Módulo I

Introdução, estruturas fundamentais

O que é Matemática Discreta?

O que é a matemática discreta, afinal? Por que tem esse nome? O que ela abrange? E para que serve?

Vamos analisar as duas palavras separadamente. Em primeiro lugar, *matemática*. Quando a maioria das pessoas ouve “matemática”, elas pensam “números”. Afinal, a matemática não é o estudo de quantidades? E não foi nessa matéria em que aprendemos pela primeira vez a contar, somar e multiplicar?

A matemática certamente tem sua raiz no estudo dos números – especificamente, os “números naturais” (os inteiros de 1 em diante) que fascinavam os antigos gregos. Mas a matemática é mais ampla do que isso, quase ao ponto de os números poderem ser considerados um caso especial de algo mais profundo. Neste livro, quando falarmos de árvores, conjuntos ou lógica formal, pode não haver um número à vista.

A matemática é sobre objetos conceituais abstratos que possuem propriedades, e as implicações dessas propriedades. Um “objeto” pode ser qualquer tipo de “material de pensamento” que possamos definir e raciocinar a respeito com precisão. Grande parte da matemática trata de questões como: *“suponha que definimos um certo tipo de coisa que tem certos atributos. Quais seriam as implicações disso, se raciocinássemos tão longe quanto possível?”*. A “coisa” pode ou não ser numérica, seja ela o que for. Assim como um número, porém, ela será definida de forma clara, terá certos aspectos conhecidos, e será capaz de se combinar com outras coisas de alguma forma.

Fundamental para a matemática é que ela lida com o abstrato. O abstrato, que é o oposto do concreto, significa essencialmente algo que não pode ser percebido com os sentidos. Um chip de computador é concreto: você pode tocá-lo, você pode vê-lo. Um número não é; nem uma função, uma árvore binária, ou uma implicação lógica. A única maneira de perceber estas coisas é com o poder da mente. Escreveremos expressões e faremos desenhos de muitas de nossas estruturas matemáticas a fim de ajudar a visualizá-las, e quase tudo o que estudarmos terá aplicações práticas em que a abstração se fundamenta no concreto para algum propósito útil. Mas a entidade matemática subjacente permanece abstrata e etérea – acessível apenas aos olhos da mente. Podemos usar um lápis para formar a figura “5” em um pedaço de papel, mas isso é apenas uma manifestação concreta do conceito subjacente de “cinco-dade”. Não confunda a figura ou o símbolo com a própria coisa, que sempre transcende qualquer mera representação física.

A outra palavra no nome do nosso assunto é “*discreta*”. A melhor maneira de apreciar o que significa “discreto” é contrastar com seu oposto, contínuo. Considere a seguinte lista:

Discreto	Contínuo
Números inteiros ($\mathbb{Z}$)	Números reais ($\mathbb{R}$)
Digital	Analógico
Salto quântico	Salto olímpico
Contagem	Medição
$\int$	$\sum$

O que as entradas do lado esquerdo têm em comum? Elas descrevem coisas que são medidas em intervalos nítidos e distintos, em vez de variar suavemente ao longo de um intervalo. Coisas discretas saltam subitamente de posição em posição, com uma precisão rígida. Se você tiver 1,7 m de altura, você pode algum dia crescer até 1,71 m; mas embora possa haver 5 pessoas em sua família, nunca haverá 5,3 pessoas (embora possa haver 6 algum dia).

A última linha desta lista vale um breve comentário. Suas entradas são símbolos matemáticos, com os quais você pode estar familiarizado. Do lado direito – no reino contínuo – está $\int$, que você talvez viu ou verá num curso de Cálculo. Ele representa a operação fundamental da integração, que pode ser considerada como encontrar "a área sob uma curva", e é basicamente uma forma de somar um conjunto infinito de números em um intervalo qualquer. Quando você "integra a função x^2 de 3 a 5", você está na verdade somando todas as pequenas e minúsculas lascas verticais que compõem a área de $x = 3$ à esquerda até $x = 5$ à direita. Sua entrada correspondente na coluna da esquerda da tabela é Σ, que é apenas uma abreviação para "somar um monte de coisas". A integração e a soma são operações equivalentes, é que quando você se integra, você está somando todas as (infinitamente muitas) lascas através do contínuo da linha real. Quando você soma, você está somando uma sequência fixa de entradas, uma de cada vez, como em um loop. Σ é apenas a "versão" discreta de $\int$.

Não se preocupe, você não precisa ter entendido completamente nenhuma das coisas de integração das quais acabei de falar, ou mesmo ter cursado Cálculo ainda. Estou apenas tentando lhe dar uma ideia do que significa "discreto", e de como a dicotomia entre discreto e contínuo realmente percorre toda a matemática e a computação. Neste livro, vamos nos concentrar principalmente em valores e estruturas discretas, que se revelam de maior utilidade na ciência da computação. Isso é parcialmente porque, como você provavelmente sabe, os próprios computadores são discretos e só podem armazenar e computar valores discretos. Pode haver muitos deles - megabytes, gigabytes, terabytes - mas cada valor armazenado é fundamentalmente composto de bits, cada um dos quais tem um valor de 0 ou 1. A propósito, isto é diferente do cérebro humano, cujas sinapses neuronais se comunicam com base nas quantidades contínuas de produtos químicos presentes em seus axônios. Portanto, acho que "computador" e "cérebro" são outro par de entradas que poderíamos acrescentar à nossa lista de Discreto vs. Contínuo.

Há outra razão, entretanto, do porquê a matemática discreta é mais útil para a maioria das pessoas da computação do que a matemática contínua, além da coisa dos bits e bytes. Simplificando, os computadores operam de forma algorítmica. Eles executam programas passo a passo, de forma iterativa. Primeiro faça isto, depois faça aquilo, depois passe para outra coisa. Esta execução mecânica, como o tiquetaque de um relógio, permeia tudo o que o computador pode fazer, e tudo o que podemos dizer a ele para fazer. Em um dado momento, o computador completou o passo 7, mas não o 8; acumulou 38 valores, mas não ainda 39; seu banco de dados tem exatamente 15 entradas, nem mais nem menos; ele sabe que depois de aceitar este pedido de amizade, haverá exatamente 553 pessoas em seu conjunto de amigos. Todo o paradigma por detrás do raciocínio sobre computadores e seus programas é discreto.

Mas ainda é matemática. É apenas matemática discreta. Há muita coisa por vir, por isso acalme-se e se prepare para começar a nossa jornada!

Exercícios

Usando um pedaço de papel dobrado longitudinalmente, cubra a coluna da direita dos exercícios abaixo. Leia cada exercício na coluna da esquerda, responda na sua mente, depois deslize o papel para baixo para revelar a resposta e veja se você está certo! Para cada exercício que você errou, entenda qual foi o erro antes de seguir em frente.

Qual o oposto de concreto?	Abstrato
Qual o oposto de discreto?	Contínuo
Considere uma certa quantidade de água em um copo. Você diria que ela é abstrata, ou concreta? Discreta ou contínua?	Concreta, já que é uma entidade real que você pode experimentar com os sentidos. Contínua, já que pode ser qualquer número de litros (ou colheres de sopa, ou o que quer que seja). A quantidade de água certamente não tem que ser um número inteiro. (Para pensar: já que toda matéria é, em última análise, composta de átomos, até mesmo substâncias como a água seriam discretas?)
Considere o número 27. Você diria que ele é abstrato ou concreto? Discreto, ou contínuo?	Abstrato, já que você não pode ver, tocar ou cheirar “vinte e sete”. Provavelmente discreto, já que é um inteiro, e quando pensamos em números inteiros, pensamos “discreto”. (Para pensar: na vida real, como você saberia se eu quis dizer o inteiro “27” ou o número decimal “27,0”? E isso importa?)
Considere um bit em uma memória de computador. Você diria que ele é abstrato, ou concreto? Discreto, ou contínuo?	Claramente, é discreto. Abstrato vs. Concreto, porém, é um pouco complicado. Se estamos falando do transistor e capacitor reais que estão fisicamente presentes no hardware, mantendo uma pequena carga em algum pequeno chip, então ele é concreto. Mas se estamos falando do valor "1" que é conceitualmente parte do estado de execu-

	ção atual do computador, então ele é de fato abstrato, assim como 27 era. Neste curso, falamos sempre de bits neste segundo sentido, abstrato.
Se a matemática não se resume a números, de que mais se trata?	Qualquer tipo de objeto abstrato que tenha propriedades sobre as quais possamos raciocinar.

Afirmações Matemáticas

Uma afirmação matemática, ou declaração, é qualquer sentença declarativa que é necessariamente verdadeira ou falsa. Uma afirmação é atômica se não puder ser dividida em declarações menores, caso contrário é chamada de molecular ou composta.

Exemplo

As seguintes sentenças são declarações (na verdade, são declarações atômicas):

- Os números telefônicos no Brasil têm 5 dígitos.
- A Lua é redonda.
- 42 é um quadrado perfeito.
- Todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois primos.
- $3 + 7 = 12$

As seguintes sentenças não são declarações:

- Você quer comer uma coxinha?
- A soma de dois quadrados.
- $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n + 1$.
- Vá para o seu quarto!
- $3 + x = 12$

A razão pela qual a sentença “$3 + x = 12$” não é uma declaração é que ela contém uma variável. Dependendo do que for x, a sentença ou é verdadeira ou é falsa, mas neste momento ela não é nem uma coisa nem outra. Uma maneira de transformar a sentença em uma declaração é especificar o valor da variável de alguma forma. Isto poderia ser feito especificando uma substituição específica, por exemplo, “$3 + x = 12$ onde $x = 9$”, que é uma afirmação verdadeira. Ou você poderia capturar a variável livre quantificando sobre ela, como em “para todos os valores de x, $3 + x = 12$", o que é falso. Discutiremos os quantificadores com mais detalhes no Módulo VII.

Você pode construir declarações (moleculares) mais complicadas a partir de declarações mais simples (atômicas ou moleculares) usando conectivos lógicos. Por exemplo, esta é uma declaração molecular:

Os números telefônicos no Brasil têm 5 dígitos *e* 42 é um quadrado perfeito.

Note que podemos decompor isto em duas declarações menores. As duas afirmações mais curtas estão ligadas por um "e", que atua como conectivo. Na matemática, frequentemente consideramos 5 conectivos, que correspondem (aproximadamente) a: "**e**" (Adão é um homem e Eva é uma mulher), "**ou**" (Adão é um homem ou Eva é uma mulher), "**se..., então...**" (se Adão é homem, então Eva é mulher), "**se e somente se**" (Adão é homem se e somente se Eva é mulher), e "**não**" (Adão não é homem). Os quatro primeiros são chamados de conectivos binários (porque eles conectam duas afirmações), enquanto "não" é um exemplo de um conectivo unário (uma vez que se aplica a uma única afirmação). Para cada um desses conectivos, é utilizado um símbolo matemático, respectivamente, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$.

As declarações moleculares são ainda declarações, portanto devem ser verdadeiras ou falsas. A observação absolutamente fundamental aqui é que o valor-verdade que a declaração molecular possui é completamente determinado pelo tipo de conectivo e pelos valores-verdade de suas partes. Não precisamos saber o que as partes realmente dizem, apenas se essas partes são verdadeiras ou falsas. Dizemos por isso que todos os conectivos mencionados são **verofuncionais**. Dessa maneira para analisar a veracidade de declarações, podemos utilizar **letras** (X, Y, Z...) para se referir a sentenças atômicas ou moleculares, sendo que cada letra pode ter apenas dois valores-verdade: *verdadeiro* ou *falso*.

O valor-verdade de uma declaração é assim determinado pelo valor verdade de suas partes, dependendo dos conectivos utilizados:

- $X \wedge Y$ é verdadeira quando tanto X quanto Y são verdadeiras.
- $X \vee Y$ é verdadeira quando X ou Y, ou ambas, são verdadeiras.
- $X \Rightarrow Y$ é verdadeira quando X é falsa, ou quando Y é verdadeira (ou ambas as coisas).
- $X \Leftrightarrow Y$ é verdadeira quando X e Y são ambas verdadeiras, ou ambas falsas.
- $\neg X$ é verdadeira quando X é falsa.

No Módulo VII deste curso aprofundaremos um pouco mais esse assunto e um tratamento bem mais abrangente será visto no curso de "Lógica para Computação".

Estruturas Fundamentais

Conjuntos

O lugar a partir do qual começaremos nossa caminhada é uma área da matemática chamada de “teoria dos conjuntos”. A teoria dos conjuntos tem uma propriedade surpreendente: é tão simples e aplicável que quase todo o resto da matemática pode se basear nela! Isto é ainda mais notável porque a própria teoria dos conjuntos surgiu bastante tarde no jogo (como as coisas são) – foi inventada por um homem brilhante, Georg Cantor, na década de 1870. Isso pode parecer muito tempo atrás, mas considere que quando Cantor nasceu, a humanidade já havia acumulado uma imensa riqueza de conhecimentos matemáticos: desde geometria até álgebra, do cálculo aos números primos. Mas a teoria dos conjuntos era tão elegante e universal que, depois de inventada, quase tudo em matemática foi redefinido a partir do zero para ser expresso na linguagem dos conjuntos. Acontece que esta simples ferramenta é uma forma surpreendentemente poderosa de raciocinar sobre conceitos matemáticos de todos os tipos. Assim, quase tudo o mais neste curso tem a teoria dos conjuntos como fundação.

Cantor, a propósito, enlouqueceu ao tentar estender a teoria dos conjuntos para abranger totalmente o conceito de infinito. Não deixe que isso aconteça com você.

A Ideia de Conjunto

Um conjunto é uma seleção de certas coisas provenientes de um grupo (normalmente maior). Quando falamos de um conjunto, estamos declarando que certos itens específicos desse grupo estão no conjunto, e certos itens não estão no conjunto. Não há tons de cinza: cada elemento ou está dentro ou está fora.

Por exemplo, talvez o grupo geral que estou considerando seja uma família, que consiste de cinco pessoas: Mamãe, Papai, Luísa, J.P., e Zezinho. Poderíamos definir um conjunto – chamemos de A – que contém Papai e Luísa, mas não os outros três. Outro conjunto B poderia ter Luísa, J.P., e Zezinho, mas não os dois pais. O conjunto C poderia ter o pai, e somente o pai, nele. O conjunto D pode ter todos os cinco da família, e o conjunto E pode não ter ninguém etc. Você pode ver que cada conjunto é apenas uma forma de especificar quais elementos estão dentro e quais estão fora.

Normalmente, um conjunto será baseado em alguma propriedade de seus membros, em vez de ser apenas um sortimento aleatório de elementos. É sobre isso que vale a pena pensar. Por exemplo, o conjunto P (de “pais”) poderia ser “todos os da família que são pais”: este conjunto conteria Mamãe e Papai, e ninguém mais. O conjunto F (de “feminino”) poderia ser declarado como os membros femininos, e conteria a mãe e a Luísa. O conjunto H (de “humanos”) conteria todos os cinco elementos do grupo. E assim por diante.

Como acontece com a maior parte da matemática, revela-se útil definir símbolos para estes conceitos, pois assim podemos falar sobre eles de forma mais precisa e concisa. Normalmente, listamos os membros de um conjunto usando chaves, desta forma:

$$A = \{ \text{Papai, Luísa} \}$$

ou

$$B = \{ \text{Luísa, J.P., Zezinho} \}$$

Note que não importa a ordem em que você lista os membros. O conjunto F de mulheres contém Mamãe e Luísa, mas não é como se a Mamãe fosse a "primeira" mulher ou qualquer outra coisa. Isso não faz nenhum sentido. Não há "primeiro". Os membros de um conjunto são todos membros iguais. Portanto, P é o mesmo se o escrevemos assim:

$$P = \{ \text{Papai, Mamãe} \}$$

ou assim:

$$P = \{ \text{Mamãe, Papai} \}.$$

Essas são apenas duas maneiras diferentes de escrever a mesma coisa.

O conjunto E que não possui ninguém nele, pode naturalmente ser escrito assim:

$$E = \{ \ \}$$

mas às vezes usamos este símbolo especial em seu lugar:

$$E = \varnothing.$$

Independentemente de como você o escreva, este tipo de conjunto (que não contém elementos) é chamado de *conjunto vazio*.

O conjunto H, acima, continha todos os membros do grupo em consideração. Algumas vezes nos referiremos ao "grupo em consideração" como o "*domínio do discurso*", ou "*universo do discurso*". Ele também é um conjunto, e normalmente usamos o símbolo Ω para nos referirmos a ele[1]. Portanto, neste caso,

$$\Omega = \{ \text{Mamãe, Zezinho, J.P., Papai, Luísa} \}.$$

Outro símbolo que usaremos muito é "$\in$", que significa "é um membro de". Como Luísa é uma mulher, nós podemos escrever:

$$\text{Luísa} \in F$$

para mostrar que Luísa é membro do conjunto F. Por outro lado, nós escrevemos: J.P. $\notin F$ para mostrar que J.P. não é membro do conjunto F.

Como um aparte, mencionei que cada item está ou não está em um conjunto: não há tons de cinza. Curiosamente, os pesquisadores desenvolveram outro corpo de matemática chamado (não estou brincando) "teoria dos conjuntos nebulosos" (em inglês, *fuzzy set theory*). Conjuntos nebulosos mudam esta suposição de membresia: os itens podem de fato estar "parcialmente em" um conjunto. Poder-se-ia declarar, por exemplo, que Papai é "10% feminino", o que significa que ele está apenas 10% no conjunto F. Isso talvez não faça muito sentido para o gênero, mas você pode imaginar que se definíssemos um conjunto T de "pessoas altas", tal noção poderia ser útil. Em todo caso, este exemplo ilustra um princípio maior que é importante entender: em matemática, as coisas são como são simplesmente porque decidimos que é útil pensar nelas dessa maneira. Se decidirmos que há uma maneira útil diferente de pensar sobre

1 Alguns autores adotam o símbolo U, e o chamam de "*conjunto universo*".

elas, podemos definir novas suposições e proceder de acordo com novas regras. Não faz sentido dizer "os conjuntos são (ou não são) verdadeiramente nebulosos": porque não há "verdadeiramente". Toda matemática procede daquilo que os matemáticos decidiram ser útil definir, e qualquer uma delas pode ser alterada a qualquer momento, se acharmos conveniente.

Definindo Conjuntos

Há duas maneiras de definir um conjunto: *em extensão* ou *em intenção*[2]. Não estou dizendo que existem dois tipos de conjuntos: em vez disso, estou simplesmente dizendo que existem duas formas de *especificar* um conjunto.

Definir um conjunto em extensão é listar seus membros em si. Foi o que fizemos quando dissemos $P = \{$ Papai, Mamãe $\}$, acima. Neste caso, não estamos dando nenhum "significado" ao conjunto; estamos apenas especificando mecanicamente o que está nele. Os elementos Papai e Mamãe são chamados de *extensão* do conjunto P.

A outra maneira de especificar um conjunto é em intenção, o que significa descrever seu significado. Outra maneira de pensar sobre isto é especificar uma regra pela qual se pode determinar se um determinado elemento está ou não no conjunto. Se eu disser "Seja P o conjunto de todos os progenitores", eu estou definindo P intencionalmente. Eu não disse explicitamente quais elementos específicos do domínio do discurso estão em P. Eu apenas dei o significado do conjunto, a partir do qual você pode descobrir a extensão. Nós dizemos que a "progenitura" é a *intenção* de P.

Observe que dois conjuntos com intenções diferentes podem, no entanto, ter a mesma extensão. Suponha que O seja "o conjunto de todas as pessoas com mais de 25 anos" e R seja "o conjunto de todas as pessoas que usam alianças de casamento". Suponha que, sendo nosso Ω a família em questão, O e R têm a mesma extensão: {Mamãe, Papai}. Os conjuntos O e R têm intenções diferentes, todavia: conceitualmente falando, eles estão descrevendo coisas diferentes. Pode-se imaginar um mundo em que os mais velhos não usam todos alianças de casamento, ou um mundo em que algumas pessoas mais jovens as usam. Dentro do domínio do discurso da família em questão, no entanto, as extensões acontecem de coincidir.

Fato: dizemos que dois conjuntos são iguais *se tiverem a mesma extensão*. Isto pode parecer injusto com a intencionalidade, mas é assim que as coisas são. Portanto, é totalmente legítimo escrever:

$$O = R$$

uma vez que, pela definição de igualdade de conjuntos, eles são, de fato, iguais. No início, achei isso estranho, mas não é realmente mais estranho do que dizer "o número de anos que durou a Guerra Civil nos EUA = a quantidade de números que tenho que acertar para ganhar a quadra na Quina". As coisas do lado esquerdo e direito desse sinal de igualdade se referem conceitualmente a duas coisas muito diferentes, mas isso não impede que ambas tenham o valor 4, e assim sejam iguais.

2 Curiosidade ortográfica: "intenção" com "ç", significando "desígnio, intento, propósito". "Intensão", com "s" é uma palavra totalmente diferente, significando "aumentar a tensão", ou "tornar intenso".

A propósito, às vezes usamos a notação de chaves em combinação com um dois pontos para definir intencionalmente um conjunto. Considere isto:

$$M = \{ \ k : k \text{ está entre 1 e 20, e é um múltiplo de 3 } \}.$$

Quando você chegar nos dois pontos, pronuncie-o como "tal que". Então isto diz "M é o conjunto de todos os números k tal que k está entre 1 e 20, e é um múltiplo de 3". (Não há nada de especial em k, aqui; eu poderia ter escolhido qualquer letra.) Esta é uma definição intencional, já que não listamos os números específicos no conjunto, mas sim uma regra para encontrá-los. Outra maneira de especificar este conjunto seria escrever

$$M = \{ \ 3, 6, 9, 12, 15, 18 \ \}$$

que é uma definição em extensão do mesmo conjunto.

Experiência de reflexão interessante: o que acontece se você ampliar a intenção de um conjunto, acrescentando condições a ele? Resposta: aumentar a intenção diminui a extensão. Por exemplo, suponha que M seja inicialmente definido como o conjunto de todos os homens (da nossa família em questão). Agora, suponha que eu decida acrescentar a essa intenção, tornando-a o conjunto de todos os homens com mais de 25 anos. Ao acrescentar à intenção, reduzi agora a extensão de { Papai, J.P., Zezinho } para apenas { Papai }. O contrário também é verdade: cortar a intenção, removendo condições, aumenta efetivamente a extensão do conjunto. A mudança de "todos os homens" para apenas "todas as pessoas" inclui a Mamãe e Luísa na seleção.

Conjuntos Finitos e Infinitos

Os conjuntos podem ter um número infinito de membros. Isso não faz sentido para o nosso exemplo da família, mas para outras coisas faz, é claro, como por exemplo:

$$I = \{ \ k : k \text{ é um múltiplo de 3 } \}.$$

Obviamente, existem infinitos múltiplos de 3, e por isso I tem um número ilimitado de membros. Não surpreendentemente, chamamos I de um conjunto infinito. Mais surpreendentemente, acontece que existem diferentes tamanhos de conjuntos infinitos e, portanto, diferentes tipos de infinito. Por exemplo, ainda que existam infinitos números inteiros, e também infinitos números reais, existem no entanto mais números reais do que números inteiros. Isto é o que levou Cantor à loucura, falaremos mais sobre isso posteriormente, quando tratarmos de *cardinalidade* (número de elementos) de conjuntos. Por enquanto, basta perceber que cada conjunto ou é finito ou é infinito.

Você pode pensar, a propósito, que não há como definir um conjunto infinito em extensão, uma vez que isso exigiria papel infinito. Isto não é verdade, no entanto, se usarmos reticências de forma criativa:

$$I = \{ \ 3, 6, 9, 12, 15, \ldots \ \}$$

Esta é uma definição em extensão de I, já que estamos listando explicitamente todos os membros. Poderia ser argumentado, no entanto, que é, na verdade, intencional, uma vez que a interpretação de "..." exige que o leitor descubra a regra e a aplique mentalmente a todos os números restantes. Talvez na realidade estejamos dando uma definição intencional, camuflada em uma lista de membros com aparência de extensão. Estou em cima do muro aqui.

Conjuntos não são Vetores (Arrays)

Se você já fez um pouco de programação de computador, você pode ver uma certa semelhança entre os conjuntos e as coleções de itens frequentemente usadas em um programa: arrays, talvez, ou listas ligadas. Sem dúvida, existem algumas semelhanças. Mas há também algumas diferenças muito importantes, que não devem ser desconsideradas:

- **Sem ordem.** Como mencionado anteriormente, não há ordem para os membros de um conjunto. "{ Papai, Mamãe }" é o mesmo conjunto que "{ Mamãe, Papai }". Em um programa de computador, é claro, a maioria dos arrays ou listas têm primeiro, segundo e último elementos, e um número de índice atribuído a cada um.

- **Sem duplicatas.** Suponha que M seja o conjunto de todas as pessoas do sexo masculino. O que significaria porventura dizer M = {J. P., J. P., Zezinho}? Isso significaria que "J. P. é duas vezes o homem que Zezinho é"? Isto é obviamente sem sentido. O conjunto M é baseado em uma propriedade: ser do sexo masculino. Cada elemento de Ω ou é do sexo masculino, ou não é. Não pode ser "homem três vezes". Novamente, em um array ou lista ligada, você certamente poderia ter mais de uma cópia do mesmo item em posições diferentes.

- **Conjuntos infinitos.** Eu nunca vi um array com uma quantidade infinita de elementos, e você também não verá[3].

- **Sem tipos.** Na maioria das vezes, um array ou outra coleção em um programa de computador contém elementos de um único tipo: é um array de inteiros, ou uma lista ligada de objetos `Cliente`, por exemplo. Isto é importante porque o programa muitas vezes precisa tratar todos os elementos da coleção da mesma maneira. Talvez seja necessário fazer um loop sobre a coleção para somar todos os números, ou iterar através de uma lista de clientes e procurar por clientes que não fizeram um pedido nos últimos seis meses. O programa teria problemas se tentasse adicionar uma string de texto a seu total acumulado, ou se encontrasse um objeto `Produto` no meio de sua lista de clientes. Os conjuntos, porém, podem ser heterogêneos, o que significa que podem conter diferentes tipos de coisas. O exemplo da família tinha apenas seres humanos, mas nada me impede de criar um conjunto X = { Matheus Nachtergaele, Ariano Suassuna, O Auto da Compadecida, 13, ☺ }.

  Não insisto muito neste ponto por algumas razões. Primeiro, a maioria das linguagens de programação permite coleções heterogêneas de algum tipo, mesmo que não sejam a coisa mais natural de se expressar. Em Java, você pode definir uma `ArrayList` como um não-genérico para que ela simplesmente contenha itens da classe `Object`. Em C, você pode ter um array de "`void *`" – apontadores para algum tipo não especificado – o que permite que seu array aponte para diferentes tipos de coisas. A menos que seja uma linguagem livre de tipos

3 Algumas linguagens de programação são capazes de lidar com listas ligadas de tamanho infinito, sob certas condições.

(como Perl ou JavaScript), parece que você está se contorcendo para fazer isto. A outra razão pela qual eu faço esta distinção levemente é que quando estamos lidando com conjuntos, muitas vezes achamos útil lidar com coisas de apenas um tipo, e assim nosso Ω acaba sendo *homogêneo* de qualquer forma.

Talvez a coisa principal a se lembrar aqui é que um conjunto é um conceito puramente abstrato, enquanto que um array é uma lista concreta, tangível e explícita. Quando falamos de conjuntos, estamos raciocinando em geral sobre grandes coisas conceituais, enquanto que quando lidamos com arrays, normalmente estamos iterando através deles para algum propósito específico. Não se pode iterar por um conjunto muito facilmente porque (1) não há ordem para os membros, e (2) pode haver infinitamente muitos deles de qualquer modo.

Conjuntos não são Pares Ordenados (ou Tuplas)

Você se lembrará da álgebra do ensino médio a noção de um par ordenado (x, y). Usamos pares ordenados, por exemplo, quando quisermos especificar um ponto a ser plotado em um gráfico: a primeira coordenada fornece a distância da origem no eixo x, e a segunda coordenada no eixo y. Claramente, um par ordenado não é um conjunto, pois como o nome implica, ele é ordenado: $(3, -4) \neq (-4, 3)$. Por esta razão, teremos muito cuidado em usar chaves para denotar conjuntos, e parênteses para denotar pares ordenados.

A propósito, embora a palavra "coordenada" seja frequentemente usada para descrever os elementos de um par ordenado, essa é realmente uma palavra voltada para a geometria que implica uma disposição visual de algum tipo. Normalmente não representaremos elementos assim, mas, ainda assim, teremos usos para lidar com pares ordenados. Chamarei apenas as partes constituintes de "elementos" para ser mais geral.

Pontos tridimensionais precisam de triplas ordenadas (x, y, z), e não é preciso ser um cientista de foguetes para deduzir que poderíamos estender isto a qualquer número de elementos. A questão é como chamá-los, e você parece um cientista de foguetes (ou outro nerd genérico) quando você diz tupla. Se você tem uma coisa do tipo par ordenado com 5 elementos, portanto, é uma 5-upla (ou um quíntuplo). Se tiver 117 elementos, é um 117-upla, e realmente não há formas mais intuitivas de chamá-la. O termo geral (se não sabemos ou não queremos especificar quantos elementos) é n-upla. Em qualquer caso, é uma sequência ordenada de elementos que pode conter duplicatas, portanto é muito diferente de um conjunto.

Conjuntos de Conjuntos

Os conjuntos são heterogêneos – um único conjunto pode conter quatro universidades, sete inteiros e uma lata de sardinha – e por isso pode ocorrer que eles também possam conter outros conjuntos. Isto é de fato verdade, mas deixe-me fazer uma advertência importante: você pode entrar em águas profundas muito rapidamente quando começar a pensar em "conjuntos de conjuntos". De fato, em 1901, o filósofo Bertrand Russell salientou que esta ideia pode levar a contradições insolúveis, a menos que você coloque algumas restrições nela. O que ficou conhecido como "O Paradoxo de Russell", famoso, é o seguinte: considere o conjunto R de todos os conjuntos que *não contêm* a si mesmos como membros[4]. Agora o R é um membro de si mesmo, ou não é? Seja qual for a forma como você responda, acaba sendo errado (experimente!), o que significa que todo este cenário deve ser defeituoso em algum nível.

A boa notícia é que enquanto você não lidar com este tipo de *loop* auto-referencial ("contendo a si mesmo como membro"), então é bastante seguro tentar em casa. Considere este conjunto:

$$V = \{\ 3, 5, \{\ 5, 4\ \}, 2\ \}.$$

Este conjunto tem quatro (e não cinco) membros. Três dos membros de V são inteiros: 2, 3, e 5. O outro é um conjunto (sem nome atribuído). O outro conjunto, por sinal, tem dois membros próprios: 4 e 5. Se lhe perguntassem, "$4 \in V$"? a resposta seria não. Como corolário disso, há uma diferença entre

$$\varnothing$$

e

$$\{\ \varnothing\ \}.$$

O primeiro é um conjunto sem elementos. O segundo é um conjunto com um elemento: e esse elemento é simplesmente um conjunto sem nada dentro dele.

Alguns Conjuntos Especiais

Além do conjunto vazio, há símbolos para alguns outros conjuntos comuns, incluindo:

- $\mathbb{Z}$ – os inteiros (positivos, negativos e o zero)
- $\mathbb{N}$ – os números naturais (inteiros positivos e o zero)
- $\mathbb{Q}$ – os números racionais (todos os números que podem ser expressos como um inteiro dividido por outro inteiro)
- $\mathbb{R}$ – os números reais (todos os números que não são imaginários, até mesmo os números decimais que não são racionais)

Todos esses conjuntos têm um número infinito de elementos, embora, como mencionei, $\mathbb{R}$ tem de certa forma "mais elementos" do que $\mathbb{N}$. Falaremos mais sobre cardinalidade de conjuntos posteriormente.

Combinando Conjuntos

Muito bem, então temos conjuntos. Agora, o que podemos fazer com eles? Quando você aprende sobre números pela primeira vez na educação infantil, a próxima coisa a aprender é como combinar números usando várias operações para produzir outros números. Estas incluem $+$, $-$, $\times$, $\div$, expoentes, raízes, etc. Os conjuntos também possuem operações que são úteis para combiná-los para gerar outros conjuntos. Estas incluem:

---

4 Por exemplo, o conjunto Z de todas as zebras é um membro de R, pois Z é um conjunto (e não uma zebra), portanto $Z \notin Z$. O conjunto S definido como "o conjunto de todos os conjuntos mencionados neste documento" *não é* um membro de R, pois S contém a si mesmo como membro.

- **União** ($\cup$). A união de dois conjuntos é um conjunto que inclui os elementos que qualquer um deles (ou ambos) tem como membros. Por exemplo, se A = { Papai, Luísa }, e B = { Luísa, J.P., Zezinho }, então $A \cup B$ = { Papai, Luísa, J.P., Zezinho }. Note que um elemento está na união se estiver em A ou em B. Por esta razão, há uma forte relação entre o operador da união de conjuntos e o conectivo "ou" ($\vee$) da lógica.

- **Interseção** ($\cap$). A interseção de dois conjuntos é um conjunto que inclui os elementos que ambos têm como membros. No exemplo anterior, $A \cap B$ = { Luísa }. Há uma forte conexão entre a interseção e o conectivo lógico "e" ($\wedge$).

- **Diferença ou Complemento Parcial** ($-$). Parece uma subtração, mas é significativamente diferente. $A - B$ contém os elementos de A que não estão também em B. Então você começa com A, e depois "subtrai" o conteúdo de B, se eles ocorrerem. No exemplo acima, $A - B$ = { Papai }. (Note que J.P. e Zezinho não entraram realmente no cálculo.) Ao contrário de $\cup$ e $\cap$, $-$ não é *comutativa*. Isto significa que não é simétrica: $A - B$ não fornece (normalmente) a mesma resposta que $B - A$. Neste exemplo, $B - A$ é { J.P., Zezinho }, enquanto que se você alguma vez inverter os operandos com a união ou interseção, você sempre terá o mesmo resultado de antes.

- **Complemento** (Total) ($\overline{X}$). O mesmo que o complemento parcial, acima, exceto que o primeiro operando implícito é Ω. Em outras palavras, $A - B$ é "todas as coisas em A que não estão em B", enquanto que $\overline{B}$ é "todas as coisas (*ponto*) que não estão em B". Naturalmente, "todas as coisas (*ponto*)" significa "todas as coisas das quais estamos falando atualmente". O domínio do discurso Ω é muito importante aqui. Se estamos no nosso exemplo da família, diríamos que $\overline{M}$ = { Mamãe, Luísa }, porque esses são todos os membros da família que não são do sexo masculino. Se, por outro lado, Ω é "o grande conjunto de absolutamente tudo", então não só Mamãe e Luísa são membros de $\overline{M}$, mas também o número 12, a Revolução Francesa, e meu pesadelo na terça-feira passada sobre um ornitorrinco raivoso.

- **Produto Cartesiano** ($\times$). Parece uma multiplicação, mas é muito diferente. Quando se toma o produto cartesiano de dois conjuntos A e B, não se obtém nem mesmo elementos dos conjuntos no resultado. Ao invés disso, você obtém pares ordenados de elementos. Estes pares ordenados representam cada combinação de um elemento de A e um elemento de B. Por exemplo, suponha que A = { Bruno, Davi } e B = { Joana, Gabriela, e Tatiana }. Então:

  $$A \times B = \{ \text{(Bruno, Joana), (Bruno, Gabriela), (Bruno, Tatiana), (Davi, Joana),} \\ \text{(Davi, Gabriela), (Davi, Tatiana)} \}.$$

  Estude essa lista. A primeira coisa a perceber é que ela não consiste nem de homens nem de mulheres, mas de pares ordenados. (Claramente, por exemplo, Joana $\notin A \times B$.) Cada homem aparece exatamente uma vez com cada mulher, e o homem é sempre o primeiro elemento do par ordenado. Como temos dois homens e três mulheres, há seis elementos no resultado, o que é uma maneira fácil de lembrar o sinal $\times$ que representa o produto cartesiano. (Não cometa o erro comum de pensar que $A \times B$ é 6. $A \times B$ é um conjunto, não um número. A cardinalidade do conjunto, é claro, é 6, então é apropriado escrever $|A \times B| = 6$, onde $|\ |$ é o símbolo que usamos para a cardinalidade do conjunto).

Leis de Combinação de Conjuntos

Há um grande número de fatos úteis que surgem quando se combinam conjuntos utilizando os operadores acima. O importante é que todos eles são facilmente compreendidos só de pensar neles por um momento. Dito de outra forma, *estes não são fatos para memorizar; são fatos para se observar e verificar por si mesmo*. Eles são apenas algumas consequências naturais da maneira como definimos os conjuntos e as operações, e há muitas outras.

- **União e interseção são comutativas.** Como observado anteriormente, é fácil ver que $A \cup B$ dará sempre o mesmo resultado que $B \cup A$. O mesmo vale para $\cap$. (Não é verdade para $-$ nem para $\times$, no entanto.)
- **União e interseção são associativas.** "Associativo" significa que se você tem um operador repetido várias vezes, da esquerda para a direita, não importa em qual ordem você os avalia. $(A \cup B) \cup C$ dará o mesmo resultado que $A \cup (B \cup C)$. Isto significa que podemos escrever livremente expressões como "$X \cup Y \cup Z$" e ninguém pode nos acusar de sermos ambíguos. Isto também é verdade se você tiver três (ou mais) interseções seguidas. Mas tenha cuidado: a associatividade não se mantém se você tiver uniões e interseções misturadas. Se eu escrever $A \cup B \cap C$, é muito importante se eu faço primeiro a união ou primeiro a interseção. É exatamente assim que funciona com os números: $4 + 3 \times 2$ daria 10 ou 14, dependendo da ordem das operações. Em álgebra, aprendemos que $\times$ tem precedência sobre $+$, e você sempre o fará primeiro na ausência de parênteses (logo, nesse exemplo, não há ambiguidade e o resultado é 10). Poderíamos estabelecer uma ordem de precedência semelhante para as operações sobre conjuntos definidas, mas não o faremos: sempre o explicitaremos com parênteses.
- **União e interseção são distributivas.** Você se lembrará da álgebra básica que $a \cdot (b + c) = ab + ac$. De forma semelhante, com conjuntos,

  $$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

  É importante entender isto por si mesmo em vez de apenas memorizá-lo como regra. Por que isso funciona? Bem, pegue um exemplo concreto. Suponha que X seja o conjunto de todas as alunas, Y seja o conjunto de todos os matriculados em Sistemas da Informação, e Z seja o conjunto de todos os matriculados em Matemática. (Suponha que é possível fazer ao mesmo tempo Sistemas da Informação e Matemática.) O lado esquerdo do sinal de igualdade diz "primeiro pegue todos os matriculados em Matemática e Sistemas da Informação e coloque-os em um grupo. Depois, intersectar esse grupo com as alunas para extrair somente elas". O resultado é "as mulheres que ou são estudantes de Sistemas de Informação ou de Matemática (ou de ambos os cursos)". Agora, olhe para o lado direito. O primeiro par de parênteses abrange apenas as mulheres matriculadas em Sistemas da Informação. O par direito abrange as mulheres que estão matriculadas em Matemática. Depois pegamos a união dos dois, para obter um grupo que contém apenas as mulheres, e especificamente apenas as mulheres que estão matriculadas em Sistemas da Informação ou Matemática (ou ambos). Claramente, os dois lados do sinal de igualdade têm a mesma extensão.

A propriedade distributiva em álgebra básica não funciona se você inverter os sinais de multiplicação e adição (normalmente $a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot (a + c)$), mas funciona aqui:

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

Usando as mesmas definições de X, Y, e Z, descubra o significado disso e convença-se de que é sempre verdade.

- **Leis de identidade.** A coisa mais simples que você aprendeu o dia todo: $X \cup \varnothing = X$ e $X \cap \Omega = X$. Você não muda X acrescentando nada a ele, ou não tirando nada dele.
- **Leis de dominação.** O lado oposto do acima é que $X \cup \Omega = \Omega$ e $X \cap \varnothing = \varnothing$. Se você pegar X, e depois adicionar tudo e o papagaio e o cachorro a ele, você reterá tudo e o papagaio e o cachorro. E se você restringir X a não possuir nada, é claro que ele não tem nada.
- **Leis de complemento.** $X \cup \overline{X} = \Omega$. Esta é outra forma de dizer "tudo (no domínio do discurso) ou está ou não está em um conjunto". Assim, se eu tomar X, e depois eu tomar tudo o que não está em X, e juntar os dois, eu fico com tudo. Em uma linha semelhante, $X \cap \overline{X} = \varnothing$, porque não pode haver nenhum elemento que esteja tanto em X como não em X: isso seria uma contradição. Curiosamente, a primeira destas duas leis se tornou controversa na filosofia moderna. É chamada "a lei do meio excluído", e é explicitamente repudiada em muitos sistemas lógicos modernos.
- **Leis de De Morgan.** Essas merecem ser memorizadas, pelo menos porque (1) são incrivelmente importantes e (2) podem não estar na ponta da língua da mesma forma que as propriedades anteriores. A primeira pode ser expressa desta maneira:

  $$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

  Mais uma vez, ela é melhor compreendida com um exemplo específico. Digamos que você está alugando uma casa, e quer ter certeza de não ter nenhum indivíduo desagradável sob o teto. Seja X o conjunto de todos os ladrões conhecidos. Seja Y o conjunto de todos os assassinos conhecidos. Agora, como proprietário, você não quer nenhum ladrão ou assassino alugando sua propriedade. Então, a quem você está disposto a alugar? Resposta: se Ω é o conjunto de todas as pessoas, você está disposto a alugar para $\overline{X \cup Y}$.

  Por que isso? Porque se você tomar $X \cup Y$, isso lhe dará todos os indesejáveis: pessoas que são ou assassinos ou ladrões (ou ambos). Você não quer alugar para nenhum deles. Na verdade, você quer alugar para o complemento desse conjunto; ou seja, "qualquer outra pessoa". Colocar uma barra em cima dessa expressão lhe dá todos os não-ladrões e não-assassinos.

  Muito bem. Mas agora olhe para o lado direito da equação. X lhe dá os não-ladrões. Y dá a você os não-assassinos. Agora, para conseguir pessoas aceitáveis, você quer alugar somente a alguém que esteja em ambos os grupos. Dito de outra forma, eles têm que ser tanto um não-ladrão quanto um não-assassino para que você alugue a eles. Portanto, eles devem estar na interseção do grupo dos não-ladrões com o grupo dos não-assassinos. Portanto, os dois lados desta equação são os mesmos.

A outra forma da lei De Morgan é expressa invertendo as interseções e as uniões:

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

Trabalhe nesta por conta própria com um exemplo semelhante e convença-se de que é sempre verdade.

Augustus De Morgan, a propósito, foi um brilhante matemático do século XIX, com uma ampla gama de interesses. Seu nome surgirá novamente quando estudarmos a lógica e a indução matemática.

Subconjuntos

Aprendemos que o símbolo "$\in$" é usado para indicar membresia em conjuntos: o elemento da esquerda é um membro do conjunto da direita. Uma noção relacionada, mas distinta, é a ideia de *subconjunto*. Quando dizemos $X \subseteq Y$ (pronuncia-se "X é um subconjunto de Y"), significa que cada membro de X também é membro de Y. O inverso não é necessariamente verdade, é claro, caso contrário "$\subseteq$" significaria o mesmo que "=". Portanto, se $A = \{$ Papai, Luísa $\}$ e $K = \{$ Papai, Mamãe, Luísa $\}$, então podemos dizer que $A \subseteq K$.

Tome cuidado com a distinção entre "$\in$" e "$\subseteq$", que muitas vezes são confundidos. Com $\in$, a coisa à esquerda é um elemento, enquanto que com $\subseteq$, a coisa à esquerda é um conjunto. Isto é ainda mais complicado pelo fato de que o elemento do lado esquerdo do $\in$ pode muito bem ser um conjunto.

Vamos dar alguns exemplos. Suponha que Q seja o conjunto $\{ 4, \{ 9, 4 \}, 2 \}$. Q tem três elementos aqui, um dos quais é em si mesmo um conjunto. Agora suponhamos que façamos P ser o conjunto $\{ 4, 9 \}$. Pergunta: $P \in Q$? A resposta é sim: o conjunto $\{ 4, 9 \}$ (que é o mesmo que o conjunto $\{ 9, 4 \}$, apenas escrito de maneira diferente) é, na verdade, um elemento do conjunto Q. Próxima pergunta: $P \subseteq Q$? A resposta é não, $P \nsubseteq Q$. Se P fosse um subconjunto de Q, isso implicaria que cada membro de P (há dois deles: 9 e 4) também é um elemento de Q, enquanto na verdade, apenas 4 é um membro de Q, não 9. Última pergunta: se R é definido como $\{ 2, 4 \}$, $R \subseteq Q$? A resposta é sim, já que tanto 2 como 4 também são membros de Q.

Observe que, pela definição, cada conjunto é um subconjunto de si mesmo. Às vezes, porém, é útil falar se um conjunto é realmente um subconjunto de outro, e não se quer contar quando os dois conjuntos são na verdade iguais. Isto é chamado de um subconjunto próprio, e o símbolo para ele é $\subset$. Você pode ver a lógica para a escolha do símbolo, porque "$\subseteq$" é como "$\leq$" para números, e "$\subset$" é como "<".

Cada conjunto é um subconjunto (não necessariamente próprio) de Ω, porque nosso domínio de discurso, por definição, contém tudo o que pode surgir na conversa. É um pouco menos óbvio que o conjunto vazio é um subconjunto de todo conjunto. É estranho pensar que $\emptyset \subseteq Q$ quando Q tem várias coisas dentro dele, mas a definição se confirma. “Todo” membro de $\emptyset$ (não há nenhum) é, na verdade, também membro de Q.

Uma nota sobre a leitura desta notação pode parecer um pouco confusa. Algumas vezes a expressão “$a \in X$” é lida como “a é um elemento de X”, mas outras vezes é melhor lida como “a, que é um elemento de X”. Isto pode parecer um ponto sutil, e acho que é, mas se você não estiver preparado para essa flexibilidade, pode ser um obstáculo extra para entender a matemática (que é a última coisa que precisamos). Pegue este trecho hipotético (mas bastante típico) de uma demonstração matemática:

“Suponha que $k \in \mathbb{N} < 10$ …”

Se você ler isto como “Suponha que k é um número natural é inferior a 10”, não é gramaticalmente correto. Deve na verdade ser entendido como “Suponha que k (que é um número natural) é inferior a 10”. Isto às vezes também se aplica a cláusulas adicionais. Por exemplo, a frase “Suponha que $k \in \mathbb{R} > 0$ é a coordenada x do primeiro ponto” deve ser lida como “Suponha que k, que é um número real maior que zero, é a coordenada x do primeiro ponto”.

Vou deixá-los com uma declaração sobre números que vale a pena ponderar e compreender:

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \Omega.$$

Conjunto das Partes

Conjunto das partes é um nome curioso para um conceito simples. Falamos do conjunto das partes “de” outro conjunto, que é *o conjunto de todos os subconjuntos desse outro conjunto*. Exemplo: suponha que A = { Papai, Luísa }. Então o conjunto das partes de A, que escrevemos como “$\mathbb{P}(A)$”, é: { { Papai, Luísa }, { Papai }, { Luísa }, $\emptyset$ }. Dê uma boa olhada em todas essas chaves, e não perca nenhuma. Há quatro elementos no conjunto das partes de A, cada um dos quais é um dos possíveis subconjuntos. Pode parecer estranho falar de “todos os possíveis subconjuntos” – quando aprendi isso pela primeira vez, lembro-me de pensar no início que não haveria limite para o número de subconjuntos que você poderia fazer a partir de um conjunto. Mas é claro que há. Para criar um subconjunto, você pode incluir, ou excluir, cada um dos membros do conjunto original. No caso de A, você pode (1) incluir tanto o Papai como Luísa, ou (2) incluir o Papai mas não Luísa, ou (3) incluir Luísa mas não o Papai, ou (4) excluir ambos, caso em que seu subconjunto é $\emptyset$. Portanto, $\mathbb{P}(A)$ inclui todos esses quatro subconjuntos.

Agora, qual é a cardinalidade de $\mathbb{P}(X)$ para algum conjunto X? Essa é uma pergunta interessante, e que vale a pena ponderar. A resposta se estende pelo cerne de muita combinatória e pelo sistema de números binários, tópicos que abordaremos mais tarde. E a resposta está bem ao nosso alcance, se simplesmente extrapolarmos a partir do exemplo anterior. Para formar um subconjunto de X, temos a opção de incluir, ou então de excluir, cada um de seus elementos. Portanto, há duas escolhas para o primeiro elemento[5], e então se escolhemos incluir ou excluir esse primeiro elemento, há duas escolhas para o segundo. Independentemente do que escolhermos para esses

5 Ok, eu sei que na verdade não existe “primeiro” elemento, mas seja razoável comigo aqui.

dois primeiros elementos, há duas escolhas para o terceiro, etc. Portanto, se $|X| = 2$ (lembre-se de que esta notação significa “X tem dois elementos” ou “X tem uma cardinalidade de 2”), então seu conjunto das partes tem 2×2 membros. Se $|X| = 3$, então seu conjunto das partes tem $2 \times 2 \times 2$ membros. Em geral:

$$|\mathbb{P}(X)| = 2^{|X|}.$$

Como um caso limite (e um quebra-cabeça) percebe-se que se X é o conjunto vazio, então $\mathbb{P}(X)$ tem um (e não zero) membro, porque há de fato um subconjunto do conjunto vazio: ou seja, o próprio conjunto vazio. Assim, se $X = \emptyset$ então $|X| = 0$, e $|\mathbb{P}(X)| = 1$. E isso se encaixa perfeitamente na fórmula acima.

Partições

Finalmente, há uma variação especial sobre o conceito de subconjunto chamado de *partição*. Uma partição é um grupo de subconjuntos de outro conjunto que, juntos, são tanto **coletivamente exaustivos** quanto **mutuamente exclusivos**. Isto significa que cada elemento do conjunto original está em *um e apenas um* dos conjuntos da partição. Formalmente, uma partição de X é um grupo de conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tal que:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = X,$$

e

$$X_i \cap X_j = \emptyset \text{ para todo } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ com } i \neq j.$$

Portanto, digamos que temos um grupo de subconjuntos que são supostamente uma partição de X. A primeira condição, acima, diz que se combinarmos o conteúdo de todos eles, obtemos tudo o que está em X (e nada a mais). Isto é chamado de ser coletivamente exaustivo. A segunda linha diz que nenhum dos conjuntos tem nada em comum: eles são mutuamente exclusivos.

Como de costume, um exemplo vale mais que mil palavras. Suponha que o conjunto D seja { Papai, Mamãe, Luísa, J.P., Zezinho }. Uma partição é qualquer forma de dividir D em subconjuntos que atendam às condições acima. Uma dessas partições é:

{ Luísa, J.P. }, { Mamãe, Papai }, e { Zezinho }.

Outra possibilidade é:

{ Luísa }, { J.P. }, { Mamãe }, e { Zezinho, Papai }.

Mais uma:

∅, ∅, { Luísa, J.P., Zezinho, Mamãe , Papai }, e ∅

Todas estas são formas de dividir a família do nosso exemplo em grupos, de tal maneira que ninguém esteja em mais de um grupo, e que todos estejam em algum grupo. O seguinte *não* é uma partição:

{ Mamãe, Luísa, J.P. }, e { Papai }

porque deixa Zezinho de fora. Isto, também, *não* é uma partição:

{ Papai }, { Mamãe, J.P. }, e { Zezinho, Luísa, Papai } porque Papai aparece em dois dos subconjuntos.

A propósito, perceba que cada conjunto (S) junto com seu complemento (total) ($\overline{S}$) forma uma partição do domínio do discurso inteiro Ω. Isto porque cada elemento está, ou não está, em um determinado conjunto. O conjunto de homens e não-homens é uma partição de Ω porque tudo é homem ou não-homem, e nunca ambos (objetos inanimados e outros nomes são não-homens, assim como as mulheres o são). O conjunto de números primos e o conjunto de "tudo exceto os números primos" são uma partição. O conjunto de "cheeseburgers mal passados" e o conjunto de "tudo exceto os cheeseburgers mal passados" formam uma partição de Ω. Pela lógica clássica, isto é verdade, não importa o que seja o conjunto.

Você pode se perguntar por que as partições são um conceito importante. A resposta é que elas surgem bastante, e quando surgem, podemos fazer algumas simplificações importantes. Tomemos S, o conjunto de todos os estudantes da UFPE. Podemos dividi-lo de várias maneiras diferentes. Se dividirmos S no conjunto de menores de 25 anos e o conjunto daqueles com 25 ou mais anos de idade, temos uma partição: cada estudante tem "menos de 25 anos" ou "25 anos ou mais". Se os dividirmos em calouros, alunos do segundo ano, alunos no terceiro ano em diante, teremos novamente uma partição. Mas dividi-los em alunos que cursam disciplinas no Centro de Informática e alunos que cursam disciplinas no Centro de Artes não nos fornece uma partição. Por um lado, nem todos os alunos da UFPE estão cursando disciplinas em um desses centros. Por outro lado, alguns estudantes podem estar cursando disciplinas em ambos esses centros. Portanto, este grupo de subconjuntos não é nem mutuamente exclusivo nem coletivamente exaustivo.

Pergunta: o número de estudantes ($|S|$) é igual ao número de alunos com "menos de 25 anos" mais o número de alunos com "25 anos ou mais"? Obviamente sim. Mas por quê? A resposta: porque os alunos com "menos de 25 anos" e os alunos com "25 anos ou mais" formam uma partição. Se somarmos o número de estudantes calouros, alunos do segundo ano, e alunos no terceiro ano em diante, também obteremos $|S|$. Mas se somarmos o número de alunos que cursam disciplinas no Centro de Informática mais o número alunos que cursam disciplinas no Centro de Artes é quase certo que não obteremos um número igual a $|S|$, porque alguns estudantes seriam contados duas vezes e outros não seriam contados. Este é um exemplo do tipo de simplicidade bela que as partições proporcionam.

Exercícios

Usando um pedaço de papel dobrado longitudinalmente, cubra a coluna da direita dos exercícios abaixo. Leia cada exercício na coluna da esquerda, responda na sua mente, depois deslize o papel para baixo para revelar a resposta e veja se você está certo! Para cada exercício que você errou, entenda qual foi o erro antes de seguir em frente.

1.	O conjunto { Pedro, Cabral } é o mesmo que o conjunto { Cabral, Pedro } ?	Sim, de fato.
2.	O par ordenado (Pedro, Cabral) é o mesmo que o par ordenado (Cabral, Pedro) ?	Não. A ordem é importante em pares ordenados (daí o nome), e também para tuplas de qualquer tamanho, além disso.

3.	O conjunto { { Luke, Leia }, Han } é o mesmo que o conjunto { Luke, { Leia, Han } } ?	Não. Por exemplo, o primeiro conjunto tem Han como membro mas o segundo não. (Ao invés disso, ele tem outro conjunto como membro, e esse conjunto é que por acaso tem Han como membro).
4.	Qual é o primeiro elemento do conjunto { Sport, Náutico, Santa Cruz }?	A questão não faz sentido. Não há "primeiro elemento" de um conjunto. Todos os três times são igualmente membros do conjunto, e poderiam ser listados em qualquer ordem (mesmo sendo o Sport o melhor deles).
5.	Sejam G = { Mateus, Marcos, Lucas, João }, J = { Luke, Obi-wan, Yoda }, S o conjunto dos nomes de todas as personagens de Guerra nas Estrelas e F o conjunto dos nomes dos quatro evangelhos do Novo Testamento. É verdade que $J \subseteq G$?	Não.
6.	$J \subseteq S$?	Sim.
7.	Yoda $\in J$?	Sim.
8.	Yoda $\subseteq J$?	Não. Yoda nem mesmo é um conjunto, portanto não pode ser um subconjunto de nada.
9.	{ Yoda } $\subseteq J$?	Sim. O conjunto (sem nome) que contém somente Yoda é de fato um subconjunto de J.
10.	{ Yoda } $\in J$?	Não. Yoda é um dos elementos de J, mas { Yoda } não é. Em outras palavras, J contém Yoda, mas J não contém um conjunto que contém Yoda (na verdade ele não contém nenhum conjunto como elemento).
11.	$S \subseteq J$?	Não.
12.	$G \subseteq F$?	Sim, pois os dois conjuntos são iguais.
13.	$G \subset F$?	Não, como os dois conjuntos são iguais, nenhum é subconjunto *próprio* do outro.
14.	$\emptyset \subseteq S$?	Sim, pois o conjunto vazio é subconjunto de *todo* conjunto.
15.	$\emptyset \subseteq \emptyset$?	Sim, pois o conjunto vazio é subconjunto de *todo* conjunto.
16.	$F \subseteq \Omega$?	Sim, pois todo conjunto é um subconjunto de Ω.
17.	$F \subset \Omega$?	Sim, pois todo conjunto é um subconjunto de Ω e F certamente não é igual a Ω.
18.	Suponha que X = { Q, $\emptyset$, { Z } }. $\emptyset \in X$? $\emptyset \subseteq X$?	Sim e Sim. O conjunto vazio é um elemento de X porque aparece como um de seus elementos. Ele também é um subconjunto de X porque é subconjunto de

	todo conjunto.
19. Seja A = { Macbeth, Hamlet, Othello }, B = { Scrabble, Monopoly, Othello }, e T = { Hamlet, Village, Town }. Qual o resultado de $A \cup B$?	{ Macbeth, Hamlet, Othello, Scrabble, Monopoly }. (Os elementos podem ser listados em qualquer ordem).
20. Qual o resultado de $A \cap B$?	{ Othello }.
21. Qual o resultado de $A \cap \overline{B}$?	{ Macbeth, Hamlet }.
22. Qual o resultado de $B \cap T$?	$\emptyset$
23. Qual o resultado de $B \cap \overline{T}$?	B. (ou seja, { Scrabble, Monopoly, Othello }.)
24. Qual o resultado de $A \cup (B \cap T)$?	{ Macbeth, Hamlet, Othello } (ou seja, A)
25. Qual o resultado de $(A \cup B) \cap T$?	{ Hamlet }. (note que obtivemos um resultado diferente daquele do item 24 apenas alterando a posição dos parênteses)
26. Qual o resultado de $A - B$?	{ Macbeth, Hamlet }.
27. Qual o resultado de $T - B$?	Simplesmente T, já que os dois conjuntos não têm nenhum elemento em comum.
28. Qual o resultado de $T \times A$?	{ (Hamlet, Macbeth), (Hamlet, Hamlet), (Hamlet, Othello), (Village, Macbeth), (Village, Hamlet), (Village, Othello), (Town, Macbeth), (Town, Hamlet), (Town, Othello) }. A ordem dos pares ordenados no conjunto não importa, entretanto a ordem dos elementos dentro de cada par ordenado é importante.
29. Qual o resultado de $(B \cap B) \times (A \cap T)$?	{ (Scrabble, Hamlet), (Monopoly, Hamlet), (Othello, Hamlet) }.
30. Qual o resultado de $\|A \cup B \cup T\|$?	7.
31. Qual o resultado de $\|A \cap B \cap T\|$?	0.
32. Qual o resultado de $\|(A \cup B \cup T) \times (B \cup B \cup B)\|$?	21. (A primeira expressão entre parênteses dá origem a um conjunto com 7 elementos, e a segunda a um conjunto com três elementos – o próprio B. Cada elemento do primeiro conjunto é emparelhado com um elemento do segundo, de modo que existem 21 emparelhamentos deste tipo).
33. A é um conjunto em extensão ou um conjunto em intenção?	A pergunta não faz sentido. Os conjuntos não são “em extensão” ou “em intenção”; ao invés disso, um determinado conjunto pode ser descrito “em extensão” ou “em intenção”. A descrição dada no item 19 é uma extensão; uma descrição intencional do mesmo conjunto poderia ser “As tragédias de Shakespeare que Zezinho estudou no curso de Literatura Inglesa”.

34.	Lembre-se de que G foi definido como { Mateus, Marcos, Lucas, João }. Esta é uma partição de G? • { Lucas, Mateus } • { João }	Não, porque os conjuntos não são coletivamente exaustivos (está faltando Marcos).
35.	Esta é uma partição de G? • { Marcos, Lucas } • { Mateus, Lucas }	Não, porque os conjuntos não são coletivamente exaustivos (falta João) nem mutuamente exclusivos (Lucas aparece em dois deles).
36.	Esta é uma partição de G? • { Mateus, Marcos, Lucas } • { João }	Sim. (Curiosidade: essa partição divide os elementos em evangelhos sinóticos e não-sinóticos).
37.	Esta é uma partição de G? • { Mateus, Lucas } • { João, Marcos }	Sim. (Curiosidade: essa partição divide os elementos em evangelhos que falam do nascimento de Jesus e aqueles que não falam).
38.	Esta é uma partição de G? • { Mateus, João } • { Lucas } • { Marcos } • $\emptyset$	Sim. (Curiosidade: essa partição divide os elementos em evangelhos que foram escritos por judeus, os que foram escritos por gregos, os que foram escritos por romanos, e os que foram escritos por brasileiros, respectivamente.
39.	Qual o conjunto das partes de { Anitta }	{ { Anitta }, $\emptyset$ }.
40.	{ pão, mortadela } $\in$ $\mathbb{P}$({ pão, manteiga, mortadela })?	Sim, pois { pão, mortadela } é um dos oito subconjuntos de { pão, manteiga, mortadela }. (Você consegue identificar os outros sete?)
41.	É verdade que para *todo* conjunto S temos que $S \in \mathbb{P}(S)$?	Sim.

Relações e Funções

Os conjuntos são fundamentais para a matemática discreta, tanto pelo que eles representam em si mesmos como pela forma como podem ser combinados para produzir outros conjuntos. Neste tópico, vamos aprender uma nova maneira de combinar conjuntos, chamada de relação, e também importantes casos especiais de relações, as funções.

A ideia de uma relação

Uma relação entre um conjunto X e um conjunto Y é um subconjunto do produto cartesiano. Essa simples frase, no entanto, reúne bastante conteúdo, passe um momento pensando profundamente sobre ela. Lembre-se de que $X \times Y$ produz um conjunto de pares ordenados, um para cada combinação de um elemento de X com um elemento de Y. Se X tem 5 elementos e Y tem 4, então $X \times Y$ é um conjunto de 20 pares ordenados. Para tornar isso concreto, se X é o conjunto { Helena, Ronaldo, Heitor }, e Y é o conjunto { Caipirinha, Cuba Libre }, então $X \times Y$ é { (Helena, Caipirinha), (Helena, Cuba Libre), (Ronaldo, Caipirinha), (Ronaldo, Cuba Libre), (Heitor, Caipirinha), (Heitor, Cuba Libre) }. Convença-se de que todas as combinações possíveis estão aqui dentro. Eu as listei metodicamente para ter certeza de não ter perdido nenhuma (todas as com Helena primeiro, com cada bebida em ordem, depois todas de Ronaldo, etc.) mas é claro que não há ordem para os membros de um conjunto, então eu poderia tê-las listado em qualquer ordem (entretanto todo par tem que ter o primeiro elemento vindo do conjunto de pessoas e o segundo elemento do conjunto de bebidas).

Agora se eu definir uma relação entre X e Y, eu estou simplesmente especificando que alguns destes pares ordenados estão na relação, e outros não estão. Por exemplo, eu poderia definir uma relação R que contém apenas { (Helena, Cuba Libre), (Ronaldo, Cuba Libre) }. Poderia definir outra relação S que contenha { (Heitor, Cuba Libre), (Heitor, Caipirinha), (Helena, Caipirinha) }. Poderia definir outra relação T que não tenha nenhum dos pares ordenados; em outras palavras, T = $\varnothing$.

Uma questão que lhe deve ocorrer é: quantas relações diferentes existem entre dois conjuntos X e Y? Pense bem: cada um dos pares ordenados em $X \times Y$ está, ou não está, numa dada relação entre X e Y. Muito bem. Como há um total de $|X| \cdot |Y|$ pares ordenados, e cada um deles pode estar presente ou ausente em cada relação, deve haver um total de

$$2^{|X| \cdot |Y|}$$

relações diferentes entre eles. Dito de outra forma, o conjunto de todas as relações entre X e Y é o conjunto das partes de $X \times Y$. Eu avisei que isso apareceria muitas vezes.

No exemplo acima, então, existem 2^6, ou seja, 64 relações diferentes entre esses dois pequenos conjuntos. Uma dessas relações é o conjunto vazio. Outra tem todos os seis pares ordenados nela. As demais estão em algum lugar no meio. (Algo para pensar: quantas destas relações têm exatamente um par ordenado? Quantas têm exatamente cinco?)

Notação

Acho a notação para expressar relações um tanto estranha. Mas aqui está ela. Quando definimos a relação S, acima, tínhamos nela o par ordenado (Helena, Caipirinha). Para afirmar explicitamente este fato, poderíamos simplesmente dizer

$$(\text{Helena, Caipirinha}) \in S$$

e, de fato, podemos fazê-lo. Mais frequentemente, no entanto, os matemáticos escrevem:

$$\text{Helena } S \text{ Caipirinha.}$$

que lemos como “Helena é S-relacionada-com Caipirinha”. Eu lhe falei que era estranho.

Se quisermos chamar a atenção para o fato de que (Helena, Cuba Libre) não está na relação S, poderíamos riscá-la escrevendo

$$\text{Helena } \not{S} \text{ Cuba Libre}$$

Definindo relações

Tal como com os conjuntos, podemos definir uma relação em extensão ou em intenção. Para o fazer em extensão, procedemos como nos exemplos acima — simplesmente listamos os pares ordenados: { (Heitor, Cuba Libre), (Heitor, Caipirinha), (Helena, Caipirinha) }.

Na maioria das vezes, no entanto, queremos que uma relação tenha um significado. Em outras palavras, não se trata apenas de uma seleção arbitrária dos possíveis pares ordenados, mas reflete uma noção mais ampla de como os elementos dos dois conjuntos estão relacionados. Por exemplo, suponha que eu queria definir uma relação chamada "`hasTasted`" entre os conjuntos X e Y, acima. Esta relação pode ter cinco dos seis pares ordenados possíveis:

(Helena, Caipirinha)
(Ronaldo, Caipirinha)
(Ronaldo, Cuba Libre)
(Heitor, Caipirinha)
(Heitor, Cuba Libre)

Outra maneira de expressar a mesma informação seria escrever:

Helena `hasTasted` Caipirinha
Helena ~~`hasTasted`~~ Cuba Libre
Ronaldo `hasTasted` Caipirinha
Ronaldo `hasTasted` Cuba Libre
Heitor `hasTasted` Caipirinha
Heitor `hasTasted` Cuba Libre

Ambas são definições em extensão. Mas é claro que o significado por detrás da relação "`hasTasted`" é que se x `hasTasted` y, então na vida real, a pessoa x experimentou um drinque de y. Estamos utilizando esta relação para afirmar que embora Ronaldo e Heitor tenham provado ambas as bebidas, Helena (talvez por razões ideológicas) não o fez.

Podemos, evidentemente, definir outras relações entre os mesmos dois conjuntos. Vamos definir uma relação "`likes`" como contendo { (Helena, Caipirinha), (Ronaldo, Caipirinha), (Heitor, Caipirinha), (Heitor, Cuba Libre) }. Isto afirma que enquanto todos gostam de Caipirinha, Heitor tem preferências mais amplas e também gosta de Cuba Libre.

Outra relação, "`hasFaveDrink`", pode indicar qual a bebida preferida de cada pessoa. Talvez a extensão seja { (Helena, Caipirinha), (Ronaldo, Caipirinha) }. Não há nenhum par ordenado com Heitor nele, talvez porque ele na realidade prefere chá gelado.

Mais uma relação, "`preparesDrink`", representa que pessoas sabem preparar quais drinques. Neste caso, `preparesDrink` = $\emptyset$, uma vez que todos os membros de X estão ocupados demais estudando Matemática Discreta para aprenderem a preparar drinques.

A conclusão é: quando falamos de uma relação, estamos simplesmente designando certos elementos de um conjunto para "ir com" ou "estar associado a" certos elementos de outro conjunto. Normalmente isto corresponde a algo interessante no mundo real — como quais as pessoas que provaram quais bebidas, ou quais as pessoas que sabem preparar quais drinques. Mesmo se não for o caso, no entanto, ainda “conta” como uma relação, e podemos simplesmente listar os pares ordenados que ela contém, um para cada associação.

Relações entre um conjunto e ele próprio

No exemplo acima, os dois conjuntos continham diferentes tipos de coisas: pessoas e bebidas. Mas muitas relações são definidas nas quais os elementos da esquerda e da direita são na realidade extraídos do mesmo conjunto. Tal relação é chamada (não ria) de **endorrelação**, ou **auto-relação**.

Considere a relação “`hasACrushOn`” entre X e X, cujo significado intencional é que se $(x, y) \in$ `hasACrushOn`, então na vida real x está romanticamente atraído por y. A extensão poderia no nosso exemplo ser { (Ronaldo, Helena), (Helena, Ronaldo) }, mas note que ela não precisa necessariamente ser simétrica, poderíamos ter como extensão, por exemplo, apenas { (Ronaldo, Helena) } (pobre Ronaldo).

Outro exemplo seria a relação “`hasMoreCaloriesThan`” entre Y e Y: a extensão desta relação poderia ser { (Caipirinha, Cuba Libre) } (bom, vai depender de quanto açúcar você coloca na caipirinha).

Note que só porque os dois conjuntos de uma relação são o mesmo conjunto, isso não implica necessariamente que os dois elementos sejam os mesmos para qualquer um dos seus pares ordenados. Helena claramente não tem um crush por si própria, e podemos pensar nem ninguém tem um crush por si próprio. E também nenhuma bebida tem mais calorias do que ela própria – isso é impossível. Dito isto, porém, um par ordenado pode ter os mesmos dois elementos. Considere a relação “`hasSeen`” entre X e X, cuja intenção é que se $(x, y) \in$ `hasSeen`, então na vida real x já viu a imagem de y. Certamente nossos três personagens já se viram ao espelho em algum momento das suas vidas, por isso, além de pares ordenados como (Ronaldo, Helena) a relação `hasSeen` também contém os pares ordenados (Helena, Helena), (Ronaldo, Ronaldo) e (Heitor, Heitor).

Relações finitas e infinitas

Conjuntos podem ser infinitos, e relações também podem ser. Uma relação infinita é simplesmente uma relação com infinitamente muitos pares ordenados nela. Isto pode parecer estranho no início, uma vez que como poderíamos tentar especificar todos os pares ordenados? Mas não é realmente diferente do que ocorre com conjuntos: ou o fazemos intencionalmente, ou então temos uma regra para computar sistematicamente a extensão.

Como exemplo da primeira maneira, considere a relação “`isGreaterThan`” entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$. (Lembre-se de que “$\mathbb{Z}$” é apenas uma forma de escrever “o conjunto de números inteiros”). Esta relação contém pares ordenados como (5, 2) e (17, -13), já que 5 `isGreaterThan` 2 e 17 `isGreaterThan` -13, mas não (7, 9) ou (11, 11). Claramente, é uma relação infinita. Não conseguimos enumerar todos os pares, mas não precisamos fazê-lo, uma vez que o nome implica o significado subjacente da relação.

Como exemplo da segunda, considere a relação “`isLuckierThan`” entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$. (O “$\mathbb{N}$” significa “os números naturais”.) Especificamo-la extensivamente da seguinte forma:

$$\{ (1, 13), (2, 13), (3, 13), \ldots, (12, 13), (14, 13), (15, 13), (16, 13), \ldots \}$$

Aqui estamos simplesmente dizendo que “todos os números dão mais sorte do que o 13 (exceto o próprio 13, é claro)”. Note que isso é só uma crendice popular, por favor não pense que estamos falando de política.

Funções

Um tipo muito, muito importante de relação é chamado de função. Alguns matemáticos tratam as funções totalmente à parte das relações, mas penso que é mais útil pensar numa função como um tipo especial de relação. Muitas das ideias são as mesmas, como você verá.

Pense novamente nas relações entre pessoas e drinques. Uma dessas relações (chamamos-lhe R) tinha (Helena, Cuba Libre) e (Ronaldo, Cuba Libre) nela. Outra (S) continha (Heitor, Cuba Libre), (Heitor, Caipirinha), e (Helena, Caipirinha). Uma vez que havia três pessoas e dois drinques, calculamos que havia 2^6 relações deste tipo.

Agora algumas dessas relações têm exatamente um par ordenado para cada pessoa. Por exemplo, a relação F que contém { (Helena, Caipirinha), (Ronaldo, Cuba Libre), (Heitor, Cuba Libre) }. Este tipo de relação é uma função. Ela associa cada elemento do primeiro conjunto com exatamente um elemento do segundo conjunto. Obviamente, nem todas as relações são funções: R, por exemplo, não é (não há par com Heitor) e nem S (há mais de um par com Heitor). Mas as funções formam uma classe de interesse muito especial, e justificam uma terminologia totalmente nova.

Quando temos uma função F entre um conjunto X e Y, escrevemos $F : X \rightarrow Y$ para indicar isto. O conjunto X é chamado de domínio da função, e o conjunto Y é chamado de codomínio. O codomínio e a seta estão lá apenas para completar a sintaxe. A regra com as funções é muito simples: cada elemento do domínio está relacionado exatamente com um elemento do codomínio. Por vezes dizemos que um elemento do domínio é “mapeado” ao seu correspondente elemento do codomínio. Note com muito cuidado que o inverso não é necessariamente verdadeiro. De fato, com o exemplo das pessoas e drinques, não poderia ser verdadeiro: há menos drinques do que pessoas, de modo que alguns drinques estão necessariamente relacionados com mais do que uma pessoa. (Pense nisso.) Também é perfeitamente legítimo ter uma função como { (Helena, Caipirinha), (Ronaldo, Caipirinha), (Heitor, Caipirinha) }, onde alguns elementos do codomínio foram completamente deixados de fora.

Uma das coisas que torna as funções úteis é que podemos perguntar “que elemento de Y vai com X?” e teremos sempre de volta uma resposta bem definida. Não podemos efetivamente fazer isso com relações em geral, porque a resposta pode ser “nenhum” ou “vários”. Veja os exemplos R e S, acima: que resposta obteríamos se perguntássemos “para qual bebida o Heitor é mapeado?” para cada uma das relações? Resposta: não há resposta.

Mas com funções, posso fazer essa pergunta livremente porque sei que vou obter uma resposta precisa. Com F, posso perguntar, "para qual bebida o Heitor é mapeado?" e a resposta é "Cuba Libre". Em símbolos, escrevemos isto da seguinte maneira:

$$F(\text{Heitor}) = \text{Cuba Libre}$$

Isto parecerá familiar para os programadores de computadores, uma vez que se assemelha a uma chamada de função. Na realidade, é uma chamada de função. É exatamente isso que é. "Funções" em linguagens como Python e Java foram, de fato, nomeadas com base nesta noção da matemática discreta. E se você souber alguma coisa sobre programação, sabe que num programa eu posso "chamar a função F()" e "passar-lhe o argumento 'Heitor'" e "obter o valor de retorno 'Cuba Libre'". Eu nunca tenho de me preocupar em obter mais do que um valor de volta, ou não obter nenhum.

Você também deve lembrar-se de discutir funções na matemática do ensino secundário, e o chamado "teste da linha vertical". Quando você traçava os valores de uma função numérica num gráfico, e não havia nenhuma linha vertical (paralela ao eixo y) que intersectava mais do que um ponto, poderia seguramente chamar o gráfico de "função". Isso é realmente a mesma coisa que a condição que acabei de dar para funções, enunciada graficamente. Se um gráfico passar no teste da linha vertical, então não há nenhum valor x para o qual haja mais do que um valor y. Isto significa que faz sentido perguntar "qual é o valor de y para um determinado valor de x?". Você terá sempre uma e apenas uma resposta. (Não existe tal coisa, claro, como um "teste de linha horizontal", uma vez que as funções estão livres para mapear mais de um valor de x para o mesmo valor de y. Apenas não podem fazer o contrário).

A propósito, a diferença entre as funções da matemática do ensino secundário e as funções de que estamos aqui a falar é simplesmente que as nossas funções não são necessariamente numéricas. No entanto, por vezes desenhamos espécies de "gráficos", como este:

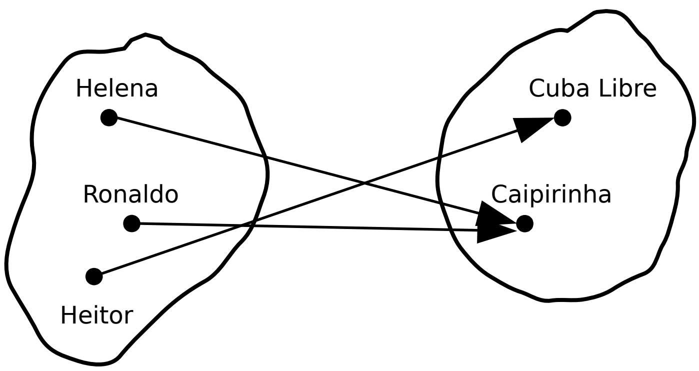

Figura 1: Representação gráfica de uma função.

Isto mostra simplesmente quais elementos do domínio mapeiam para quais elementos do codomínio. A forma da esquerda é o domínio, a forma da direita é o codomínio, e há uma seta para representar cada mapeamento.

Agora como nas relações, as funções têm normalmente "significado". Poderíamos definir uma função chamada "`firstTasted`" que associa cada pessoa com o drinque que ele ou ela provou pela primeira vez. Poderíamos definir outra chamada "`faveDrink`" que mapeia cada pessoa ao seu drinque favorito – presumindo que cada pessoa tem uma bebida favorita no conjunto (Heitor terá de ignorar o seu chá gelado e escolher entre as opções fornecidas). Uma terceira função chamada "`wouldChooseWithMexicanFood`" fornece informação sobre que drinque cada pessoa escolheria para acompanhar comida mexicana. Aqui estão os valores de Ronaldo para cada uma das três funções:

$$\texttt{firstTasted}(\text{Ronaldo}) = \text{Cuba Libre}$$
$$\texttt{faveDrink}(\text{Ronaldo}) = \text{Cuba Libre}$$
$$\texttt{wouldChooseWithMexicanFood}(\text{Ronaldo}) = \text{Caipirinha}$$

Estes valores indicam que Cuba Libre foi o drinque que Ronaldo bebeu pela primeira vez, e tem sido o seu favorito desde então, embora no restaurante mexicano ele prefira uma Caipirinha.

As funções podem ser definidas intencionalmente ou em extensão, tal como nas relações. De forma intencional, fornecemos o significado conceitual do que a função representa. Extensivamente, listamos os valores para cada elemento do domínio.

Um outro termo que se aplica a todas as funções é a sua **imagem**, ou **alcance** (os termos são sinônimos). A imagem de uma função é o subconjunto do codomínio ao qual pelo menos um elemento do domínio está mapeado nele. É a parte do codomínio que é "alcançável" (daí o termo alcance da função). Por exemplo, se a função $G : X \to Y$ é { (Helena, Caipirinha), (Ronaldo, Caipirinha), (Heitor, Caipirinha) }, então mesmo que o codomínio seja { Caipirinha, Cuba Libre } o alcance é meramente { Caipirinha }. Isto porque não há nenhum par ordenado que contenha Cuba Libre, por isso ela é deixada de fora da imagem. Não se pode "alcançar" Cuba Libre através da função G, começando com qualquer uma das suas entradas, por isso é ela fica de fora, no isolamento.

Exercícios

Novamente usando um pedaço de papel dobrado longitudinalmente, cubra a coluna da direita dos exercícios abaixo. Leia cada exercício na coluna da esquerda, responda na sua mente, depois deslize o papel para baixo para revelar a resposta e veja se você está certo! Para cada exercício que você errou, entenda qual foi o erro antes de seguir em frente.

1.	Seja A o conjunto { Caio, Júlia, Sandro } e seja S o conjunto { basquete, vôlei }. O conjunto { (Júlia, basquete), (Sandro, basquete), (Júlia, vôlei) } é uma relação entre A e S?	Sim, uma vez que é um subconjunto de $A \times S$.
2.	A relação acima é uma endorrelação?	Não, porque uma endorrelação envolve um conjunto com ele próprio, e não dois conjuntos diferentes (como o são A e S).
3.	O conjunto { (Caio, basquete), (basquete, vôlei) } é uma relação entre A e S?	Não, pois o primeiro elemento de um dos pares ordenados não veio do conjunto A.
4.	O $\varnothing$ é uma relação A e S?	Sim, pois ele é um subconjunto de $A \times S$.
5.	Qual a cardinalidade máxima de uma	A cardinalidade máxima é 6, o que acon-

	relação entre A e S?	tecerá se todos os três atletas jogarem todos os dois esportes. (Estou assumindo que o significado da relação é "joga", ao invés de "é um fã de", ou "conhece as regras de", ou outra coisa qualquer. Mas independente disso, a cardinalidade máxima é 6.)
6.	A relação que entre A e S que definimos anteriormente, { (Júlia, basquete), (Sandro, basquete), (Júlia, vôlei) } é uma função?	Não, porque ela nem menciona Caio.
7.	Suponha que adicionemos à relação do item anterior o par ordenado (Caio, basquete). Agora ela é uma função?	Não, porque Júlia aparece duas vezes, sendo mapeada para dois valores diferentes.
8.	Tudo bem, suponha que removamos da relação do item anterior o par ordenado (Júlia, vôlei). Agora nós ficamos com { (Júlia, basquete), (Sandro, basquete), (Caio, basquete) }. Temos agora uma função?	Sim, parabéns!
9.	Vamos chamar essa função de "`faveSport`", o que sugere que o seu significado é indicar qual o esporte favorito de cada um dos atletas. Qual é o domínio de `faveSport`?	{ Júlia, Caio, Sandro }.
10.	Qual é o codomínio de `faveSport`?	{ basquete, vôlei }
11.	Qual é a imagem de `faveSport`?	{ basquete }
12.	Que notação utilizamos para descrever o fato de que "Júlia mapeia para basquete"?	`faveSport`(Júlia) = basquete.
13.	Qual é outro nome para imagem (sinônimo)?	Alcance.
14.	Qual é outro nome para endorrelação?	Auto-relação.

Créditos

Todas as seções, com exceção da seção "Afirmações Matemáticas" foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [1], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

A seção "Afirmações Matemáticas" foi adaptada (traduzida e modificada) de [2], que também está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

Referências

1. Davies, Stephen. *A Cool Brisk Walk Through Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.allthemath.org/vol-i/
2. Levin, Oscar. *Discrete Mathematics: An Open Introduction*. Disponível em http://discrete.openmathbooks.org

Licença