Capítulo 6: Relações de Recorrência e Indução Matemática

Vimos que é geralmente mais fácil encontrar definições recursivas do que fórmulas fechadas. Felizmente para nós, existem algumas técnicas para converter definições recursivas em fórmulas fechadas. Fazê-lo chama-se **resolver uma relação de recorrência**.

6.1. Resolvendo Relações de Recorrência

Lembre-se de que uma relação de recorrência é uma definição recursiva de uma sequência, sem as condições iniciais. Por exemplo, a relação de recorrência para a sequência de Fibonacci é $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (isto, acompanhado das condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, fornecem a definição recursiva completa para a sequência).

Exemplo 6.1.1

Encontre uma relação de recorrência e condições iniciais para 1, 5, 17, 53, 161, 485, ...

Solução. Encontrar a relação de recorrência seria mais fácil se tivéssemos algum contexto para o problema (como a Torre de Hanói, por exemplo). Infelizmente, temos apenas a sequência. Lembre-se, a relação de recorrência diz-lhe como passar de termos anteriores para termos futuros. O que é que se passa aqui? Poderíamos olhar para as diferenças entre termos: 4, 12, 36, 108, ... Repare que estas estão crescendo por um fator de 3. A sequência original também? $1 \cdot 3 = 3$, $5 \cdot 3 = 15$, $17 \cdot 3 = 51$ e assim por diante. Parece que acabamos sempre com menos 2 do que o próximo termo. Aha!

Então $a_n = 3a_{n-1} + 2$ é nossa relação de recorrência e a condição inicial é $a_0 = 1$.

Vamos tentar resolver estas relações de recorrência. Com isto queremos dizer algo muito semelhante à resolução de equações diferenciais (mas não se preocupe se você nunca viu equações diferenciais, não vamos precisar delas!): queremos encontrar uma função de n (uma fórmula fechada) que satisfaça a relação de recorrência, bem como a condição inicial. Tal como para as equações diferenciais, encontrar uma solução pode ser complicado, mas verificar se a solução está correta é fácil.

Exemplo 6.1.2

Verifique que $a_n = 2^n + 1$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - 1$ com $a_1 = 3$.

Solução. Primeiro, é fácil verificar a condição inicial: a_1 deve ser $2^1 + 1$ de acordo com a nossa fórmula fechada. De fato, $2^1 + 1 = 3$, que é o que nós queremos. Para verificar se a nossa solução proposta satisfaz a relação de recorrência, tente plugá-la.

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - 1 &= 2(2^{n-1} + 1) - 1 \\ &= 2^n + 2 - 1 \\ &= 2^n + 1 \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Isto é o que diz nossa relação de recorrência! Temos uma solução.

Por vezes conseguimos ser espertos e resolver uma relação de recorrência por inspeção. Geramos a sequência utilizando a relação de recorrência e acompanhamos o que estamos fazendo, para que possamos ver como pular para encontrar justamente o termo a_n. Aqui estão dois exemplos de como se pode fazer isso.

Uma **soma telescópica** é uma soma finita na qual pares de termos consecutivos se cancelam, deixando apenas os termos inicial e final. O termo vem da analogia com o telescópio, que encurta a enorme distância entre nossos olhos e os corpos celestes. De forma análoga, a propriedade de cancelamento de termos consecutivos encurta o caminho entre a soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma. Por exemplo,

$$(2 \mathbf{- 1}) + (3 - 2) + (4 - 3) + \cdots + (100 - 99) + (\mathbf{101} - 100) = -1 + 101.$$

Note que todos os termos, exceto os em negrito, se cancelam nesta soma.

Podemos usar este comportamento para resolver relações de recorrência. Aqui está um exemplo.

Exemplo 6.1.3

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + n$ com termo inicial $a_0 = 4$.

Para ter uma ideia da relação de recorrência, escreva os primeiros termos da sequência: 4, 5, 7, 10, 14, 19, ... Veja a diferença entre os termos. $a_1 - a_0 = 1$ e $a_2 - a_1 = 2$ e assim por diante. O essencial aqui é que a diferença entre termos é n. Podemos escrever isto explicitamente: $a_n - a_{n-1} = n$. Claro que poderíamos ter chegado a esta conclusão diretamente da relação de recorrência, subtraindo a_{n-1} de ambos os lados.

Agora use esta equação repetidamente, trocando n a cada vez:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 1 \\ a_2 - a_1 &= 2 \\ a_3 - a_2 &= 3 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= n. \end{aligned}$$

Adicione todas estas equações de uma vez. No lado direito, obtemos a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Já sabemos que isto pode ser simplificado para $\frac{n(n+1)}{2}$. O que acontece no lado esquerdo? Obtemos

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}).$$

Esta é uma soma telescópica. Ficamos apenas com o $-a_0$ da primeira equação e o a_n da última equação. Juntando tudo isto, temos $-a_0 + a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ou $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + a_0$. Mas sabemos que $a_0 = 4$. Portanto, a solução para a relação de recorrência, sujeita à condição inicial é $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 4$.

(Agora que sabemos isso, devemos notar que a sequência é o resultado da adição de 4 a cada um dos números triangulares).

O exemplo acima mostra uma forma de resolver relações de recorrência no formato $a_n = a_{n-1} + f(n)$ onde $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ tem uma fórmula fechada conhecida. Se você reescrever a relação de recorrência como $a_n - a_{n-1} = f(n)$, e depois somar todas as diferentes equações com n variando entre 1 e n, o lado esquerdo dar-lhe-á sempre $a_n - a_0$. O lado direito será $\sum_{k=1}^{n} f(k)$, e é por isso que precisamos conhecer a fórmula fechada para essa soma.

No entanto, a técnica da soma telescópica não nos ajudará com uma recorrência tal como $a_n = 3a_{n-1} + 2$, uma vez que o lado esquerdo não resultará em uma tal soma. Teremos $-3a_{n-1}$ mas apenas um a_{n-1}. No entanto, ainda podemos ser espertos se utilizarmos **iteração**.

Já vimos um exemplo de iteração quando encontramos a fórmula fechada para sequências aritméticas e geométricas. A ideia é, iteramos o processo de encontrar o termo seguinte, começando com a condição inicial conhecida, até termos a_n. Depois simplificamos. No exemplo da sequência aritmética, simplificamos multiplicando d pelo número de vezes que o adicionamos a a até chegarmos em a_n, para passarmos de $a_n = a + d + d + d + \cdots + d$ para $a_n = a + dn$.

Para ver como isto funciona, vamos passar pelo mesmo exemplo em que utilizamos telescopagem, mas desta vez utilizaremos iteração.

Exemplo 6.1.4

Use iteração para resolver a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + n$ com $a_0 = 4$.

Solução. Novamente, comece escrevendo a relação de recorrência quando $n = 1$. Desta vez, não subtraia os termos a_{n-1} do outro lado:

$$a_1 = a_0 + 1.$$

Agora $a_2 = a_1 + 2$, mas nós sabemos o que é a_1. Por substituição, obtemos

$$a_2 = (a_0 + 1) + 2.$$

Agora vá para $a_3 = a_2 + 3$, usando o nosso valor conhecido para a_2:

$$a_3 = ((a_0 + 1) + 2) + 3.$$

Notamos um padrão. A cada vez, tomamos o termo anterior e adicionamos o índice atual. Assim,

$$a_n = ((((a_0 + 1) + 2) + 3) + \ldots + n - 1) + n.$$

Reagrupando termos, notamos que a_n é simplesmente a_0 mais a soma dos números inteiros de 1 a n. Assim, como $a_0 = 4$,

$$a_n = 4 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Claro que neste caso ainda precisávamos saber a fórmula para a soma de $1, \ldots, n$. Vamos tentar a iteração com uma sequência para a qual a telescopagem não funciona.

Exemplo 6.1.5

Resolva a relação de recorrência $a_n = 3a_{n-1} + 2$ com $a_0 = 1$.

Solução. Mais uma vez, iteramos a relação de recorrência, chegando até o índice n.

$$\begin{array}{lll} a_1 = 3a_0 + 2 & & \\ a_2 = 3(a_1) + 2 & = & 3(3a_0 + 2) + 2 \\ a_3 = 3[a_2] + 2 & = & 3[3(3a_0 + 2) + 2] + 2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \\ a_n = 3(a_{n-1}) + 2 & = & 3(3(3(3 \ldots (3a_0 + 2) + 2) + 2) \ldots + 2) + 2. \end{array}$$

É difícil ver o que está acontecendo aqui porque temos que distribuir todos esses 3's. Vamos tentar novamente, desta vez simplificando um pouco à medida que avançamos.

$$\begin{array}{lll} a_1 = 3a_0 + 2 & & \\ a_2 = 3(a_1) + 2 & = & 3(3a_0 + 2) + 2 = 3^2 a_0 + 2 \cdot 3 + 2 \\ a_3 = 3[a_2] + 2 & = & 3[3(3a_0 + 2) + 2] + 2 = 3^3 a_0 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \\ a_n = 3(a_{n-1}) + 2 & = & 3(3^{n-1} a_0 + 2 \cdot 3^{n-2} + \ldots + 2) + 2 \\ & = & 3^n a_0 + 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + \ldots + 2 \cdot 3 + 2. \end{array}$$

Agora simplificamos. $a_0 = 1$, por isso temos $3^n + \langle\text{restante}\rangle$. Note que todos os outros termos têm um 2 neles. De fato, temos uma soma geométrica com o primeiro termo 2 e uma razão comum 3. Já vimos como simplificar $2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1}$. Obtemos $\frac{2 - 2 \cdot 3^n}{-2}$, que simplifica para $3^n - 1$. Juntando isto com o primeiro termo 3^n, nos dá nossa fórmula fechada:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 1.$$

A iteração pode ser confusa, mas quando a relação de recorrência se refere apenas a um termo anterior (e talvez alguma função de n), ela pode funcionar bem. No entanto, tentar iterar uma relação de recorrência como $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ será complicado demais. Teríamos de manter um registro de dois conjuntos de termos anteriores, cada um dos quais foi expresso por dois termos anteriores, e assim por diante. O comprimento da fórmula cresceria exponencialmente (o dobro a cada vez, de fato). Felizmente, existe um método para resolver relações de recorrência que funciona muito bem em relações como esta.

6.1.1 A Técnica de Raiz Característica

Suponha que queremos resolver uma relação de recorrência expressa como uma combinação dos dois termos anteriores, tal como $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Em outras palavras, queremos encontrar uma função de n que satisfaça $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$. Agora a iteração é muito complicada, mas pensem só por um segundo no que aconteceria se iterássemos. Em cada passo, multiplicaríamos, entre outras coisas, uma iteração anterior por 6. Assim, a nossa fórmula fechada incluiria 6 multiplicado um certo número de vezes. Assim, é razoável adivinhar que a solução conterá partes que pareçam geométricas. Talvez a solução assuma a forma r^n para alguma constante r.

A coisa boa é que sabemos como verificar se uma fórmula é realmente uma solução para uma relação de recorrência: plugando-a. O que acontece se plugarmos o r^n à recursão acima? Obtemos

$$r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0.$$

Agora resolvendo para r:

$$r^{n-2}(r^2 - r - 6) = 0,$$

assim pela fatorização, $r = -2$ ou $r = 3$ (ou $r = 0$, embora isto não nos ajude). Isto diz-nos que $a_n = (-2)^n$ é uma solução para a relação de recorrência, tal como $a_n = 3^n$. Qual delas está correta? Ambas estão, a menos que especifiquemos as condições iniciais. Note-se que também poderíamos ter $a_n = (-2)^n + 3^n$. Ou $a_n = 7(-2)^n + 4 \cdot 3^n$. Na verdade, para qualquer a e b, $a_n = a(-2)^n + b3^n$ é uma solução (tente plugar isto na relação de recorrência). Para encontrar os valores de a e b, utilize as condições iniciais.

Isto indica-nos a direção de uma técnica mais geral para resolver as relações de recorrência. Note que seremos sempre capazes de factorar o r^{n-2} como fizemos acima. Portanto, só nos preocupamos realmente com a outra parte. Chamamos esta outra parte de **equação característica** para a relação de recorrência. Estamos interessados em encontrar as raízes da equação característica, que são chamadas (surpresa) de **raízes características**.

Raízes Características

Dada uma relação de recorrência $a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 0$, o **polinômio característico** é

$$x^2 + \alpha x + \beta$$

dando-nos a **equação característica**:

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0.$$

Se r_1 e r_2 são duas raízes distintas do polinômio característico (isto é, soluções para a equação característica), então a solução para a relação de recorrência é

$$a_n = ar_1^n + br_2^n,$$

onde a e b são constantes determinadas pelas condições iniciais.

Exemplo 6.1.6

Resolva a relação de recorrência $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 3$.

Solução. Reescreva a relação de recorrência como $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$. Agora forme a equação característica:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

e resolva para x:

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

então $x = 2$ e $x = 5$ são as raízes características. Nós sabemos portanto que a solução para a relação de recorrência terá a forma

$$a_n = a2^n + b5^n.$$

Para encontrar a e b, plugamos $n = 0$ e $n = 1$, chegando num sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{aligned} 2 &= a2^0 + b5^0 = a + b \\ 3 &= a2^1 + b5^1 = 2a + 5\text{b} \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema nos dá $a = \frac{7}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$, então a solução para a relação de recorrência é

$$a_n = \frac{7}{3}2^n - \frac{1}{3}5^n.$$

Talvez a relação de recorrência mais famosa seja $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, que junto com as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ define a sequência de Fibonacci. Mas note que este é precisamente o tipo de relação de recorrência sobre a qual podemos utilizar a técnica da raiz característica. Quando o fazemos, a única coisa que muda é que a equação característica não se fatora como $(x - r_1)(x - r_2)$, pelo que é necessário utilizar a fórmula quadrática para encontrar as raízes características. De fato, ao fazê-lo, obtém-se o terceiro número irracional mais famoso, φ, a **relação de ouro**.

Antes de deixarmos a técnica da raiz característica, devemos pensar sobre o que pode acontecer quando se resolve a equação característica. Temos um exemplo acima em que o polinômio característico tem duas raízes distintas. Estas raízes podem ser inteiras, ou talvez números irracionais (exigindo a fórmula quadrática para as encontrar). Nestes casos, sabemos como será a solução para a relação de recorrência.

No entanto, é possível que o polinômio característico tenha apenas uma raiz. Isto pode acontecer se o polinômio característico for fatorável como $(x - r)^2$. Ainda assim, o r^n seria uma solução para a relação de recorrência, mas não conseguiríamos encontrar soluções para todas as condições iniciais utilizando a forma geral $a_n = ar_1^n + br_2^n$, uma vez que não poderíamos distinguir entre r_1^n e r_2^n. No entanto, estamos com sorte:

Técnica da Raiz Característica para Raiz Única

Suponha que a relação de recorrência $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ tenha um polinômio característico com apenas uma raiz r. Então a solução para a relação de recorrência é

$$a_n = ar^n + bnr^n$$

onde a e b são constantes determinadas pelas condições iniciais.

Observe o n extra em bnr^n. Isto permite-nos resolver para as constantes a e b a partir das condições iniciais.

Exemplo 6.1.7

Resolva a relação de recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ com condições iniciais $a_0 = 1$ e $a_1 = 4$.

Solução. O polinômio característico é $x^2 - 6x + 9$. Nós resolvemos a equação característica

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

fatorando:

$$(x - 3)^2 = 0$$

então $x = 3$ é a única raiz característica. Portanto nós sabemos que a solução para a relação de recorrência tem o formato

$$a_n = a3^n + bn3^n$$

para algum par de constantes a e b. Agora use as condições iniciais:

$$a_0 = 1 = a3^0 + b \cdot 0 \cdot 3^0 = a$$
$$a_1 = 4 = a \cdot 3 + b \cdot 1 \cdot 3 = 3a + 3b.$$

Como $a = 1$, encontramos que $b = \frac{1}{3}$. Portanto a solução para a relação de recorrência é

$$a_n = 3^n + \frac{1}{3}n3^n.$$

Embora não consideraremos exemplos mais complicados do que estes, esta técnica de raiz característica pode ser aplicada a relações de recorrência muito mais complicadas. Por exemplo, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3}$ tem polinômio característico $x^3 - 2x^2 - x + 3$. Assumindo que você veja como fatorar um polinômio de grau 3 (ou mais), você pode facilmente encontrar as raízes características e como tal resolver a relação de recorrência (a solução seria parecida com $a_n = ar_1^n + br_2^n + cr_3^n$ se houvesse 3 raízes distintas). É também possível que as raízes características sejam números complexos.

Contudo, a técnica da raiz característica só é útil para resolver relações de recorrência de uma determinada forma: a_n é dada como uma combinação linear de algum número de termos anteriores. Estas relações de recorrência são chamadas **relações de recorrência homogêneas lineares com coeficientes constantes**. O adjectivo "homogêneo" refere-se ao fato de não haver nenhum termo adicional na relação de recorrência, além de múltiplos de termos a_j. Por exemplo, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ é não-homogênea devido à constante adicional 1. Existem métodos gerais de resolução de tais coisas, mas não os consideraremos aqui, a não ser através do uso de telescopagem ou iteração como descritos anteriormente.

6.2. Indução Matemática

A indução matemática é uma técnica de prova, não muito diferente da prova direta ou prova por contradição ou prova combinatória[1]. Em outras palavras, a indução é um estilo de argumento que usamos para convencer a nós mesmos e aos outros de que uma afirmação matemática é sempre verdadeira. Muitas afirmações matemáticas podem ser provadas através da simples explicação do seu significado. Outras são muito difíceis de provar – de fato, existem afirmações matemáticas relativamente simples que ninguém sabe ainda como provar. Para facilitar a descoberta de provas, é importante estar familiarizado com alguns estilos padrão de argumentos. A indução é um desses estilos. Comecemos com um exemplo:

Exemplo 6.2.1

É preciso enviar um envelope pelo correio, mas ainda não se sabe quantos selos serão necessários. Você dispõe de uma grande quantidade de selos de 8 centavos e selos de 5 centavos. Que valores de postagem você consegue fazer usando exatamente estes selos? Que valores são impossíveis de fazer?

Talvez ao investigar o problema acima você tenha escolhido alguns valores de postagem, e depois descoberto se poderia chegar nesses valores usando apenas selos de 8 e 5 centavos. Talvez o tenha feito em ordem: consegue-se fazer 1 centavo de selos? Conseguirá fazer 2 centavos? 3 centavos? E assim por diante. Se foi isto que fez, estava de fato respondendo uma sequência de perguntas. Temos métodos para lidar com sequências. Vamos ver se isso ajuda.

Na verdade, não vamos fazer uma sequência de perguntas, mas sim uma sequência de afirmações. Seja $P(n)$ a afirmação "é possível fazer n centavos de postagem usando apenas selos de 8 centavos e 5 centavos". Uma vez que para cada valor de n, $P(n)$ é uma afirmação declarativa, ela ou é verdadeira ou é falsa. Assim, se formarmos a sequência de afirmações

$$P(1), P(2), P(3), P(4), \ldots,$$

a sequência consistirá em V's (para verdadeiro) e F's (para falso). No nosso caso particular, a sequência começa assim

$$\text{F, F, F, F, F, V, F, F, V, F, V, F, F, F, V, } \ldots$$

porque $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ são todos falsos (não se pode fazer 1, 2, 3, ou 4 centavos de postagem), mas P(5) é verdadeiro (use um selo de 5 centavos), e assim por diante.

Pensemos um pouco sobre como poderíamos encontrar o valor de $P(n)$ para algum n específico (o "valor" será ou V ou F). Como é que encontramos o valor do n-ésimo termo de uma sequência de números? Como é que encontramos a_n? Havia duas maneiras de o fazermos: ou havia uma fórmula fechada para a_n, para que pudéssemos plugar n na fórmula e obter o nosso valor de saída, ou tínhamos uma definição recursiva para a sequência, para que pudéssemos usar os termos anteriores da sequência para calcular o n-ésimo termo. Ao lidar com sequências de afirmações, poderíamos também utilizar qualquer uma destas técnicas. Talvez haja uma forma de utilizar n

1 Não se preocupe se você não estiver familiarizado com esses métodos de prova aqui mencionados. Ainda falaremos sobre eles em breve.

em si para determinar se podemos fazer n centavos de postagem. Isso seria algo como uma fórmula fechada. Ou em vez disso, poderíamos utilizar os termos anteriores na sequência (de declarações) para determinar se podemos fazer n centavos de postagem. Ou seja, se soubermos o valor de $P(n-1)$, podemos passar desse valor para o valor de $P(n)$? Isso seria algo como uma definição recursiva para a sequência. Lembre-se, encontrar definições recursivas para as sequências era muitas vezes mais fácil do que encontrar fórmulas fechadas. O mesmo é verdade aqui.

Suponha que eu lhe disse que $P(43)$ é verdadeiro (e é mesmo). É possível determinar a partir deste fato o valor de $P(44)$ (se é verdadeiro ou falso)? Sim, é possível. Mesmo que não saibamos exatamente como fizemos 43 centavos a partir dos selos de 5 e 8 centavos, sabemos que havia uma maneira de fazê-lo. E se nessa forma utilizássemos pelo menos três selos de 5 centavos (fazendo 15 centavos)? Poderíamos substituir esses três selos de 5 centavos por dois selos de 8 centavos (perfazendo 16 centavos). O preço total dos selos subiu 1 centavo, pelo que temos uma forma de fazer 44 centavos, portanto $P(44)$ é verdadeiro. Evidentemente, assumimos que tínhamos pelo menos três selos de 5 centavos. E se não tivéssemos? Então temos que ter pelo menos três selos de 8 centavos (perfazendo 24 centavos). Se substituirmos esses três selos de 8 centavos por cinco selos de 5 centavos (perfazendo 25 centavos), então, mais uma vez, aumentamos o nosso total em 1 centavo para que possamos fazer 44 centavos, portanto $P(44)$ é verdadeiro.

Note que não dissemos como fazer 44 centavos, apenas que podemos, com base no fato de que podemos fazer 43 centavos. Como é que sabemos que podemos fazer 43 centavos? Talvez porque sabemos que podemos fazer 42 centavos, o que sabemos que podemos fazer porque sabemos que podemos fazer 41 centavos, e assim por diante. É uma recursão! Tal como com uma definição recursiva de uma sequência numérica, temos de especificar o nosso valor inicial. Neste caso, o valor inicial é "$P(1)$ é falso". Isso não é bom, uma vez que a nossa relação de recorrência apenas diz que $P(k+1)$ é verdadeiro se $P(k)$ também for verdadeiro. Precisamos iniciar o processo com um $P(k)$ verdadeiro. Portanto, em vez disso, podemos querer usar "P(28) é verdadeiro" como condição inicial.

Juntando tudo isto, chegamos ao seguinte fato: é possível fazer (exatamente) qualquer quantidade de franquia superior a 27 centavos usando apenas selos de 5 e 8 centavos[2]. Em outras palavras, $P(k)$ é verdadeiro para qualquer $k \geq 28$. Para provar isto, poderíamos fazer o seguinte:

1. Demonstre que $P(28)$ é verdadeiro.
2. Prove que se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ é verdadeiro (para qualquer $k \geq 28$)

   Demonstração. Seja P(n) a afirmação "é possível fazer exatamente n centavos de franquia usando selos de 5 centavos e 8 centavos". Mostraremos que P(n) é verdadeira para todo n ≥ 28.

   Primeiro, mostramos que P(28) é verdadeira: $28 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8$, por isso podemos fazer 28 centavos usando quatro selos de 5 centavos e um selo de 8 centavos.

2 Note que não estamos dizendo que não existem valores menores que também podem ser obtidos.

Agora suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum k arbitrário ≥ 28. Ou seja, é possível fazer k centavos usando selos de 5 centavos e 8 centavos. Note-se que com k ≥ 28, não é possível usar menos de três selos de 5 centavos e menos de três selos de 8 centavos ao mesmo tempo: usar dois de cada daria apenas 26 centavos. Agora, se fizemos k centavos usando pelo menos três selos de 5 centavos, substituamos três selos de 5 centavos por dois selos de 8 centavos. Isto substitui 15 centavos de franquia por 16 centavos, passando de um total de k centavos para $k + 1$ centavos. Assim, $P(k + 1)$ é verdadeira. Por outro lado, se fizemos k centavos usando pelo menos três selos de 8 centavos, então podemos substituir três selos de 8 centavos por cinco selos de 5 centavos, passando de um total de 24 centavos para 25 centavos, dando um total de $k + 1$ centavos de franquia. Assim, neste caso também $P(k + 1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 28$.

■

6.2.1 Formalizando Demonstrações

O que fizemos no exemplo do selo acima funciona para muitos tipos de problemas. A prova por indução é útil ao tentar provar declarações sobre todos os números naturais, ou todos os números naturais maiores do que algum primeiro caso fixo (como o 28 no exemplo acima), e em algumas outras situações também. Em particular, a indução deve ser usada quando há alguma forma de passar de um caso para o outro – quando se pode ver como sempre "fazer mais um".

Esta é uma grande ideia. Pensar num problema de forma indutiva pode dar uma nova perspectiva sobre o problema. Por exemplo, para compreender realmente o problema do selo, deve-se pensar em como qualquer valor de postagem (superior a 28 centavos) pode ser feito (este é um raciocínio não indutivo) e também como as formas em que a postagem pode ser feita mudam à medida que a quantidade aumenta (raciocínio indutivo). Quando lhe é pedido que forneça uma prova por indução, é-lhe pedido que pense no problema de forma dinâmica; como é que o aumento de n altera o problema?

Mas há também outro lado das provas por indução. Em matemática, não basta compreender um problema, é preciso também ser capaz de comunicar o problema a outros. Como qualquer disciplina, a matemática tem padrões de linguagem e estilo, permitindo que os matemáticos compartilhem as suas ideias de forma eficiente. As provas por indução têm um certo estilo formal, e ser capaz de escrever neste estilo é importante. Permite-nos manter as nossas ideias organizadas e pode até ajudar-nos na formulação de uma demonstração.

Aqui está a estrutura geral de uma prova por indução matemática:

Estrutura de uma Prova por Indução

Comece por dizer qual é a afirmação que se pretende provar: "Seja $P(n)$ a declaração..." Para provar que $P(n)$ é verdade para todo $n \geq 0$, deve-se provar dois fatos:

1. **Caso base**: Prove que $P(0)$ é verdadeira. Você faz isso diretamente. Normalmente isso é fácil.
2. **Caso Indutivo (ou Passo Indutivo)**: Prove que $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ para todo $k \geq 0$. Ou seja, prove que para qualquer $k \geq 0$ se $P(k)$ for verdadeira, então $P(k + 1)$ também é verdadeira. Esta é a prova de uma declaração do tipo *se ... então ...*, portanto você pode assumir que $P(k)$ é verdadeira ($P(k)$ é chamada de **hipótese indutiva**). A seguir você deve explicar porque $P(k + 1)$ também é verdadeira, dada essa hipótese.

Assumindo que você obtenha sucesso em ambas as partes acima, pode então concluir, "Portanto, pelo princípio da indução matemática, a afirmação $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 0$".

Por vezes a afirmação $P(n)$ só será válida para valores de $n \geq 4$, por exemplo, ou algum outro valor. Nesses casos, substitua todos os 0's acima por 4's (ou o outro valor).

A outra vantagem de formalizar provas indutivas é que isto nos permite verificar que a lógica por detrás deste estilo de argumento é válida. Porque é que a indução funciona? Pense numa fila de dominós montados de pé sobre as suas bordas. Queremos argumentar que, dentro de um minuto, todos os dominós terão caído. Para que isto aconteça, será necessário empurrar o primeiro dominó. Este é o caso base. Também terá de ser que os dominós estejam suficientemente próximos uns dos outros para que, quando um determinado dominó cair, provoque a queda do próximo dominó. Esse é o caso indutivo. Se ambas estas condições forem satisfeitas, empurra-se o primeiro dominó e cada dominó fará cair o próximo, então todos os dominós cairão.

A indução é poderosa! Pense em como é muito mais fácil derrubar dominós quando você próprio não tem de empurrar cada dominó. Basta iniciar a reação em cadeia, e depois contar com a relativa proximidade dos dominós para cuidar do resto.

Pense no nosso estudo de sequências. É mais fácil encontrar definições recursivas para as sequências do que fórmulas fechadas. Passar de um caso para outro é mais fácil do que ir diretamente para um caso em particular. É isso que é tão bom na indução. Em vez de ir diretamente ao caso para n (arbitrário), só precisamos dizer como passar de um caso para o seguinte.

Quando lhe for pedido que prove uma declaração por indução matemática, você deve primeiro pensar na razão pela qual a declaração é verdadeira, usando um raciocínio indutivo. Explique porque é que a indução é a coisa certa a se fazer, e grosso modo porque é que o caso indutivo vai funcionar. Depois, sente-se e escreva uma prova cuidadosa e formal, utilizando a estrutura acima.

6.2.2 Exemplos

Aqui estão exemplos de demonstrações por indução matemática.

Exemplo 6.2.2

Prove que para todo número natural n ≥ 1, temos que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solução. Primeiro, pensemos indutivamente sobre esta equação. De fato, sabemos que isto é verdade por outras razões (inverter e adicionar vêm-nos à mente). Mas porque é que a indução pode ser aplicável? O lado esquerdo soma os números de 1 a n. Se soubermos fazer isso, acrescentar apenas mais um termo ($n + 1$) não seria assim tão difícil. Por exemplo, se $n = 100$, suponha que sabemos que a soma dos primeiros 100 números é 5050 (portanto $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050$, o que é verdade). Agora, para encontrar a soma dos primeiros 101 números, faz mais sentido acrescentar apenas 101 a 5050, em vez de calcular novamente a soma total. Teríamos $1 + 2 + 3 + 3 + \cdots + 100 + 101 = 5050 + 101 = 5151$. Na verdade, seria sempre fácil acrescentar simplesmente mais um termo. É por isso que devemos usar a indução.

Agora a prova formal:

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação $1 + 2 + 3 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nós vamos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os número naturais $n \geq 1$.

Caso base: $P(1)$ é a afirmação $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, que é claramente verdadeira.

Caso indutivo: Seja $k \geq 1$ um número natural. Assuma (para a indução) que $P(k)$ é verdadeira. Isso significa que $1 + 2 + 3 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Provaremos que $P(k + 1)$ também é verdadeira. Isto é, temos que provar que $1 + 2 + 3 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Para provar esta equação, comece somando $k + 1$ a ambos os lados da hipótese indutiva:

$$1 + 2 + 3 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1).$$

Agora, simplificando o lado direito, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto $P(k + 1)$ é verdadeira, assim, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todos os números naturais $n \geq 1$.

■

Note que na parte da demonstração em que provamos $P(k + 1)$ a partir de $P(k)$, utilizamos a equação $P(k)$. Esta foi a hipótese indutiva. Ver como utilizar as hipóteses indutivas é geralmente simples ao provar um fato sobre uma soma como esta. Em outras demonstrações, pode ser menos óbvio onde ela se encaixa.

Exemplo 6.2.3

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ é um múltiplo de 5.

Solução. Mais uma vez, comece por compreender a dinâmica do problema. O que é que o aumento do n faz? Vamos tentar com alguns exemplos. Se $n = 1$, então sim,

$6^1 - 1 = 5$ é um múltiplo de 5. Com o que o aumento de n para 2 se parece? Temos $6^2 - 1 = 35$, que mais uma vez é um múltiplo de 5. A seguir, $n = 3$: mas em vez de apenas encontrar $6^3 - 1$, o que fez o aumento de n? Ainda vamos subtrair 1, mas agora estamos multiplicando por outro 6 primeiro. Visto de outra forma, estamos multiplicando um número que é um a mais do que um múltiplo de 5 por 6 (porque $6^2 - 1$ é um múltiplo de 5, portanto 6^2 é um a mais do que um múltiplo de 5). Como se parecem números que são um a mais de um múltiplo de 5? Devem ter o último dígito 1 ou 6. O que acontece quando se multiplica um tal número por 6? Depende do número, mas em qualquer caso, o último dígito do novo número tem de ser um 6. E depois, se subtrair 1, obtém-se o último dígito 5, portanto um múltiplo de 5.

A questão é que, cada vez que multiplicamos por apenas mais um seis, ainda obtemos um número com o último dígito 6, de modo que subtrair 1 dá-nos um múltiplo de 5. Agora a prova formal:

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação "$6^n - 1$ é um múltiplo de 5". Nós provaremos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: $P(0)$ é verdadeira: $6^0 - 1 = 0$, que é um múltiplo de 5.

Caso indutivo: Seja k um número natural arbitrário. Assuma, por indução, que $P(k)$ é verdadeira. Isto é, $6^k - 1$ é um múltiplo de 5. então $6^k - 1 = 5j$ para algum inteiro j. Isso significa que $6^k = 5j + 1$. Multiplique ambos os lados por 6:

$$6^{k+1} = 6(5j + 1) = 30j + 6.$$

Mas nós queremos saber sobre $6^{k+1} - 1$, então subtraia um de ambos os lados:

$$6^{k+1} - 1 = 30j + 5.$$

É claro que $30j + 5 = 5(6j + 1)$, então é um múltiplo de 5.

Portanto $6^{k+1} - 1$ é um múltiplo de 5 ou, em outras palavras, $P(k + 1)$ é verdadeira. Assim, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Tivemos que ser um pouco espertos (isto é, usamos alguma álgebra) para localizar o $6^k - 1$ dentro do $6^{k+1} - 1$ antes que pudéssemos aplicar a hipótese indutiva. Isto é o que pode tornar as provas indutivas desafiadoras.

Nos dois exemplos acima, começamos com $n = 1$ ou $n = 0$. Podemos começar depois, se for necessário.

Exemplo 6.2.4

Prove que $n^2 < 2^n$ para todos os inteiros $n \geq 5$.

Solução. Em primeiro lugar, a ideia do argumento. O que acontece quando aumentamos n de 1? No lado esquerdo, aumentamos a base do quadrado e passamos ao próximo número ao quadrado. No lado direito, aumentamos a potência de 2, o que significa que duplicamos o número. Então a questão é, como é que a duplicação de um número se relaciona com o aumento para o quadrado seguinte? Pense em como se parece a diferença de dois quadrados consecutivos. Temos $(n + 1)^2 - n^2$. Isto fatora-se:

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 - n)(n + 1 + n) = 2n + 1.$$

Mas duplicar o lado direito aumenta-o por 2^n, já que $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Quando n é suficientemente grande, $2^n > 2n + 1$.

O que estamos dizendo aqui é que cada vez que n aumenta, o lado esquerdo cresce menos do que o lado direito. Assim, se o lado esquerdo começar menor (como acontece quando $n = 5$), ele nunca alcançará o lado direito. Agora a prova formal:

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação $n^2 < 2^n$. Provaremos que $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros $n \geq 5$.

Caso base: $P(5)$ é a afirmação $5^2 < 2^5$. Como $5^2 = 25$ e $2^5 = 32$, vemos que $P(5)$ é de fato verdadeira.

Caso indutivo: Seja $k \geq 5$ um inteiro arbitrário. Assuma, por indução, que $P(k)$ é verdadeira. Isto é, assuma que $k^2 < 2^k$. Provaremos que $P(k + 1)$ é verdadeira, isto é, $(k + 1)^2 < 2^{k+1}$. Para provar tal desigualdade, comece com o lado esquerdo e trabalhe na direção do lado direito:

$$\begin{aligned}
(k + 1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&< 2^k + 2k + 1 && \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&< 2^k + 2^k && \text{(pois } 2k + 1 < 2^k \text{ para } k \geq 5\text{)} \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Seguindo as igualdades e desigualdades até o fim, obtemos $(k + 1)^2 < 2^{k+1}$, em outras palavras, $P(k + 1)$. Portanto, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 5$.

■

Atenção. Com grande poder, vem grande responsabilidade. A indução não é mágica. Parece muito poderoso ser capaz de assumir que $P(k)$ é verdade. Afinal, estamos tentando provar que $P(n)$ é verdade e a única diferença está na variável: k vs. n. Estamos assumindo que o que queremos provar é verdade? Nada disso. Assumimos que $P(k)$ é verdade apenas para provar que $P(k + 1)$ é verdade.

Ainda assim você pode começar a acreditar que é capaz de provar qualquer coisa com indução. Considere esta "prova" incorreta de que todos os canadenses têm a mesma cor dos olhos: Seja $P(n)$ a afirmação de que qualquer n canadenses têm a mesma cor dos olhos. $P(1)$ é verdade, uma vez que todo mundo têm a mesma cor de olhos que si próprio. Agora assuma que $P(k)$ é verdade. Ou seja, assuma que em qualquer grupo de k canadenses, todos têm a mesma cor de olhos. Agora, considere um grupo arbitrário de $k + 1$ canadenses. Os primeiros k destes devem ter todos a mesma cor de olhos, uma vez que $P(k)$ é verdadeira. Além disso, os últimos k destes devem ter a mesma cor dos olhos, uma vez que $P(k)$ é verdadeira. Assim, de fato, todos do grupo devem ter a mesma cor de olhos. Assim, $P(k + 1)$ é verdadeira. Desta forma, pelo princípio da indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo o n.

Claramente algo deu errado. O problema é que a prova de que $P(k)$ implica $P(k + 1)$ pressupõe que $k \geq 2$. Só mostramos que $P(1)$ é verdade. Na realidade, $P(2)$ é falsa.

Nossa jornada pela indução matemática não termina por aqui. Quando falarmos mais sobre demonstrações, aproveitaremos para revisitar a indução e apresentar uma outra forma de indução, conhecida como **Indução Forte**. Esta forma, que vimos até agora, é por vezes conhecida como **Indução Fraca**.

6.3. Créditos

Este módulo foi adaptado (traduzido e modificado) de [1], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

6.4. Referências

1. Levin, Oscar. *Discrete Mathematics: An Open Introduction*. Disponível em http://discrete.openmathbooks.org

6.5. Licença