Módulo IV

Mais Sobre Contagem

Neste módulo, nós veremos alguns tópicos adicionais sobre contagem, que podem ser úteis na resolução de problemas.

Bijeções e Cardinalidade de Conjuntos

Chamamos de **números cardinais** os tamanhos que os conjuntos podem ter, sejam eles finitos ou infinitos, ou seja, sua cardinalidade. Os números cardinais finitos são simplesmente os números naturais: 0, 1, 2, 3, … . O primeiro número cardinal infinito é o tamanho do conjunto dos números naturais, e é escrito como $\aleph_0$ (lê-se, alef-zero ou alef-nulo)[1].

Podemos calcular o número cardinal de um contando explicitamente os seus elementos; por exemplo, $|\emptyset| = 0$, $|\{\text{Luísa, Mamãe, Papai}\}| = 3$, e $|\{x \in \mathbb{N} : x < 100 \text{ e } x \text{ é primo}\}| = |\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}| = 25$. Bijeções, entretanto, permitem-nos definir o tamanho de conjuntos arbitrários sem termos quaisquer meios específicos para contar elementos.

Dizemos que dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se existir uma bijecção $f : A \leftrightarrow B$. Isso será particularmente útil para refletirmos sobre a cardinalidade de conjuntos infinitos. Números cardinais infinitos podem, de fato, se comportar de forma muito estranha. Por exemplo:

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Note que para dois conjuntos disjuntos A e B (isto é, quando $A \cap B = \emptyset$), temos que $|A \cup B| = |A| + |B|$. Seja $A = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$ (os números naturais pares). A função $f : \mathbb{N} \to A$, definida por $f(x) = 2x$ é bijetiva, portanto $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Por outro lado, seja $B = \{2x + 1 : x \in \mathbb{N}\}$ (os números naturais ímpares). A função $g : \mathbb{N} \to B$, definida por $g(x) = 2x + 1$ é bijetiva, portanto também temos que $|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Ora, como A e B são disjuntos, temos que $|A \cup B| = |A| + |B|$, mas $|A \cup B| = |\mathbb{N}|$. Ou seja, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Como consequência, note que se somarmos $\aleph_0$ a ele próprio um número finito de vezes, o resultado também é $\aleph_0$, ou seja, $n\aleph_0 = \aleph_0$, quando n for um número natural positivo (finito).

  Como adendo, note que a cardinalidade do conjunto dos números inteiros também é $\aleph_0$, uma vez que podemos construir a seguinte função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = k$, se $x = 2k$; $f(x) = -k$ se $x = 2k + 1$. Por exemplo, se $x = 4$, então $f(4) = 2$, pois $4 = 2 \times 2$. Já se $x = 3$, $f(3) = -1$, pois $3 = 2 \times 1 + 1$.

- $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Exemplo: Podemos definir o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ como pares ordenados (a, b), onde a é o numerador e b é o denominador, sendo que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros não-nulos). Note que $|\mathbb{Z}^*| = \aleph_0$, uma vez que podemos construir a seguinte função bijetiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^*$, $f(x) = x$, se $x < 0$; $f(x) = x + 1$ se $x \geq 0$. Como os elementos de $\mathbb{Q}$ são exatamente aqueles do produto carte-

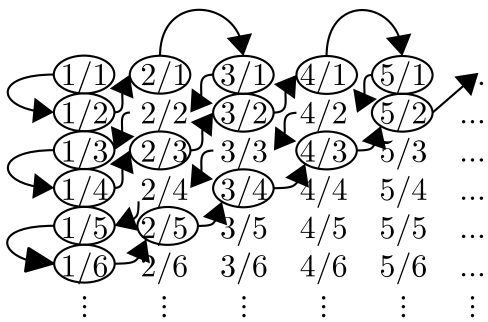
1 Alef é a primeira letra do alfabeto hebraico.

siano de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}^*|$, ou seja, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0 \times \aleph_0$. Acontece que também conseguimos construir uma função bijetiva de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{N}$. É mais fácil mostrar graficamente como uma tal função poderia ser construída. Vamos começar olhando para os números racionais positivos ($\mathbb{Q}^+$). A ideia é que se conseguirmos organizar todos os números racionais numa lista, podemos mapear o primeiro elemento da lista para o número 1, o segundo para o 2, o terceiro para o 3, e assim por diante. Se tentarmos escrever todos os números racionais positivos, poderemos proceder assim:

$$\begin{array}{cccccc}
1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & ... \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 & ... \\
1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 & ... \\
1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 5/4 & ... \\
1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 5/5 & ... \\
1/6 & 2/6 & 3/6 & 4/6 & 5/6 & ... \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Este conjunto é uma bagunça. Em nada se parece com o conjunto dos números naturais. Na verdade, este conjunto continua infinitamente em uma série de direções diferentes. Cada linha segue infinitamente para a direita, e cada coluna segue infinitamente para baixo. Como poderíamos esperar encontrar uma forma de fazer uma bijeção entre isso e os números naturais, uma vez que os números naturais seguem infinitamente apenas numa direção?

Como os números racionais vão para a direita para sempre e vão para baixo para sempre, podemos continuar indo e vindo na diagonal para enfileirar todos eles. Como abaixo:



Por isso, eis como a bijeção começaria:

$$\begin{array}{c}
0 \leftrightarrow 1/1 \\
1 \leftrightarrow 1/2 \\
2 \leftrightarrow 2/1 \\
3 \leftrightarrow 3/1 \\
4 \leftrightarrow 1/3 \\
5 \leftrightarrow 1/4 \\
...
\end{array}$$

Note que nós não associamos 4 a 2/2, pois 2/2 é igual a 1 e 0 já está associado a 1. Na figura acima, não circulamos os números racionais que já foram previamente associados. Dessa maneira, cada número natural será associado a exatamente um número racional, e vice-versa (para dois números racionais serem diferentes, sua fração irredutível deverá ser diferente).

Como podemos construir uma bijeção entre os números naturais e os números racionais positivos, isso significa que o cardinal de $\mathbb{Q}^+$ também é $\aleph_0$. Mas e quanto ao conjunto de todos os números racionais? Lembre-se de que enquanto $\mathbb{Q}$ é o símbolo para o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}^+$ é o símbolo para o conjunto dos números racionais positivos e $\mathbb{Q}^-$ é o símbolo para o conjunto de números racionais negativos. Já sabemos que $|\mathbb{Q}^+| = \aleph_0$. E uma vez que deve haver o mesmo número de números racionais negativos que há de números racionais positivos, devemos ter também $|\mathbb{Q}^-| = \aleph_0$. Como o conjunto de números racionais inclui todos os números racionais positivos e todos os números racionais negativos, e o número 0 (que não é nem positivo nem negativo), então o número total de elementos do conjunto de números racionais deve ser: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+|+|\mathbb{Q}^-|+1$. Assim, substituindo por $\aleph_0$ tanto $|\mathbb{Q}^+|$ quanto $|\mathbb{Q}^-|$ nos fornece $|\mathbb{Q}| = \aleph_0+\aleph_0+1 = 2\aleph_0+1$. Mas sabemos que a adição ou multiplicação de $\aleph_0$ por números finitos como 2 não o altera! Portanto, podemos escrever: $|\mathbb{Q}| = \aleph_0+\aleph_0+1 = 2\aleph_0+1 = \aleph_0$, e por isso temos $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Portanto, o cardinal do conjunto dos números racionais também é $\aleph_0$.[2]

Após vermos que tantos conjuntos infinitos de números familiares possuem cardinalidade igual a $\aleph_0$, você pode se perguntar se também é o caso para os números reais ($\mathbb{R}$). Georg Cantor apresentou uma demonstração, que ficou conhecida como argumento de diagonalização de Cantor, que nos permite concluir que não é possível estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos números naturais. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, o cardinal de $\mathbb{R}$ é portanto maior que $\aleph_0$.

Podemos utilizar da seguinte forma o argumento de diagonalização de Cantor. Vamos nos restringir ao subconjunto dos números reais que estão no intervalo entre 0 e 1. Os números reais neste intervalo, podem portanto, serem escritos como uma expansão decimal infinita[3] do tipo:

$$0{,}d_1d_2d_3d_4\ \ldots$$

Supondo que seja possível estabelecer uma bijeção entre os números no intervalo [0, 1] e os naturais, teríamos algo como:

$$\begin{array}{c}
0 \leftrightarrow r_1 = 0{,}\boldsymbol{d_{11}}d_{12}d_{13}d_{14}\ \ldots \\
1 \leftrightarrow r_2 = 0{,}d_{21}\boldsymbol{d_{22}}d_{23}d_{24}\ \ldots \\
2 \leftrightarrow r_3 = 0{,}d_{31}d_{32}\boldsymbol{d_{33}}d_{34}\ \ldots \\
3 \leftrightarrow r_4 = 0{,}d_{41}d_{42}d_{43}\boldsymbol{d_{44}}\ \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

Ou seja, r_1 é o nosso primeiro número real, r_2 o segundo e assim por diante, enquanto que cada d_{ij} é um dígito, ou seja, $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Seja $r = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots$ um número real no intervalo [0, 1], definido da seguinte maneira:

2 $\aleph_0+1 = \aleph_0$. Pense no porquê ao somarmos $\aleph_0$ a um número natural finito, obtemos também $\aleph_0$.

3 Os números que têm uma expansão decimal finita também possuem uma expansão infinita equivalente, uma vez que 1 = 0,9999...

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{se } d_{ii} \neq 1 \\ 3 & \text{se } d_{ii} = 1. \end{cases}$$

Isto é, o i-ésimo dígito da expansão infinita de r é igual a 1 se o i-ésimo elemento da diagonal da matriz de dígitos da nossa bijeção (em negrito, acima) for diferente de 1, e no caso dele ser 1, d_i será 3. Ora, por construção, nosso r é diferente de todos os nossos r_i da bijeção (pelo menos no dígito da diagonal), logo r não está na nossa bijeção. Acontece que r tem que estar na nossa bijeção, pois ele é um número real no intervalo [0, 1]. Como pode? O número r tem que estar na bijeção (porque ele está no intervalo [0, 1]) e ao mesmo tempo não pode estar na bijeção (porque é diferente de todos os números nela, por construção)? Isto é absurdo, alguma coisa errada há. De fato, o que está errado é que tal bijeção não pode existir, ou seja, nossa suposição inicial ("Supondo que seja possível estabelecer uma bijeção...") é falsa[4]. Como não é possível estabelecer uma bijeção entre os números reais no intervalo [0, 1], obviamente não é possível estabelecer uma bijeção para todos os números reais, uma vez que o intervalo é um subconjunto dele.

Dizemos que *um conjunto finito ou que tenha cardinal* $\aleph_0$ é **contável** (no caso de ter cardinal igual a $\aleph_0$ podemos mais especificamente dizer que é um **infinito contável**). Os conjuntos que não são contáveis (como o dos números reais, ou o intervalo [0, 1]) são chamados de **conjuntos incontáveis**. Portanto, *todo conjunto incontável é infinito, mas nem todo infinito é incontável*. $\aleph_0$ é o menor dos números cardinais infinitos. Os matemáticos conseguiram demonstrar que existe uma sequência infinita de números cardinais infinitos tais que $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$. Trata-se de um problema ainda em aberto, entretanto, se o cardinal do conjunto dos números reais, chamemo-lo de c, é o próximo cardinal infinito (se ele é $\aleph_1$) ou se é possível existir um cardinal entre $\aleph_0$ e c[5]. A *hipótese* de que não existe número cardinal entre $\aleph_0$ e c foi posta por Georg Cantor, mas ele não conseguiu demonstrá-la, para sua grande decepção. O problema entrou como o primeiro da lista dos 23 maiores problemas em aberto da matemática, proposta pelo famoso matemático David Hilbert em 1900. Cuidado ao tentar demonstrá-la, lembre-se de que Cantor acabou enlouquecendo.

Contando com Asteriscos e Barras

Considere o seguinte problema de contagem:

> Você tem 7 biscoitos para distribuir com 4 crianças. De quantas maneiras você pode fazer isso?

Reserve um momento para pensar em como poderá resolver este problema. Você pode assumir que é aceitável não dar biscoitos a uma criança. Além disso, os biscoitos são todos idênticos e a ordem na qual os distribui não importa.

4 Isto é um exemplo de prova por contradição, ou redução ao absurdo. Falaremos mais sobre esse tipo de demonstração no futuro.

5 Em aberto até certa medida. Há demonstrações de que dentro da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, um sistema axiomático para definir uma teoria de conjuntos livre de paradoxos como o de Russel (citado no Módulo I), é impossível demonstrar que a hipótese é verdadeira ou falsa dentro do sistema axiomático.

Antes de resolver o problema, aqui está uma resposta errada: Você pode imaginar que a resposta deveria ser 4^7 porque para cada um dos 7 biscoitos, existem 4 escolhas de crianças às quais pode dar o biscoito. Isto é razoável, mas errado. Para ver porquê, considere alguns resultados possíveis: poderíamos atribuir os primeiros seis biscoitos à criança A, e o sétimo biscoito à criança B. Outro resultado seria atribuir o primeiro biscoito à criança B e os seis biscoitos restantes à criança A. Ambos os resultados estão incluídos na resposta 4^7. Mas para o nosso problema de contagem, ambos os resultados são na verdade o mesmo – a criança A recebe seis biscoitos e a criança B recebe um biscoito.

Como é que os resultados realmente se apresentam? Como podemos representá-los? Uma abordagem seria escrever um resultado como uma sequência de quatro números como esta:

$$3112,$$

que representa o resultado em que a primeira criança recebe 3 biscoitos, a segunda e a terceira crianças recebem 1 biscoito cada uma, e a quarta criança recebe 2 biscoitos. Representado o resultado desta forma, a ordem em que os números ocorrem é importante. 1312 é um resultado diferente, porque a primeira criança recebe um biscoito em vez de 3. Cada número na sequência pode ser qualquer número inteiro entre 0 e 7. Mas a resposta não é 8^4. Precisamos que a *soma* dos números seja 7.

Outra forma que podemos representar os resultados é escrever uma sequência de sete letras:

ABAADCD,

o que representa que o primeiro biscoito vai para a criança A, o segundo biscoito vai para a criança B, o terceiro e o quarto biscoitos vão para a criança A, e assim por diante. De fato, este resultado é idêntico ao anterior – A recebe 3 biscoitos, B e C recebem 1 cada e D recebe 2. Cada uma das sete letras da sequência pode ser qualquer uma das 4 letras possíveis (uma para cada criança), mas o número de tais sequências não é 4^7, porque aqui a ordem *não* importa. Na verdade, outra forma de escrever o mesmo resultado é

AAABCDD.

Esta será a representação preferível dos resultados. Uma vez que podemos escrever as letras em qualquer ordem, podemos também escrevê-las por ordem alfabética para efeitos de contagem. Assim, escreveremos primeiro todos os A's, depois todos os B's, e assim por diante.

Agora pense em como você poderia especificar um tal resultado. Tudo o que realmente precisamos fazer é dizer quando mudar de uma letra para a outra. Em termos de biscoitos, precisamos dizer depois de quantos biscoitos deixamos de dar biscoitos à primeira criança e começamos a dar biscoitos à segunda criança. E depois de quantos mudamos para a terceira criança? E depois de quantos mudamos para a quarta? Assim, uma outra forma de representar um resultado é como esta:

***|*|*|**.

Três biscoitos vão para a primeira criança, depois trocamos e damos um biscoito para a segunda criança, depois trocamos, um para a terceira criança, trocamos, dois para a quarta criança. Note que precisamos de 7 asteriscos e 3 barras – um asterisco para cada biscoito, e uma barra para cada troca de criança, por isso uma barra a menos do que o número de crianças (não precisamos trocar depois da última criança – já terminamos).

Por que é que fizemos tudo isto? Simples: para contar o número de formas de distribuir 7 biscoitos a 4 crianças, tudo o que precisamos fazer é contar quantas figuras de asteriscos e barras existem. Mas uma figura de asteriscos e barras é apenas uma sequência de símbolos, alguns asteriscos e outros barras. Se, em vez de asteriscos e barras, usássemos 0's e 1's, seria apenas uma sequência de bits. Sabemos como contá-los.

Antes de ficarmos muito entusiasmados, devemos certificar-nos de que realmente qualquer sequência de (no nosso caso) 7 asteriscos e 3 barras corresponde a uma forma diferente de distribuir biscoitos às crianças. Em particular, considerar sequências como esta:

$$| * * * || * * * *.$$

Isso corresponde a uma distribuição de biscoitos? Sim. Representa a distribuição na qual a criança A recebe 0 biscoitos (porque mudamos para a criança B antes de qualquer asterisco), a criança B recebe 3 biscoitos (3 asteriscos antes da próxima barra), a criança C recebe 0 biscoitos (sem asteriscos antes da próxima barra) e a criança D recebe os 4 biscoitos restantes. Não importa como os asteriscos e as barras estão dispostos, podemos distribuir biscoitos dessa forma. Além disso, dada qualquer forma de distribuir biscoitos, podemos representar isso com uma figura de asteriscos e barras. Por exemplo, a distribuição em que a criança A recebe 6 biscoitos e a criança B recebe 1 biscoito tem a seguinte figura:

$$* * * * * * | * ||.$$

Depois de todo esse trabalho, estamos finalmente prontos para contar. Cada forma de distribuir biscoitos corresponde a uma figura de asteriscos e barras com 7 asteriscos e 3 barras. Portanto, existem 10 símbolos, e temos de escolher 3 deles para serem barras. Portanto:

$$\text{Existem } \binom{10}{3} \text{ maneiras de distribuir 7 biscoitos para 4 crianças.}$$

Já que estamos neste assunto, também podemos responder a uma pergunta relacionada: quantas formas há de distribuir 7 biscoitos para 4 crianças, de modo que cada criança receba pelo menos um biscoito? O que podemos dizer sobre as figuras de asteriscos e barras correspondentes? As figuras devem começar e terminar com pelo menos um asterisco (para que as crianças A e D recebam biscoitos), e também não pode haver duas barras adjacentes (para que as crianças B e C não sejam ignoradas). Uma maneira de assegurar isto é colocar barras apenas nos espaços entre os asteriscos. Com 7 asteriscos, existem 6 espaços entre os asteriscos, pelo que devemos escolher 3 desses 6 espaços para preencher com barras. Assim, há $\binom{6}{3}$ formas de distribuir 7 biscoitos a 4 crianças, dando pelo menos um biscoito a cada criança.

Outra forma (mais geral) de abordar este problema modificado é primeiro dar um biscoito a cada criança. Agora os 3 biscoitos restantes podem ser distribuídos às 4 crianças sem restrições. Assim, temos 3 asteriscos e 3 barras para um total de 6 símbolos, 3 dos quais devem ser barras. Assim, mais uma vez vemos que existem $\binom{6}{3}$ formas de distribuir os biscoitos.

Asteriscos e barras podem ser usados em problemas de contagem que não envolvam crianças e biscoitos. Aqui estão alguns exemplos:

Exemplo 1

O seu freezer matemático de sorvetes preferido oferece 10 sabores. Quantos milkshakes você poderia criar usando exatamente 6 colheres, não necessariamente distintas? A ordem de adicionar os sabores não importa (eles serão misturados de qualquer forma), mas é-lhe permitida a repetição. Assim, um shake possível é chocolate triplo, cereja dupla, e menta com pepitas de chocolate.

Solução. Nós temos seis colheres, cada uma das quais pode ser um entre dez sabores possíveis. Representamos cada colher como um asterisco. Pense em percorrer o freezer um sabor de cada vez: você vê baunilha primeiro, e pula para o próximo, chocolate. Você diz sim ao chocolate três vezes (use três asteriscos), depois muda para o sabor seguinte. Continua pulando até chegar à cereja, para a qual diz sim duas vezes. Mais uma troca e está na menta com pepitas de chocolate. Diz sim uma vez. Depois continua andando até passar pelo último sabor, nunca mais dizendo sim (já que já disse sim seis vezes). Há dez sabores à escolha, por isso temos que trocar de considerar um sabor para o seguinte nove vezes. Estas são as nove barras.

Agora que estamos confiantes de que temos o número certo de asteriscos e barras, respondemos à pergunta de forma simples: existem 6 asteriscos e 9 barras, por isso 15 símbolos. Precisamos escolher 9 deles para serem barras, pelo que o número de milkshakes possíveis é $\binom{15}{9}$.

Exemplo 2

Quantos números de telefone de 7 dígitos existem em que os dígitos são não-crescentes? Ou seja, cada dígito é inferior ou igual ao anterior.

Solução. Temos de decidir sobre 7 dígitos, por isso vamos usar 7 asteriscos. As barras representarão uma mudança de cada possível número de um dígito para o próximo número menor. Assim, o número de telefone 866-5221 é representado pela figura de asteriscos e barras

$$| * || * *| * ||| * *| * |.$$

Existem 10 escolhas para cada dígito (0-9), pelo que temos de alternar entre escolhas 9 vezes. Temos 7 asteriscos e 9 barras, portanto o número total de números de telefone é $\binom{16}{9}$.

Exemplo 3

Quantas soluções inteiras existem para a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13.$$

(Uma solução inteira para uma equação é uma solução em que as variáveis devem ter valores inteiros).

Tal que:

1. $x_i \geq 0$ para todo x_i?
2. $x_i > 0$ para todo x_i?
3. $x_i \geq 2$ para todo x_i?

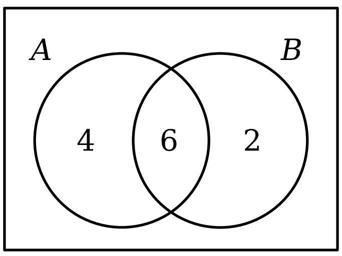
Solução. Este problema é como dar 13 biscoitos a 5 crianças. Precisamos dizer quantas das 13 unidades vão para cada uma das 5 variáveis. Em outras palavras, temos 13 asteriscos e 4 barras (as barras são como os sinais "+" na equação).

1. Se x_i pode ser maior ou igual a 0, estamos no caso padrão sem restrições. Assim, 13 asteriscos e 4 barras podem ser dispostas de $\binom{17}{4}$ maneiras.
2. Agora cada variável deve ser pelo menos um. Assim, damos uma unidade para cada variável para satisfazer essa restrição. Agora restam 8 asteriscos, e ainda 4 barras, então o número de soluções é $\binom{12}{4}$.
3. Agora cada variável deve ser igual ou superior a 2. Assim, antes de qualquer contagem, damos a cada variável 2 unidades. Temos agora 3 asteriscos restantes e 4 barras, pelo que existem $\binom{7}{4}$ soluções.

Princípio da Inclusão-Exclusão

Vimos anteriormente que, dados dois conjuntos A e B *disjuntos*, temos que $|A \cup B| = |A| + |B|$. Agora, o que acontece quando A e B **não são** disjuntos?

Suponha que queremos encontrar $|A \cup B|$ e sabemos que $|A| = 10$ e $|B| = 8$. No entanto, isto não é informação suficiente. Não sabemos quantos dos 8 elementos de B são também elementos de A. Todavia, se também soubermos que $|A \cap B| = 6$, então podemos dizer exatamente quantos elementos estão em A, e, desses, quantos estão em B e quantos não estão (6 dos 10 elementos estão em B, portanto 4 estão em A mas não em B). Poderíamos fazer um diagrama de Venn da seguinte maneira:



Isto nos diz que há 6 elementos em A ∩ B, 4 elementos em A − B e 2 elementos em B − A. Agora estes três conjuntos são disjuntos, portanto podemos usar o princípio aditivo para encontrar o número de elementos em A ∪ B. É 6 + 4 + 2 = 12.

Isto funcionará sempre, mas desenhar um diagrama de Venn vai além do que precisamos fazer. De fato, seria bom relacionar este problema com o caso em que A e B são disjuntos. Haverá uma regra que possamos fazer que funcione em qualquer caso?

Aqui está outra forma de obter a resposta ao problema acima. Comece somando $|A| + |B|$. Isto é $10 + 8 = 18$, o que seria a resposta se $|A \cap B| = 0$. Vemos que estamos errados por exatamente 6, o que por acaso é $|A \cap B|$. Por isso, talvez adivinhemos,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Isto funciona para este exemplo específico. Será que funcionará sempre? Pense no que estamos fazendo aqui. Queremos saber quantas coisas estão em A ou em B (ou ambos). Podemos incluir tudo de A, e tudo de B. Isto nos daria $|A| + |B|$ elementos. Mas, claro, quando se toma de fato a união, não se repete os elementos que estão em ambos. Até agora, contamos cada elemento em $A \cap B$ exatamente duas vezes: uma quando colocamos os elementos de A e outra quando incluímos os elementos de B. Corrigimos subtraindo o número de elementos que contamos duas vezes. Assim, adicionamo-los duas vezes, subtraímos uma vez, deixando-os contados apenas uma vez.

Em outras palavras, temos:

Para quaisquer conjuntos finitos A e B,

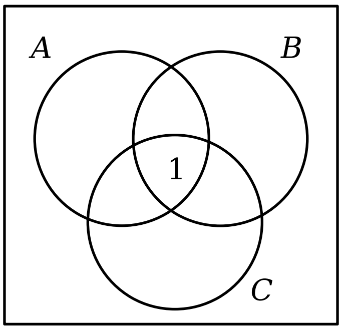
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Como podemos estender o resultado para três conjuntos? Suponha que um exame em três disciplinas, Álgebra (A), Biologia (B), e Química (C), foi realizado por 41 estudantes. O quadro seguinte mostra quantos alunos reprovaram em cada uma das disciplinas e nas suas várias combinações:

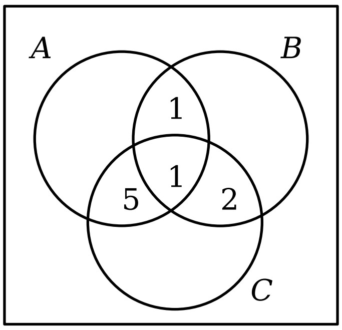
Disciplina:	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C
Reprovaram:	12	5	8	2	6	3	1

Quantos estudantes reprovaram em pelo menos uma disciplina?

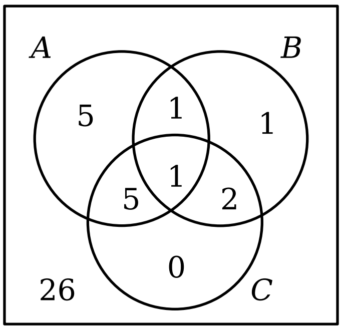
A resposta não é 37, apesar da soma dos números da tabela acima ser 37. Por exemplo, enquanto 12 estudantes reprovaram em Álgebra, 2 desses estudantes também reprovaram em Biologia, 6 também reprovaram em Química, e 1 desses reprovou em todas as três disciplinas. De fato, o estudante que reprovou nas três disciplinas é contado um total de 7 vezes no total de 37. Para esclarecer as coisas, pensemos nos estudantes que reprovaram em Álgebra como os elementos do conjunto A, e de forma semelhante para os conjuntos B e C. O único estudante que reprovou nas três disciplinas é o elemento isolado do conjunto $A \cap B \cap C$. Assim, em diagramas de Venn:



Agora vamos preencher as outras intersecções. Sabemos que $A \cap B$ contém 2 elementos, mas 1 elemento já foi contado. Portanto, devemos colocar um 1 na região onde A e B se intersectam (mas C não). Da mesma forma, calculamos a cardinalidade de $(A \cap C) - B$, e $(B \cap C) - A$:



A seguir, determinamos os números que devem ir nas regiões restantes, incluindo fora de todos os três círculos. Este último número é o número de estudantes que não reprovaram em nenhuma disciplina:



Encontramos 5 na região "apenas A" porque todo o círculo para A precisava ter um total de 12, e 7 já tinham sido contabilizados. Da mesma forma, calculamos a região "apenas B" contendo apenas 1 aluno e a região "apenas C" não contendo nenhum aluno.

Assim, o número de alunos que reprovaram em pelo menos uma disciplina é de 15 (a soma dos números em cada uma das oito regiões disjuntas). O número de alunos que passaram nas três disciplinas é de 26: o número total de alunos, 41, menos os 15 que reprovaram em pelo menos uma disciplina.

Note que também podemos responder a outras perguntas. Por exemplo, quantos estudantes reprovaram apenas em Química? Nenhum. Quantos passaram em Álgebra mas reprovaram tanto em Biologia como em Química? Isto corresponde à região dentro de B e C, mas fora de A, contendo 2 estudantes.

Poderíamos ter resolvido o problema acima de uma forma algébrica? Quando adicionamos um terceiro conjunto, devemos ser cuidadosos. Com dois conjuntos, precisamos conhecer as cardinalidades de A, B, e $A \cap B$ para encontrar a cardinalidade de $A \cup B$. Com três conjuntos, precisamos de mais informações. Há mais formas de combinar os conjuntos. Não surpreendentemente, a fórmula para a cardinalidade da união de três conjuntos não disjuntos é mais complicada:

Para quaisquer conjuntos finitos A, B e C,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Para determinar quantos elementos estão em pelo menos um de A, B, ou C somamos todos os elementos em cada um desses conjuntos. No entanto, quando o fazemos, qualquer elemento tanto em A como em B é contado duas vezes. Além disso, cada elemento tanto em A como em C é contado duas vezes, tal como os elementos em B e C, por isso retiramos cada um desses elementos da nossa soma uma vez. Mas e agora os elementos que estão em $A \cap B \cap C$ (em todos os três conjuntos)? Adicionamo-los três vezes, mas também os removemos três vezes. Eles ainda não foram contados. Assim, acrescentamos esses elementos no final.

Voltando ao nosso exemplo anterior, temos $|\mathrm{A}| = 12$, $|\mathrm{B}| = 5$, $|\mathrm{C}| = 8$. Temos também $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 2$, $|\mathrm{A} \cap \mathrm{C}| = 6$, $|\mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = 3$, e $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}| = 1$. Portanto:

$$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}| = 12 + 5 + 8 - 2 - 6 - 3 + 1 = 15.$$

Isto é o que obtivemos quando resolvemos o problema utilizando diagramas Venn.

Este processo de acrescentar, depois retirar, depois voltar a acrescentar, etc., chama-se **Princípio da Inclusão/Exclusão**, ou simplesmente **PIE**.

Contagem avançada com o PIE

Asteriscos e barras permitem-nos contar o número de formas de distribuir 10 biscoitos a 3 crianças e soluções que são números naturais para $x + y + z = 11$, por exemplo. Uma modificação relativamente fácil permite-nos colocar uma restrição de limite inferior a estes problemas: talvez cada criança deva receber pelo menos dois biscoitos ou $x, y, z \geq 2$. Isto foi feito atribuindo primeiro a cada criança (ou variável) 2 biscoitos (ou unidades) e depois distribuindo o resto usando asteriscos e barras.

E se quiséssemos uma restrição de limite superior? Por exemplo, poderíamos insistir que nenhuma criança receba mais de 4 biscoitos ou que $x, y, z \leq 4$. Acontece que isto é consideravelmente mais difícil, mas ainda assim possível. A ideia é contar todas as distribuições e depois remover aquelas que violam a condição. Em outras palavras, temos de contar o número de formas de distribuir 11 biscoitos a 3 crianças em que uma ou mais das crianças recebe mais de 4 biscoitos. Para qualquer criança em particular, isto não é um problema; fazemo-lo utilizando asteriscos e barras. Mas como combinar o número de formas para a criança A, ou B ou C? Temos de utilizar o PIE.

Exemplo 1

Três crianças, Alberto, Bernadette, e Carlos, decidem partilhar 11 biscoitos. Perguntam-se de quantas formas poderiam dividir os biscoitos, dado que nenhum deles recebesse mais de 4 biscoitos (alguém não receber biscoitos parece ser, por alguma razão, aceitável para estas crianças).

Solução. Sem a restrição “não mais de 4”, a resposta seria $\binom{13}{2}$, usando 11 asteriscos e 2 barras (separando as três crianças). Agora contemos o número de formas que uma ou mais das crianças violam a condição, ou seja, recebem pelo menos 4 biscoitos.

Seja A o conjunto de resultados em que Alberto recebe mais de 4 biscoitos. Seja B o conjunto de resultados em que Bernadette recebe mais de 4 biscoitos. Seja C o conjunto de resultados em que Carlos recebe mais de 4 biscoitos. Estamos então à procura (para subtrair) do tamanho do conjunto $A \cup B \cup C$. Usando PIE, temos de encontrar os tamanhos de $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$ e assim por diante. Aqui está o que encontramos.

- $|A| = \binom{8}{2}$. Primeiro damos 5 biscoitos a Alberto, depois distribuímos os 6 restantes às três crianças sem restrições, usando 6 asteriscos e 2 barras.
- $|B| = \binom{8}{2}$. Análogo ao anterior, só que agora é Bernadette que recebe os 5 biscoitos no início.
- $|C| = \binom{8}{2}$. Carlos que recebe os 5 biscoitos no início.
- $|A \cap B| = \binom{3}{2}$. Damos a Alberto e Bernadette 5 biscoitos cada, deixando 1 (asterisco) para distribuir às três crianças (2 barras).
- $|A \cap C| = \binom{3}{2}$. Alberto e Carlos recebem 5 biscoitos no início.
- $|B \cap C| = \binom{3}{2}$. Bernadette e Carlos recebem 5 biscoitos no início.
- $|A \cap B \cap C| = 0$. Não é possível para todas as três crianças receberem 4 ou mais biscoitos.

Combinando tudo isso, temos

$$|A \cup B \cup C| = \binom{8}{2} + \binom{8}{2} + \binom{8}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} + 0 = 75.$$

Assim, a resposta à pergunta original é $\binom{13}{2} - 75 = 78 - 75 = 3$.

Isto faz sentido agora que o vemos. A única forma de garantir que nenhuma criança receba mais de 4 biscoitos é dar a duas crianças 4 biscoitos e a uma criança 3; há três escolhas para qual criança deve receber 3 biscoitos. Poderíamos ter encontrado a resposta muito mais rapidamente através desta observação, mas o objetivo do exemplo é ilustrar que o PIE funciona!

Para quatro ou mais conjuntos, não escreveremos uma fórmula para o PIE. Em vez disso, limitamo-nos a pensar no princípio: somar todos os elementos em conjuntos unitários, depois subtrair coisas que contamos duas vezes (elementos na intersecção de um par de conjuntos), depois adicionar de novo elementos que removemos com demasiada frequência (elementos na intersecção de grupos de três conjuntos), depois retirar elementos que adicionamos de novo com demasiada frequência (elementos na intersecção de grupos de quatro conjuntos), depois adicionar de novo, retirar de novo, adicionar de novo, etc. Isto seria muito difícil se não fosse o fato de, nestes problemas, todas as cardinalidades dos conjuntos unitários serem iguais, tal como todas as cardinalidades das intersecções de dois conjuntos, e a de três conjuntos, e assim por diante. Assim, podemos agrupar todas elas e multiplicar por quantas combinações diferentes de 1, 2, 3, … conjuntos existem.

Exemplo 2

De quantas maneiras é possível distribuir 10 biscoitos a 4 crianças de modo que nenhuma criança receba mais de 2 biscoitos?

Solução. Existem $\binom{13}{3}$ formas de distribuir 10 biscoitos a 4 crianças (usando 10 asteriscos e 3 barras). Vamos subtrair todos os resultados em que uma criança recebe 3 ou mais biscoitos. Quantos resultados são assim? Podemos forçar a criança A a comer 3 ou mais biscoitos, dando-lhe 3 biscoitos antes de começarmos. Ao fazê-lo, reduzimos o problema a um em que temos 7 biscoitos para dar a 4 crianças sem quaisquer restrições. Nesse caso, temos 7 asteriscos (os 7 biscoitos restantes) e 3 barras (uma a menos do que o número de crianças), então podemos distribuir os biscoitos de $\binom{10}{3}$ maneiras. Claro que podemos escolher qualquer uma das 4 crianças para dar biscoitos a mais, por isso parece que há $\binom{4}{1}\binom{10}{3}$ maneiras de distribuir os biscoitos dando biscoitos demais a uma criança. Mas, na verdade, contamos a mais.

Temos de nos livrar dos resultados em que duas crianças têm biscoitos demais. Há $\binom{4}{2}$ maneiras de selecionar 2 crianças para dar biscoitos extra. São necessários 6 biscoitos para fazer isto, deixando apenas 4 biscoitos. Por isso, temos 4 asteriscos e ainda 3 barras. Os 4 biscoitos restantes podem assim ser distribuídos de $\binom{7}{3}$ maneiras (para cada uma das $\binom{4}{2}$ escolhas de 2 crianças para alimentar em excesso).

Mas agora removemos coisas demais. Temos de colocar de volta todas as formas de dar biscoitos demais a três crianças. Isto utiliza 9 biscoitos, deixando apenas 1 para distribuir às 4 crianças usando asteriscos e barras, o que pode ser feito de $\binom{4}{3}$ maneiras. Temos de considerar este resultado para cada escolha possível de quais três crianças alimentamos em excesso, e existem $\binom{4}{3}$ formas de selecionar esse conjunto de 3 crianças.

Em seguida, subtrairíamos todas as formas de dar biscoitos demais a quatro crianças, mas neste caso, esse número é 0.

Juntando tudo obtemos que o número de formas de distribuir 10 biscoitos a 4 crianças sem dar a nenhuma criança mais de 2 biscoitos é:

$$\binom{13}{3} - \left[\binom{4}{1}\binom{10}{3} - \binom{4}{2}\binom{7}{3} + \binom{4}{3}\binom{4}{3}\right]$$

que é

$$286 - [480 - 210 + 16] = 0.$$

Isto faz sentido: não há forma de distribuir 10 biscoitos a 4 crianças e garantir que ninguém receba mais de 2. É ligeiramente surpreendente que

$$\binom{13}{3} = \left[\binom{4}{1}\binom{10}{3} - \binom{4}{2}\binom{7}{3} + \binom{4}{3}\binom{4}{3}\right],$$

mas como o PIE funciona, esta igualdade de fato se verifica.

Só para que não pense que sempre há soluções mais fáceis do que utilizar o PIE, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 3

Anteriormente, contamos o número de soluções inteiras para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13,$$

onde $x_i \geq 0$ para todo x_i.

Quantas dessas soluções têm $0 \leq x_i \leq 3$ para todo x_i ?

Solução. Temos de subtrair o número de soluções em que uma ou mais das variáveis tem um valor superior a 3. Teremos de utilizar o PIE porque a contagem do número de soluções em que cada uma das cinco variáveis separadamente é superior a 3 conta soluções várias vezes. Eis o que obtemos:

- Total de soluções: $\binom{17}{4}$.
- Soluções em que $x_1 > 3$: $\binom{13}{4}$. Damos primeiramente 4 unidades para x_1, então distribuímos as 9 unidades remanescentes para as 5 variáveis.
- Soluções em que $x_1 > 3$ e $x_2 > 3$: $\binom{9}{4}$. Depois de darmos 4 unidades para x_1 e outras 4 para x_2, só nos resta 5 unidades para distribuir.
- Soluções em que $x_1 > 3$, $x_2 > 3$ e $x_3 > 3$: $\binom{5}{4}$.
- Soluções em que $x_1 > 3$, $x_2 > 3$, $x_3 > 3$ e $x_4 > 3$: 0.

Também precisamos levar em conta o fato de que poderíamos escolher qualquer uma das cinco variáveis no lugar de x_1 acima (por isso haverá $\binom{5}{1}$ resultados como este), qualquer par de variáveis no lugar de x_1 e x_2 ($\binom{5}{2}$ resultados) e assim por diante. É por isso que a dupla contagem ocorre, por isso precisamos utilizar o PIE. Juntando tudo, temos que o número de soluções com $0 \leq x_i \leq 3$ é

$$\binom{17}{4} - \left[\binom{5}{1}\binom{13}{4} - \binom{5}{2}\binom{9}{4} + \binom{5}{3}\binom{5}{4}\right] = 15.$$

Contando Desarranjos

O uso avançado do PIE tem aplicações além de asteriscos e barras. Um **desarranjo** (ou **permutação caótica**, ou ainda **dérangement** – do francês) de n elementos (e_1, e_2, e_3, ..., e_n) é uma permutação em que nenhum elemento permanece na mesma posição. Por exemplo, há 6 permutações de 123:

123 132 213 231 312 321.

No entanto, a maioria destas tem um ou mais elementos que permaneceram fixos: 123 tem os três elementos fixos, uma vez que todos os três elementos permaneceram nas suas posições originais, 132 tem o primeiro elemento fixo (1 está na sua posição original no ínicio), e assim por diante. De fato, os únicos desarranjos de 123 são

$$231 \text{ e } 312.$$

Se passarmos para 4 elementos distintos, há 24 permutações (porque temos 4 escolhas para o primeiro elemento, 3 escolhas para o segundo, 2 escolhas para o terceiro deixando apenas 1 escolha para o último). Quantas destas são desarranjos? Se você listar todas as 24 permutações e eliminar as que não são desarranjos, ficará com apenas 9 desarranjos. Vamos ver como podemos obter esse número usando o PIE.

Exemplo 1

Quantos desarranjos de 4 elementos distintos existem?

Solução. Contamos todas as permutações, e subtraímos aquelas que não são desarranjos. Há $4! = 24$ permutações de 4 elementos distintos. Agora, para que uma permutação não seja um desarranjo, pelo menos um dos 4 elementos deve ser fixado. Há $\binom{4}{1}$ escolhas para as quais fixamos um único elemento. Uma vez fixado, precisamos de encontrar uma permutação dos outros três elementos. Há 3! permutações de 3 elementos.

Mas agora contamos excessivamente os não-desarranjos, pelo que devemos subtrair as permutações que fixam dois elementos. Há $\binom{4}{2}$ escolhas para as quais fixamos dois elementos, e depois, para cada par, 2! permutações dos elementos restantes. Mas isto subtrai demais, por isso, acrescentamos novamente as permutações que fixam 3 elementos, todas $\binom{4}{3}1!$ delas. Finalmente, subtraímos as $\binom{4}{4}0!$ permutações (lembre que $0! = 1$), que fixam todos os quatro elementos. Juntando tudo, obtemos que o número de desarranjos de 4 elementos é:

$$4! - \left[\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}1! - \binom{4}{4}0!\right] = 24 - 15 = 9.$$

Claro que podemos usar uma fórmula semelhante para contar os desarranjos de qualquer número de elementos. No entanto, quanto mais elementos tivermos, mais longa é a fórmula. Aqui está outro exemplo:

Exemplo 2

Cinco cavalheiros comparecem a uma festa, deixando os seus chapéus à porta. No final da festa, apanham apressadamente os chapéus quando saem. De quantas maneiras diferentes isto poderia acontecer para que nenhum dos cavalheiros saísse com o seu próprio chapéu?

Solução. Estamos contando desarranjos de 5 elementos. Há 5! maneiras dos cavalheiros pegarem os chapéus em qualquer ordem – mas muitas destas permutações resultarão em alguém obter o seu próprio chapéu. Assim, subtraímos todas as formas em que um ou mais dos homens recebem o seu próprio chapéu. Em outras palavras, subtraímos os não-desarranjos. Para tal, é necessário o PIE. Assim, a resposta é:

$$5! - \left[\binom{5}{1}4! - \binom{5}{2}3! + \binom{5}{3}2! - \binom{5}{4}1! + \binom{5}{5}0!\right].$$

Créditos

Todas as seções, com exceção da seção “Bijeções e Cardinalidade de Conjuntos” foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [2], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

A seção “Bijeções e Cardinalidade de Conjuntos” foi adaptada (traduzida, modificada e expandida) de [1], que também está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

Referências

1. Aspnes, James. *Notes on Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.cs.yale.edu/homes/aspnes/classes/202/notes.pdf .

2. Levin, Oscar. *Discrete Mathematics: An Open Introduction*. Disponível em http://discrete.openmathbooks.org

Licença