Módulo IV

Mais Sobre Contagem

Neste módulo, nós veremos alguns tópicos adicionais sobre contagem, que podem ser úteis na resolução de problemas.

Bijeções e Cardinalidade de Conjuntos

Chamamos de **números cardinais** os tamanhos que os conjuntos podem ter, sejam eles finitos ou infinitos, ou seja, sua cardinalidade. Os números cardinais finitos são simplesmente os números naturais: 0, 1, 2, 3, … . O primeiro número cardinal infinito é o tamanho do conjunto dos números naturais, e é escrito como $\aleph_0$ (lê-se, alef-zero ou alef-nulo)[1].

Podemos calcular o número cardinal de um contando explicitamente os seus elementos; por exemplo, $|\emptyset| = 0$, $|\{\text{Luísa, Mamãe, Papai}\}| = 3$, e $|\{x \in \mathbb{N} : x < 100 \text{ e } x \text{ é primo}\}| = |\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}| = 25$. Bijeções, entretanto, permitem-nos definir o tamanho de conjuntos arbitrários sem termos quaisquer meios específicos para contar elementos.

Dizemos que dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se existir uma bijecção $f : A \leftrightarrow B$. Isso será particularmente útil para refletirmos sobre a cardinalidade de conjuntos infinitos. Números cardinais infinitos podem, de fato, se comportar de forma muito estranha. Por exemplo:

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Note que para dois conjuntos disjuntos A e B (isto é, quando $A \cap B = \emptyset$), temos que $|A \cup B| = |A| + |B|$. Seja $A = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$ (os números naturais pares). A função $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, definida por $f(x) = 2x$ é bijetiva, portanto $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Por outro lado, seja $B = \{2x + 1 : x \in \mathbb{N}\}$ (os números naturais ímpares). A função $g : \mathbb{N} \rightarrow B$, definida por $g(x) = 2x + 1$ é bijetiva, portanto também temos que $|B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Ora, como A e B são disjuntos, temos que $|A \cup B| = |A| + |B|$, mas $|A \cup B| = \mathbb{N}$. Ou seja, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

  Como adendo, note que a cardinalidade do conjunto dos números inteiros também é $\aleph_0$, uma vez que podemos construir a seguinte função bijetiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = k$, se $x = 2k$; $f(x) = -k$ se $x = 2k + 1$. Por exemplo, se $x = 4$, então $f(4) = 2$, pois $4 = 2 \times 2$. Já se $x = 3$, $f(3) = -1$, pois $3 = 2\times1 + 1$.

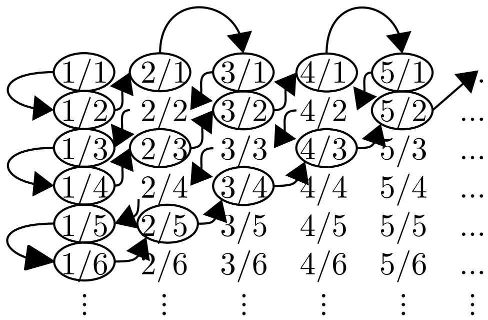
- $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Exemplo: Podemos definir o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ como pares ordenados (a, b), onde a é o numerador e b é o denominador, sendo que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ (inteiros não-nulos). Note que $|\mathbb{Z}^*| = \aleph_0$, uma vez que podemos construir a seguinte função bijetiva $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^*$, $f(x) = x$, se $x < 0$; $f(x) = x + 1$ se $x \geq 0$. Como os elementos de $\mathbb{Q}$ são exatamente aqueles do produto cartesiano de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}^*|$, ou seja, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0 \times \aleph_0$. Acontece que também conseguimos construir uma função bijetiva de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{N}$. É mais fácil mostrar graficamente como uma tal função poderia ser construída. Vamos

1 Alef é a primeira letra do alfabeto hebraico.

começar olhando para os números racionais positivos. A ideia é que se conseguirmos organizar todos os números racionais numa lista, podemos mapear o primeiro elemento da lista para o número 1, o segundo para o 2, o terceiro para o 3, e assim por diante. Se tentarmos escrever todos os números racionais positivos, poderemos proceder assim:

$$\begin{array}{cccccc}
1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & \dots \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 & \dots \\
1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 & \dots \\
1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 5/4 & \dots \\
1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 5/5 & \dots \\
1/6 & 2/6 & 3/6 & 4/6 & 5/6 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Este conjunto é uma bagunça. Em nada se parece com o conjunto dos números naturais. Na verdade, este conjunto continua infinitamente em uma série de direções diferentes. Cada linha segue infinitamente para a direita, e cada coluna segue infinitamente para baixo. Como poderíamos esperar encontrar uma forma de fazer uma bijeção entre isso e os números naturais, uma vez que os números naturais seguem infinitamente apenas numa direção?



Créditos

Todas as seções, com exceção da seção “Permutações com Repetição” foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [1], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

Referências

1. Davies, Stephen. *A Cool Brisk Walk Through Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.allthemath.org/vol-i/ .

Licença