Módulo II

Mais sobre Relações (e Funções)

No módulo anterior, nós introduzimos relações e funções. Relações e funções são de extrema importância para a Computação. Como já mencionamos, ao desenvolver um programa de computador, você utilizará muitas funções. Ao armazenar os dados de seu programa, você poderá usar um banco de dados **relacional**. Nesse módulo nós desenvolveremos mais alguns tópicos importantes relativos a essas estruturas.

Propriedades de endorrelações

Como vimos, muitas das relações que nos interessam são endorrelações (relações entre um conjunto e ele próprio). Algumas endorrelações têm uma ou mais das seguintes propriedades simples, que são úteis de serem mencionadas. Ao longo desta seção, suponha que R é a relação em questão, e que ela é definida do conjunto A para o conjunto A.

- **Reflexividade.** Uma relação R é *reflexiva* se $x\ R\ x$ para todo $x \in A$. Outros pares ordenados podem também estar na relação, claro, mas se dissermos que ela é reflexiva estamos garantindo que cada elemento está lá dentro consigo mesmo. “`hasSeen`” (mencionada no Módulo I) é quase certamente uma relação reflexiva, presumindo que os espelhos estão relativamente bem difundidos no mundo. Já uma relação “`thinksIsBeautiful`”, cuja intenção é que se $(x, y) \in$ `thinksIsBeautiful`, então na vida real x considera que y é bonita, não é reflexiva: algumas pessoas consideram a si próprias bonitas, e outras não.
- **Simetria.** Uma relação é *simétrica* se $x\ R\ y$ sempre que $y\ R\ x$ e vice-versa. Isto *não significa* que (x, y) está na relação para todos os x e y – apenas que se (x, y) estiver na relação, é garantido que (y, x) também esteja na relação. Um exemplo seria “`hasShakenHandsWith`”, cuja intenção é que se $(x, y) \in$ `hasShakenHandsWith`, então na vida real x apertou a mão de y. Se apertei a mão contigo, então apertaste a mão comigo, ponto final. Não faz sentido de outra forma.
- **Antissimetria.** Uma relação é *antissimétrica* se sempre que $x\ R\ y$ com $x \neq y$, então necessariamente $y \not{R}\ x$. Dito de outra forma, se (x, y) estiver na relação, tudo bem, mas então (y, x) não pode estar (a menos que $x = y$). Um exemplo seria “`isTallerThan`”, cuja intenção é que se $(x, y) \in$ `isTallerThan`, então na vida real x é mais alto do que y. Se eu for mais alto que tu, então não podes ser mais alto que eu. Poderíamos de fato ser da mesma altura, caso em que nem o par (tu, eu) nem (eu, tu) estariam na relação, mas em qualquer caso os dois não podem coexistir. Note que não faria sentido para a relação `isTallerThan` ser reflexiva (ninguém é mais alto do que si próprio), mas no caso geral nada impede que uma relação seja ao mesmo tempo reflexiva e antissimétrica.

Note cuidadosamente que *antissimétrica* é muito diferente de *assimétrica*. Uma relação assimétrica é simplesmente uma que não é simétrica: noutras palavras, existe algum (x, y) sem um (y, x) correspondente. Uma relação antissimétrica, por outro lado, é uma relação em que é garantido que não há correspondência (y, x) para qualquer (x, y) em que $x \neq y$.

Se tiver dificuldade em visualizar isto, eis outra forma de pensar: note que a maioria das relações não são nem simétricas nem antissimétricas. É uma espécie de coincidência que uma relação seja simétrica: isso significaria que para cada (x, y) que ela contém, ela também contém um (y, x). (Quais são as chances disto ocorrer?) Do mesmo modo, é uma espécie de coincidência que uma relação seja antissimétrica: isso significaria que para cada (x, y) que contém, com $x \neq y$, não contém um (y, x). (Mais uma vez, quais são as chances?) A sua relação Fulana média vai conter alguns pares (x, y) que têm pares correspondentes (y, x), e alguns que não têm pares correspondentes. Tais relações (a grande maioria) são simplesmente assimétricas: nem simétricas, nem antissimétricas.

Surpreendentemente, é de fato possível que uma relação seja tanto simétrica como antissimétrica! (mas não ao mesmo tempo simétrica e assimétrica.) Por exemplo, a relação vazia (sem pares ordenados) é simultaneamente simétrica e antissimétrica. É simétrica porque para cada par ordenado (x, y) nela contido (dos quais há zero), há também o correspondente (y, x)[1]. E de forma semelhante, para cada par ordenado (x, y) com $x \neq y$, o correspondente (y, x) não está presente. Outro exemplo é uma relação com apenas "duplicatas" – digamos, { (3,3), (7,7), (Fred, Fred) }. Isto também é simultaneamente simétrico e antissimétrico (verifique!).

- **Transitividade.** Uma relação é transitiva se sempre que x R y e y R z, então é garantido que x R z. A relação "`isTallerThan`" que definimos é transitiva: se me disserem que Zé é mais alto que Joana, e Joana é mais alta que Sueli, então eu sei que Zé deve ser mais alto que Sueli, sem que precisem sequer de me dizer isso. É simplesmente assim que "mais alto do que" funciona. Um exemplo de uma relação não-transitiva seria "`hasBeaten`" com as equipes da Lampions League (Copa do Nordeste) cuja intenção é que se $(x, y) \in$ `hasBeaten`, então na vida real x venceu y. Só porque o Sport venceu o Náutico este ano, e o Náutico venceu o Fortaleza, isso não significa que o Sport tenha necessariamente vencido o Fortaleza. O Fortaleza pode até mesmo ter derrotado a equipe-que-ganhou-da-equipe-que-ganhou-dele (tais coisas acontecem), ou, enfim, as duas equipes podem nem sequer ter jogado uma contra a outra este ano.

Todos os exemplos acima foram definidos em intenção. Apenas para praticar, vejamos também algumas relações definidas em extensão. Utilizando o nosso familiar trio de amigos como A, consideremos a seguinte relação:

1 Espere, como posso dizer isto? Como pode haver par ordenado "correspondente" numa relação que não tem pares ordenados?! A resposta tem a ver com a primeira cláusula: para cada par ordenado (x, y) nela contido. Não há nenhum destes, portanto, não são necessários (y, x). A condição é trivialmente satisfeita. Isto é comum em matemática: dizemos que A requer B, mas isto significa que se A não for verdade, então B não é obrigatório.

(Helena, Ronaldo)
(Ronaldo, Heitor)
(Ronaldo, Ronaldo)
(Heitor, Ronaldo)
(Ronaldo, Helena)
(Heitor, Heitor)

Considere: esta relação é reflexiva? Não. Ela tem (Ronaldo, Ronaldo) e (Heitor, Heitor), mas está faltando (Helena, Helena), por isso não é reflexiva. É simétrica? Sim. Olhe cuidadosamente para os pares ordenados. Temos um (Helena, Ronaldo), mas também um par correspondente (Ronaldo, Helena). Temos um (Heitor, Ronaldo), mas também um par correspondente (Ronaldo, Heitor). Assim, sempre que temos um (x, y) temos também a correspondência (y, x), que é a definição de simetria. É antissimétrica? Não, porque (entre outras coisas) tanto (Helena, Ronaldo) como (Ronaldo, Helena) estão presentes. Finalmente, é transitiva? Não. Nós temos (Helena, Ronaldo) e (Ronaldo, Heitor), o que significa que se fosse transitiva também teríamos de ter (Helena, Heitor) ali, mas não temos. Portanto, não é transitiva. Lembre-se: para satisfazer qualquer uma destas propriedades, elas têm de ser plenamente respeitadas. “Quase” não serve.

Vamos tentar outro exemplo:

(Ronaldo, Helena)
(Ronaldo, Ronaldo)
(Helena, Helena)
(Heitor, Heitor)
(Helena, Heitor)
(Heitor, Helena)

Esta é reflexiva? Sim. Temos os três amigos aparecendo com eles próprios. É simétrica? Não, já que (Ronaldo, Helena) não tem correspondente. É antissimétrica? Não, uma vez que (Helena, Heitor) tem um correspondente (Heitor, Helena). É transitiva? Não, uma vez que a presença de (Ronaldo, Helena) e (Helena, Heitor) implica a necessidade de (Ronaldo, Heitor), o que não aparece, portanto sem chances.

Ordens Parciais e Posets

Um par de outros termos divertidos: uma endorelação que é (1) *reflexiva*, (2) *antissimétrica*, e (3) *transitiva* é chamada de **ordem parcial**. E um *conjunto acompanhado de uma ordem parcial* é chamado de **conjunto parcialmente ordenado**, ou “**poset**” para abreviar. O termo “ordem parcial” faz sentido uma vez que você pense através de um exemplo.

Você deve ter notado que quando os cães se encontram (especialmente os cães machos), muitas vezes fazem círculos e fazem um reconhecimento mútuo e tentam estabelecer o domínio como o chamado “cão alfa”. Esta é uma ordem de hierarquia que muitas espécies diferentes estabelecem. Agora suponhamos que tenho o conjunto D de todos os cães, e uma relação “`isAtLeastAsToughAs`” (é, pelo menos, tão durão quanto) entre eles. A relação começa com cada par reflexivo: (Rex, Rex), (Totó, Totó), etc. Isto porque obviamente cada cão é, pelo menos, tão durão quanto ele próprio.

Agora, cada vez que dois cães x e y se encontram, estabelecem dominância através de contato visual ou intimidação física, e depois um dos seguintes pares ordenados é adicionado à relação: ou (x, y) ou (y, x), mas nunca ambos.

Considero que neste exemplo de brinquedo, "`isAtLeastAsToughAs`" é uma ordem parcial, e D junto com `isAtLeastAsToughAs` formam um poset. Raciocino da seguinte forma. É reflexiva, uma vez que começamos por adicionar cada cão consigo mesmo. É antissimétrica, já que nunca adicionamos ambos (x, y) e (y, x) à relação. E é transitiva, porque se Rex é mais durão que Totó, e Totó é mais durão que Bobby, isto significa que se Rex e Bobby alguma vez se encontrassem, Rex rapidamente estabeleceria a dominância. (Não sou zoólogo, e não tenho se esta última propriedade se aplica verdadeiramente com cães reais. Mas vamos fingir que se aplique).

É chamada de "ordem parcial" porque estabelece uma hierarquia parcial, mas incompleta, entre os cães. Se perguntarmos: "o cão X é mais durão do que o cão Y?", a resposta nunca é ambígua. Nunca vamos dizer, "bem, o cão X era superior ao cão A, que era superior ao cão Y … mas depois, outra vez, o cão Y era superior ao cão B, que era superior ao cão X, por isso não há como dizer qual dos cães X e Y é verdadeiramente mais durão". Não. Uma ordem parcial, devido à sua transitividade e antissimetria, garante que nunca temos tal conflito irreconciliável.

No entanto, poderíamos ter uma falta de informação. Suponhamos que Rex nunca conheceu Cangaceiro, e ninguém que Rex conheceu jamais conheceu alguém que Cangaceiro tenha conhecido. Não há uma cadeia entre eles. No que nos diz respeito, estão em dois universos separados, e não teríamos forma de saber qual é o mais durão, dizemos que Rex e Cangaceiro são **incomparáveis**. Mas não tem de ser assim tão extremo: Suponhamos que Rex estabeleceu domínio sobre Bobby, e Cangaceiro também estabeleceu domínio sobre Bobby, mas esses são os únicos pares ordenados na relação. Mais uma vez, não há maneira de saber se Rex ou Cangaceiro é o cão mais durão. Ou teriam de encontrar um adversário comum que só um deles consegue vencer, ou então encontrar-se para um duelo.

Assim, uma ordem parcial dá-nos alguma forma de estrutura – a relação estabelece uma direcionalidade, e é garantido que não nos envolvemos em contradições – mas não ordena completamente todos os elementos. Se o fizer, chama-se uma **ordem total**. Numa ordem total, todos os elementos são **comparáveis**.

Relações de Equivalência

Uma **relação de equivalência** é uma endorrelação que é *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*. A igualdade é o paradigma das relações de equivalência, mas podemos citar outros exemplos, como:

- **Congruência módulo m**. Dizemos que $x \bmod m$ (lê-se "x módulo m") é o resto da divisão inteira[2] de x por m. Por exemplo "5 mod 2 = 1", pois o resto da divisão de 5 por 2 é 1. A relação R definida como $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x \bmod m = y \bmod m\}$, para um m inteiro positivo dado, é uma relação de equivalência. Este fato é frequentemente escrito como $x \equiv_m y$ (lê-se, x é congruente a y mó-

2 Falaremos mais sobre o resto da divisão inteira posteriormente.

dulo m. Outra notação equivalente é $x \equiv y \pmod{m}$). Por exemplo $5 \equiv_2 9$, pois o resto da divisão de 5 por 2 é 1 e o resto da divisão de 9 por 2 também é 1.

- **Igualdade após a aplicação de uma função**. Seja $F : A \to B$ uma função qualquer, e seja R uma endorrelação em A definida como $\{(x, y) : \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(y)\}$. R é uma relação de equivalência. Normalmente usamos a notação $x \sim_{\mathrm{F}} y$. Note que $\equiv_m$ é um caso especial disto.
- **Membresia em um mesmo conjunto de uma partição**. Seja X_1, X_2 , ..., X_n uma partição de um conjunto X. Seja R uma endorrelação em X definida como $\{(x, y) : x \in X_i$ e $y \in X_i$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$. R é uma relação de equivalência.
- **Produto de relações de equivalência**. Seja R_A uma relação de equivalência em A e seja R_B uma endorrelação em B, então $R_{A \times B}$ definida por (a_1, b_1) $R_{A \times B}$ (a_2, b_2) se, e somente se, a_1 R_A a_2 e b_1 R_B b_2. Neste caso, $R_{A \times B}$ é uma relação de equivalência.

Obviamente, também poderíamos construir exemplos em extensão. Por exemplo, considerando nosso grupo de amigos {Helena, Heitor, Ronaldo} a relação:

(Helena, Helena)
(Heitor, Heitor)
(Ronaldo, Ronaldo)

é uma relação de equivalência. Também teríamos uma relação de equivalência com os pares ordenados:

(Helena, Helena)
(Heitor, Heitor)
(Ronaldo, Ronaldo)
(Helena, Ronaldo)
(Ronaldo, Helena)

Confirme que este é o caso, verificando porque essas duas últimas relações são reflexivas, simétricas e transitivas.

Qualquer relação de equivalência $\sim$ num conjunto A dá origem a um conjunto de **classes de equivalência**, em que a classe de equivalência de um elemento a é o conjunto de todos os elementos b tais que $a \sim b$. Devido à transitividade, as classes de equivalência formam uma partição do conjunto A, geralmente escrito $A / \sim$ (pronuncia-se “o **conjunto quociente** de A por $\sim$”, “A barra $\sim$”, ou, por vezes, “A módulo $\sim$”). Diz-se que um membro de uma determinada classe de equivalência é um **representante** dessa classe. Por exemplo, um conjunto de representantes das classes de equivalência de congruência mod m é $\{0, 1, 2, 3, ..., m - 1\}$.

As relações de equivalência são a forma como os matemáticos dizem “não me importo”. Se você não se importa com que inteiros você tem, exceto pelo seu resto quando dividido por m, então você define que dois inteiros que não diferem em relação ao que você se importa como equivalentes e trabalha em Z / ≡m. Isto também pode ser usado informalmente. Por exemplo, quando criança você poderia se negar a comer espinafre, brócolis e couve, porque, para você, estariam todos na mesma classe de equivalência: mato. E todo mato tem gosto ruim.

Fechamento de Relações

Em geral, o **fechamento** (ou **fecho**) de algum objeto matemático em relação a uma determinada propriedade é o menor objeto maior que possui tal propriedade. Normalmente “menor” e “maior” são considerados em termos de subconjunto e superconjunto, por isso estamos realmente olhando para a interseção de todos os objetos maiores com a propriedade, ou equivalentemente estamos à procura de um objeto que tem a propriedade e que é um subconjunto de todos os objetos maiores com a propriedade.

Esta definição bastante abstrata pode ser tornada mais explícita para certos tipos de fechamentos de relações. O **fecho reflexivo** de uma endorrelação R é a menor super-relação de R que é reflexiva; obtém-se adicionando (x, x) a R para todos os x no domínio de R, o que podemos escrever como $R^0 \cup R$, onde R^0 é simplesmente a relação de identidade no domínio de R. O **fecho simétrico** é a menor super-relação simétrica de R; obtém-se adicionando (y, x) a R sempre que (x, y) está em R. O **fecho transitivo** é obtido adicionando (x, z) a R sempre que (x, y) e (y, z) estão ambos em R para algum y – e continuando a fazê-lo até não restarem novos pares deste tipo[3]. Também se pode tomar o fecho em relação a múltiplas propriedades, tais como o fecho reflexivo-simétrico-transitivo de R, que será a menor relação de equivalência tal que quaisquer elementos que estejam relacionados por R são equivalentes.

Os fechamentos proporcionam uma forma de transformar coisas que ainda não são relações de equivalência ou ordens parciais em relações de equivalência e ordens parciais. Para relações de equivalência isto é fácil: pega-se o fecho reflexivo-simétrico-transitivo, e obtém-se uma relação transitiva, simétrica e reflexiva. Para ordens parciais é mais complicado: a antissimetria não é uma propriedade de fechamento (pode ser impossível tornar assimétrico um R não-assimétrico adicionando mais pares). Dada uma relação R em algum conjunto S, o melhor que podemos fazer é tomar o fecho transitivo-reflexivo R^* e esperar que ele seja antissimétrico. Se for, estamos terminados. Se não for, não será possível encontrar uma relação de ordem parcial da qual R seja subconjunto.

Exemplos

- Seja R a endorrelação no conjunto das partes de $\mathbb{N}$ definida como $x\ R\ y$ se existir algum $n \notin x$ tal que $y = x \cup \{n\}$. O fecho transitivo R_1 de R é a relação de subconjunto próprio $\subset$, onde $x \subset y$ se $x \subseteq y$ mas $x \neq y$. O fecho reflexivo-transitivo R_2 de R é simplesmente a relação usual de subconjunto $\subseteq$. O fecho reflexivo-simétrico-transitivo R_3 de R é a relação completa: $x\ R_3\ y$ para todo $x, y \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$. Neste caso, o fecho reflexivo-simétrico-transitivo não é muito interessante.

- Seja R a endorrelação em $\mathbb{N}$ definida por $x\ R\ y$ se $x = 2y$. Então o fecho reflexivo-transitivo R_1 da relação é dado por $x\ R_1\ y$ se $x = 2^n y$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e o fecho reflexivo-simétrico-transitivo é a relação dada por $x \sim y$ se $x = 2^n y$ ou $y = 2^n x$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Note que nem todo $x \sim y$, por exemplo $3 \nsim 5$, porque não há como transformar 3 em 5 multiplicando ou dividindo por 2.

3 Note que pode ser necessário adicionar um número infinito de pares se o domínio de R não for finito.

- Voltemos a nossa relação

  (Ronaldo, Helena)
  (Ronaldo, Ronaldo)
  (Helena, Helena)
  (Heitor, Heitor)
  (Helena, Heitor)
  (Heitor, Helena) .

  O fecho reflexivo desta relação é ela própria, uma vez que ela já é reflexiva. Para obtermos o fecho simétrico, ainda falta acrescentarmos o par (Helena, Ronaldo), uma vez que temos (Ronaldo, Helena).

  (Ronaldo, Helena)
  (Ronaldo, Ronaldo)
  (Helena, Helena)
  (Heitor, Heitor)
  (Helena, Heitor)
  (Heitor, Helena)
  (Helena, Ronaldo)

  Nossa relação não é transitiva, precisamos acrescentar o par (Ronaldo, Heitor), pois temos (Ronaldo, Helena) e (Helena, Heitor):

  (Ronaldo, Helena)
  (Ronaldo, Ronaldo)
  (Helena, Helena)
  (Heitor, Heitor)
  (Helena, Heitor)
  (Heitor, Helena)
  (Helena, Ronaldo)
  (Ronaldo, Heitor)

  Note que a adição de (Ronaldo, Heitor) exige agora a adição de um novo par, para obtermos a transitividade: o par (Heitor, Ronaldo). Isso ocorre porque temos (Heitor, Helena) e (Helena, Ronaldo). Finalmente adicionamos esse par:

  (Ronaldo, Helena)
  (Ronaldo, Ronaldo)
  (Helena, Helena)
  (Heitor, Heitor)
  (Helena, Heitor)
  (Heitor, Helena)
  (Helena, Ronaldo)
  (Ronaldo, Heitor)
  (Heitor, Ronaldo)

  Agora nossa relação é reflexiva, simétrica e transitiva. Na verdade, obtivemos todo o produto cartesiano do nosso conjunto de amigos com ele próprio. Note que o produto cartesiano inteiro é sempre reflexivo, simétrico e transitivo (reflita porquê), mas nem sempre o fecho reflexivo-simétrico-transitivo resulta no produto cartesiano inteiro, como vimos no exemplo anterior.

Propriedades de Funções

Assim como com as relações, existem certas propriedades simples que algumas (não todas) funções têm, e é útil raciocinar sobre elas. Uma função pode ser:

- **Injetiva** (ou Injetora). Uma função *injetiva* não é somente uma função, mas também quase uma espécie de "função ao contrário": ou seja, não só não mapeia nenhum x para dois y diferentes (o que é o caso de todas as funções), como também não mapeia dois x diferentes para o mesmo y. Em termos gráficos, passaria num "teste de linha horizontal" além do vertical. Note-se que isto não pode acontecer se o domínio for maior do que o codomínio (como com os amigos e drinques), uma vez que não há valores y suficientes para acomodar todos os valores x de forma única. Portanto, não há função injetiva entre os nossos amigos e seus drinques que possa ser encontrada, por mais que tentemos.

  Suponha que numa empresa, cada funcionário tenha seu próprio número de ramal telefônico. A função `phoneExtension` – com funcionários como domínio e números de quatro dígitos como codomínio – é um exemplo de uma função injetora. Um mapeamento desta função seria "`phoneExtension`(Sílvia) = 1317", indicando que Sílvia pode ser contactada no ramal 1317. Alguns dos ramais disponíveis podem não ser utilizados no momento, mas cada funcionário tem um (e apenas um) ramal, o que a torna uma função. Mas como não há dois funcionários com o mesmo ramal, trata-se também de uma função injetora.

- **Sobrejetiva** (ou Sobrejetora). Uma função *sobrejetiva* é aquela que atinge todos os elementos do seu codomínio: algum x de fato alcança cada y. Outra forma de dizer isto é: para uma função sobrejetora, a imagem da função é igual à totalidade do codomínio. Pode-se ver que isto é impossível se o domínio for menor do que o codomínio, uma vez que não haveria valores x suficientes para atingir todos os valores y (lembre-se de que, numa função, cada x alcança exatamente um y). Se acrescentássemos Margarita e Mojito ao nosso conjunto Y, eliminaríamos assim a possibilidade de quaisquer funções sobrejetivas de X para Y (a menos que também acrescentássemos pessoas, é claro).

  A função `worksIn` – com empregados como domínio e departamentos como codomínio – é um exemplo de uma função sobrejetiva. Um mapeamento desta função seria "`worksIn`(Cid) = Marketing", indicando que o Cid trabalha no departamento de Marketing. Cada empregado trabalha para um departamento, o que a torna uma função. Mas pelo menos um funcionário trabalha em cada departamento (ou seja, não há departamentos vazios sem pessoas neles), o que a torna sobrejetora.

- **Bijetiva** (ou Bijetora). Finalmente, uma função bijetiva é simplesmente uma função injetiva e sobrejetiva. Com uma função injetiva, cada y é mapeado por no máximo um x; com uma função sobrejetiva, cada y é mapeado por pelo menos um x; assim, com uma função bijetiva, cada y é mapeado por exatamente um x.

  Naturalmente, o domínio e o codomínio devem ter a mesma cardinalidade para que isto seja possível.

A função `employeeNumber` – com funcionários como domínio e números de matrícula dos funcionários como codomínio – é uma função bijetiva. Cada funcionário tem um número de matrícula, e cada número de matrícula se refere a exatamente um funcionário. Como corolário disto, há a mesma quantidade de funcionários do que de números de matrícula.

Toda bijeção f possui uma função inversa f^{-1}; esta função é definida como $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$. A propósito, enquanto que apenas funções bijetoras possuem inversa, no caso de relações, toda relação R possui uma relação inversa, definida como $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ (reflita sobre o porquê disso ocorrer!).

Finalmente, alguns exemplos definidos em termos de extensão. Com X = { Helena, Ronaldo, Heitor } e Y = { Caipirinha, Cuba Libre }, considere a função f_1:

$$f_1(\text{Helena}) = \text{Cuba Libre}$$
$$f_1(\text{Ronaldo}) = \text{Cuba Libre}$$
$$f_1(\text{Heitor}) = \text{Cuba Libre}$$

A f_1 é injetiva? Não, visto que mais do que uma pessoa (todas elas, na verdade) mapeia para Cuba Libre. É sobrejetiva? Não, uma vez que nenhuma pessoa mapeia para Caipirinha. É bijetiva? Não, ora, uma vez que para ser bijetiva tem que ser simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Agora para f_2, mude Ronaldo para mapear para Caipirinha em vez disso:

$$f_2(\text{Helena}) = \text{Cuba Libre}$$
$$f_2(\text{Ronaldo}) = \text{Caipirinha}$$
$$f_2(\text{Heitor}) = \text{Cuba Libre}$$

A f_2 é injetiva? Ainda não, uma vez que mais do que uma pessoa mapeia para Cuba Libre. (E claro que nenhuma função entre estes dois conjuntos pode ser injetiva, uma vez que não há nomes de drinques suficientes para cada pessoa ter o seu próprio diferente). Mas será sobrejetora? Sim, é agora sobrejetora, uma vez que cada drinque tem pelo menos uma pessoa mapeada para ele. (Ainda não é bijetiva, por razões óbvias).

Agora vamos adicionar Margarita e Mojito ao nosso conjunto de bebidas Y, de modo que agora tenha quatro elementos: { Caipirinha, Cuba Libre, Margarita, Mojito }. Consideremos a função f_3:

$$f_3(\text{Helena}) = \text{Margarita}$$
$$f_3(\text{Ronaldo}) = \text{Margarita}$$
$$f_3(\text{Heitor}) = \text{Cuba Libre}$$

A f_3 é injetiva? Não, uma vez que mais do que uma pessoa mapeia para Margarita. É sobrejetiva? Não, uma vez que nenhuma pessoa mapeia para Caipirinha ou Mojito. (E, claro, nenhuma função entre estes dois conjuntos pode ser sobrejetiva, uma vez que não há pessoas suficientes para cada bebida ter uma). E, claro, não é bijetiva.

Agora para f_4 , mude Ronaldo para mapear para Caipirinha em vez disso:

$$f_4\text{(Helena)} = \text{Margarita}$$
$$f_4\text{(Ronaldo)} = \text{Caipirinha}$$
$$f_4\text{(Heitor)} = \text{Cuba Libre}$$

Ainda não é sobrejetiva, claro, mas agora é injetiva, já que nenhuma bebida tem mais do que uma pessoa. (Ainda não é bijetiva, é claro).

Finalmente, vamos adicionar mais uma pessoa (Nélson) ao grupo para mais dois exemplos. Seja f_5:

$$f_5\text{(Helena)} = \text{Mojito}$$
$$f_5\text{(Ronaldo)} = \text{Caipirinha}$$
$$f_5\text{(Heitor)} = \text{Cuba Libre}$$
$$f_5\text{(Nélson)} = \text{Caipirinha}$$

A f_5 é injetiva? Não, visto que a Caipirinha tem duas pessoas mapeadas para ela. É sobrejetiva? Não, uma vez que Margarita não tem nenhuma. Derrotada em todos os aspectos. No entanto, uma pequena mudança e tudo se encaixa no lugar:

$$f_6\text{(Helena)} = \text{Mojito}$$
$$f_6\text{(Ronaldo)} = \text{Margarita}$$
$$f_6\text{(Heitor)} = \text{Cuba Libre}$$
$$f_6\text{(Nélson)} = \text{Caipirinha}$$

Esta última função é injetiva, sobrejetiva, bijetiva? Sim para as três propriedades! Cada pessoa recebe a sua própria bebida exclusiva, cada bebida tem a sua própria pessoa, e nenhuma bebida (ou pessoas) é deixada de fora. Que excitante. Esta é uma função perfeitamente bijetiva, também chamada bijeção. Mais uma vez, a única forma de obter uma bijeção é que o domínio e o codomínio tenham o mesmo tamanho (embora isso por si só não garanta uma bijeção; veja f_5, acima). Observe também que, se tiverem o mesmo tamanho, então a injetividade e a sobrejetividade andam de mãos dadas. Se violar uma, está obrigado a violar a outra. Mantenha uma, e é obrigado a manter a outra. Há uma elegância bonita, agradável e simétrica nesta ideia toda.

Exercícios

1.	Seja T o conjunto { Spock, Kirk, McCoy, Scotty, Uhura }? Seja O uma endorrelação em T, definida como: { (Kirk, Scotty), (Spock, Scotty), (Kirk, Spock), (Scotty, Spock) }. T é reflexiva?	Não, uma vez que não tem nenhum dos elementos de T que apareçam com eles próprios.
2.	T é simétrica?	Não, pois ela contém (Kirk, Scotty) mas não (Scotty, Kirk).
3.	T é antissimétrica?	Não, pois ela contém (Spock, Scotty) e também (Scotty, Spock).
4.	T é transitiva?	Sim, já que para cada (x, y) e (y, z) presente, o (x, z) correspondente está também presente. (O único exemplo que se encaixa aqui é x = Kirk, y = Spock, z = Scotty, e o par ordenado necessário

		está de fato presente).
5.	Seja H uma endorrelação em T, definida como: { (Kirk, Kirk), (Spock, Spock), (Uhura, Scotty), (Scotty, Uhura), (Spock, McCoy), (McCoy, Spock), (Scotty, Scotty), (Uhura, Uhura) }. H é reflexiva?	Não, pois está faltando o par (McCoy, McCoy)
6.	H é simétrica?	Sim, uma vez que para cada (x, y) que contém, o (y, x) correspondente também está presente.
7.	H é antissimétrica?	Não, pois ela contém (Uhura, Scotty) e também (Scotty, Uhura).
8.	H é transitiva?	Sim, pois não há quaisquer pares do tipo (x, y) e (y, z) presentes.
9.	Qual o fecho reflexivo de H?	{ (Kirk, Kirk), (Spock, Spock), (Uhura, Scotty), (Scotty, Uhura), (Spock, McCoy), (McCoy, Spock), (Scotty, Scotty), (Uhura, Uhura), (McCoy, McCoy) }
10.	E agora, H tornou-se uma relação de equivalência?	Sim, porque ela tornou-se reflexiva, simétrica e transitiva.
11.	Quem é T / H ?	T / H = { {Kirk}, {Spock, McCoy}, {Uhura, Scotty} }
12.	{Kirk, McCoy, Uhura} é um conjunto de representantes todas as partições de T / H ?	Sim.
13.	E {Kirk, Spock, McCoy}?	Não, {Uhura, Scotty} está sem representantes.
14.	Seja `outranks` uma endorrelação no conjunto de todos os membros da tripulação da Enterprise, onde (x, y) ∈ `outranks` se o personagem x tiver um posto mais alto na Frota Estelar do que y. A relação `outranks` é reflexiva?	Não, porque nenhum personagem tem um posto mais alto do que ele próprio.
15.	A relação `outranks` é simétrica?	Não, porque um personagem não pode ter um posto mais alto do que um tem um posto mais alto que ele.
16.	A relação `outranks` é antissimétrica?	Sim, pois se um personagem `outranks` um segundo personagem, este último não pode também `outranks` o primeiro.
17.	A relação `outranks` é transitiva?	Sim, pois se um personagem tem um posto mais alto que um segundo personagem e esse segundo personagem tem um posto mais alto que um terceiro, obviamente o primeiro também tem um posto mais alto do que o terceiro.
18.	A relação `outranks` é uma ordem par-	Não, mas quase. Ela satisfaz a antissime-

	cial?	tria e a transitividade, que são cruciais. A única coisa que ela não satisfaz é a reflexividade, uma vez que nenhum dos membros aparece consigo próprio. Se mudássemos esta relação para "`ranksAtLeastAsHighAs`", com (x, y) ∈ `ranksAtLeastAsHighAs` quando o personagem x tem um posto na Frota Estelar pelo menos tão alto quanto y, então poderíamos incluir estes pares "dobrados" e ter a nossa ordem parcial.
19.	Seja `sameShirtColor` uma endorrelação no conjunto de todos os membros da tripulação da Enterprise, onde (x, y) ∈ `sameShirtColor` se o personagem x veste normalmente a mesma cor de camisa que o personagem y. A relação `sameShirtColor` é reflexiva?	Sim, pois você não consegue evitar vestir a mesma cor de camisa que você está vestindo.
20.	A relação `sameShirtColor` é simétrica?	Sim, visto que se um membro da tripulação usa a mesma cor de camisa que outro, então esse segundo membro da tripulação também usa a mesma cor de camisa que o primeiro. Se Scotty e Uhura se vestem ambos de vermelho, então Uhura e Scotty se vestem ambos de vermelho, ora.
21.	A relação `sameShirtColor` é antissimétrica?	Não, por razões provavelmente óbvias.
22.	A relação `sameShirtColor` é transitiva?	Sim. Se Kirk e Sulu usarem a mesma cor (amarelo), e Sulu e Chekov usar a mesma cor (amarelo), então Kirk e Chekov certamente usarão a mesma cor (amarelo).
23.	No módulo anterior, nós definimos A como o conjunto { Caio, Júlia, Sandro } e S como o conjunto { basquete, vôlei }. Nós então definimos a função "`faveSport`" como { (Júlia, basquete), (Sandro, basquete), (Caio, basquete) }. A função `faveSport` é injetora?	Não, porque Júlia e Sandro (e Caio) mapeiam todos para o mesmo valor (basquete). Para que uma função seja injetiva, não pode haver dois elementos do domínio que mapeiem para o mesmo elemento do codomínio.
24.	É possível tornar a função `faveSport` injetora?	Não sem alterar os conjuntos subjacentes. Existem três atletas e dois esportes, por isso não podemos deixar de mapear vários atletas para o mesmo esporte.
25.	A função `faveSport` é sobrejetora?	Não, porque ninguém é mapeado para vôlei.
26.	É possível tornar a função `faveSport` sobrejetora?	Claro, por exemplo, mudando Sandro do basquete para o vôlei. Agora ambos os elementos do codomínio são "alcançá-

	veis" por algum elemento do domínio, logo, é sobrejetiva.
27. E agora, ela é bijetora?	Não, porque continua não sendo injetora.
28. `faveSport` possui uma função inversa?	Não, porque ela não é bijetora.
29. Como podemos alterar as coisas para que ela se torne bijetora?	Uma maneira é adicionar um terceiro esporte – digamos, o futebol – e mover Júlia ou Caio para o futebol. Se tivermos o mapeamento de Júlia para o futebol, o mapeamento de Sandro para o vôlei, e o mapeamento de Caio para o basquete, temos uma bijeção.
30. E agora, qual a função inversa de `faveSport`?	{ (futebol, Júlia), (vôlei, Sandro), (basquete, Caio) }

Créditos

Todas as seções, com exceção das seções "Relações de Equivalência" e "Fechamento de Relações" foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [2], que está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

As seções "Relações de Equivalência" e "Fechamento de Relações" foram adaptadas (traduzidas e modificadas) de [1], que também está disponível sob a licença Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International.

Referências

1. Aspnes, James. *Notes on Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.cs.yale.edu/homes/aspnes/classes/202/notes.pdf .
2. Davies, Stephen. *A Cool Brisk Walk Through Discrete Mathematics*. Disponível em http://www.allthemath.org/vol-i/ .

Licença