Lista 3

Problema 1

Considere o operador definido por:

$$\hat{A} = 2\,|\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| - i\,|\Phi_1\rangle\langle\Phi_2| + i\,|\Phi_2\rangle\langle\Phi_1| + 2\,|\Phi_2\rangle\langle\Phi_2|$$

onde $\{\,|\Phi_1\rangle\,,|\Phi_2\rangle\,\}$ forma uma base ortonormal completa.

a) Que tipo de operador é $\hat{A}$? Classifique-o e diga se é Hermitiano.

b) Ache os autovalores e autovetores, e verifique se satisfaz a relação de completeza.

c) Encontre uma transformação de similaridade unitária, S, que diagonaliza $\hat{A}$.
Use S para escrever a forma diagonal da matriz A.

Problema 2

Encontre a transformação unitária que diagonaliza a matriz de rotação R. Use a transformação de similaridade para reescrever essa matriz na sua forma diagonal.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Problema 3

Sejam as matrizes A e B, definidas abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2i & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & i \\ -i & 2i & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Ache $\mathrm{Tr}(A)$ e $\mathrm{Tr}(B)$.

b) Calcule $\det(A)$ e $\det(B)$.

c) Encontre a inversa de A.

d) Determine se A e B comutam.

Problema 4

Verifique se a matriz U é unitária.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

Calcule seus autovalores e verifique se suas colunas formam uma base ortonormal.

Problema 5

Demonstre (prove) que para **qualquer** matriz quadrada $(n \times n)$, M, temos:

$$\det(M) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$
$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

onde λ_k são os autovalores de M, que são soluções da equação característica.
Dica: escreva o polinômio característico na forma fatorada:

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

e use o fato de que os coeficientes da equação característica obedecem

$$c_n = (-1)^n, \quad c_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(M) \quad \text{e} \quad c_0 = \det(M).$$

Problema 6

Considere dois operadores lineares, expressos por matrizes A_k e B_k, onde o índice k indica bases diferentes. Considere ainda a situação onde esses operadores podem ser expressos em duas bases diferentes.

a) Demonstre que se as matrizes dos operadores comutam em uma base, elas comutarão também em qualquer base.

b) Demonstre que duas matrizes diferentes comutam se elas forem simultaneamente diagonalizáveis.

Problema 7

Seja o Hamiltoniano de um sistema de dois níveis é dado por

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 \end{pmatrix}, \quad \text{na base} \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule as energia do sistema e expresse os autovetores de H na base dada.

b) Escreveva as equações da dinâmica, isto é, as eqs. da evolução temporal do sistema, para um estado arbitrário $|\Psi\rangle = \left(\begin{smallmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{smallmatrix}\right)$. Não é necessário resolver as equações, apenas as expresse em termos de ω_1, ω_2, α, β e suas derivadas.