

Lista 3

Problema 1

Considere o operador definido por:

$$\hat{A} = 2|\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| - i|\Phi_1\rangle\langle\Phi_2| + i|\Phi_2\rangle\langle\Phi_1| + 2|\Phi_2\rangle\langle\Phi_2|$$

onde $\{|\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle\}$ forma uma base ortonormal completa.

- Que tipo de operador é \hat{A} ? Classifique-o e diga se é Hermitiano.
- Ache os autovalores e autovetores, e verifique se satisfaz a relação de completudeza.
- Encontre uma transformação de similaridade unitária, S , que diagonaliza \hat{A} . Use S para escrever a forma diagonal da matriz A .

Problema 2

Encontre a transformação unitária que diagonaliza a matriz de rotação R . Use a transformação de similaridade para reescrever essa matriz na sua forma diagonal.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Problema 3

Sejam as matrizes A e B , definidas abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2i & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & i \\ -i & 2i & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Ache $\text{Tr}(A)$ e $\text{Tr}(B)$.
- Calcule $\det(A)$ e $\det(B)$.
- Encontre a inversa de A .
- Determine se A e B comutam.

Problema 4

Verifique se a matriz U é unitária.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

Calcule seus autovalores e verifique se suas linhas formam uma base ortonormal.

Problema 5

Demonstre (prove) que para **qualquer** matriz quadrada ($n \times n$), M , temos:

$$\det(M) = \prod_{k=1}^n \lambda_k = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

$$\text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

onde λ_k são os autovalores de M , que são soluções da equação característica.

Dica: escreva o polinômio característico na forma fatorada:

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

e use o fato de que os coeficientes da equação característica obedecem

$$c_n = (-1)^n, \quad c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(M) \quad \text{e} \quad c_0 = \det(M).$$

Problema 6

Considere dois operadores lineares, expressos por matrizes A_k e B_k , onde o índice k indica bases diferentes. Considere ainda a situação onde esses operadores podem ser expressos em duas bases diferentes.

- Demonstre que se as matrizes dos operadores comutam em uma base, elas comutarão também em qualquer base.
- Demonstre que duas matrizes diferentes comutam se elas forem simultaneamente diagonalizáveis.

Problema 7

Seja o Hamiltoniano de um sistema de dois níveis é dado por

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 \end{pmatrix}, \quad \text{na base} \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calcule as energia do sistema e expresse os autovetores de H na base dada.
- Escreva as equações da dinâmica, isto é, as eqs. da evolução temporal do sistema, para um estado arbitrário $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$. Não é necessário resolver as equações, apenas as expresse em termos de ω_1 , ω_2 , α , β e suas derivadas.