Lista 4

Q1. *Relação de incerteza generalizada*

Sejam $\hat{A}$ e $\hat{B}$ dois operadores que correspondem a observáveis físicos cujas incertezas são indicadas por ΔA e ΔB. Demonstre que sempre vale a relação:

$$\Delta A\, \Delta B \geq \frac{1}{2i} \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle ,$$

onde $[\hat{A}, \hat{B}]$ é o comutador desses operadores. Use esse resultado para verificar a conhecida relação do princípio de incerteza de Heisenberg para posição e momentum.

Q2. *Operadores de projeção*

O conjunto $\{ |\Phi_1\rangle , |\Phi_2\rangle \}$ é uma base ortonormal completa e o operador $\hat{A}$ é definido por:

$$\hat{A} = 2\, |\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| - i\, |\Phi_1\rangle\langle\Phi_2| + i\, |\Phi_2\rangle\langle\Phi_1| + 2\, |\Phi_2\rangle\langle\Phi_2| \, .$$

a) Diga se $\hat{A}$ é um operador projetor, justificando sua resposta.
Dica: confira a seção 5.9 das notas de aula online para rever as propriedades do projetor.

b) Calcule Tr(A) e Tr(A^2).

Q3. *Funções de operadores*

Dado que $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1}$, mostre que $[\hat{A}, F(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}]F'(\hat{B})$, onde $F'(\hat{B})$ é a a derivada de F com respeito a $\hat{B}$.

Q4. *Fase global e equivalência de estados*

Considere dois *kets* $|\psi\rangle$ e $|\psi\rangle'$, tal que $|\psi\rangle' = e^{i\theta}\, |\psi\rangle$, onde θ é um número real qualquer.

a) Mostre que se $|\psi\rangle$ é normalizado então $|\psi\rangle'$ também será.

b) Prove que as predições de qualquer medida física são idênticas para os dois vetores, isto é, que ambos representam o mesmo estado físico.

Q5. *Autofunções em espaços vetoriais contínuos*

Considere um operador $\hat{O} = -i\frac{d}{d\varphi}$ onde φ é o ângulo azimutal em coordenadas esféricas.

a) Ache as autofunções $f(\varphi)$ e autovalores λ sujeitos ao vínculo de que
$f(0) = f(2\pi) = 1/\sqrt{2\pi}$ e que os autovalores devem ser positivos.

b) Considerando que $\hat{\varphi}$ age como um operador de posição, i.e. $\hat{\varphi} f = \varphi f$, ache $[\hat{O}, \hat{\varphi}]$.

c) Determine se $\hat{O}$ é Hermetiano.

Q6. *Autovetores de posição e momento linear no espaço de Hilbert*
Sejam $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ os vetores de posição e momento linear de uma partícula quântica. Mostre que os *kets* $|\mathbf{r}\rangle$ e $|\mathbf{p}\rangle$ são autovetores dos respectivos operadores de posição e momento linear.

Q7. *Representações da posição e do momento linear*
Mostre que $\langle \mathbf{r}|\hat{\mathbf{p}}|\psi\rangle = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\langle \mathbf{r}|\psi\rangle$. Escreva $\langle \phi|\hat{\mathbf{p}}_x|\psi\rangle$ usando as funções de onda correspondentes a $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$.

Q8. *Equação de Schrödinger nas representações de posição e momento linear*
O Hamiltoniano de uma partícula quântica num potencial $V(\mathbf{r})$ é dado por

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 + \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}).$$

a) Partindo da equação de operadores, acima, escreva a equação de Schrödinger para funções de onda $\psi(r, t)$ na representação da posição (*r-representation*).

b) Repita o mesmo procedimento para escrever a equação de Schrödinger para funções de onda na representação do momento linear (*p-representation*).

Q9. *Equações de Ehrenfest e representação de Heisenberg*
Considere uma partícula quântica num potencial estacionário $V(\mathbf{r})$. Usando a representação de Heisenberg, mostre que são válidas as equações de Ehrenfest indicadas abaixo:

a) $$\frac{\mathrm{d}\langle \hat{\mathbf{r}}\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle \hat{\mathbf{p}}\rangle}{m};$$ b) $$\frac{\mathrm{d}\langle \hat{\mathbf{p}}\rangle}{\mathrm{d}t} = -\left\langle \boldsymbol{\nabla}\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r})\right\rangle.$$

Q10. *Operador densidade: diferenças entre estados puros e misturas estatísticas*
Os conjuntos $\{\,|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\,\}$ e $\{\,|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\,\}$ são base ortonormais completas, cuja relação é indicada abaixo. Considere $\hat{\rho}_A = |A\rangle\langle A|$ e $\hat{\rho}_m = \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2| + \frac{1}{4}|3\rangle\langle 3|$.

$$\begin{aligned}
|A\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle + |3\rangle\right)\\
|B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right)\\
|C\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1\rangle - \sqrt{2}\,|2\rangle + |3\rangle\right)
\end{aligned}$$

a) Calcule $\hat{\rho}_A$ na base $\{\,|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\,\}$ e $\hat{\rho}_m$ na base $\{\,|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\,\}$, determinando as quatro matrizes densidades. Use-as para determinar a pureza dos estados $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_m$.

b) Usando as matrizes densidades, calcule as probabilidades $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$ e $\mathscr{P}_A, \mathscr{P}_B, \mathscr{P}_C$ quando o sistema é preparado em $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_m$.

c) Determine o operador e a matriz densidade de um estado completamente misturado e ordene esse estado junto com $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_m$, colocando-os em ordem crescente de pureza.