Intelligent Robotics Lab

Inteligencia Artificial

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

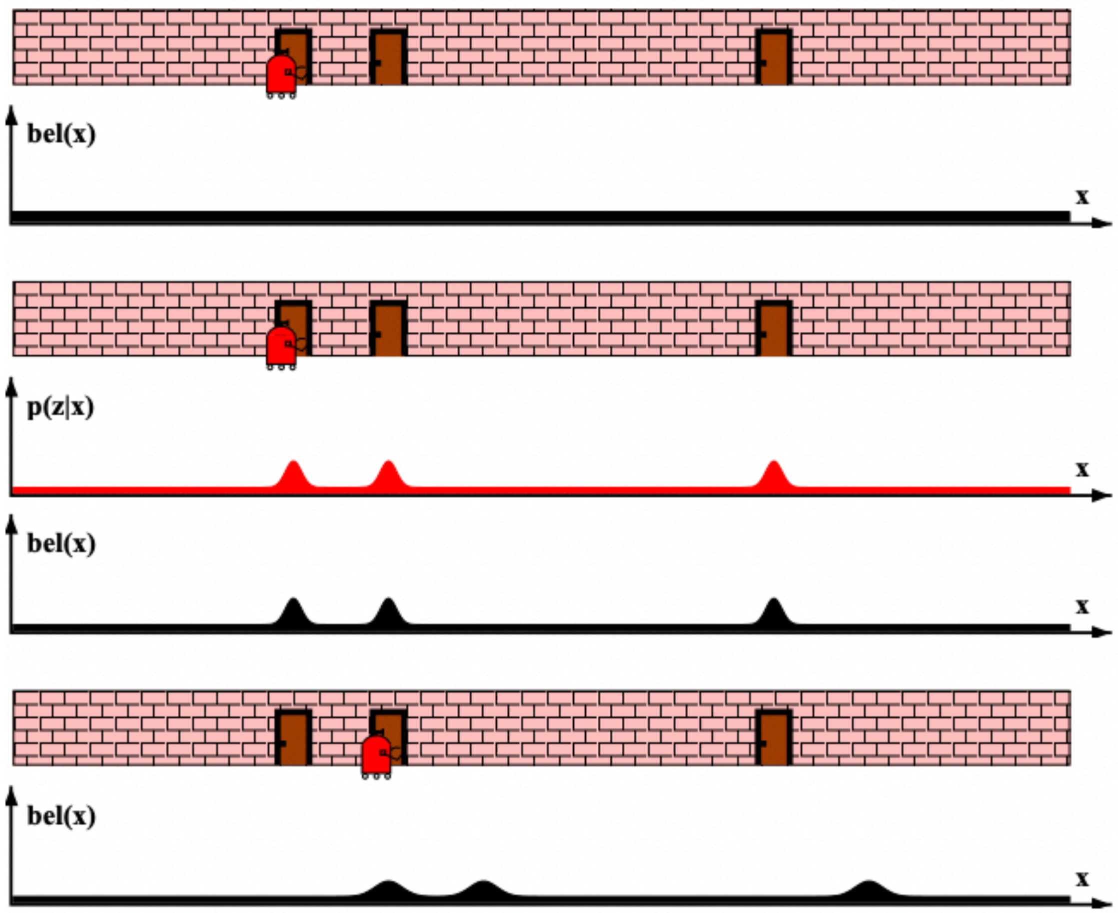
Universidad Rey Juan Carlos

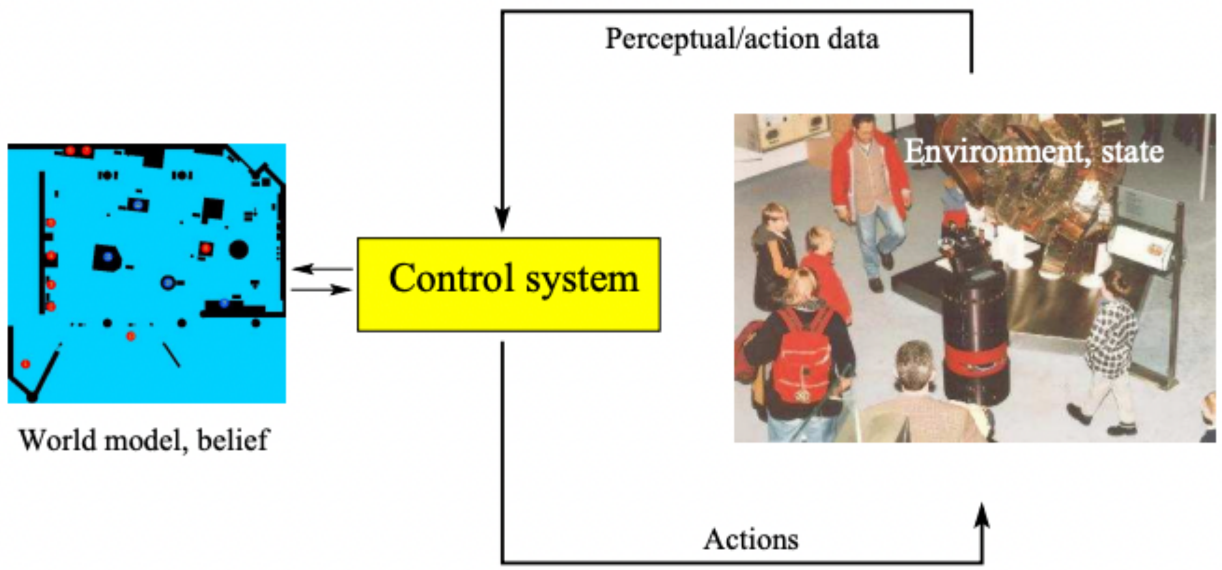
Francisco Martín Rico francisco.rico@urjc.es

- Un agente toma decisiones en función de su estado.

- En un entorno parcialmente observable, este agente debe estimar su estado actual con la ayuda de sus sensores. Para esto necesita:
    - Mantener una **estimación del estado** o estados más probables.
    - Un **modelo de transiciones** que, a partir de la estimación de estado, indique cómo evoluciona el mundo en el próximo instante de tiempo.
    - Un **modelo de sensor** que, a partir de las percepciones, el agente pueda actualizar su estimación de estado.

- Usemos la Teoría de Probabilidad para cuantificar esta estimación del estado y estos modelos.
- Un mundo cambiante se modela usando una variable para cada aspecto del mundo **en cada punto en el tiempo**





Tiempo e incertidumbre

- Nuestro mundo ya no es **estático**, como hasta ahora, en que una variable aleatoria tienen un valor fijo.
  - Reparar un coche vs tratar a un paciente de diabetes
  - Localización de un robot

Estados y observaciones

- El mundo se modela como una secuencia de instantes de tiempo, cada uno con unas variables aleatorias:
  - Conjunto de variables no observables $\mathbf{X}_t$
  - Conjunto de variables evidencia observables $\mathbf{E}_t$. La observación en t es $\mathbf{E}_t = \mathbf{e}_t$ para algunos valores de $\mathbf{e}_t$

- Ejemplo: un guardia de seguridad que permanece en una instalación subterránea secreta
  - El objetivo es conocer si llueve o no, y solo puedes observar si el director entra con paraguas o no.
  - Para cada día t,
    - $\mathbf{E}_t$ contiene una variable evidencia $Umbrella_t$ o U_t
    - $\mathbf{X}_t$ contiene la variable $Rain_t$ o R_t

$$R_0, R_1, R_2, \ldots$$
$$U_1, U_2, U_3, \ldots$$

$$U_{a:b} = \{U_a, U_{a+1}, \ldots U_{b-1}, U_b\}$$

Modelos de Transición y Sensor

- Debemos especificar:
  - cómo evoluciona el mundo (el modelo de transición) y
  - cómo las variables de evidencia obtienen sus valores (el modelo de sensor).

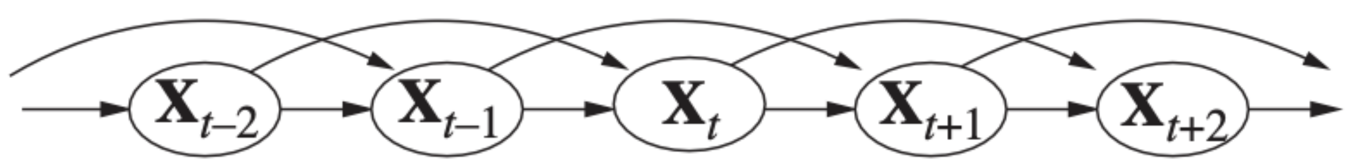
- Modelo de transición

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{0:t-1})$$

Supuesto de Markov: *el estado actual depende solo de un número fijo finito de estados previos*

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{t-1})$$

Proceso de Markov de primer orden



Proceso de Markov de segundo orden

Consideramos procesos estacionarios: procesos de cambio que se rigen por leyes que no cambian con el tiempo.

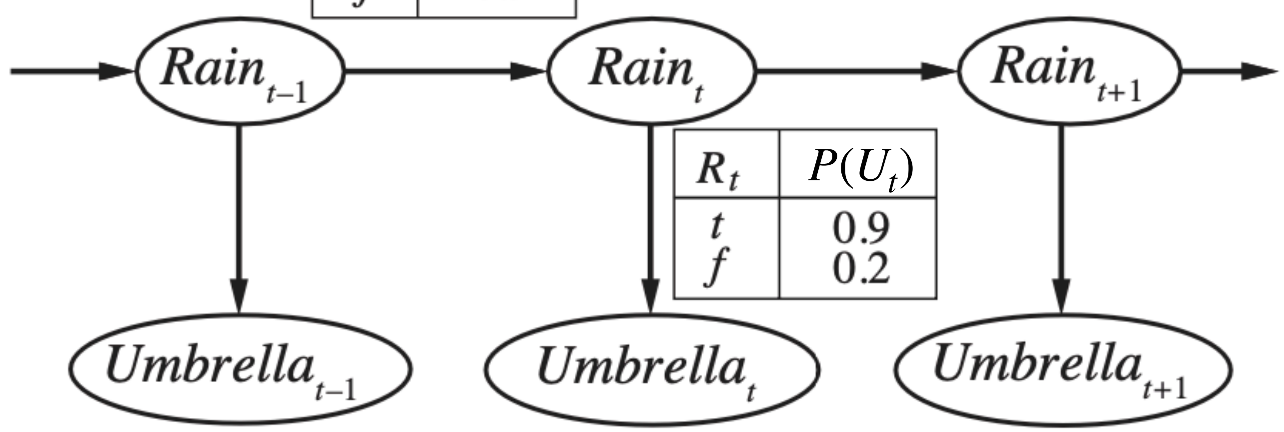
$\mathbf{P}(R_t \mid R_{t-1})$ es el mismo para todo t. Sólo tenemos que especificar un CDT

Francisco Martín Rico francisco.rico@urjc.es

- Modelo de sensor

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}_t \mid \mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{E}_t \mid \mathbf{X}_t)$$

Supuesto de Markov del sensor: *Es estado actual es suficiente para generar las actuales percepciones*



R_{t-1}	$P(R_t)$
t	0.7
f	0.3

R_t	$P(U_t)$
t	0.9
f	0.2

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{1:t}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_0) \prod_{i=1}^{t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_i \mid \mathbf{X}_{i-1}) \, \mathbf{P}(\mathbf{E}_i \mid \mathbf{X}_i)$$

Estado inicial del modelo — Modelo de Transición — Modelo del Sensor

- El supuesto de Markov de primer orden dice que las variables de estado contienen *toda* la información necesaria para caracterizar la distribución de probabilidad para el siguiente instante de tiempo. Si no se cumple, podemos:
  - Incrementar el orden de Markov
  - Incrementar el conjunto de variables de estado: $Season_t, Temperature_t, Humidity_t, Pressure_t, \ldots$
- Ejemplo: Robot que se mueve en (x, y) ¿Son suficientes posición y velocidad?

Inferencia en Modelos Temporales

- Podemos formular las tareas básicas de inferencia que deben resolverse:
  - **Filtrado:** Calcular el estado actual dadas todas las evidencias hasta el momento
    - $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$.
    - En el ejemplo del paraguas, esto significaría calcular la probabilidad de lluvia hoy, dadas todas las observaciones del porta paraguas realizadas hasta ahora.
    - El filtrado es lo que hace un agente racional para realizar un seguimiento del estado actual de modo que se puedan tomar decisiones racionales.
  - **Predicción**: Calcular la distribución sobre el estado futuro, dada toda la evidencia hasta la fecha
    - $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k} \mid \mathbf{e}_{1:t})$ para $k > 0$.
    - En el ejemplo general, esto podría significar calcular la probabilidad de lluvia dentro de tres días, dadas todas las observaciones hasta la fecha.
    - La predicción es útil para evaluar posibles cursos de acción en función de los resultados esperados.
  - **Suavizado:** Calcular la distribución sobre un estado pasado, dada toda la evidencia hasta el presente.
    - $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:t})$ para $0 \leq k < t$.
    - En el ejemplo del paraguas, podría significar calcular la probabilidad de que llovió el miércoles pasado, dadas todas las observaciones del porta paraguas hechas hasta el día de hoy.
    - El suavizado proporciona una mejor estimación del estado de la que estaba disponible en ese momento, porque incorpora más evidencia.
  - **Explicación más probable:** Dada una secuencia de observaciones, podríamos desear encontrar la secuencia de estados que es más probable que haya generado esas observaciones.
    - Es decir, deseamos calcular $argmax_{\mathbf{X}_{1:t}} P(\mathbf{X}_{1:t} \mid \mathbf{e}_{1:t})$
    - Por ejemplo, si el paraguas aparece en cada uno de los primeros tres días y está ausente el cuarto, entonces la explicación mas probable es que llovió los primeros tres días y no llovió el cuarto.
    - Los algoritmos para esta tarea son útiles en muchas aplicaciones, incluido el reconocimiento de voz, donde el objetivo es encontrar la secuencia de palabras más probable, dada una serie de sonidos, y la reconstrucción de cadenas de bits transmitidas a través de un canal ruidoso.
  - **Aprendizaje**: Los modelos de transición y sensor, si aún no se conocen, se pueden aprender de las observaciones. La inferencia proporciona una estimación de qué transiciones ocurrieron realmente y de qué estados generaron las lecturas del sensor, y estas estimaciones se pueden utilizar para actualizar los modelos.

Francisco Martín Rico francisco.rico@urjc.es

Filtrado y Predicción

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) = f(\mathbf{e}_{t+1}, \mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t}))$$

- Este proceso se llama **estimación recursiva.**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1}) && \text{Separamos la evidencia} \\ &= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{e}_{1:t})\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t}) && \text{Regla de Bayes} \\ &= \alpha\, \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1})}_{\text{Actualización}}\, \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t})}_{\text{Predicción}} && \text{Supuesto de Markov para el sensor} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) = \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}) \sum_{\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t) P(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

- La predicción es continuar con el filtrado sin incluir evidencias

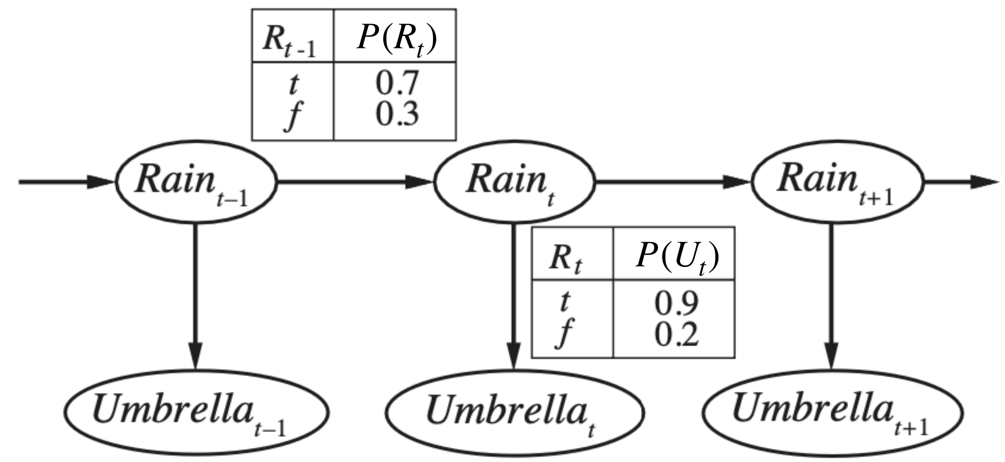
$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1} \mid \mathbf{e}_{1:t}) = \sum_{\mathbf{x}_{t+k}} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1} \mid \mathbf{x}_{t+k}) P(\mathbf{x}_{t+k} \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

Francisco Martín Rico francisco.rico@urjc.es

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) \;=\; \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}) \sum_{\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t) P(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$$

- Apliquemos esto en el ejemplo de la lluvia
  - Día 0:

$$\mathbf{P}(R_0) = \langle 0.5, 0.5 \rangle .$$



  - Día 1: $U_1 = true$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_1) &= \sum_{r_0} \mathbf{P}(R_1 \mid r_0) P(r_0) \\ &= \langle 0.7, 0.3 \rangle \times 0.5 + \langle 0.3, 0.7 \rangle \times 0.5 = \langle 0.5, 0.5 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_1 \mid u_1) &= \alpha\, \mathbf{P}(u_1 \mid R_1) \mathbf{P}(R_1) = \alpha \langle 0.9, 0.2 \rangle \langle 0.5, 0.5 \rangle \\ &= \alpha \langle 0.45, 0.1 \rangle \approx \langle 0.818, 0.182 \rangle . \end{aligned}$$

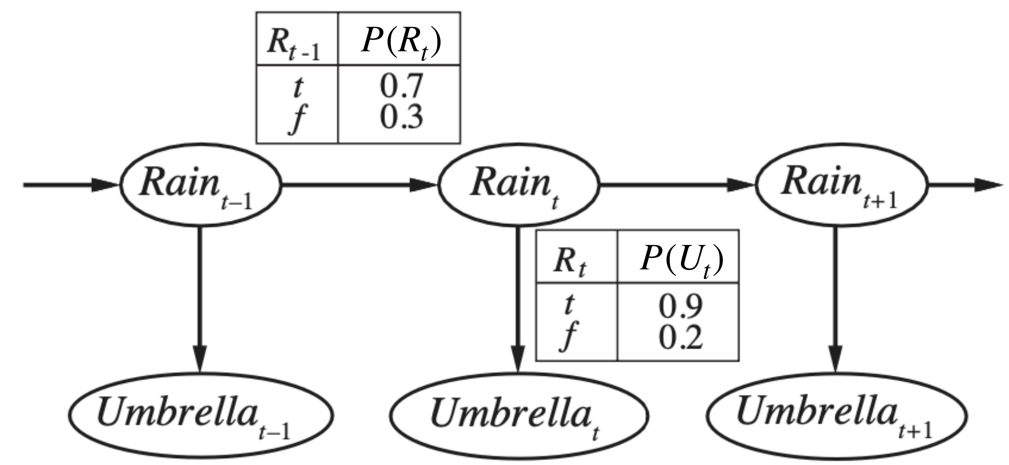
  - Día 2: $U_2 = true$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_2 \mid u_1) &= \sum_{r_1} \mathbf{P}(R_2 \mid r_1) P(r_1 \mid u_1) \\ &= \langle 0.7, 0.3 \rangle \times 0.818 + \langle 0.3, 0.7 \rangle \times 0.182 \approx \langle 0.627, 0.373 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_2 \mid u_1, u_2) &= \alpha\, \mathbf{P}(u_2 \mid R_2) \mathbf{P}(R_2 \mid u_1) = \alpha \langle 0.9, 0.2 \rangle \langle 0.627, 0.373 \rangle \\ &= \alpha \langle 0.565, 0.075 \rangle \approx \langle 0.883, 0.117 \rangle . \end{aligned}$$

- Predicción para el día 5, 10, ….?

Modelos Ocultos de Markov



- El modelo oculto de Markov, o HMM (Hidden Markov Model), es un modelo probabilístico temporal en el que el estado del proceso se describe mediante una única variable aleatoria discreta. Por ejemplo $Rain_t$

- Modelo de Transición: $\mathbf{P}(X_t \mid X_{t-1})$ es una matriz $\mathbf{T}$ de tamaño $S \times S$ donde S es el número de posibles estados

$$\mathbf{T}_{ij} = P(X_t = j \mid X_{t-1} = i)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(X_t \mid X_{t-1}) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

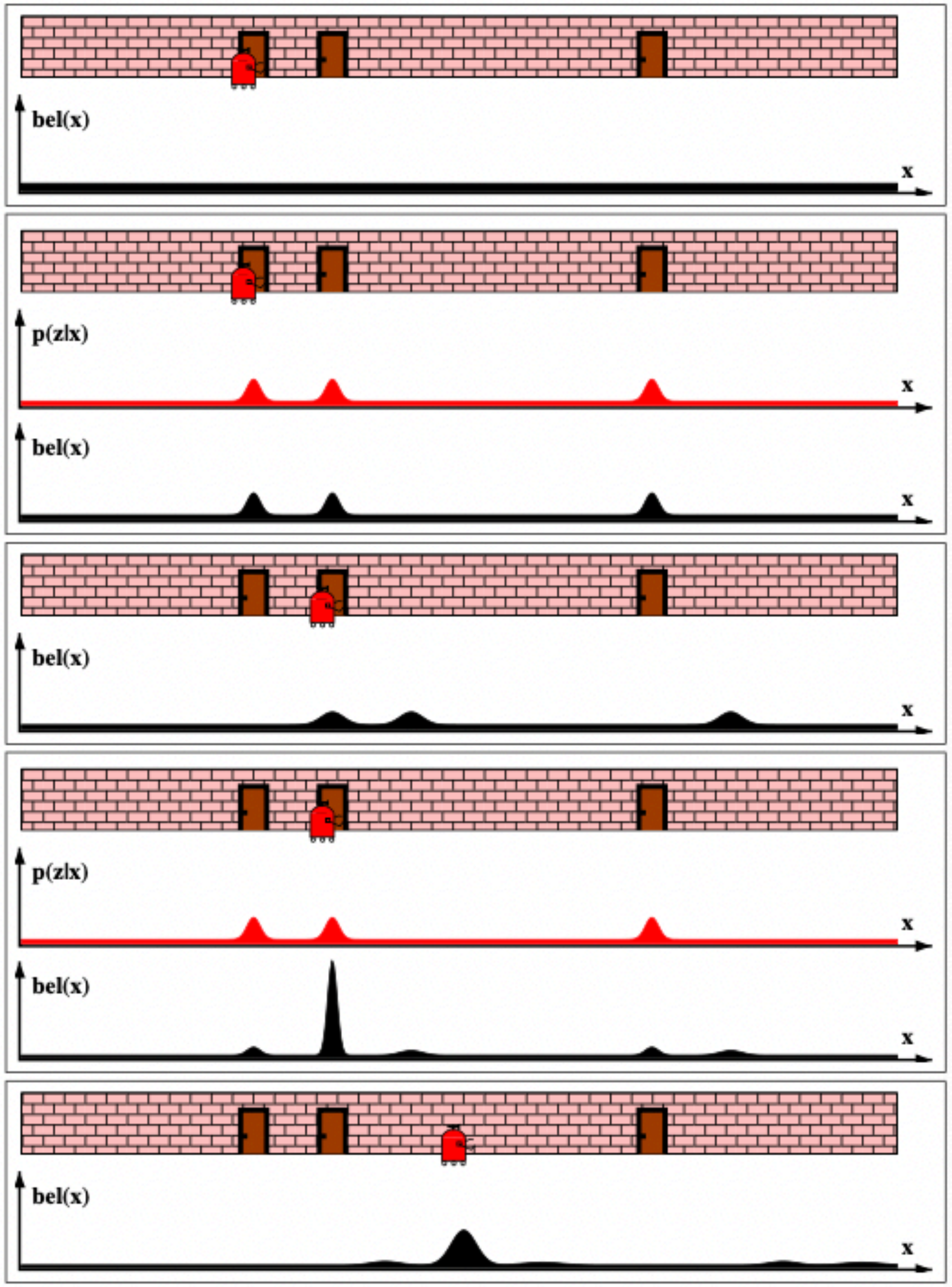
- Modelo del Sensor: Necesitamos especificar, para cada estado, qué tan probable es que el estado haga que aparezca e_t: $P(e_t \mid X_t = i)$ para cada estado i

$$U_1 = true \qquad\qquad U_3 = false$$

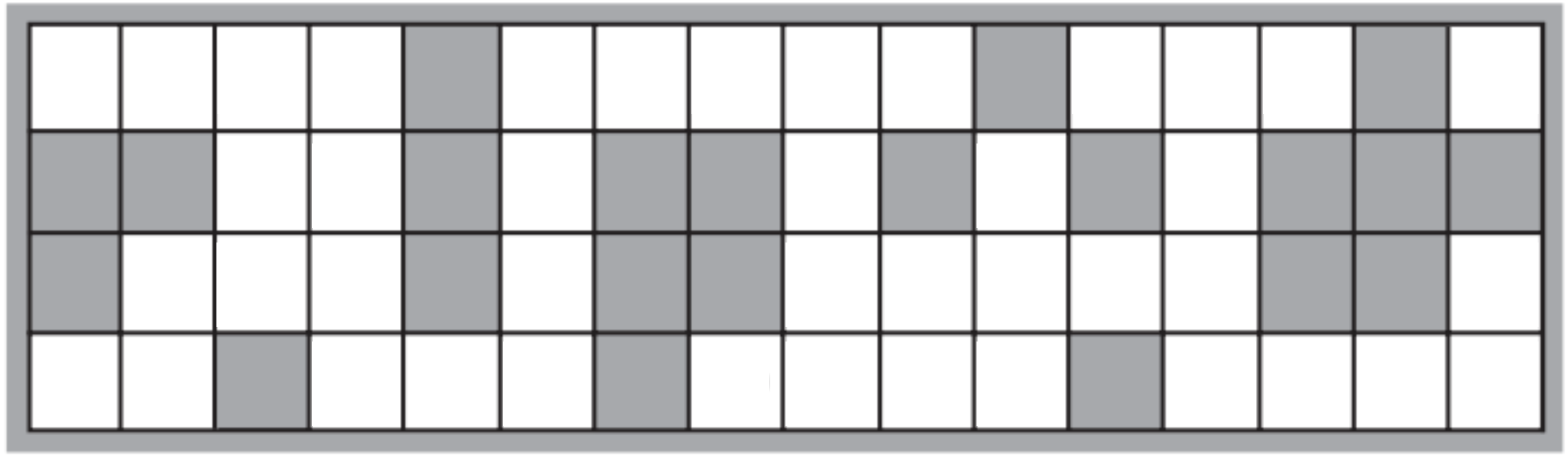
$$\mathbf{O}_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\, \mathbf{O}_{t+1} \mathbf{T}^{\top} \mathbf{f}_{1:t}$$

Ejemplo, localización de un robot



Ejemplo: localización de un robot



- La variable de estado X_t representa la ubicación del robot en la cuadrícula discreta; el dominio de esta variable es el conjunto de cuadrados vacíos $\{s_1, \ldots, s_n\}$
- $NEIGHBORS(s)$ es el conjunto de cuadrados vacíos adyacentes a s, y $N(s)$ el tamaño de ese conjunto.

- El modelo de transición para la acción $Move$ dice que es igualmente probable que el robot termine en cualquier cuadrado vecino

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = \mathbf{T}_{ij} = (1/N(i) \text{ if } j \in \text{NEIGHBORS}(i) \text{ else } 0)$$

- La posición inicial es desconocida, así que todos los estados son igual de probables

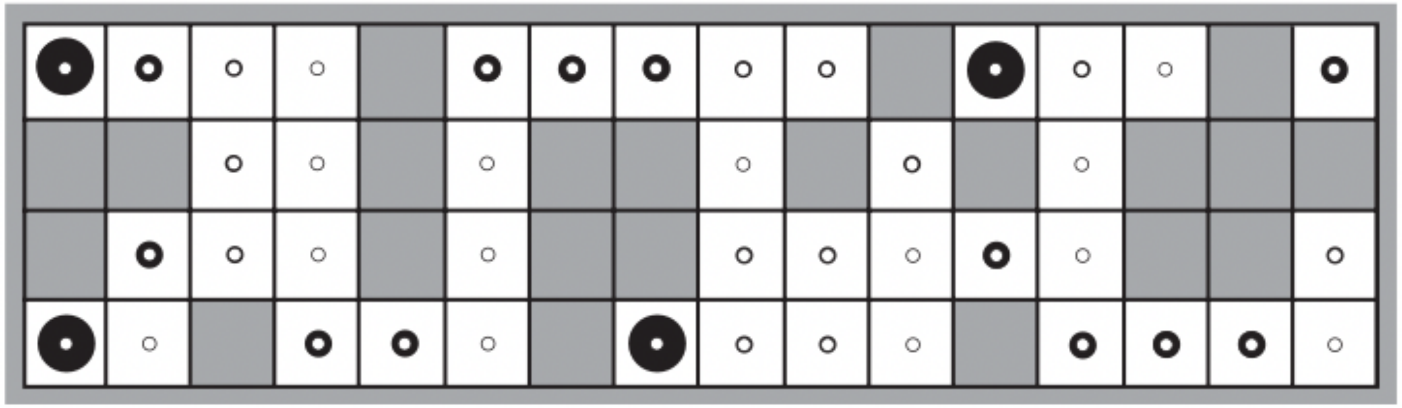
$$P(X_0 = i) = 1/n. \qquad n = 42$$

- $\mathbf{T}$ es una matrix de 42×42 casillas
- La variable sensor E_t tiene 16 posibles valores (Ejemplo: NS indica obstáculos en ca casilla de arriba y abajo). Su error es ϵ para cada lectura, por lo que la probabilidad de que los 4 valores estén bien es $(1-\epsilon)^4$ y de que estén mal es ϵ^4

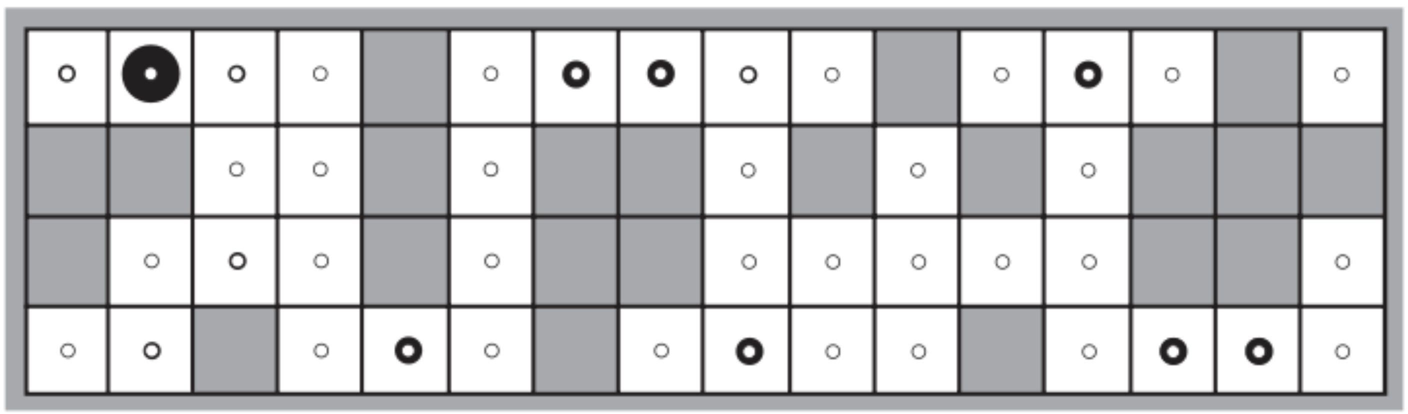
$$P(E_t = e_t \mid X_t = i) = \mathbf{O}_{t_{ii}} = (1-\epsilon)^{4-d_{it}} \epsilon^{d_{it}}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que un cuadrado con obstáculos al norte y al sur produzca una lectura de sensor NSE es $(1-\epsilon)^3\epsilon^1$.

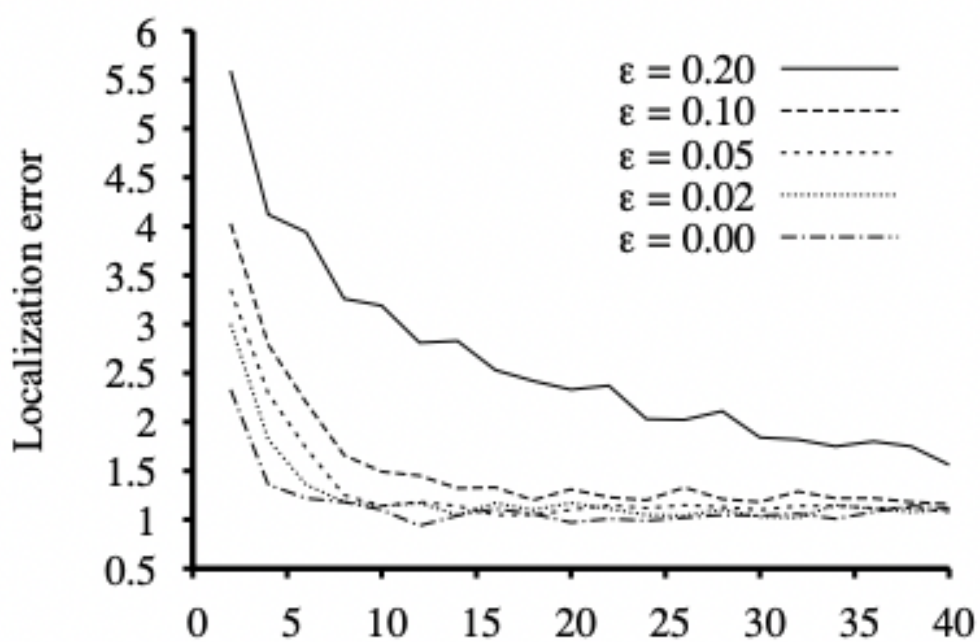
Intelligent Robotics Lab

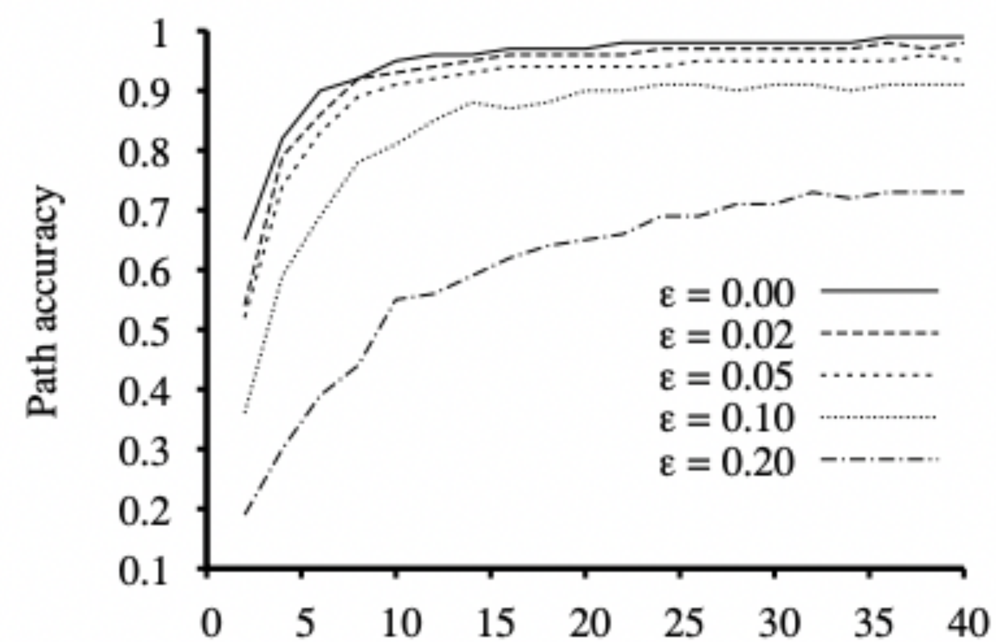


$$\mathbf{P}(X_1 \mid E_1 = NSW)$$



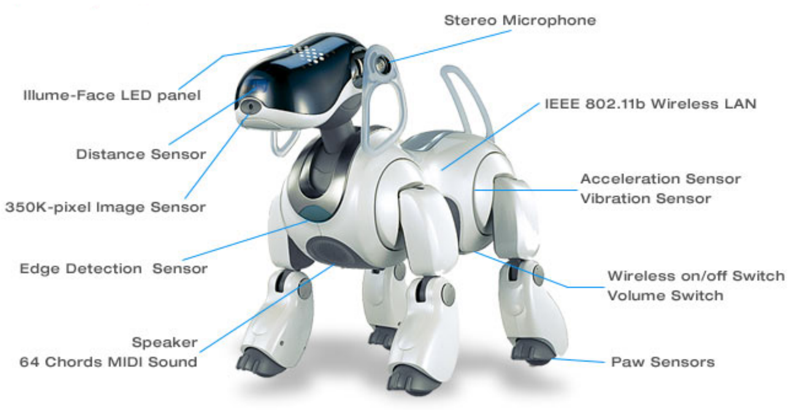
$$\mathbf{P}(X_2 \mid E_1 = NSW, E_2 = NS)$$

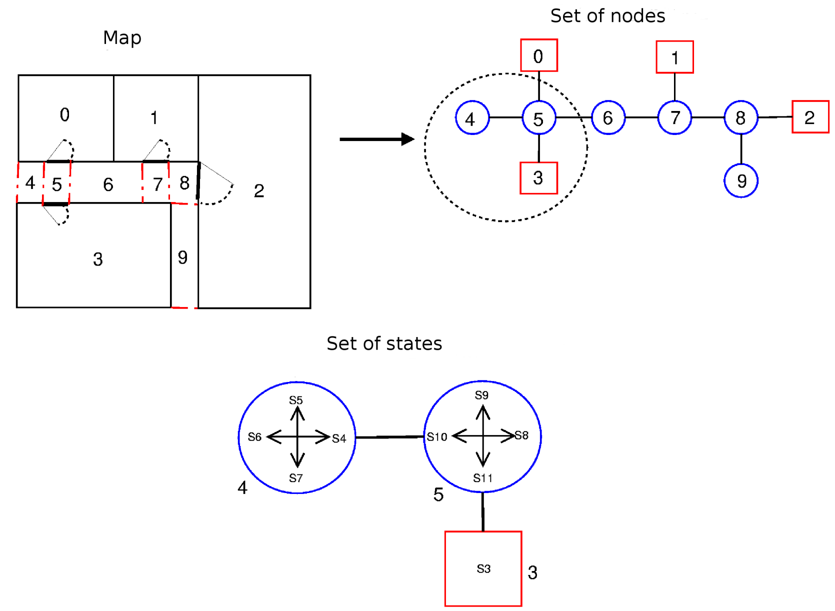


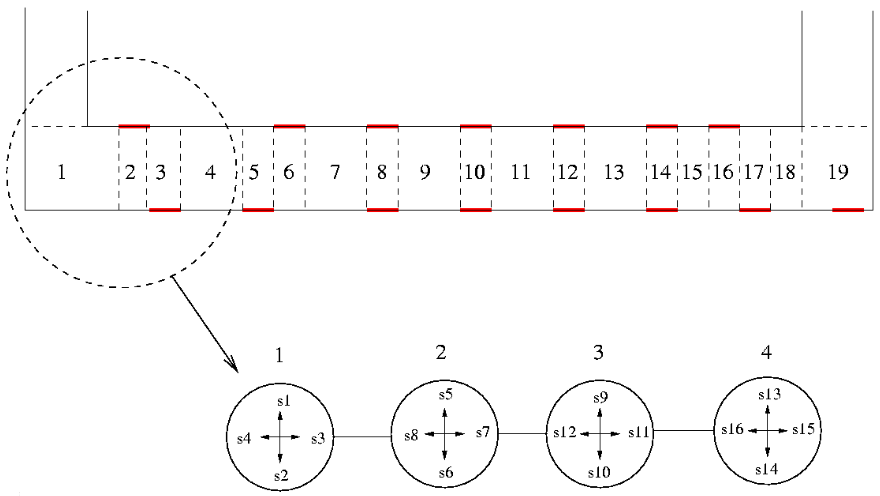


Francisco Martín Rico francisco.rico@urjc.es

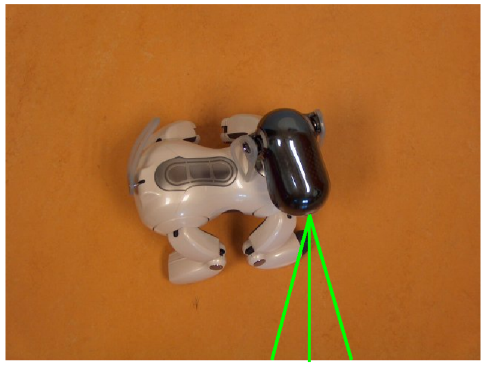
Ejemplo: localización de un robot II





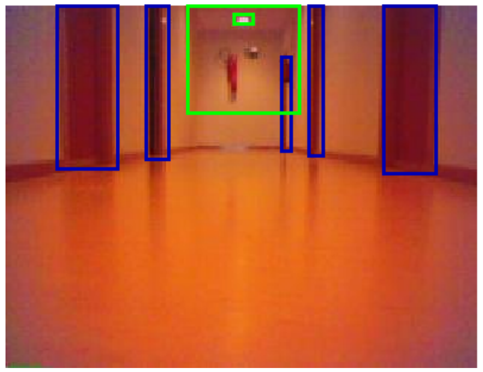


- El robot tenía 3 movimientos: Gira 90º derecha, Gira 90º Izquierda, Avanza hasta el siguiente estado



Turn Left	N: 0.15	T: 0.70	TT : 0.15	TTT: 0.0
Turn Right	N: 0.15	T: 0.70	TT : 0.15	TTT: 0.0
Go forward	N: 0.20	F: 0.6	FF: 0.15	FFF: 0.05

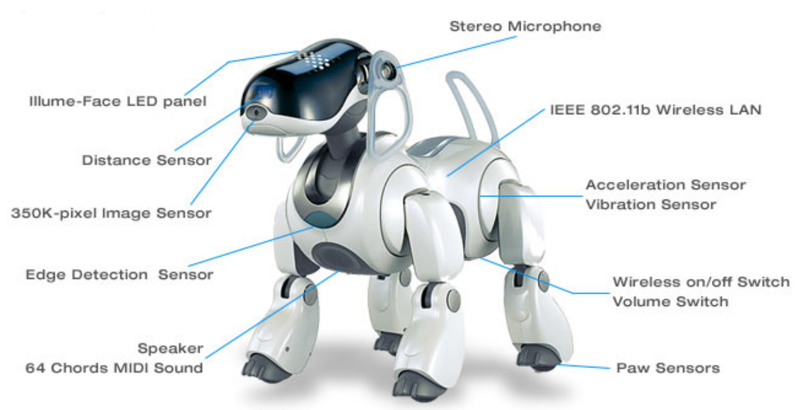
- El modelo del sensor eran el número de puertas y luces que podía observar delante, y lo que tenía alrededor

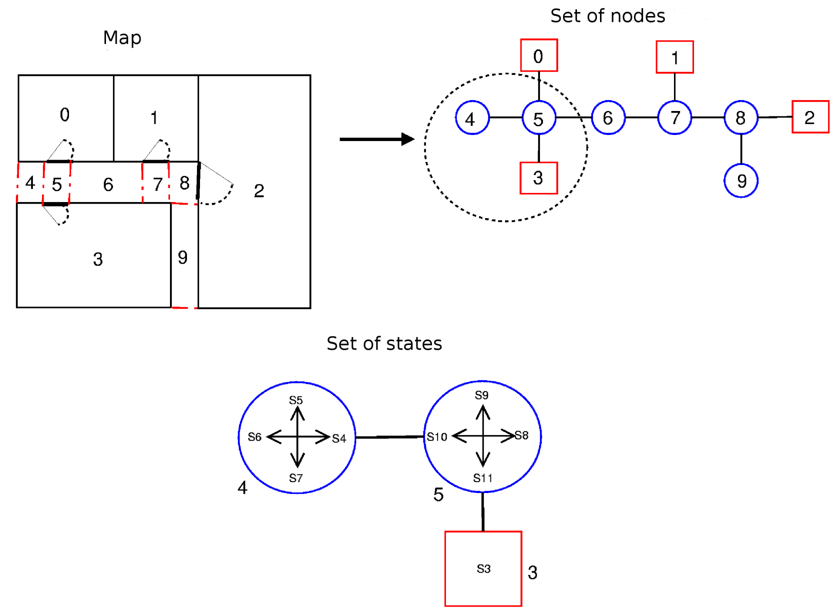


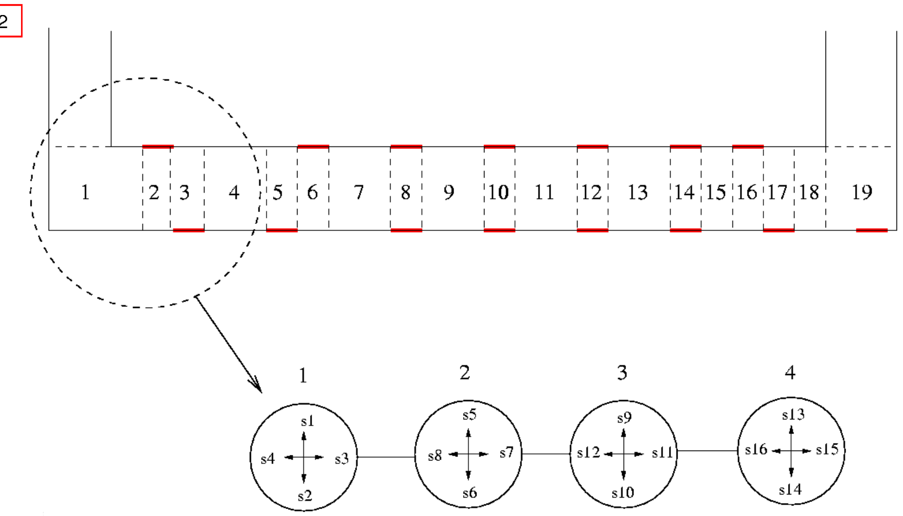
https://link.springer.com/chapter/10.1007/11780519_72

Francisco Martín Rico francisco.rico@urjc.es

Ejemplo: localización de un robot II







Ejercicio de clase

- Lee el paper y conecta las ecuaciones en él con las expuestas en este tema
- Para el escenario marcado, obtén:
  - la matriz T
  - la matriz O para tres estados distintos, solo con la percepción de las puertas alrededor.

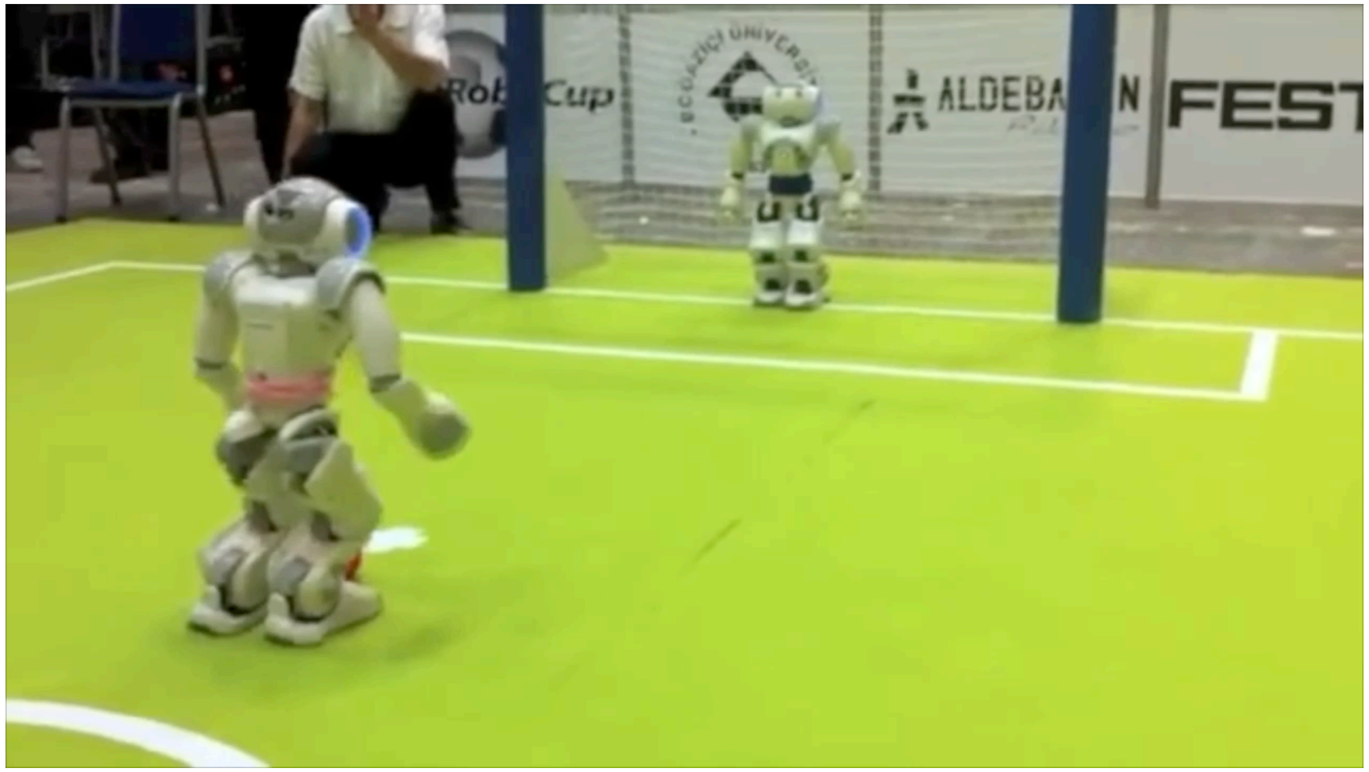
Filtros de Kalman

- Es un estimador óptimo recursivo para variables continuas y multivariable

$$P(X_{t+\Delta}=x_{t+\Delta}\,|\,X_t=x_t,\dot{X}_t=\dot{x}_t) = N(x_t+\dot{x}_t\,\Delta,\sigma^2)(x_{t+\Delta})$$

- Si la distribución actual $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t\,|\,\mathbf{e}_{1:t})$ es gaussiana y el modelo de transición $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{x}_t)$ es gaussiano lineal, entonces la predicción de la distribución es

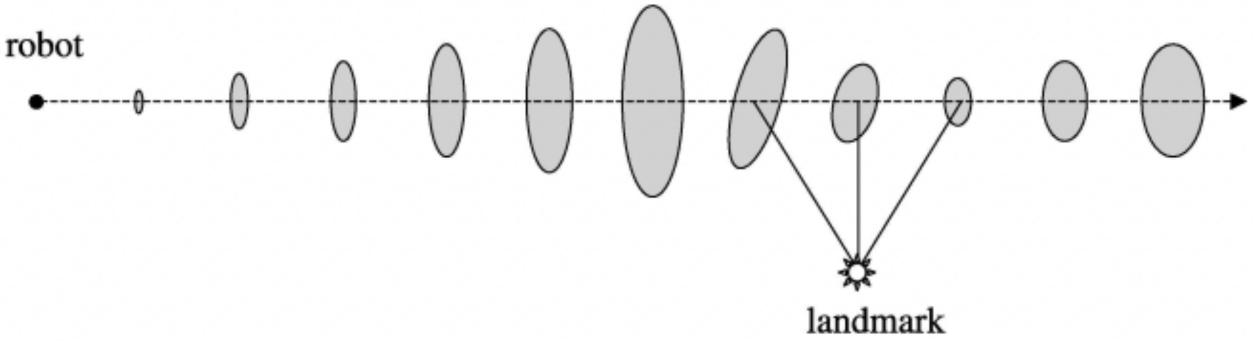
$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{e}_{1:t}) = \int_{\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x_t}\,|\,\mathbf{e}_{1:t})d\mathbf{x_t}$$



- Si la predicción $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{e}_{1:t})$ es gaussiana y el modelo de sensor $\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}\,|\,\mathbf{X}_{t+1})$ es lineal gaussiano, la distribución actualizada es también gaussiana

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{e}_{1:t+1}) = \alpha\,\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}\,|\,\mathbf{X}_{t+1})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{e}_{1:t})$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X_0}) = N(\mu_0, \Sigma_0)$$



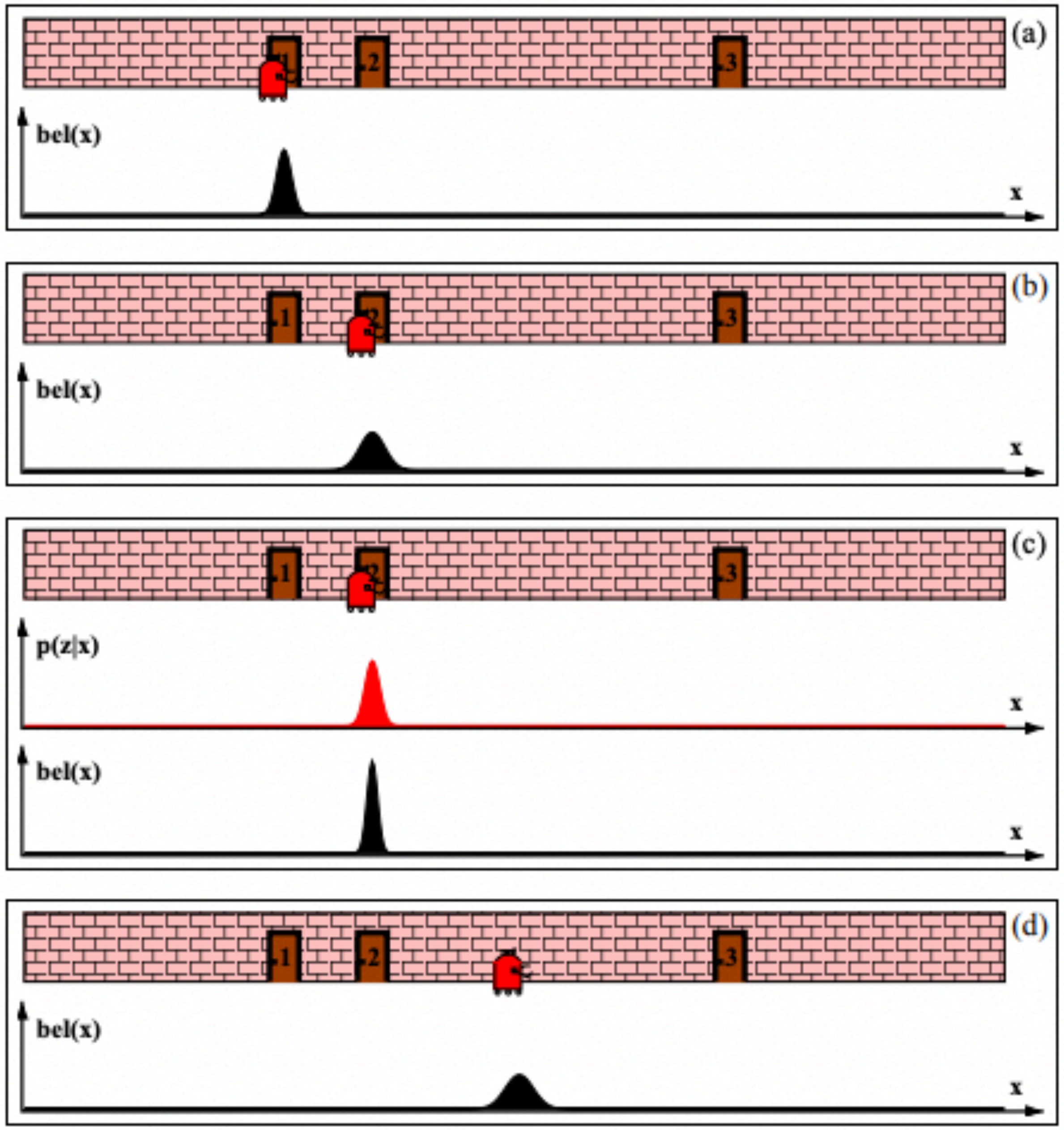
Filtros de Kalman

- Es un estimador óptimo recursivo para variables continuas y multivariable

$$P(X_{t+\Delta}=x_{t+\Delta}\,|\,X_t=x_t,\dot{X}_t=\dot{x}_t)=N(x_t+\dot{x}_t\,\Delta,\sigma^2)(x_{t+\Delta})$$

- Si la distribución actual $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t\,|\,\mathbf{e}_{1:t})$ es gaussiana y el modelo de transición $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{x}_t)$ es gaussiano lineal, entonces la predicción de la distribución es

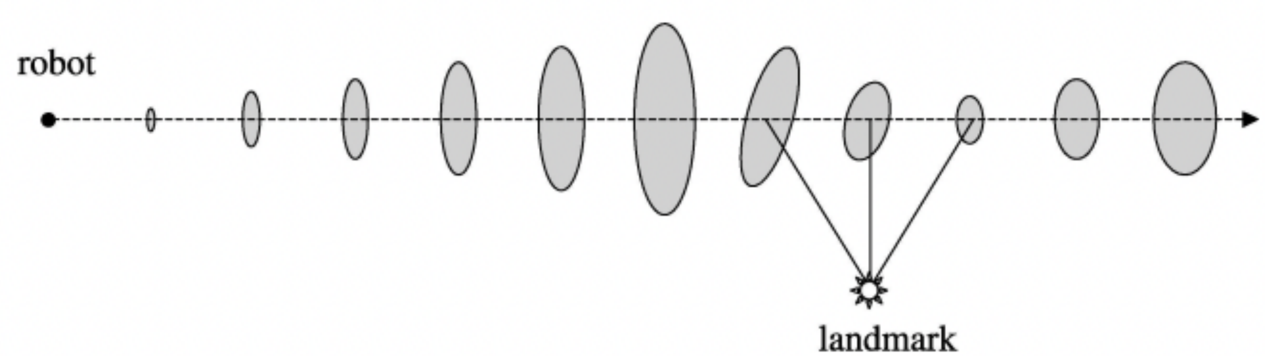
$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{e}_{1:t})=\int_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x_t}\,|\,\mathbf{e}_{1:t})d\mathbf{x_t}$$



- Si la predicción $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{e}_{1:t})$ es gaussiana y el modelo de sensor $\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}\,|\,\mathbf{X}_{t+1})$ es lineal gaussiano, la distribución actualizada es también gaussiana

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{e}_{1:t+1})=\alpha\,\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}\,|\,\mathbf{X}_{t+1})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}\,|\,\mathbf{e}_{1:t})$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X_0})=N(\mu_0,\Sigma_0)$$



Un ejemplo simple unidimensional

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Aplicar un filtro de Kalman puede incluir cálculos algebraicos complejos. Veamos un ejemplo en una dimensión por simplicidad
- Imaginemos un paseo aleatorio en una variable continua X_t y una observación con ruido Z_t

Modelo de transición $$P(x_{t+1} \mid x_t) = \alpha\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_{t+1}-x_t)^2}{\sigma_x^2}\right)}$$

Modelo del sensor $$P(z_t \mid x_t) = \alpha\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(z_t-x_t)^2}{\sigma_z^2}\right)}$$

Distribución inicial $$P(x_0) = \alpha\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_0-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right)}$$

$$P(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1 \mid x_0) P(x_0)\, dx_0 = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-x_0)^2}{\sigma_x^2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_0-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right)}\, dx_0$$

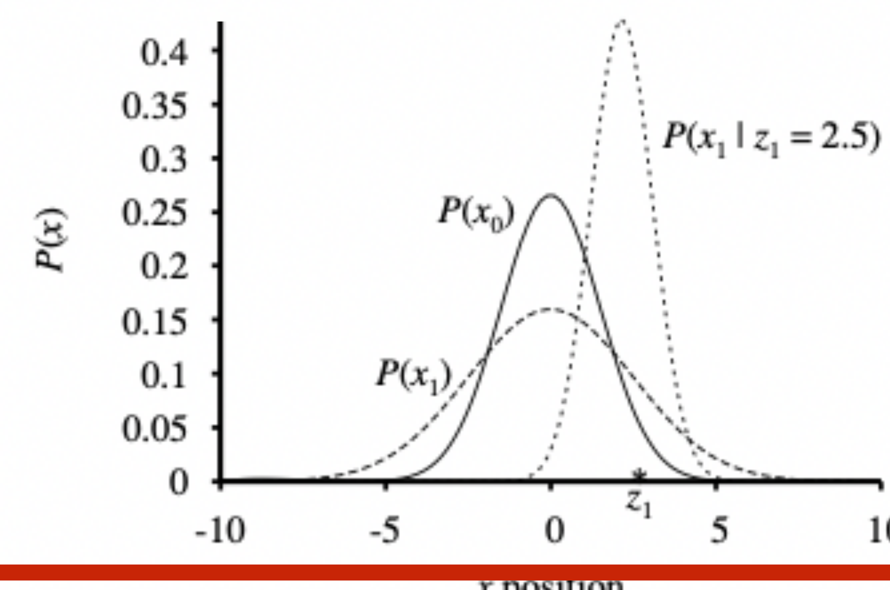
$$= \alpha\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-\mu_0)^2}{\sigma_0^2+\sigma_x^2}\right)}$$

$$P(x_1 \mid z_1) = \alpha\, P(z_1 \mid x_1) P(x_1)$$

$$= \alpha\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(z_1-x_1)^2}{\sigma_z^2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-\mu_0)^2}{\sigma_0^2+\sigma_x^2}\right)} = \alpha\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(x_1-\frac{(\sigma_0^2+\sigma_x^2)z_1+\sigma_z^2\mu_0}{\sigma_0^2+\sigma_x^2+\sigma_z^2}\right)^2}{(\sigma_0^2+\sigma_x^2)\sigma_z^2/(\sigma_0^2+\sigma_x^2+\sigma_z^2)}\right)}.$$

- Interpretemos intuitivamente la distribución normal resultante

$$\mu_{t+1} = \frac{(\sigma_t^2+\sigma_x^2)z_{t+1}+\sigma_z^2\mu_t}{\sigma_t^2+\sigma_x^2+\sigma_z^2} \qquad \sigma_{t+1}^2 = \frac{(\sigma_t^2+\sigma_x^2)\sigma_z^2}{\sigma_t^2+\sigma_x^2+\sigma_z^2}$$



El caso general

$$N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{x}) = \alpha\, e^{-\frac{1}{2}\left((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)}$$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t) &= N(\mathbf{F}\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\Sigma}_x)(\mathbf{x}_{t+1}) \\ P(\mathbf{z}_t \mid \mathbf{x}_t) &= N(\mathbf{H}\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\Sigma}_z)(\mathbf{z}_t)\ , \end{aligned}$$

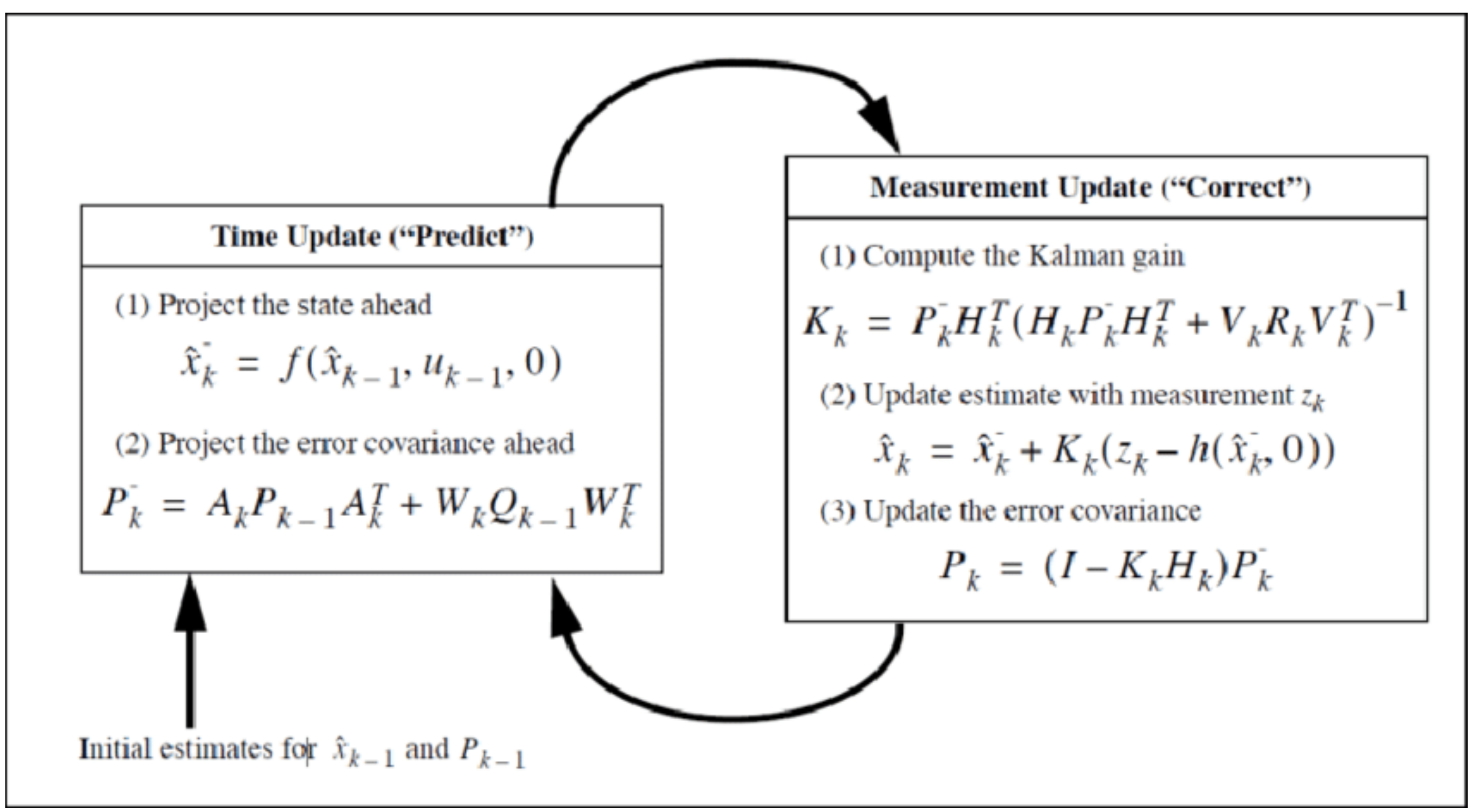
$\mathbf{F}$ y Σ_x son matrices que describen el modelo de transición lineal y la covarianza del ruido de transición. $\mathbf{H}$ y Σ_z son las matrices correspondientes para el modelo de sensor.

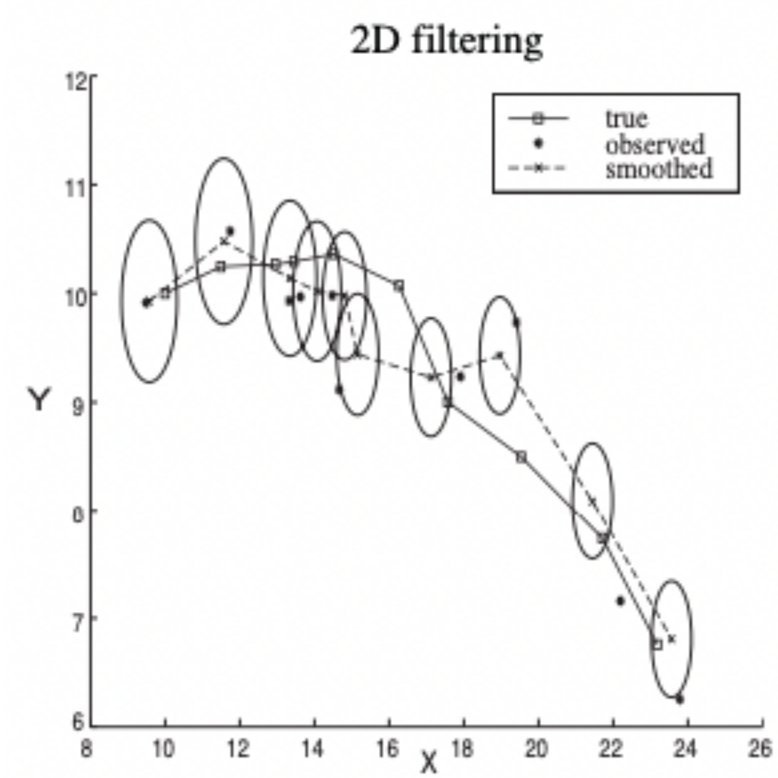
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{t+1} &= \mathbf{F}\boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{K}_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1} - \mathbf{H}\mathbf{F}\boldsymbol{\mu}_t) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{t+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{t+1}\mathbf{H})(\mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_t\mathbf{F}^{\top} + \boldsymbol{\Sigma}_x) \end{aligned}$$

Ganancia de Kalman

$$\mathbf{K}_{t+1} = (\mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_t\mathbf{F}^{\top} + \boldsymbol{\Sigma}_x)\mathbf{H}^{\top}(\mathbf{H}(\mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_t\mathbf{F}^{\top} + \boldsymbol{\Sigma}_x)\mathbf{H}^{\top} + \boldsymbol{\Sigma}_z)^{-1}$$

Extended Kalman Filter





Un ejemplo: EKF para localizar un robot

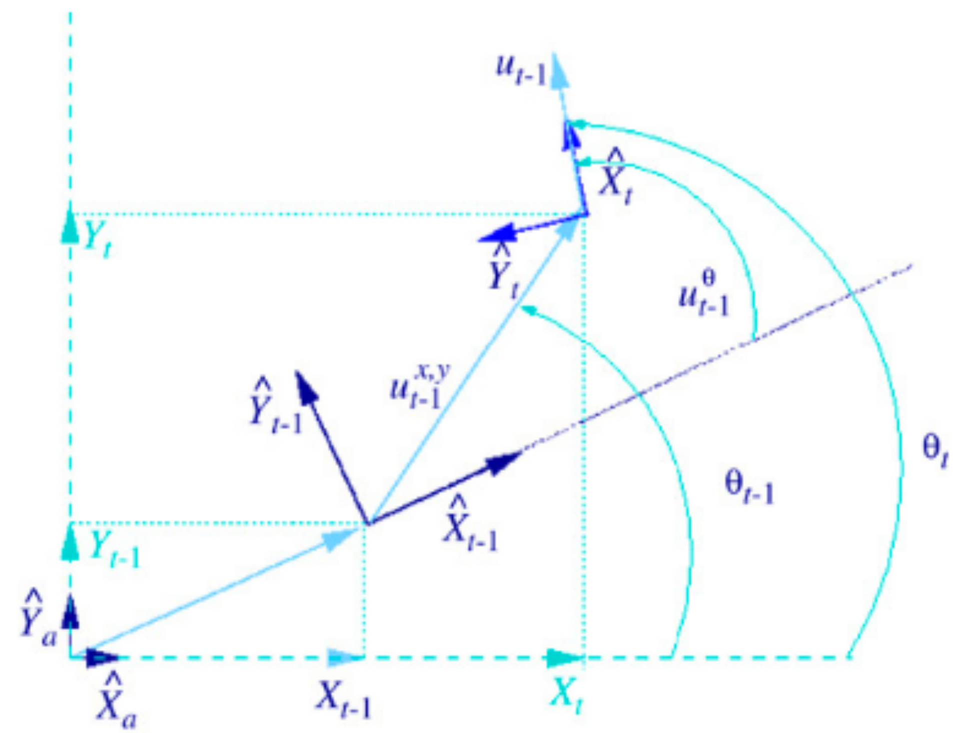
- Estado

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x_{\text{robot}} & y_{\text{robot}} & \theta_{\text{robot}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$s_t = f(s_{t-1}, u_{t-1}, w_{t-1})$$

- Predicción

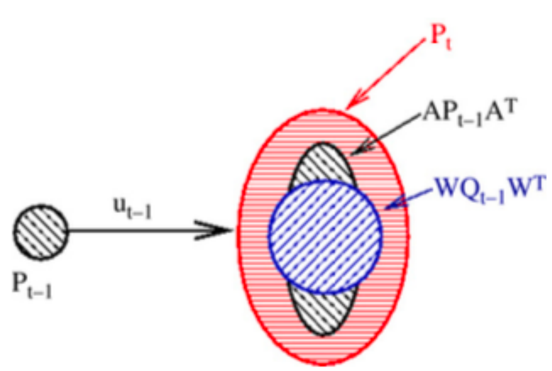
$$s_t^- = (x_t^- \quad y_t^- \quad \theta_t^-)^{\mathrm{T}} = f(s_{t-1}, u_{t-1}, 0) = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ \theta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u_{t-1}^x + w_{t-1}^x)\cos\theta_{t-1} - (u_{t-1}^y + w_{t-1}^y)\sin\theta_{t-1} \\ (u_{t-1}^x + w_{t-1}^x)\sin\theta_{t-1} + (u_{t-1}^y + w_{t-1}^y)\cos\theta_{t-1} \\ u_{t-1}^\theta + w_{t-1}^\theta \end{pmatrix}$$



$$A_t = \frac{\partial f}{\partial s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_{t-1}^y \cos\theta_{t-1} - u_{t-1}^x \sin\theta_{t-1} \\ 0 & 1 & u_{t-1}^x \cos\theta_{t-1} - u_{t-1}^y \sin\theta_{t-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_t^- = A_t P_{t-1} A_t^{\mathrm{T}} + W_t Q_{t-1} W_t^{\mathrm{T}}$$

$$Q_t = E[w_t w_t^{\mathrm{T}}] = \begin{pmatrix} (0.3u_{t-1}^x)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0.3u_{t-1}^y)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0.3u_{t-1}^\theta + \frac{\sqrt{(u_{t-1}^x)^2 + (u_{t-1}^y)^2}}{500})^2 \end{pmatrix}$$



$$W_t = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{t-1} & -\sin\theta_{t-1} & 0 \\ \sin\theta_{t-1} & \cos\theta_{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889007001224

Un ejemplo: EKF para localizar un robot

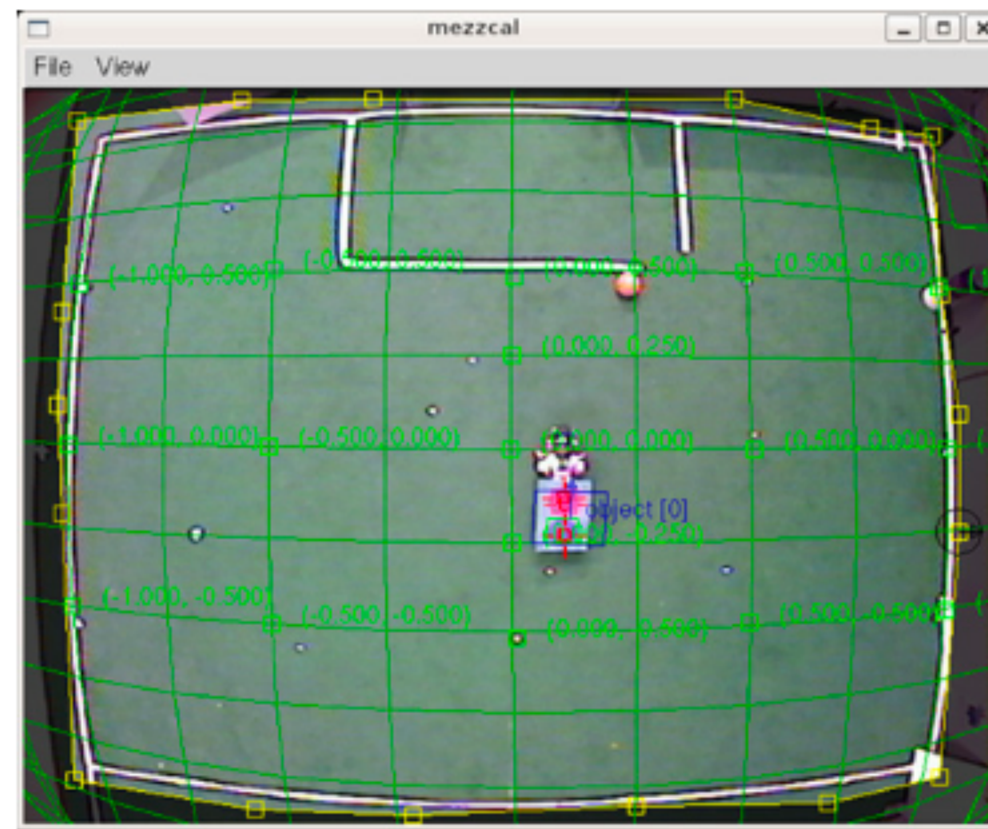
- Actualización

$$s_t = s_{t-1} + K_t^i(z_t^i - \hat{z}_t^i) = s_{t-1} + K_t^i(z_t^i - h^i(s_{t-1}))$$

$$\hat{z}_t^i = h^i(s_{t-1}) = \begin{pmatrix} \text{distance}(m^i, s_{t-1}) \\ \text{angle}(m^i, s_{t-1}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{t,x}^i - s_{t-1,x})^2 + (m_{t,y}^i - s_{t-1,y})} \\ \text{atan2}(m_{t,x}^i - s_{t-1,x}, m_{t,y}^i - s_{t-1,y}) - s_{t-1,\theta} \end{pmatrix}$$

$$K_t^i = P_{t-1}(H_t^i)^{\mathrm{T}}(S_t^i)^{-1}$$
$$S_t^i = H_t^i P_{t-1}(H_t^i)^{\mathrm{T}} + R_t^i$$
$$H_t^i = \frac{\partial h^i(s_{t-1})}{\partial s_t}$$
$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{m_{t,x}^i - s_{t-1,x}}{\sqrt{q}} & -\dfrac{m_{t,y}^i - s_{t-1,y}}{\sqrt{q}} & 0 \\ \dfrac{m_{t,y}^i - s_{t-1,y}}{q} & -\dfrac{m_{t,x}^i - s_{t-1,x}}{q} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q = (m_{t,x}^i - s_{t-1,x})^2 + (m_{t,y}^i - s_{t-1,y})^2$$

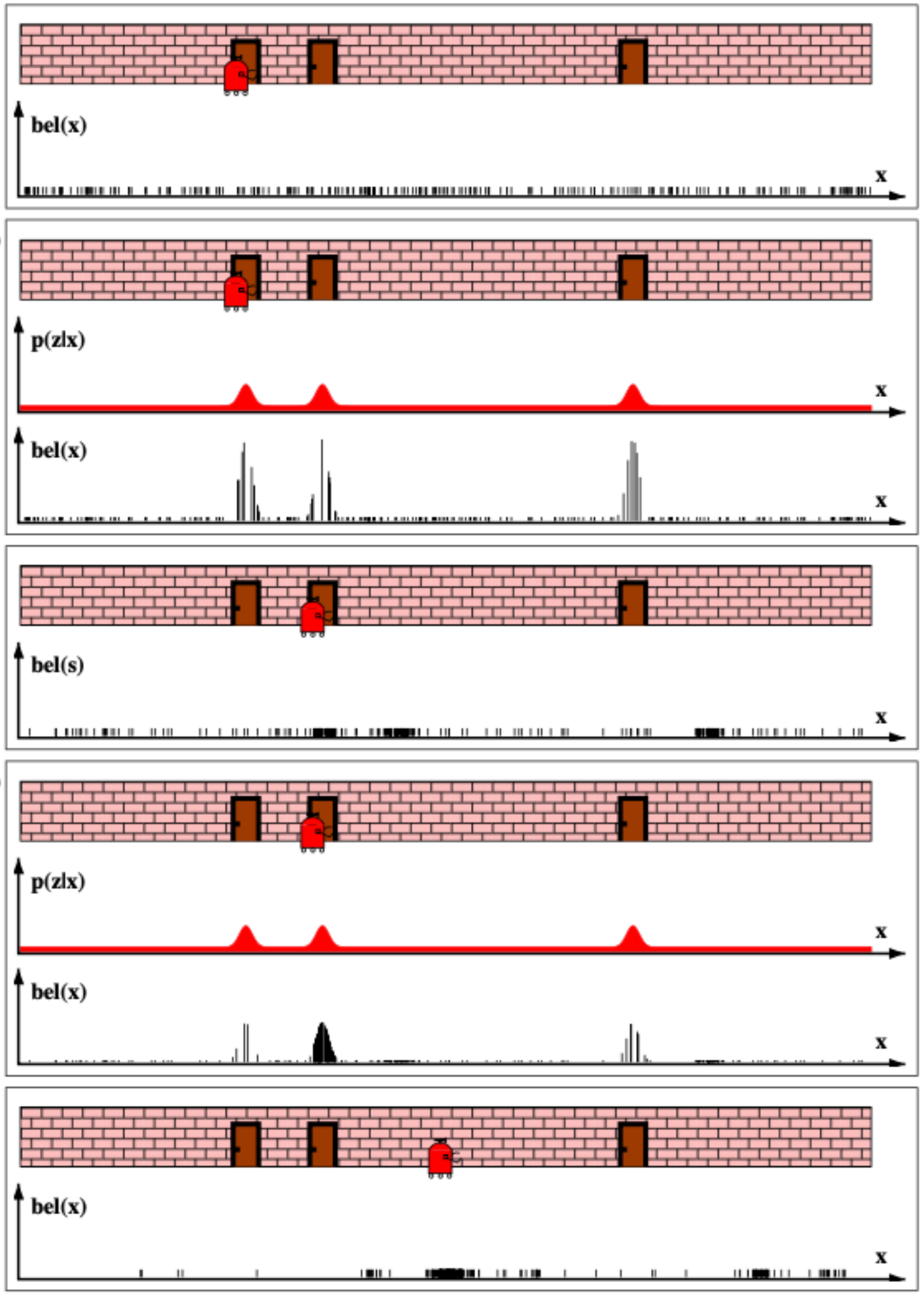


https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889007001224

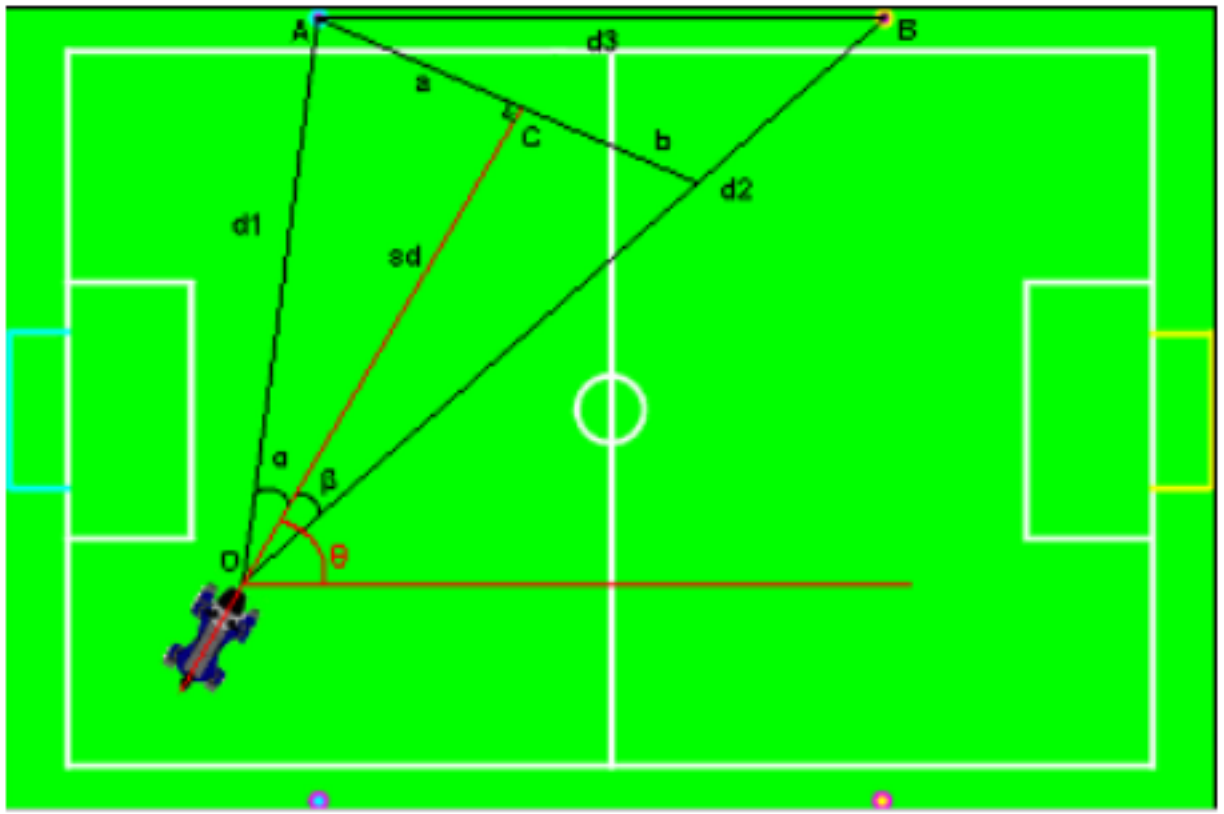
Filtros de Partículas

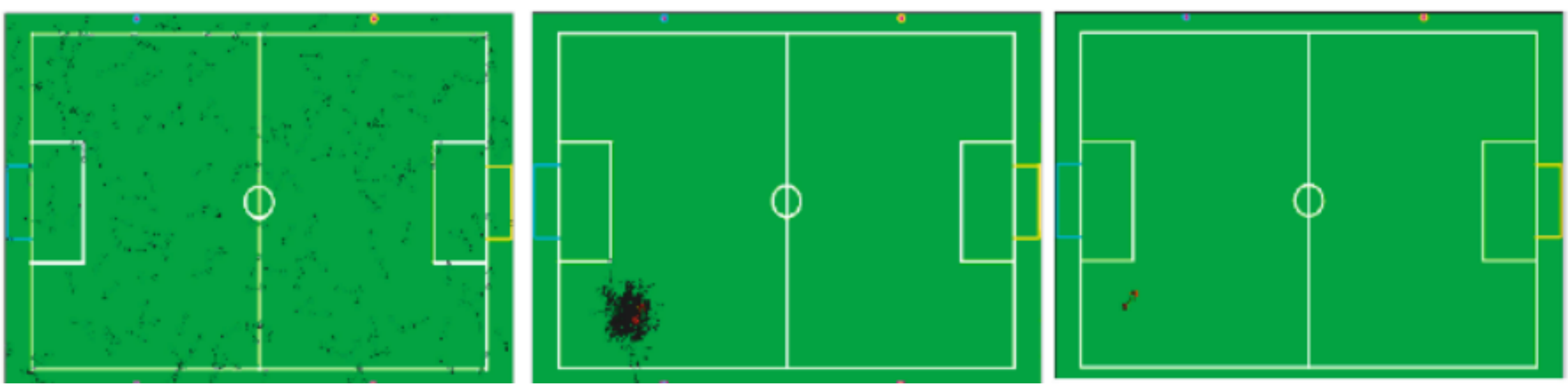
- Se genera una población de partículas de la distribución $\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$
- Entonces, se produce el siguiente ciclo de manta continua:

  1. Predicción: Por cada partícula, se calcula x_{t+1} a partir de x_t siguiendo $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid x_t)$
  2. Actualización: Cada muestra se pondera por la probabilidad de que se asigne a la nueva evidencia, $P(e_{t+1} \mid x_{t+1})$
  3. Resampling: Se reconstruye la distribución $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{\mathbf{t+1}})$ a partir de la población de partículas y se genera una nueva población de partículas



Un ejemplo: MCL para localizar un robot





https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F11780519.pdf página 640

Intelligent Robotics Lab

Ejercicio

Un profesor quiere saber si los estudiantes duermen lo suficiente. Cada día, el profesor observa si los estudiantes duermen en clase y si tienen los ojos rojos. El profesor tiene la siguiente teoría del dominio:

- La probabilidad previa de dormir lo suficiente, sin observaciones, es 0,7.
- La probabilidad de dormir lo suficiente la noche t es 0.8 dado que el estudiante durmió lo suficiente la noche anterior, y 0.3 si no.
- La probabilidad de tener los ojos rojos es 0.2 si el estudiante durmió lo suficiente y 0.7 si no.
- La probabilidad de dormir en clase es 0.1 si el estudiante durmió lo suficiente y 0.3 si no.

Formula esta información como un modelo oculto de Markov que tiene una sola variable de observación. Proporciona las tablas de probabilidad completas para el modelo.