2a_4 - a_3 \text{ e } a_4 = 2a_3 - a_2,$$

logo se conseguíssemos encontrar a_3 e a_2 teríamos terminado. É claro que

$$a_3 = 2a_2 - a_1 \text{ e } a_2 = 2a_1 - a_0,$$

então só precisamos encontrar a_1 e a_0. Mas estes nos foram dados. Então

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= 4 \\ a_2 &= 2\times4 - 3 = 5 \\ a_3 &= 2\times5 - 4 = 6 \\ a_4 &= 2\times6 - 5 = 7 \\ a_5 &= 2\times7 - 6 = 8 \\ a_6 &= 2\times8 - 7 = 9. \end{aligned}$$

Note-se que agora podemos adivinhar uma fórmula fechada para o n-ésimo termo da sequência: $a_n = n + 3$. Para termos certeza de que isto funcionará sempre, podemos plugar esta fórmula na relação de recorrência:

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2((n-1)+3) - ((n-2)+3) \\ &= 2n + 4 - n - 1 \\ &= n + 3 \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Mas isso não é suficiente, uma vez que podem existir múltiplas fórmulas fechadas que satisfazem a mesma relação de recorrência; temos também de verificar se a nossa fórmula fechada está de acordo com os termos iniciais da sequência. Uma vez que $a_0 = 0 + 3 = 3$ e $a_1 = 1 + 3 = 4$ são as condições iniciais corretas, podemos agora concluir que temos a fórmula fechada correta.

Encontrar fórmulas fechadas, ou mesmo definições recursivas, para sequências não é trivial. Não há um método único para o fazer. Tal como na avaliação de integrais ou na resolução de equações diferenciais, é útil ter um conjunto de truques que se pode aplicar, mas por vezes não há uma resposta fácil.

Um método útil é relacionar uma dada sequência com outra sequência para a qual já conhecemos a fórmula fechada. Para fazer isto, precisamos de algumas "sequências conhecidas" para comparar com as sequências misteriosas. Aqui estão algumas que são boas de saber. Verificaremos as fórmulas para estas nas próximas seções.

Sequências Comuns.

1, 4, 9, 16, 25, ...	Os **números quadráticos**. A sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ tem fórmula fechada $s_n = n^2$.
1, 3, 6, 10, 15, 21, ...	Os **números triangulares**. A sequência $(T_n)_{n \geq 1}$ tem fórmula fechada $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
1, 2, 4, 8, 16, 32, ...	As **potências de 2**. A sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ tem fórmula fechada $a_n = 2^n$.
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...	Os **números de Fibonacci** (ou sequência de Fibonacci), definida recursivamente como $F_n = F_{n-1} - 1 + F_{n-2}$ com $F_1 = F_2 = 1$.

Exemplo 5.1.4

Use as fórmulas $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $a_n = 2^n$ para encontrar fórmulas fechadas que correspondam às sequências a seguir. Assuma que cada primeiro termo corresponde a $n = 0$.

1. (b_n): 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...
2. (c_n): 3, 5, 9, 17, 33, ...
3. (d_n): 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...
4. (e_n): 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...
5. (f_n): 0, 1, 3, 7, 15, 31, ...
6. (g_n): 3, 6, 12, 24, 48, ...
7. (h_n): 6, 10, 18, 34, 66, ...
8. (j_n): 15, 33, 57, 87, 123, ...

Solução. Nós desejamos comparar essas sequências aos números triangulares (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...), começando com $n = 0$, e também às potências de 2: (1, 2, 4, 8, 16, ...).

1. (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...). Note que se subtrairmos 1 de cada termo, obtemos a sequência (T_n). Então temos $b_n = T_n + 1$. Portanto, uma fórmula fechada é $b_n =$

$\frac{n(n+1)}{2}$ + 1. Uma checagem rápida de alguns dos primeiros n sugere que temos razão.

2. (3, 5, 9, 17, 33, ...). Cada termo nesta sequência é um a mais do que uma potência de 2, por isso podemos adivinhar que a fórmula fechada é $c_n = a_n + 1 = 2^n + 1$. Mas se tentarmos isto, obtemos $c_0 = 2^0 + 1 = 2$ e $c_1 = 2^1 + 1 = 3$. Estamos errados porque os índices estão deslocados. O que na verdade queremos é $c_n = a_{n+1} + 1$ o que nos dá $c_n = 2^{n+1} + 1$.
3. (0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...). Note que todos esses termos são pares. O que acontece se nós dividirmos por 2? Nós obtemos (T_n) ! Mais precisamente, nós encontramos que $d_n/2 = T_n$, então esta sequência tem fórmula fechada $d_n = n(n + 1)$.
4. (3, 6, 10, 15, 21, 28, ...). Estes são todos números triangulares. No entanto, estamos começando com 3 como o nosso termo inicial em vez de 3 como o nosso terceiro termo. Assim, se pudéssemos plugar 2 em vez de 0 à fórmula para T_n, estaríamos terminados. Portanto, a fórmula fechada é $e_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$ (onde $n + 3$ veio de $(n + 2) + 1$). Pensando em sequências como funções, estamos fazendo um deslocamento horizontal por 2: $e_n = T_{n+2}$, o que corresponderia ao gráfico ser deslocado 2 unidades para a esquerda.
5. (0, 1, 3, 7, 15, 31, ...). Tente adicionar 1 a cada termo e obtemos potências de 2. Você pode adivinhar isto porque cada termo é um pouco mais do dobro do termo anterior (as potências de 2 são exatamente o dobro do termo anterior). Fórmula fechada: $f_n = 2^n - 1$.
6. (3, 6, 12, 24, 48, ...). Estes números também duplicam a cada vez, mas também são todos múltiplos de 3. Dividindo cada um por 3 obtém-se 1, 2, 4, 8, ... Aha. Temos a fórmula fechada $g_n = 3 \times 2^n$.
7. (6, 10, 18, 34, 66, ...). Para passar de um termo para o seguinte, quase duplicamos cada termo. Assim, talvez possamos relacionar isto com 2^n. Sim, cada termo é 2 a mais do que uma potência de 2. Assim, obtemos $h_n = 2^{n+2} + 2$ (o $n + 2$ é porque o primeiro termo é 2 mais do que 2^2, não 2^0). Alternativamente, poderíamos ter relacionado esta sequência com a segunda sequência neste exemplo: começando por 3, 5, 9, 17, ... vemos que esta sequência é o dobro dos termos dessa sequência. Essa sequência tinha fórmula fechada $c_n = 2^{n+1} + 1$. A nossa sequência aqui seria o dobro disto, portanto $h_n = 2(2^n + 1)$, o que é o mesmo que obtemos antes.
8. (15, 33, 57, 87, 123, ...). Tente dividir cada termo por 3. Isso dá a sequência 5, 11, 19, 29, 41, ... Agora adicione 1 a cada termo: 6, 12, 20, 30, 42, ..., que é (d_n) neste exemplo, exceto que começa com 6 em vez de 0. Então vamos começar com a fórmula $d_n = n(n + 1)$. Para começar com o 6, deslocamos: $(n + 2)(n + 3)$. Mas isto exagerou por um, portanto subtraímos 1: $(n + 2)(n + 3) - 1$. Isto dános a nossa sequência, mas dividida por 3. Portanto, queremos $j_n = 3((n + 2)(n + 3) - 1)$.

Somas parciais. Algumas sequências naturalmente surgem como a soma de termos de uma outra sequência.

Exemplo 5.1.5

Sandra mantém um registro de quantas flexões faz todos os dias para o seu "desafio de fazer muitas flexões". Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ a sequência que descreve o número de flexões feitas no n-ésimo dia do desafio. A sequência começa assim,

$$3, 5, 6, 10, 9, 0, 12, \ldots.$$

Descreva uma sequência $(b_n)_{n \geq 1}$ que descreve o número total de flexões feito por Sandra após o n-ésimo dia.

Solução. Podemos encontrar os termos desta sequência facilmente.

$$3, 8, 14, 24, 33, 33, 45, \ldots.$$

Aqui b_1 é simplesmente a_1, mas então

$$b_2 = 3 + 5 = a_1 + a_2,$$

$$b_3 = 3 + 5 + 6 = a_1 + a_2 + a_3,$$

e assim por diante.

Há algumas maneiras que podemos utilizar para descrever b_n em geral. Poderíamos fazer isso recursivamente, como,

$$b_n = b_{n-1} + a_n,$$

uma vez que o número total de flexões feitas após n dias será o número feito após $n - 1$ dias, mais o número feito no dia n.

Para obter algo mais próximo de uma fórmula fechada, poderíamos escrever

$$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

ou a mesma coisa usando a *notação de somatório*:

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

No entanto, note que estas não são realmente fórmulas fechadas uma vez que mesmo que tivéssemos uma fórmula para a_n, ainda teríamos um número crescente de cálculos a fazer à medida que n aumenta.

Dada qualquer sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sempre podemos formar uma nova sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde

$$b_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Como os termos de (b_n) são as somas da parte inicial da sequência (a_n) uma forma de chamar (b_n) é como a **sequência de somas parciais de (a_n)**. Em breve veremos que por vezes é possível encontrar uma fórmula fechada para (b_n) a partir da fórmula fechada para (a_n).

Para simplificar a escrita dessas somas, utilizaremos frequentemente a notação de somatório, tal como $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Lembre-se de que isso simplesmente significa "some os a_k's, onde k varia de 0 até n".

Exemplo 5.1.6

Use a notação $\sum$ para reescrever as somas:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$
2. $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{50}$
3. $6 + 10 + 14 + \ldots + (4n - 2)$.

Solução.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{50} 2^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (4k - 2)$

Lembre-se: se quisermos multiplicar a_k ao invés de somar, podemos escrever $\prod_{k=1}^{n} a_k$. Por exemplo,

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!.$$

5.2. Sequências Aritméticas e Geométricas

Passamos agora à questão de encontrar fórmulas fechadas para determinados tipos de sequências.

Sequências Aritméticas.

Se os termos de uma sequência diferem por uma constante, dizemos que a sequência é **aritmética**. Se o termo inicial (a_0) da sequência é a e a **diferença comum** é d, então temos:

- Definição recursiva: $a_n = a_{n-1} + d$, com $a_0 = a$.
- Fórmula fechada: $a_n = a + dn$.

Como é que sabemos isto? Para a definição recursiva, precisamos de especificar a_0. Depois precisamos de expressar a_n em termos de a_{n-1}. Se chamarmos o primeiro termo de a, então $a_0 = a$. Para a relação de recorrência, pela definição de uma sequência aritmética, a diferença entre termos sucessivos é alguma constante, digamos d. Assim $a_n - a_{n-1} = d$, ou em outras palavras,

$$a_0 = a$$
$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Para encontrar uma fórmula fechada, primeiramente escrevemos a sequência em geral:

$$a_0 = a$$
$$a_1 = a_0 + d = a + d$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d + d = a + 2d$$
$$a_3 = a_2 + d = a + 2d + d = a + 3d$$
$$\vdots$$

Vemos que para encontrar o n-ésimo termo, precisamos começar com a e depois adicionar d um monte de vezes. Na verdade, acrescentá-lo n vezes. Assim, $a_n = a + dn$.

Exemplo 5.2.1

Encontre definições recursivas e fórmulas fechadas para as sequências aritméticas abaixo. Assuma que o primeiro termo listado é a_0.

1. 2, 5, 8, 11, 14, ...
2. 50, 43, 36, 29, ...

Solução. Primeiramente devemos checar se essas sequências realmente são aritméticas, tomando as diferenças dos termos sucessivos. Ao fazer isso, revelaremos a diferença comum, d.

1. $5 - 2 = 3$, $8 - 5 = 3$ etc. Para ir de um termo ao termo seguinte, nós adicionamos três, então $d = 3$. A definição recursiva é portanto $a_n = a_{n-1} + 3$, com $a_0 = 2$. A fórmula fechada é $a_n = 2 + 3n$.
2. Aqui a diferença comum é -7, pois adicionamos -7 a 50 para obtermos 43, e assim por diante. Então temos uma definição recursiva para $a_n = a_{n-1} - 7$, com $a_0 = 50$. A fórmula fechada é $a_n = 50 - 7n$.

E as sequências como 2, 6, 18, 54, ...? Isto não é aritmético porque a diferença entre termos não é constante. No entanto, a razão entre os termos sucessivos é constante. Chamamos tais sequências de **geométricas**.

A definição recursiva para a sequência geométrica com termo inicial a e razão comum r é $a_n = a_{n-1} \cdot r$; $a_0 = a$. Para obter o termo seguinte, multiplicamos o termo anterior por r. Podemos encontrar a fórmula fechada como fizemos para a progressão aritmética. Escreva

$$a_0 = a$$
$$a_1 = a_0 \cdot r$$
$$a_2 = a_1 \cdot r = a_0 \cdot r \cdot r = a_0 \cdot r^2$$
$$\vdots$$

Devemos multiplicar o primeiro termo a por r um número de vezes, n vezes, para ser preciso. Obtemos $a_n = a \cdot r^n$.

Sequências Geométricas

Uma sequência é chamada geométrica se a razão entre termos sucessivos for constante. Suponha que o termo inicial a_0 é a e a razão comum é r. Então temos,

- Definição recursiva: $a_n = ra_{n-1}$, com $a_0 = a$.
- Fórmula fechada: $a_n = a \cdot r^n$.

Exemplo 5.2.2

Encontre as fórmulas recursiva e fechada para as sequências geométricas a seguir. Novamente, o primeiro termo listado é a_0.

1. 3, 6, 12, 24, 48, ….
2. 27, 9, 3, 1, 1/3, ….

Solução. Comece verificando se estas sequências são realmente geométricas, dividindo cada termo pelo seu termo anterior. Se esta razão for realmente constante, teremos encontrado r.

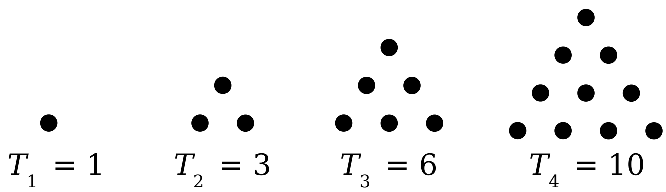
1. 6/3 = 2, 12/6 = 2, 24/12 = 2 etc. Sim, para passar de qualquer termo para o seguinte, multiplicamos por $r = 2$. Assim, a definição recursiva é $a_n = 2a_{n\text{-}1}$ com $a_0 = 3$. A fórmula fechada é $a_n = 3 \cdot 2^n$.
2. A razão comum é $r = 1/3$. Assim, a sequência tem definição recursiva $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}$ com $a_0 = 27$ e fórmula fechada $a_n = 27 \cdot \frac{1}{3}^n$.

Nos exemplos e fórmulas acima, assumimos que o termo inicial era a_0. Se a sua sequência começa com a_1, você poderá facilmente encontrar o termo que teria sido a_0 e utilizá-lo na fórmula. Por exemplo, se quisermos uma fórmula para a sequência 2, 5, 8, … e insistirmos que $2 = a_1$, então podemos encontrar $a_0 = -1$ (uma vez que a sequência é aritmética com diferença comum 3, temos $a_0 + 3 = a_1$). Então a fórmula fechada será $a_n = -1 + 3n$.

Observação. Se você consultar outros livros-texto ou online, poderá descobrir que as fórmulas fechadas deles para sequências aritméticas e geométricas diferem das nossas. Especificamente, poderá encontrar as fórmulas $a_n = a + (n - 1)d$ (aritmética) e $a_n = a \cdot r^{n-1}$ (geométrica). Quais são as corretas? Ambas! No nosso caso, tomamos a (o primeiro termo da sequência) como a_0. Se em vez disso tivéssemos a_1 como termo inicial, obteríamos as fórmulas (um pouco mais complicadas) que podemos encontrar em outros lugares.

5.2.1 Somas de Sequências Aritméticas e Geométricas

Observe a sequência $(T_n)_{n \geq 1}$ que começa com 1, 3, 6, 10, 15, …. Estes são os chamados **números triangulares**, uma vez que representam o número de pontos num triângulo equilátero (pense em como se arranjam 10 pinos de boliche: uma fila de 4 mais uma fila de 3 mais uma fila de 2 e uma fila de 1).



Esta sequência é aritmética? Não, pois $3 - 1 = 2$ e $6 - 3 = 3 \neq 2$, portanto não há uma diferença comum. A sequência é geométrica? Não. 3/1 = 3 mas 6/3 = 2, portanto, não há uma razão comum. O que fazer?

Note que as *diferenças* entre os termos formam uma sequência aritmética: 2, 3, 4, 5, 6, ... Isto significa que o n-ésimo termo da sequência (T_n) é a soma dos primeiros n termos da sequência 1, 2, 3, 4, 5, ... Dizemos que (T_n) é a sequência de somas parciais da sequência 1, 2, 3, ... (somas parciais porque não estamos tomando a soma de todos os infinitos termos).

Isto deve tornar-se mais claro se escrevermos os números triangulares desta forma:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ &\vdots \\ T_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + n. \end{aligned}$$

Se soubermos somar os termos de uma sequência aritmética, poderemos encontrar uma fórmula fechada para uma sequência cujas diferenças são os termos dessa sequência aritmética. Considere como poderíamos encontrar a soma dos primeiros 100 inteiros positivos (ou seja, T_{100}). Em vez de os adicionarmos em ordem, reagrupamo-los e adicionamos $1 + 100 = 101$. O par seguinte a combinar é $2 + 99 = 101$. Depois $3 + 98 = 101$. Continue. Isto resulta em 50 pares que somam cada um 101, portanto $T_{100} = 101 \cdot 50 = 5050$.[1]

Em geral, utilizando este mesmo tipo de reagrupamento, encontramos que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. A propósito, isto é exatamente o mesmo que $\binom{n+1}{2}$, o que faz sentido se pensarmos nos números triangulares como contando o número de apertos de mão que ocorrem numa festa com $n + 1$ pessoas: a primeira pessoa aperta n mãos, a seguinte aperta $n - 1$ mãos adicionais, e assim por diante.

O interesse de tudo isto é que algumas sequências, embora não sejam aritméticas ou geométricas, podem ser interpretadas como sequências de somas parciais de sequências aritméticas e geométricas. Felizmente, existem métodos que podemos utilizar para computar estas somas rapidamente.

Somando Sequências Aritméticas: Inverter e Adicionar

Aqui está uma técnica que nos permite encontrar rapidamente a soma de uma sequência aritmética.

Exemplo 5.2.3

Encontre a soma: $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \dots 470$.

Solução. A ideia é imitar a forma como encontramos a fórmula para números triangulares. Se adicionarmos o primeiro e o último termos, obtemos 472. O segundo termo e o penúltimo termo também somam 472. Para mantermos um registro de tudo, podemos expressar isto da seguinte forma. Chame a soma de S. Então,

1 Esta descoberta é geralmente atribuída a Carl Friedrich Gauss, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, que a percebeu ainda criança, quando o seu desagradável professor do ensino elementar pensava que manteria a turma ocupada, exigindo-lhes que calculassem a longa soma.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} & S & = & 2 & + & 5 & + & 8 & + \ldots + & 467 & + & 470 \\ + & S & = & 470 & + & 467 & + & 464 & + \ldots + & 5 & + & 2 \\ \hline & 2S & = & 472 & + & 472 & + & 472 & + \ldots + & 472 & + & 472 \end{array}$$

Para encontrar $2S$, então adicionamos 472 a si próprio um número de vezes. Que número? Precisamos determinar quantos termos estão na soma. Uma vez que os termos formam uma sequência aritmética, o n-ésimo termo na soma (contando 2 como o 0-ésimo termo) pode ser expresso como $2 + 3n$. Se $2 + 3n = 470$ então $n = 156$. Assim n varia de 0 a 156, dando 157 termos na soma. Este é a quantidade de 472's na soma para $2S$. Assim,

$$2S = 157 \cdot 472 = 74104.$$

Agora é fácil encontrar S:

$$S = 74104/2 = 37052.$$

Isto funcionará para a soma de qualquer sequência aritmética. Chame a soma de S. Inverta e some. Isto produz um único número adicionado a si mesmo muitas vezes. Encontre o número de vezes. Multiplique. Divida por 2. Feito.

Exemplo 5.2.4

Encontre uma fórmula fechada para $6 + 10 + 14 + \ldots + (4n - 2)$.

Solução. Mais uma vez, temos uma soma de uma sequência aritmética. Quantos termos estão na sequência? Cada termo na sequência tem claramente a forma $4k - 2$ (como evidenciado pelo último termo). Mas para que valores de k? Para obter 6, $k = 2$. Para obter $4n - 2$ tome $k = n$. Assim, para encontrar o número de termos, temos de contar o número de inteiros no intervalo $2, 3, \ldots, n$. Isto é, n - 1. (Há n números de 1 a n, portanto menos um se começarmos com 2).

Agora inverta e some:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & S & = & 6 & + & 10 & + \ldots + & 4n-6 & + & 4n-2 \\ + & S & = & 4n-2 & + & 4n-6 & + \ldots + & 10 & + & 6 \\ \hline & 2S & = & 4n+4 & + & 4n+4 & + \ldots + & 4n+4 & + & 4n+4 \end{array}$$

Como há $n - 1$ termos, obtemos

$2S = (n - 1)(4n + 4)$, então $S = \dfrac{(n-1)(4n+4)}{2}$.

Além de encontrar somas, podemos utilizar esta técnica para encontrar fórmulas fechadas para sequências que reconhecemos como sequências de somas parciais.

Exemplo 5.2.5

Use somas parciais para encontrar uma fórmula fechada para $(a_n)_{n \geq 0}$ que começa por 2, 3, 7, 14, 24, 37, ….

Solução. Primeiramente, se olharmos para as diferenças entre termos, obtemos uma sequência de diferenças: 1, 4, 7, 10, 13, ..., que é uma sequência aritmética. Escrito de outra forma:

$$a_0 = 2$$
$$a_1 = 2 + 1$$
$$a_2 = 2 + 1 + 4$$
$$a_3 = 2 + 1 + 4 + 7$$

e assim por diante. Nós podemos escrever o termo geral para (a_n) em termos da sequência aritmética da seguinte maneira:

$$a_n = 2 + 1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (1 + 3(n - 1))$$

(nós usamos ao invés de $1 + 3n$ para que os índices se alinhem corretamente; para a_3, somamos até 7, que é $1 + 3(3 - 1)$).

Podemos inverter e somar, mas o 2 inicial não se ajusta ao nosso padrão. Isto significa apenas que precisamos manter o 2 fora da parte invertida:

$$\begin{array}{rrcccccccc} & a_n & = & 2 & + & 1 & + & 4 & + \ldots + & 1 + 3(n-1) \\ + & a_n & = & 2 & + & 1 + 3(n-1) & + & 1 + 3(n-2) & + \ldots + & 1 \\ \hline & 2a_n & = & 4 & + & 2 + 3(n-1) & + & 2 + 3(n-1) & + \ldots + & 2 + 3(n-1) \end{array}$$

Sem contar com o primeiro termo (o 4) há n termos $2 + 3(n - 1) = 3n - 1$ de modo que o lado direito se torna $4 + (3n - 1)n$.

Finalmente, resolvendo para a_n obtemos

$$a_n = \frac{4 + (3n - 1)n}{2}.$$

Só para ter certeza, verificamos $a_0 = \frac{4}{2} = 2$, $a_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ etc. Temos a fórmula fechada correta.

Somando Sequências Geométricas: Multiplicar, Deslocar e Subtrair

Para encontrar a soma de uma sequência geométrica, não podemos simplesmente inverter e somar. Percebe porquê? A razão pela qual obtivemos muitas vezes o mesmo termo adicionado a si próprio é porque havia uma diferença constante. Assim, ao adicionarmos essa diferença numa direção, subtraímos a diferença no sentido oposto, deixando um total constante. Para somas geométricas, temos uma técnica diferente.

Exemplo 5.2.6

Qual o valor de $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots + 12288$?

Solução. Multiplique cada termo por 2, a razão comum. Você obtém

$$2S = 6 + 12 + 24 + \ldots + 24576$$

Agora subtraia:

$$2S - S = -3 + 24576 = 24573.$$

Como $2S - S = S$, já temos nossa resposta.

Para ver melhor o que aconteceu no exemplo acima, escreva-o da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S & = & 3 & + & 6 & + & 12 & + & 24 & + \ldots + & 12288 & & \\ -\ \underline{2S} & \underline{=} & & & \underline{6} & \underline{+} & \underline{12} & \underline{+} & \underline{24} & \underline{+ \ldots +} & \underline{12288} & \underline{+} & \underline{24576} \\ -S & = & 3 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + \ldots + & 0 & & -24576 \end{array}$$

Em seguida, divida ambos os lados por -1 e obtemos o mesmo resultado para S. A ideia é, multiplicando a soma pela razão comum, cada termo torna-se o termo seguinte. Deslocamos a soma para que a subtração se anule na sua maioria, deixando apenas o primeiro termo e o novo último termo.

Exemplo 5.2.7

Encontre uma fórmula fechada para $S(n) = 2 + 10 + 50 + \ldots + 2 \cdot 5^n$.

Solução. A razão comum é 5. Portanto, temos

$$\begin{array}{rccccccccc} S & = & 2 & + & 10 & + & 50 & + \ldots + & 2 \cdot 5^n & \\ -\ \underline{5S} & \underline{=} & & & \underline{10} & \underline{+} & \underline{50} & \underline{+ \ldots +} & \underline{2 \cdot 5^n +} & \underline{2 \cdot 5^{n+1}} \\ -4S & = & 2 & & & & & & & -2 \cdot 5^{n+1} \end{array}$$

Então $S = \dfrac{2 - 2 \cdot 5^{n+1}}{-4}$

Mesmo que isto possa parecer uma técnica nova, você provavelmente já a utilizou antes.

Exemplo 5.2.8

Expresse 0,464646… como fração.

Solução. Seja $N = 0{,}464646\ldots$ Considere $0{,}01N$. Obtemos:

$$\begin{array}{rcl} N & = & 0{,}4646464\ldots \\ -\ \underline{0{,}01N} & \underline{=} & \underline{0{,}00464646\ldots} \\ 0{,}99N & = & 0{,}46 \end{array}$$

Logo, $N = \frac{46}{99}$. O que fizemos? Nós vimos a repetição decimal 0,464646… como uma soma da sequência geométrica 0,46, 0,0046, 0,000046, …. A razão comum é 0,01. A única diferença real é que estamos agora calculando uma soma geométrica infinita, não temos o "último" termo extra a considerar. De fato, isto é o resultado de tomar um limite como se tomaria em cálculo quando se calculam somas geométricas infinitas.

5.3. Ajuste Polinomial de Sequências

Até agora, vimos métodos para encontrar as fórmulas fechadas para sequências aritméticas e geométricas. Como sabemos calcular a soma dos primeiros n termos de sequências aritméticas e geométricas, podemos calcular as fórmulas fechadas para sequências que têm uma sequência aritmética (ou geométrica) de diferenças entre termos. Mas e se considerarmos uma sequência que é a soma dos n primeiros termos de uma sequência que é ela própria a soma de uma sequência aritmética?

Antes de nos empolgarmos demais, vamos considerar um exemplo: Quantos quadrados (de todos os tamanhos) existem num tabuleiro de xadrez? Um tabuleiro de xadrez é composto por 64 quadrados, mas também queremos considerar quadrados de maior comprimento lateral. Embora estejamos considerando simplesmente um tabuleiro 8×8, já há muito para contar. Portanto, em vez disso, vamos construir uma sequência: o primeiro termo será o número de quadrados num tabuleiro 1×1, o segundo termo será o número de quadrados num tabuleiro 2×2, e assim por diante. Depois de um pouco de reflexão, chegamos à sequência

$$1, 5, 14, 30, 55, \ldots.$$

Esta sequência não é aritmética (nem tampouco geométrica), mas talvez a sua sequência de diferenças seja. Para as diferenças, obtemos

$$4, 9, 16, 25, \ldots.$$

Não é uma grande surpresa: uma forma de contar o número de quadrados num tabuleiro de xadrez $4{\times}4$ é notar que existem 16 quadrados com comprimento lateral 1, 9 com comprimento lateral 2, 4 com comprimento lateral 3 e 1 com comprimento lateral 4. Agora esta sequência de diferenças não é aritmética uma vez que a sua sequência de diferenças (as diferenças das diferenças da sequência original) não é constante. Na verdade, a sequência de **diferenças de segunda ordem** é aritmética

$$5, 7, 9, \ldots.$$

com diferença constante igual a 2. Note que nossa sequência original tinha **diferenças de terceira ordem** (isto é, diferenças das diferenças das diferenças da sequência original) constantes. Chamaremos uma tal sequência de Δ^3-constante. A sequência $1, 4, 9, 16, 25, \ldots.$ tem diferenças de segunda ordem constantes, então ela é uma sequência Δ^2-constante. Em geral, diremos que uma sequência é **Δ^k-constante** se as suas diferenças de k-ésima ordem forem constantes.

Exemplo 5.3.1

Quais das seguintes sequências são Δ^k-constantes para algum valor de k?

1. $2, 3, 7, 14, 24, 37, \ldots.$
2. $1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots.$
3. $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots.$

Solução.

1. Esta é a sequência do Exemplo 5.2.5, em que encontramos uma fórmula fechada ao reconhecer a sequência como a sequência de somas parciais de uma se-

quência aritmética. De fato, a sequência das diferenças de primeira ordem é 1, 4, 7, 10, 13, ..., que por sua vez tem diferenças 3, 3, 3, 3, 3, ... Assim, 2, 3, 7, 14, 24, 37, ... é uma sequência Δ^2-constante.

2. Estes são os cubos perfeitos. A sequência das primeiras diferenças é 7, 19, 37, 61, 91, ...; a sequência das segundas diferenças é 12, 18, 24, 30, ...; a sequência das terceiras diferenças é constante: 6, 6, 6, ... Assim, os cubos perfeitos são uma sequência Δ^3-constante.

3. Se tomarmos as primeiras diferenças obtemos 1, 2, 4, 8, 16, ... Espera, o quê? Essa é a sequência com que começamos. Assim, se tomarmos as segundas diferenças, teremos novamente a mesma sequência. Não importa quantas vezes repetirmos isto, teremos sempre a mesma sequência, o que significa, em particular, que nenhum número finito de diferenças será constante. Assim, esta sequência não é Δ^k-constante para qualquer k.

As sequências Δ^0-constantes são elas próprias constantes, portanto uma fórmula fechada para elas é fácil de computar (é simplesmente a constante). As sequências Δ^1-constantes são aritméticas e temos um método para encontrar fórmulas fechadas também para elas. Cada sequência Δ^2-constante é a soma de uma sequência aritmética de modo que podemos encontrar fórmulas para estas também. Mas note que o formato da fórmula fechada para uma sequência Δ^2-constante é sempre quadrática. Por exemplo, os números quadráticos são Δ^2-constantes com fórmula fechada $a_n = n^2$. Os números triangulares (também Δ^2-constantes) têm fórmula fechada $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, que quando multiplicada dá-nos também um termo n^2. Parece que sempre que aumentamos a complexidade da sequência, ou seja, aumentamos o número de diferenças antes de obtermos constantes, também aumentamos o grau do polinômio utilizado para a fórmula fechada. Passamos de constante para linear e quadrático. A sequência de diferenças entre termos diz-nos algo sobre a taxa de crescimento da sequência. Se uma sequência estiver crescendo a uma taxa constante, então a fórmula para a sequência será linear. Se a sequência estiver a crescer a uma taxa que ela própria está a crescer a uma taxa constante, então a fórmula é quadrática. Já se viu isto noutro lugar: em Cálculo, se uma função tem uma segunda derivada constante (taxa de variação), então a função deve ser quadrática.

Isto funciona em geral:

Diferenças Finitas.

A fórmula fechada para uma sequência será um polinômio de grau k se, e somente se, a sequência for Δ^k-constante (isto é, a k-ésima sequência de diferenças é constante).

Isto diz-nos que a sequência de números de quadrados num tabuleiro de xadrez, 1, 5, 14, 30, 55, ..., que vimos ser Δ^3-constante, terá um polinômio cúbico (grau 3) para a sua fórmula fechada.

Agora, uma vez que soubermos qual o formato que a fórmula fechada para uma sequência tomará, será muito mais fácil finalmente encontrar a fórmula fechada. No caso da fórmula fechada ser um polinômio de grau k, só precisamos de $k + 1$ pontos de dados para "ajustar" o polinômio aos dados.

Exemplo 5.3.2

Encontre uma fórmula fechada para 3, 7, 14, 24, …. Assuma que $a_1 = 3$.

Solução. Primeiro, verifique se a fórmula tem diferenças constantes em algum nível. A sequência das diferenças de primeira ordem é 4, 7, 10, … que é aritmética, portanto a sequência das diferenças de segunda ordem é constante. A sequência é Δ^2-constante, por isso a fórmula para a_n será um polinômio de grau 2. Ou seja, sabemos que para algumas constantes a, b, e c,

$$a_n = an^2 + bn + c.$$

Agora para encontrar a, b, e c. Primeiro, seria bom saber o que é a_0, uma vez que ao plugarmos $n = 0$ simplifica-se muito a fórmula acima. Neste caso, $a_0 = 2$ (trabalhe de trás para a frente a partir da sequência de diferenças constantes). Assim

$$a_0 = 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c,$$

então $c = 2$. Agora plugamos $n = 1$ e $n = 2$. Obtemos

$$a_1 = 3 = a + b + 2$$

$$a_2 = 7 = a4 + b2 + 2.$$

Neste ponto nós temos duas equações (lineares) e duas incógnitas, portanto podemos resolver o sistema para a e b (utilizando substituição, ou eliminação, ou mesmo matrizes). Encontramos $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$, portanto $a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2$.

Exemplo 5.3.3

Encontre uma fórmula fechada para o número de quadrados de um tabuleiro de xadrez de tamanho $n \times n$.

Solução. Vimos que a sequência 1, 5, 14, 30, 55, … é Δ^3-constante, por isso estamos à procura de um polinômio de grau 3. Ou seja,

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Podemos encontrar d se soubermos quem é a_0. Trabalhando de trás para a frente a partir das diferenças de terceira ordem, encontramos $a_0 = 0$ (sem surpresas, uma vez que não há quadrados num tabuleiro de xadrez 0×0). Assim $d = 0$. Agora plugamos $n = 1$, $n = 2$, e $n = 3$:

$$\begin{gathered} 1 = a + b + c \\ 5 = 8a + 4b + 2c \\ 14 = 27a + 9b + 3c. \end{gathered}$$

Se resolvermos esse sistema de equações, obteremos $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{1}{6}$. Portanto, o número de quadrados em um tabuleiro de xadrez de tamanho $n \times n$ é:

$$a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Nota: Uma vez que o problema dos quadrados num tabuleiro de xadrez é realmente perguntar pela soma dos quadrados, temos agora uma boa fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Nem todas as sequências terão polinômios como a sua fórmula fechada. Podemos utilizar a teoria das diferenças finitas para identificá-las.

Exemplo 5.3.4

Determine se cada uma das sequências a seguir pode ser descrita por um polinômio e, caso positivo, de qual grau.

1. 1, 2, 4, 8, 16, ….
2. 0, 7, 50, 183, 484, 1055, ….
3. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ….

Solução.

1. Como vimos no Exemplo 5.3.1, essa sequência não é Δ^k-constante para nenhum k. Portanto a fórmula fechada para a sequência não é um polinômio. De fato, nós sabemos qual é a fórmula fechada para essa sequência, é $a_n = 2^n$, que cresce mais rapidamente do que qualquer polinômio (e portanto não é polinomial).
2. A sequência de diferenças de primeira ordem é 7, 43, 133, 301, 571, …. As diferenças de segunda ordem são 36, 90, 168, 270, …. Diferenças de terceira ordem: 54, 78, 102, …. Quarta ordem: 24, 24, …. Até onde podemos ver, essa última sequência de diferenças é constante, portanto a sequência é Δ^4-constante, pelo que sua fórmula fechada é um polinômio de grau 4.
3. Esta é a sequência de Fibonacci. A sequência da diferenças de primeira ordem é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, as diferenças de segunda ordem são 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, …. Notamos que após alguns termos iniciais, nós obtemos a sequência original de volta. Portanto, nunca haverá diferenças constantes, logo a fórmula fechada para a sequência de Fibonacci não é um polinômio.

5.4. Créditos

Este módulo foi adaptado (traduzido e modificado) de [1], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

5.5. Referências

1. Levin, Oscar. *Discrete Mathematics: An Open Introduction*. Disponível em http://discrete.openmathbooks.org

5.6. Licença