Lista 1

Problema 1

Considere que as funções de onda $\psi_n(x,t)$ com $n = 1, 2, ..., N$, satisfazem à equação de Schrödinger. Mostre que qualquer combinação linear delas também é uma solução.
Em outras palavras, mostre que $\sum_n c_n \psi_n(x,t)$ satisfaz a equação de Schrödinger.

Problema 2

A normalização da função de onda exige que $\int \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = C$. Mostre que C é independente do tempo. Esse resultado permite escolher uma constante de normalização única para a função de onda $\psi(x,t)$. Qual dever ser o valor dessa constante de normalização para que se possa ter uma interpretação probabilística?

Problema 3

A conservação de probabilidade na mecânica quântica decorre da Eq. de Schödinger e é expressa pela equação de continuidade $\partial\rho/\partial t = -\nabla J$, onde $J = J(x,t)$ é a corrente de probabilidade. Deduza essa equação de continuidade e a definição de $J(x,t)$.
Como conciliar e interpretar esse resultado com o resultado do problema 2?

Problema 4

Suponha que uma partícula de massa m está no estado $\psi(x,t) = Ae^{-\alpha(mx^2/\hbar + it)}$, onde A, e α são constantes reais positivas.

1. Encontre o valor de A.
2. Determine a função $V(x)$ e o autovalor correspondente. Discuta se essa é a única função $V(x)$ possível.
3. Calcule o valor esperados de x, x^2, p e p^2.
4. Encontre os desvios padrões σ_x e σ_p, dos operadores de posição e momento. Verifique se eles são consistentes com o princípio da incerteza.
5. Calcule a corrente de probabilidade $J(x,t)$. Quais são as unidades físicas de $J(x,t)$?

Problema 5

Calcule a corrente de probabilidade $J(x,t)$ correspondente à função $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Expresse o resultado em termos da velocidade $v = p/m = \hbar k/m$ e $\rho = |\psi|^2$. Essa expressão lhe parece familiar? Compare-a com a corrente de carga q num fio cujos portadores tem velocidade v e densidade n. Qual grandeza faz o papel do produto nq?

Problema 6

Mostre que para um potencial constante, $V(x,t) = V_0$, a solução $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ da equação de Schrödinger resulta na expressão correta para a conservação da energia.

Problema 7

Uma partícula de massa m é aprisionada numa caixa unidimensional de largura a. Sabendo que a função de onda é dada por:

$$\psi(x) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}sen\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a}}sen\left(\frac{3\pi x}{a}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}sen\left(\frac{4\pi x}{a}\right)$$

Se a energia for medida, quais são os possíveis resultados e as suas respectivas probabilidades? Qual é a energia mais provável para este estado?

Problema 8

Em geral, a mecânica quântica é relevante quando o comprimento de onda de de Broglie da partícula é maior que o tamanho característico do sistema (d).
Usando a interpretação cinética da temperatura absoluta T (expressa em kelvin), determine o comprimento de onda de de Broglie de um sistema na temprratura T. Considerando agora um gás ideal de massa m numa pressão P, determine para quais temperaturas o gás poderia ser considerado um gás quântico. Aplique seus resultados para calcular numericamente as temperaturas para o hélio à pressão atmosférica e o hidrogênio no espaço interestelar (assumindo $d = 1$ cm e T = 3K).