Módulo III

Contagem: princípios fundamentais

Se o título deste capítulo parece pouco estimulante, é apenas porque o tipo de contagem que aprendemos quando crianças era, na sua maioria, de um tipo simples. Neste capítulo, vamos aprender a responder a algumas perguntas mais difíceis como "quantos horários semestrais diferentes um estudante universitário poderia ter?" e "quantas senhas diferentes pode um cliente escolher para este site de comércio eletrônico?" e "qual a probabilidade de este buffer de rede estourar, dado que os seus pacotes são dirigidos a três destinos diferentes?"

O nome mais impressionante para este tópico é combinatória. Na combinatória, concentramo-nos em duas tarefas: contar coisas (para descobrir quantas existem), e enumerar coisas (para as listar sistematicamente como indivíduos). Algumas coisas revelam-se difíceis de contar mas fáceis de enumerar, e vice-versa.

O Teorema Fundamental da Contagem

Começamos com uma regra básica que recebe o nome pomposo de Teorema Fundamental da Contagem. Ele diz o seguinte:

> Se um todo pode ser particionado em k componentes, e há n_i escolhas para o i-ésimo componente, então há $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ maneiras de fazer o todo.

Exemplo: Jane vai encomendar uma nova Lamborghini. Ela tem doze cores diferentes de pintura à escolha (incluindo Vermelho Suave e Amarelo Ousado), três interiores diferentes (Couro Premium, Couro Costurado, ou Vinil), e três sistemas de multimídia diferentes. Deve também escolher entre transmissão automática e manual, e pode obter chave convencional ou de presença. Quantas configurações diferentes Jane tem para escolher? Dito de outra forma, quantos tipos diferentes de carro poderiam sair da linha de montagem para ela?

A chave é que cada uma das suas escolhas é independente de todas as outras. A escolha de um exterior Verde Invejoso não limita a sua escolha de transmissão, multimídia, ou qualquer outra coisa. Assim, não importa qual das 12 cores de pintura ela escolha, ela pode escolher independentemente qualquer um dos três interiores, e independentemente destas duas primeiras escolhas, ela pode escolher livremente qualquer uma das opções de multimídia etc. Tudo pode ser misturado e combinado. Portanto, a resposta é:

$$12 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 432 \text{ opções.}$$

A propósito, aqui está uma notação alternativa que encontrará para isto:

$$\prod_{i=1}^{k} n_i$$

que é simplesmente uma maneira mais curta de escrever

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k \, .$$

A notação $\prod$ é essencialmente um loop com um contador, e ele diz para multiplicar a expressão à sua direita para cada valor do contador (a razão porquê os matemáticos escolheram o símbolo $\prod$ (pi) para isso é simplesmente porque “pi” começa com a mesma letra que “produto”).

Podemos de fato obter muitas aplicações apenas com o teorema fundamental. Quantos PINs diferentes são possíveis para um cartão de banco? Supondo que são quatro dígitos, cada um dos quais pode ter qualquer valor de 0 a 9 (dez valores totais). A resposta é, portanto:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000 \text{ PINs diferentes.}$$

Assim, um ladrão num caixa eletrônico introduzindo freneticamente PINs ao acaso (esperando quebrar a sua conta antes que você ligue e bloqueie seu cartão extraviado) teria de tentar cerca de 5.000 vezes, em média, antes de quebrar o código. Ainda bem que o banco bloquearia o cartão automaticamente muito antes disso.

No estado da Virgínia, nos EUA, as regras para placas de automóveis são bastante flexíveis. Elas podem conter entre 1 e 7 caracteres, e cada um desses pode ser livremente um dígito ou uma letra do alfabeto.

Isso nos dá muitas possibilidades. Quantas combinações diferentes de placas de matrícula estão disponíveis?

Este problema requer um pouco mais de reflexão, uma vez que nem todas as placas têm o mesmo número de caracteres. Além de “SED4756” e “PXY1927” também podemos ter “DAWG” ou “LUVME” ou mesmo “U2”. Como podemos contá-las?

O truque é dividir o nosso conjunto em subconjuntos mutuamente exclusivos, e depois somar as cardinalidades dos subconjuntos. Se apenas 7 caracteres cabem numa matrícula, então claramente cada número de matrícula tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou 7 caracteres. E nenhuma matrícula tem dois destes (ou seja, não há matrícula que tenha simultaneamente 5 caracteres e 6 caracteres). Por conseguinte, são subconjuntos mutuamente exclusivos, sendo seguro somar suas cardinalidades. Este último ponto não é, muitas vezes, considerado, levando a erros. Cuidado para não acrescentar descuidadamente as cardinalidades de conjuntos não mutuamente exclusivos! Acabará por contar duplamente alguns itens.

Assim, sabemos que o número de matrículas possíveis é igual a:

o # de placas de 7 caracteres +
o # de placas de 6 caracteres +
o # de placas de 5 caracteres +
… +

o # de placas de 1 caractere.

Muito bem. Podemos agora descobrir cada um deles separadamente. Como é que sabemos quantas placas de 7 caracteres existem? Bem, se cada caractere deve ser uma letra ou um dígito, então temos $26 + 10 = 36$ escolhas para cada caractere. Isto implica 36^7 possíveis placas diferentes de 7 caracteres. O número total de matrículas é, portanto:

$$36^7 + 36^6 + 36^5 + 36^4 + 36^3 + 36^2 + 36 = 80.603.140.212 \text{ matrículas}$$

o que é cerca de 10 vezes a população do planeta em 2021, então por enquanto vai ser o suficiente.

Aqui está uma interessante experiência mental para testar a sua intuição sobre números. Olhe para o cálculo acima, e pergunte-se: "E se o estado da Virgínia decidisse, por uma questão de coerência, que todas as matrículas tinham de ter todos os 7 caracteres? Isso reduziria significativamente o número total de matrículas possíveis"? A minha primeira inclinação seria dizer "sim", porque estamos acrescentando sete coisas nessa equação, e se exigíssemos placas de 7 caracteres para todos, eliminaríamos 6 dos 7. Certamente correríamos o risco de ficar sem matrículas para dar a todos os carros! Mas na realidade, o novo número total de matrículas possíveis tornar-se-ia:

$$36^7 = 78.364.164.096 \text{ matrículas.}$$

Uau. Quase não perdemos nada ao eliminarmos todas as placas com menos de 7 caracteres. Acontece que, em comparação com as placas de 7 caracteres, todos os outros comprimentos foram uma gota de água na bacia. Esta é uma ilustração poderosa de crescimento exponencial. Quando se modifica o expoente, passando de algo como 36^6 para 36^7, obtém-se um crescimento astronômico muito, muito rápido. Isto é bom de saber quando tudo o que se quer é uma aproximação rápida de alguma quantidade. Quantas senhas diferentes são possíveis num sistema que exige 6-10 caracteres por senha? Bem, pode-se praticamente ignorar todas as senhas de 6-9 caracteres e contar apenas as senhas de 10 caracteres, porque há muito mais dessas últimas.

Um último exemplo de placas de automóveis. O modelo de matrículas de placas para automóveis do Mercosul tem exatamente 7 caracteres. No entanto, eles estão restritos ao formato AAA0A00, que utilizamos para dizer que os três primeiros caracteres são necessariamente letras do alfabeto, o quarto caractere necessariamente é um dígito, o quinto novamente é uma letra, enquanto que o sexto e o sétimo são necessariamente dígitos. Quantas placas diferentes são possíveis nesse padrão? Neste caso, teremos:

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 10 = 456.976.000 \text{ matrículas,}$$

ou seja, pouco mais de 450 milhões, bem menos que os mais de 78 bilhões que teríamos se cada um dos sete caracteres pudesse ser livremente um número ou uma letra.

Eu disse que seria o último exemplo com placas, mas só para terminar nossa seção de matrículas automotivas, vamos calcular quantas placas diferentes eram possíveis no antigo padrão brasileiro, que era AAA0000. Tínhamos então:

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000 \text{ matrículas possíveis.}$$

Menos portanto do que a população do Brasil. Se o Brasil tivesse a densidade automotiva de San Marino, onde havia 1,2 veículo por habitante em 2013, isso seria um problema.

Um truque simples

Por vezes temos algo difícil de contar, mas podemos transformar a situação em algo muito mais fácil. Muitas vezes isto implica em contar o complemento de algo, e depois subtrair do total.

Por exemplo, suponha que um determinado site da Internet exige que as senhas dos utilizadores tenham entre 6–10 caracteres – sendo cada caractere uma letra maiúscula, letra minúscula, dígito, ou caractere especial (*, #, @, % ou &) – mas também exija que cada senha tenha pelo menos um dígito ou caratere especial. Quantas senhas diferentes são possíveis?

Sem a parte do "pelo menos um dígito ou caractere especial", é fácil: existem 26 + 26 + 10 + 5 = 67 escolhas diferentes para cada caractere, então nós temos

$$67^{10} + 67^{9} + 67^{8} + 67^{7} + 67^{6} = 1.850.456.557.795.600.384 \text{ possibilidades.}$$

Mas como lidamos com a parte do "pelo menos um"?

Uma maneira seria listar todas as formas possíveis de se ter uma senha com pelo menos um caractere não-alfabético. O caractere não-alfabético poderia aparecer na primeira posição, ou na segunda, ou na terceira, … ou na décima, mas claro que isto só funciona para senhas de 10 dígitos, e de qualquer forma não é o caso que os outros caracteres não pudessem também ser não-alfabéticos. Fica complicado muito rapidamente.

Há um truque simples, no entanto, uma vez que se percebe que é fácil contar as senhas que não satisfazem a restrição extra. Faça a si mesmo esta pergunta: de todas as cadeias possíveis de 6–10 caracteres, quantas delas não têm pelo menos um caractere não-alfabético? (e são portanto ilegais, de acordo com as regras do site?)

Acontece que é o mesmo que perguntar "quantas cadeias existem com 6-10 caracteres alfabéticos (apenas)", o que é obviamente:

$$52^{10} + 52^{9} + 52^{8} + 52^{7} + 52^{6} = 147.389.519.403.536.384 \text{ senhas (inválidas).}$$

Agora, tudo o que temos de fazer é subtrair para obter:

# total de senhas	-	# de senhas inválidas	=	# de senhas válidas
1.850.456.557.795.600.384	-	147.389.519.403.536.384	=	1.708.735.865.301.022.720

senhas válidas. Parece que não perdemos muito ao exigir o caractere não-alfabético.

A lição aprendida é que se contar os elementos em algum conjunto envolve a contabilização de muitos cenários complicados diferentes, vale a pena tentar contar os elementos que não estão no conjunto, e ver se isso é mais fácil.

Créditos

FIXME Todas as seções, com exceção das seções "Relações de Equivalência" e "Fechamento de Relações" foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [2], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

As seções “Relações de Equivalência” e “Fechamento de Relações” foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [1], que também está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

Referências

1. Aspnes, James. *Notes on Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.cs.yale.edu/homes/aspnes/classes/202/notes.pdf .

2. Davies, Stephen. *A Cool Brisk Walk Through Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.allthemath.org/vol-i/ .

Licença