

# Capítulo 11: Linguagens e Gramáticas

Máquinas de Turing trabalham com cadeias de caracteres como entradas e saídas, através de sequências de símbolos na fita. Assim, uma forma natural de trabalhar é representar um problema como uma cadeia, colocá-lo na fita, executar uma computação, terminando com a solução como uma cadeia.

Os computadores atuais funcionam da mesma maneira. Considere um programa que encontre a distância de viagem mais curta entre cidades. Provavelmente trabalhamos introduzindo as distâncias do mapa como cadeias de símbolos e introduzindo as duas cidades desejadas como duas cadeias, e depois de executar o programa, temos as direções de saída como uma cadeia de caracteres. Assim, as cadeias de caracteres, e coleções de cadeias, são essenciais.

## 11.1. Linguagens

As nossas máquinas recebem como entrada e fornecem como saídas cadeias de símbolos. Consideramos um símbolo (por vezes chamado de **token**) como sendo uma unidade atômica que uma máquina pode ler e escrever.<sup>1</sup> Nos computadores binários quotidianos os símbolos são os bits, 0 e 1. Um alfabeto é um conjunto não vazio e finito de símbolos. Denota-se normalmente um alfabeto pela letra grega maiúscula  $\Sigma$ , embora uma exceção seja o alfabeto dos bits,  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ . Uma **cadeia** (ou **string**) sobre um alfabeto é uma sequência de símbolos desse alfabeto. Utilizamos letras gregas minúsculas como  $\sigma$  e  $\tau$  para denotar cadeias. Utilizamos  $\varepsilon$  para denotar a cadeia vazia, a sequência de símbolos de comprimento zero. O conjunto de todas as cadeias sobre  $\Sigma$  é  $\Sigma^*$ .

### Definição: Linguagem

Uma linguagem  $\mathcal{L}$  sobre um alfabeto  $\Sigma$  é um conjunto de cadeias obtidas a partir desse alfabeto. Ou seja,  $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ .

### Exemplo 11.1.1

O conjunto de cadeias de bits que começam com 1 é  $\mathcal{L} = \{1, 10, 11, 100, \dots\}$ .

### Exemplo 11.1.2

Outra linguagem sobre  $\mathbb{B}$  é o conjunto finito  $\{1000001, 1100001\}$ .

<sup>1</sup> Podemos imaginar o funcionário de Turing calculando sem ler e escrever símbolos, por exemplo, mantendo um registro da informação através do deslocamento de elefantes para o lado esquerdo de uma estrada ou para o lado direito. Mas podemos traduzir qualquer procedimento deste tipo num só, utilizando marcas que a cabeça de leitura/escrita do nosso mecanismo pode tratar. Assim, a leitura e a escrita não são essenciais, mas exigimo-las na definição de símbolos como uma conveniência; afinal de contas, elefantes são inconvenientes.

### Exemplo 11.1.3

Seja  $\Sigma = \{a, b\}$ . A linguagem que consiste em cadeias onde o número de a's é o dobro do número de b's é  $\mathcal{L} = \{\varepsilon, aab, aba, baa, aaaabb, \dots\}$ .

### Exemplo 11.1.4

Seja  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . A linguagem das cadeias de comprimento dois sobre esse alfabeto é  $\mathcal{L} = \Sigma^2 = \{aa, ab, ba, \dots, cc\}$ . Sobre o mesmo alfabeto, esta é a linguagem das cadeias de comprimento três com caracteres em ordem não decrescente:

$$\{aaa, bbb, ccc, aab, aac, abb, abc, acc, bbc, bcc\}$$

(Não é que o conjunto seja ordenado, uma vez que os conjuntos não têm uma ordem. Em vez disso, cada cadeia tem os seus caracteres em ordem não decrescente).

### Definição: Palíndromo

Um palíndromo é uma cadeia que se lê da mesma forma para a frente e para trás. Algumas palavras da língua portuguesa que são palíndromos são 'arara', 'anilina', e 'osso'.

### Exemplo 11.1.5

A linguagem dos palíndromos sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  é  $\mathcal{L} = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \sigma = \sigma^R\}$ , onde  $\sigma^R$  é o reverso de  $\sigma$ . Alguns membros são abba, aaabaaa, e a.

### Exemplo 11.1.6

Seja  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . As triplas pitagóricas  $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$  são aquelas em que  $i^2 + j^2 = k^2$ . Algumas dessas triplas são (3, 4, 5), (5, 12, 13), e (8, 15, 17). Uma forma de descrever as triplas pitagóricas é com esta linguagem.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{a^i b^j c^k \in \Sigma^* \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ e } i^2 + j^2 = k^2\} \\ &= \{aaabbbbcccc = a^3 b^4 c^5, a^5 b^{12} c^{13}, a^8 b^{15} c^{17}, \dots\}\end{aligned}$$

### Exemplo 11.1.7

O conjunto vazio é uma linguagem  $\mathcal{L} = \{\}$  sobre qualquer alfabeto. Assim é também o conjunto cujo único elemento é a cadeia vazia  $\hat{\mathcal{L}} = \{\varepsilon\}$ . Estas duas linguagens são diferentes, porque a primeira não tem membros.

Podemos pensar que uma linguagem natural como o português consiste em sentenças, que são cadeias de palavras de um dicionário. Aqui  $\Sigma$  é o conjunto de palavras de um dicionário e  $\sigma$  é uma sentença. Isto explica a definição de "língua" como um con-

junto de cadeias de palavras. Claro que a nossa definição permite que uma língua seja qualquer conjunto de cadeias de palavras, enquanto que em português não se pode formar uma sentença apenas tomando qualquer sequência louca de palavras; uma sentença deve ser construída de acordo com regras. Estudaremos conjuntos de regras, as gramáticas, mais à frente, neste capítulo.

### Definição

Uma coleção de linguagens é uma **classe**.

### Exemplo 11.1.8

Fixe um alfabeto  $\Sigma$ . A coleção de todas as linguagens finitas sobre esse alfabeto é uma classe.

### Exemplo 11.1.9

Seja  $\mathcal{P}_e$  uma máquina de Turing, usando o alfabeto de entrada  $\Sigma = \{B, 1\}$ . O conjunto de cadeias  $\mathcal{L}_e = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \mathcal{P}_e \text{ pára na entrada } \sigma\}$  é uma linguagem. A coleção de todas estas linguagens, das  $\mathcal{L}_e$  para todo  $e \in \mathbb{N}$ , é a classe de linguagens computacionalmente enumeráveis sobre  $\Sigma$ .

Em seguida, consideraremos as operações sobre linguagens. Linguagens são conjuntos de modo que se aplicam as operações de união, interseção, etc. No entanto, por exemplo, a união de uma linguagem sobre  $\{a\}^*$  com uma linguagem sobre  $\{b\}^*$  é um casamento estranho, uma combinação de cadeias de a's com cadeias de b's. Ou seja, a união de uma linguagem sobre  $\Sigma_0$  com uma linguagem sobre  $\Sigma_1$  é uma linguagem sobre  $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ . O mesmo acontece com a interseção.

Outras operações sobre linguagens são extensões de operações sobre cadeias de caracteres. Definimos a concatenação de linguagens como sendo a linguagem das concatenações, etc.

### Definição (Operações sobre linguagens)

A **concatenação de linguagens**,  $\mathcal{L}_0 \hat{\ } \mathcal{L}_1$  ou  $\mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1$ , é o conjunto de concatenações,  $\{\sigma_0 \sigma_1 \mid \sigma_0 \in \mathcal{L}_0 \text{ e } \sigma_1 \in \mathcal{L}_1\}$ .

Para qualquer linguagem, a **potenciação**,  $\mathcal{L}^k$ , é a linguagem que consiste na concatenação de  $k$  cadeias,  $\mathcal{L}^k = \{\sigma_0 \hat{\ } \dots \hat{\ } \sigma_{k-1} \mid \sigma_i \in \mathcal{L}\}$  com  $k > 0$ . Em particular,  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$ . Para  $k = 0$  tomamos  $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$ .<sup>2</sup> O **fecho de Kleene de uma linguagem**,  $\mathcal{L}^*$ , é a linguagem que consiste na concatenação de qualquer número de cadeias.

$$\mathcal{L}^* = \{ \sigma_0 \hat{\ } \dots \hat{\ } \sigma_{k-1} \mid k \in \mathbb{N} \text{ e } \sigma_0, \dots, \sigma_{k-1} \in \mathcal{L} \}$$

Isto inclui a concatenação de 0 cadeias, portanto  $\varepsilon \in \mathcal{L}^*$  se  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ .<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Por conveniência, consideramos  $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$  até mesmo quando  $\mathcal{L} = \emptyset$ .

<sup>3</sup> Analogamente ao que fizemos para a potenciação, considera-se  $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$ .

O reverso,  $\mathcal{L}^R$ , de uma linguagem  $\mathcal{L}$  é a linguagem das reversões,  $\mathcal{L}^R = \{\sigma^R \mid \sigma \in \mathcal{L}\}$ .

### Exemplo 11.1.10

Seja a linguagem o conjunto de strings de bits  $\mathcal{L} = \{1000001, 1100001\}$ , então o reverso é  $\mathcal{L}^R = \{1000001, 10000011\}$ .

### Exemplo

Se a linguagem  $\mathcal{L}$  consiste de duas cadeias  $\{a, bc\}$  então a segunda potência dessa linguagem é  $\mathcal{L}^2 = \{aa, abc, bca, bc bc\}$ . O seu fecho de Kleene é este:

$$\mathcal{L}^* = \{\varepsilon, a, bc, aa, abc, bca, bc bc, aaa, \dots\}$$

**Observação.** Aqui estão dois pontos sobre o fecho de Kleene. Anteriormente, para um alfabeto  $\Sigma$  definimos  $\Sigma^*$  como sendo o conjunto de strings sobre esse alfabeto, de qualquer comprimento. As duas definições concordam se tomarmos cada caractere do alfabeto como uma string de comprimento um. Além disso, poderíamos definir a operação de escolher repetidamente strings a partir da linguagem de duas maneiras. Poderíamos escolher uma cadeia  $\sigma$  a partir da linguagem e depois replicá-la, obtendo o conjunto dos  $\sigma^k$ 's. Ou, poderíamos repetidamente escolher cadeias a partir da linguagem, obtendo  $\sigma_0 \wedge \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_{k-1}$ 's. O segundo caso é mais útil e essa é de fato a definição de  $\mathcal{L}^*$ , como vimos anteriormente.

Encerramos essa seção com um comentário que se refere à forma como utilizaremos as linguagens posteriormente. Diremos que uma máquina **decide uma linguagem** se essa máquina computa se a sua entrada é ou não um membro da linguagem. Contudo, para alguns conjuntos há uma máquina que determina num tempo finito, para todas as entradas, se a entrada é um membro desse conjunto, mas nenhuma máquina pode determinar num tempo finito para todas as entradas que a entrada não está no conjunto. Diremos que **uma máquina reconhece** (ou aceita, ou semidecide) uma linguagem se, dado uma entrada, se ela está na linguagem, então essa máquina é capaz de computar esse fato, e se a entrada não está na linguagem, então a máquina nunca computará incorretamente que está. (A máquina pode determinar explicitamente que não está, ou simplesmente não comunicar uma conclusão, talvez por não ter parado). Em suma, decidir uma linguagem significa que para qualquer entrada a máquina computa corretamente todas as respostas “sim” e “não”, enquanto que reconhecer uma linguagem requer apenas que todas as respostas “sim” sejam obtidas e estejam corretas.

## 11.2. Gramáticas

Definimos que uma linguagem é um conjunto de cadeias. Mas isto permite qualquer conjunto sem pé nem cabeça. Na prática, uma linguagem é normalmente dada por regras.

Eis aqui um exemplo. Os falantes nativos de inglês dirão que o substantivo “the big red barn” (o grande celeiro vermelho) soa bem, mas que “the red big barn” soa mal. Ou seja, as sentenças em linguagem natural são construídas segundo padrões e a segunda dessas sentenças não segue o padrão para o inglês. As linguagens artificiais como as linguagens de programação também têm regras de sintaxe, geralmente regras muito estritas.

Uma gramática é um conjunto de regras para a formação de cadeias numa linguagem, ou seja, é uma análise da estrutura de uma linguagem. Num aforismo, as gramáticas são a linguagem das linguagens. Antes da definição formal, vamos ver primeiro um exemplo.

### Exemplo 11.2.1

Este é um subconjunto das regras para o inglês: (1) uma sentença (*sentence*) pode ser feita a partir de uma frase substantiva (*noun phrase*) seguida de uma frase verbal (*verb phrase*), (2) uma frase substantiva pode ser feita a partir de um artigo (*article*) seguido por um substantivo (*noun*), (3) uma frase substantiva também pode ser feita a partir de um artigo seguido por um adjetivo (*adjective*) e depois por um substantivo, (4) uma frase verbal pode ser feita com um verbo (*verb*) seguido por uma frase substantiva, (5) um artigo é ‘the’, (6) um adjetivo é ‘young’, (7) um verbo é ‘caught’, (8) dois substantivos são ‘man’ e ‘ball’.

Esta é uma notação conveniente para as regras que acabam de ser listadas:

$$\begin{aligned} \langle sentence \rangle &\rightarrow \langle noun\ phrase \rangle \langle verb\ phrase \rangle \\ \langle noun\ phrase \rangle &\rightarrow \langle article \rangle \langle noun \rangle \\ \langle noun\ phrase \rangle &\rightarrow \langle article \rangle \langle adjective \rangle \langle noun \rangle \\ \langle verb\ phrase \rangle &\rightarrow \langle verb \rangle \langle noun\ phrase \rangle \\ \langle article \rangle &\rightarrow the \\ \langle adjective \rangle &\rightarrow young \\ \langle verb \rangle &\rightarrow caught \\ \langle noun \rangle &\rightarrow man \mid ball \end{aligned}$$

Cada linha é uma **regra de produção ou de reescrita**. Cada uma tem uma seta,  $\rightarrow$ .<sup>4</sup> À esquerda de cada seta está uma cabeça (da regra) e à direita um corpo ou expansão. Por vezes, duas regras têm a mesma cabeça, como com  $\langle noun\ phrase \rangle$ . Há também duas regras para  $\langle noun \rangle$  mas abreviamos combinando os corpos usando o símbolo da barra vertical ‘|’ (pipe).<sup>5</sup>

Fazemos regras utilizando dois tipos diferentes de componentes. Aqueles escritos em fonte monoespçada, como *young*, são do alfabeto  $\Sigma$  da linguagem. Estes são **terminais**. Os componentes escritos com parênteses angulares e em itálico, como  $\langle article \rangle$ , são **não terminais**. Estes são como variáveis, e são utilizados para passos intermediários.

Os dois símbolos “ $\rightarrow$ ” e “|” não são nem terminais nem não terminais. São **metacaracteres**, fazem parte da sintaxe das próprias regras.

4 Leia a seta em voz alta como “pode produzir”, ou “pode expandir para”, ou “pode ser construído como”.

5 Leia em voz alta como “ou”.

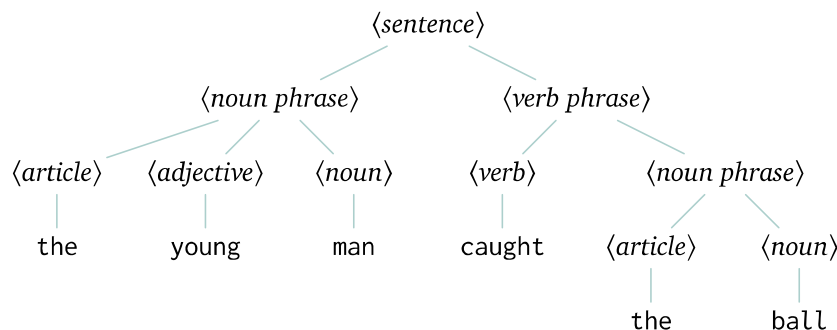
Estas regras de reescrita regem a **derivação** de cadeias na linguagem. Sob a gramática do inglês, toda a derivação começa com  $\langle sentence \rangle$ . Ao longo do caminho, as cadeias intermediárias contêm uma mistura de não terminais e terminais. Todas as regras têm uma cabeça com um único não terminal. Assim, para derivar a sequência seguinte, escolha um não terminal na sequência atual e substitua um corpo de regras associado.

$\langle sentence \rangle = \langle noun\ phrase \rangle \langle verb\ phrase \rangle$   
 $= \langle article \rangle \langle adjective \rangle \langle noun \rangle \langle verb\ phrase \rangle$   
 $= the \langle adjective \rangle \langle noun \rangle \langle verb\ phrase \rangle$   
 $= the\ young \langle noun \rangle \langle verb\ phrase \rangle$   
 $= the\ young\ man \langle verb\ phrase \rangle$   
 $= the\ young\ man \langle verb \rangle \langle noun\ phrase \rangle$   
 $= the\ young\ man\ caught \langle noun\ phrase \rangle$   
 $= the\ young\ man\ caught \langle article \rangle \langle noun \rangle$   
 $= the\ young\ man\ caught\ the \langle noun \rangle$   
 $= the\ young\ man\ caught\ the\ ball$

Note que a seta de linha única  $\rightarrow$  é para regras enquanto a seta de linha dupla  $=$  é para derivações.<sup>6</sup>

Essa derivação sempre substitui o não terminal mais à esquerda, por isso é uma **derivação mais à esquerda**. Contudo, em geral, poderíamos substituir qualquer não terminal.

A **árvore de derivação** ou **árvore de análise sintática** é uma representação alternativa.<sup>7</sup>



### Definição.

Uma **gramática livre de contexto**, é uma 4-upla  $G = \langle \Sigma, N, S, P \rangle$ . Em primeiro lugar,  $\Sigma$  é um alfabeto, cujos elementos são os símbolos terminais. Em segundo lugar,  $N$  é um conjunto de *não terminais* ou *categorias sintáticas*. (Partimos do princípio que  $\Sigma$  e  $N$  são disjuntos e que nenhum deles contém metacaracteres). Terceiro,  $S \in N$  é o *símbolo de início*. Quarto,  $P$  é um conjunto de *regras de produção* ou *regras de reescrita*.

Consideraremos o símbolo de início como sendo a cabeça da primeira regra.

<sup>6</sup> Leia ‘ $\Rightarrow$ ’ em voz alta como “deriva” ou “expande para”.

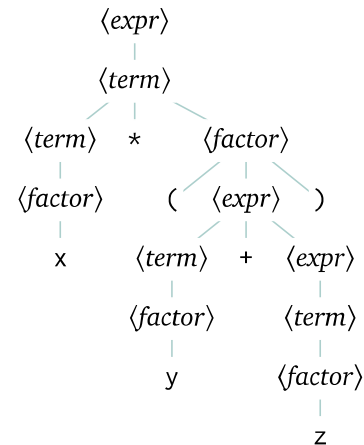
<sup>7</sup> Os termos “terminal” e “não terminal” vêm de onde os componentes se encontram nesta árvore.

### Exemplo 11.2.2

Esta gramática livre de contexto descreve expressões algébricas que envolvem apenas adição, multiplicação, e parênteses.

$$\begin{aligned}\langle expr \rangle &\rightarrow \langle term \rangle + \langle expr \rangle \mid \langle term \rangle \\ \langle term \rangle &\rightarrow \langle term \rangle * \langle factor \rangle \mid \langle factor \rangle \\ \langle factor \rangle &\rightarrow ( \langle expr \rangle ) \mid a \mid b \mid \dots \mid z\end{aligned}$$

Aqui está uma derivação da cadeia  $x*(y+z)$ .

$$\begin{aligned}\langle expr \rangle &\Rightarrow \langle term \rangle \\ &\Rightarrow \langle term \rangle * \langle factor \rangle \\ &\Rightarrow \langle factor \rangle * \langle factor \rangle \\ &\Rightarrow x * \langle factor \rangle \\ &\Rightarrow x * ( \langle expr \rangle ) \\ &\Rightarrow x * ( \langle term \rangle + \langle expr \rangle ) \\ &\Rightarrow x * ( \langle term \rangle + \langle term \rangle ) \\ &\Rightarrow x * ( \langle factor \rangle + \langle term \rangle ) \\ &\Rightarrow x * ( \langle factor \rangle + \langle factor \rangle ) \\ &\Rightarrow x * ( y + ( ) ) \\ &\Rightarrow x * ( y + z )\end{aligned}$$


Nesse exemplo, as regras para  $\langle expr \rangle$  e  $\langle termo \rangle$  são recursivas. Mas não ficamos presos a uma regressão infinita porque a questão não é se poderíamos continuar perversamente a expandir  $\langle expr \rangle$  para sempre; a questão é se, dada uma sequência como  $x*(y+z)$ , se pode encontrar uma derivação que termine.

No exemplo anterior, os não terminais como  $\langle expr \rangle$  ou  $\langle termo \rangle$  descrevem o papel desses componentes na linguagem, tal como os fragmentos de gramática inglesa  $\langle noun phrase \rangle$  e  $\langle article \rangle$ . Mas nos exemplos a seguir utilizamos frequentemente pequenas gramáticas cujos terminais e não terminais não têm nenhum significado particular. Para estes casos, passamos frequentemente da notação verbosa como ' $\langle sentence \rangle \rightarrow \langle noun phrase \rangle \langle verb phrase \rangle$ ' para a escrita de letras isoladas, com não terminais em maiúsculas e terminais em minúsculas.

### Exemplo 11.2.3

Esta gramática de duas regras tem um não terminal, S.

$$S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$$

Aqui está uma derivação da cadeia  $a^2b^2$ .

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aa\varepsilon bb \Rightarrow aabb$$

Do mesmo modo,  $S = aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaSbbb \Rightarrow aa\varepsilon bbb \Rightarrow aaabbb$  é uma derivação de  $a^3b^3$ . Para esta gramática, as cadeias deriváveis têm a forma  $a^n b^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

A seguir damos uma descrição completa de como as regras de produção regem as derivações. Cada regra numa gramática livre de contexto tem a forma 'cabeça  $\rightarrow$  corpo' onde a cabeça é constituída por um único não terminal. O corpo é uma sequência de terminais e não-terminais. Cada etapa de uma derivação tem a forma abaixo, onde  $\tau_0$  e  $\tau_1$  são sequências de terminais e não-terminais.

$$\tau_0 \wedge \text{cabeça} \wedge \tau_1 \Rightarrow \tau_0 \wedge \text{corpo} \wedge \tau_1$$

Ou seja, se houver uma correspondência para a cabeça da regra, então podemos substituí-la pelo corpo.

Sempre que  $\sigma_0, \sigma_1$  são sequências de terminais e não terminais, se estiverem relacionados por uma sequência de etapas de derivação, então podemos escrever  $\sigma_0 \Rightarrow^* \sigma_1$ . Onde  $\sigma_0 = S$  é o símbolo de início, se houver uma derivação  $\sigma_0 \Rightarrow^* \sigma_1$  que termina com uma sequência de terminais  $\sigma_1 \in \Sigma^*$  então dizemos que  $\sigma_1$  tem uma derivação a partir da gramática.<sup>8</sup>

Esta descrição é similar aquela em que detalhamos, no capítulo anterior, como as instruções de uma máquina Turing determinam a evolução da sequência de configurações, o que corresponde a uma computação. Ou seja, as regras de produção são como um programa, dirigindo uma derivação. No entanto, uma diferença daquela descrição é que ali as máquinas Turing são determinísticas, de modo que a partir de uma determinada cadeia de entrada há uma determinada sequência de configurações. Aqui, a partir de um dado símbolo de início, uma derivação pode ramificar-se para ir para muitas cadeias finais diferentes.

### Definição.

A **linguagem derivada de uma gramática** é o conjunto de cadeias de terminais com derivações que começam com o símbolo de início.

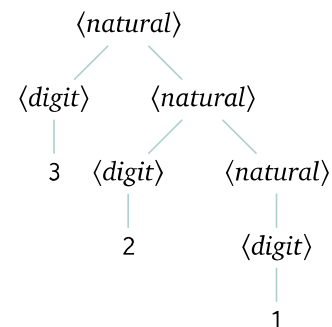
### Exemplo 11.2.4

Esta linguagem gramatical é o conjunto de representações de números naturais.

$$\begin{aligned} \langle \text{natural} \rangle &\rightarrow \langle \text{digit} \rangle \mid \langle \text{digit} \rangle \langle \text{natural} \rangle \\ \langle \text{digit} \rangle &\rightarrow 0 \mid \dots \mid 9 \end{aligned}$$

Esta é uma derivação para a cadeia 321, junto a sua árvore de análise sintática.

$$\begin{aligned} \langle \text{natural} \rangle &\Rightarrow \langle \text{digit} \rangle \langle \text{natural} \rangle \\ &\Rightarrow 3 \langle \text{natural} \rangle \\ &\Rightarrow 3 \langle \text{digit} \rangle \langle \text{natural} \rangle \\ &\Rightarrow 32 \langle \text{natural} \rangle \\ &\Rightarrow 32 \langle \text{digit} \rangle \\ &\Rightarrow 321 \end{aligned}$$



<sup>8</sup> Esta definição de regras, gramáticas, e derivações é suficiente para nós, mas não é a mais geral. Uma definição mais geral permite cabeças no formato  $\sigma_0 X \sigma_1$ , onde  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  são cadeias de terminais. (Os  $\sigma_i$ 's pode ser vazios.) Por exemplo, considere esta gramática: (i)  $S \rightarrow aBSc \mid abc$ , (ii)  $Ba \rightarrow aB$ , (iii)  $Bb \rightarrow bb$ . A regra (ii) diz que se você vir uma cadeia com algo seguido por  $a$ , então pode substituir essa cadeia por  $a$  seguido por essa coisa. As gramáticas com cabeças na forma  $\sigma_0 X \sigma_1$  são sensíveis ao contexto porque só podemos substituir o  $X$  no contexto de  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ . Estas gramáticas descrevem mais linguagens do que as que estamos utilizando livres de contexto. Mas a nossa definição satisfaz as nossas necessidades atuais e corresponde à classe de gramáticas que você mais verá na prática.



### Exemplo 11.2.5

A linguagem desta gramática é o conjunto de cadeias que representam números naturais em unário.

$$\langle \text{natural} \rangle \rightarrow \varepsilon \mid 1\langle \text{natural} \rangle$$

### Exemplo 11.2.6

Qualquer linguagem finita é derivada de uma gramática. Esta fornece a linguagem de todas as cadeias de bits de comprimento 2, utilizando a abordagem de força bruta de simplesmente listar todas as cadeias que são membros.

$$S \rightarrow 00 \mid 01 \mid 10 \mid 11$$

Já a gramática abaixo fornece as cadeias de bits de comprimento 3, utilizando os não terminais para manter a contagem.

$$A \rightarrow 0B \mid 1B$$

$$B \rightarrow 0C \mid 1C$$

$$C \rightarrow 0 \mid 1$$

### Exemplo 11.2.7

Para esta gramática

$$S \rightarrow aSb \mid T \mid U$$

$$T \rightarrow aS \mid a$$

$$U \rightarrow Sb \mid b$$

uma alternativa é substituir T e U pelas suas expansões para obter isto.

$$S \rightarrow aSb \mid aS \mid a \mid Sb \mid b$$

Ela gera a linguagem  $\mathcal{L} = \{a^i b^j \in \{a, b\}^* \mid i \neq 0 \text{ ou } j \neq 0\}$ .

O exemplo anterior é o primeiro em que a linguagem gerada não é clara, por isso faremos uma verificação formal. Mostraremos contenção mútua, que a linguagem gerada é um subconjunto de  $\mathcal{L}$  e que é também um superconjunto. A regra que elimina T e U mostra que qualquer etapa de derivação  $\tau_0 \text{ cabeça } \tau_1 \Rightarrow \tau_0 \text{ corpo } \tau_1$  apenas adiciona a's à esquerda e b's à direita, portanto toda cadeia na linguagem tem a forma  $a^i b^j$ . Essa mesma regra mostra que em qualquer derivação terminada S deve eventualmente ser substituída ou por a ou b. Juntos, estes dois dão que a linguagem gerada é um subconjunto de  $\mathcal{L}$ .

Para contenção no sentido contrário, provaremos que cada  $\sigma \in \mathcal{L}$  tem uma derivação. Utilizaremos indução no comprimento  $|\sigma|$ . Pela definição de  $\mathcal{L}$ , o caso base é  $|\sigma| = 1$ . Neste caso, ou  $\sigma = a$  ou  $\sigma = b$ , cada um dos quais tem obviamente uma derivação.

Para o passo indutivo, suponha que cada cadeia de  $\mathcal{L}$  de comprimento  $k = 1, \dots, k = n$  tem uma derivação para  $n \geq 1$  e seja  $n + 1$  o comprimento de  $\sigma$ . Escreva  $\sigma = a^i b^j$ . Há

três casos: ou  $i > 1$ , ou  $j > 1$ , ou  $i = j = 1$ . Se  $i > 1$  então  $\hat{\sigma} = a^{i-1}b^j$  é uma cadeia de comprimento  $n$ , então pela hipótese indutiva tem uma derivação  $S \Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{\sigma}$ . Prefixando essa derivação com um passo  $S \Rightarrow aS$  colocará um  $a$  adicional à esquerda. O caso  $j > 1$  funciona da mesma maneira, e  $\sigma = a^1b^1$  é fácil.

### Exemplo 11.2.8

O fato das derivações poderem ir por mais do que um caminho leva a uma questão importante com as gramáticas, que elas podem ser ambíguas. Considere este fragmento de uma gramática para declarações `if` numa linguagem tipo C

```
<stmt> → if <bool> <stmt>
<stmt> → if <bool> <stmt> else <stmt>
```

e esta cadeia de código.

```
if enrolled(s) if studied(s) grade='P' else grade='F'
```

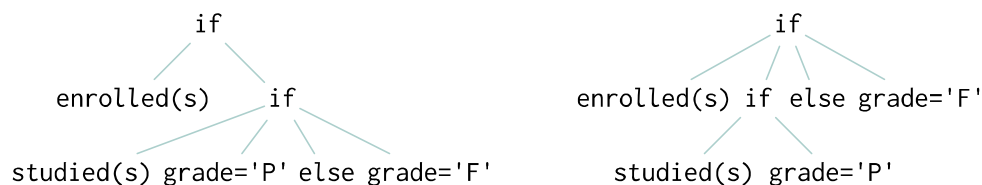
Aqui estão as duas primeiras linhas de uma derivação:

```
<stmt> ⇒ if <bool> <stmt>
      ⇒ if <bool> if <bool> <stmt> else <stmt>
```

e aqui estão as duas primeiras de uma outra:

```
<stmt> ⇒ if <bool> <stmt> else <stmt>
      ⇒ if <bool> if <bool> <stmt> else <stmt>
```

Ou seja, não podemos dizer se o `else` na linha de código está associado ao primeiro `if` ou ao segundo. As árvores de análise sintática resultantes para a linha de código completa dramatizam a diferença



assim como estas cópias da cadeia de código identada para mostrar a associação.

<pre>if enrolled(s)   if studied(s)     grade='P'   else     grade='F'</pre>	<pre>if enrolled(s)   if studied(s)     grade='P'   else     grade='F'</pre>
------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------

Obviamente, esses programas se comportam de forma diferente. Isto é conhecido como um **else pendente**.

### Exemplo 11.2.9

Esta gramática para expressões elementares de álgebra

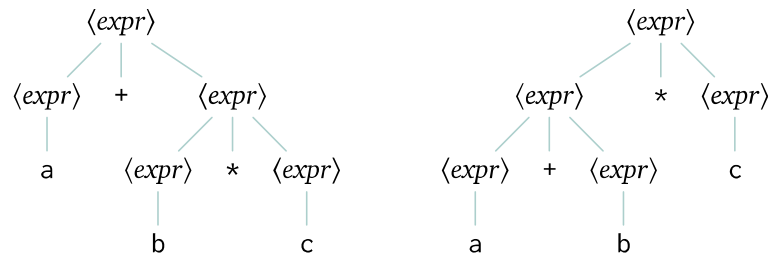
$$\begin{aligned}\langle expr \rangle &\rightarrow \langle expr \rangle + \langle expr \rangle \\ &| \langle expr \rangle * \langle expr \rangle \\ &| ( \langle expr \rangle ) | a | b | \dots | z\end{aligned}$$

é ambígua porque  $a+b*c$  tem duas derivações mais à esquerda.

$$\begin{aligned}\langle expr \rangle &\Rightarrow \langle expr \rangle + \langle expr \rangle \Rightarrow a + \langle expr \rangle \\ &\Rightarrow a + \langle expr \rangle * \langle expr \rangle \Rightarrow a + b * \langle expr \rangle \Rightarrow a + b * c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle expr \rangle &\Rightarrow \langle expr \rangle * \langle expr \rangle \Rightarrow \langle expr \rangle + \langle expr \rangle * \langle expr \rangle \\ &\Rightarrow a + \langle expr \rangle * \langle expr \rangle \Rightarrow a + b * \langle expr \rangle \Rightarrow a + b * c\end{aligned}$$

As duas correspondem a árvores de análise sintática diferentes:



Mais uma vez, a questão é que temos dois comportamentos diferentes. Por exemplo, substitua  $a$  por 1,  $b$  por 2, e  $c$  por 3. A árvore esquerda fornece  $1 + (2 \cdot 3) = 7$  enquanto que a árvore da direita fornece  $(1 + 2) \cdot 3 = 9$ .

Em contraste, esta gramática para expressões elementares de álgebra é isenta de qualquer ambiguidade.

$$\begin{aligned}\langle expr \rangle &\rightarrow \langle expr \rangle + \langle term \rangle \\ &| \langle term \rangle \\ \langle term \rangle &\rightarrow \langle term \rangle * \langle factor \rangle \\ &| \langle factor \rangle \\ \langle factor \rangle &\rightarrow ( \langle expr \rangle ) \\ &| a | b | \dots | z\end{aligned}$$

A escolha de gramáticas que não sejam ambíguas é importante na prática.

### 11.3. BNF

FIXME TODO. Será acrescentado em breve.

### 11.4. Créditos

Todas as seções, foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [1], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (CC BY-SA 4.0).

### 11.5. Referências

1. Hefferon, Jim. *Theory of Computation: Making Connections*. Disponível em <http://hefferon.net/computation/>

## 11.6. Licença

É concedida permissão para copiar, distribuir, transmitir e adaptar esta obra sob a Licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0), disponível em <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> .