Inteligencia Artificial — Problemas de Lógica

1. Lógica proposicional I

Justificar si son correctas o incorrectas

Las relaciones de implicación, en general, se demuestran acudiendo a su definición: A ⊨ B si y solo si en todos los modelos en los que A es verdadero, B es verdadero. Para ello, podemos:

- Construir (parte de) la tabla de verdad, comprobando que, en todos los casos en los que la parte izquierda es verdadera, la parte derecha también lo es.
- Aplicar la misma idea que los solucionadores SAT: demostrar que A ∧ ¬B es insatisfacible; o sea, que no hay ningún modelo en el que se cumpla.

(i) $Falso \vDash Verdadero$

Correcto, porque Falso no se cumple en ningún modelo y, por lo tanto, implica cualquier sentencia que queramos, y porque Verdadero es verdadero en todos los modelos y, por lo tanto, está implicado en cualquier sentencia.

(ii) $Verdadero \vDash Falso$

Incorrecto, por lo contrario que (i): Verdadero no implica ninguna sentencia y ninguna sentencia implica Falso.

(iii) $(X \vee Y) \vDash Y$

Incorrecto: (X ∨ Y) ⊨ Y si y solo si (X ∨ Y) ∧ ¬Y es insatisfacible; sin embargo, la última es satisfecha con X = verdadero and Y = falso.

(iv) $(A \wedge B) \vDash (A \Leftrightarrow B)$

Correcto, porque el lado izquierdo se cumple en solo un modelo, que es uno de los dos modelos en los que el lado derecho también se cumple (que son A=verdadero, B=verdadero y A=falso, B=falso)

(v) $(A \Leftrightarrow B) \vDash (A \vee B)$

Incorrecto, porque uno de los modelos que cumplen A ⇔ B es A=falso, B=falso, lo que no satisface A ∨ B.

(vi) $(A \Leftrightarrow B) \vDash (\neg A \vee B)$

Correcto, porque el lado derecho es A ⇒ B, una de las conjunciones en la definición de A ⇔ B.

(vii) $((A \wedge B) \Longrightarrow C) \vDash ((A \Longrightarrow C) \vee (B \Longrightarrow C))$

Correcto, porque el lado derecho es falso solo cuando ambas disyunciones son falsas, es decir, cuando A y B son verdaderas y C es falsa, en cuyo caso la parte izquierda también es falsa.

(viii) $\neg X \vee (Y \wedge Z) \vDash (X \Longrightarrow Y)$ (Nota: recordar la equivalencia lógica $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$)

Correcto: A través del mismo razonamiento que en la parte anterior, podemos intentar demostrar que (¬X ∨ (Y ∧ Z)) ∧ ¬ (X ⇒ Y) es insatisfacible de la siguiente manera:

- (¬X ∨ (Y ∧ Z)) ∧ ¬ (X ⇒ Y)
- (¬X ∨ (Y ∧ Z)) ∧ ¬ (¬X ∨ Y)
- (¬X ∨ (Y ∧ Z)) ∧ (X ∧ ¬Y)

Está claro que para que el lado derecho se evalúe como verdadero, X = verdadero e Y = falso. Sin embargo, esa configuración que hace que el lado izquierdo se evalúe automáticamente como falso. Por lo tanto, todo es insatisfacible, por lo que el original es correcto.

(ix) $(X \vee Y) \wedge (Z \vee \neg Y) \vDash (X \vee Z)$

Correcto. Podemos volver a demostrar la insatisfacibilidad la sentencia en que el lado izquierdo es verdadero y el derecho es falso. Para que el lado derecho se evalúe como falso, X=falso y Z=falso. Al conectarlos, el lado izquierdo evalúa a (falso ∨ Y) ∧ (falso ∨ ¬Y), que nunca puede evaluarse como verdadero. Por lo tanto, ese caso nunca se sostiene, por lo que la implicación es válida.

(x) $(A \vee B) \wedge \neg(A \Longrightarrow B)$ es satisfacible

Correcto. Se satisface con el modelo *A*=verdadero y *B*=falso.

2. Lógica proposicional II

Decide si cada una de las siguientes oraciones es válida, insatisfacible o ninguna:

Válida: es verdadera en todos los modelos. No puede no cumplirse.

Inatisfacible: es falsa en todos los modelos. No puede cumplirse.

(i) $Humo \Longrightarrow Humo$

Válida. Se cumple en todos los modelos.

(ii) $Humo \Longrightarrow Fuego$

Ninguna. No es válida, porque no se cumple en el modelo Humo=verdadero, Fuego=falso. Tampoco es insatisfacible, porque se cumple, por ejemplo, en el modelo Humo=verdadero, Fuego=verdadero.

(iii) $Humo \vee Fuego \vee \neg Fuego$

Válida. En todos los modelos, o bien Fuego=verdadero, o bien ¬Fuego=verdadero.

(iv) $((Humo \wedge Calor) \Longrightarrow Fuego) \Longleftrightarrow ((Humo \Longrightarrow Fuego) \vee (Calor \Longrightarrow \ Fuego))$

Válida. Hay que llevar a cabo el mismo razonamiento que en el Ejercicio 1, apartado vii, en los dos sentidos (el lado izquierdo solo es falso cuando Humo y Calor son verdaderas y Fuego falsa, caso en el que el lado derecho también es falso).

3. Lógica proposicional III

Considere la siguiente sentencia:

$$[(Comida \Longrightarrow Fiesta) \vee (Bebidas \Longrightarrow Fiesta)] \Longrightarrow [(Comida \wedge Bebidas) \Longrightarrow Fiesta]$$

(a) Determinar si esta sentencia es válida, satisfacible (pero no válida), o insatisfacible

Una tabla de verdad simple tiene ocho filas y muestra que la oración es verdadera para todos los modelos y, por lo tanto, válida.

También podemos razonar que la sentencia solo es falsa si la parte izquierda del símbolo condicional es verdadera y la derecha falsa (por definición de condicional). Para que la derecha sea falsa, Fiesta tiene que ser falsa cuando Comida y Bebidas son verdaderas. En ese caso, la parte izquierda también es falsa, por lo que no hay ningún modelo en el que no se cumpla la sentencia.

(b) Convertir los lados izquierdo y derecho de la implicación principal a CNF

Para el lado izquierdo tenemos

- (Comida ⇒ Fiesta) ∨ (Bebidas ⇒ Fiesta)
- (¬Comida ∨ Fiesta) ∨ (¬Bebidas ∨ Fiesta)
- (¬Comida ∨ Fiesta ∨ ¬Bebidas ∨ Fiesta)
- (¬Comida ∨ ¬Bebidas ∨ Fiesta)

Para el lado derecho tenemos:

- (Comida ∧ Bebidas) ⇒ Fiesta
- ¬(Comida ∧ Bebidas) ∨ Fiesta
- (¬Comida ∨ ¬Bebidas) ∨ Fiesta
- (¬Comida ∨ ¬Bebidas ∨ Fiesta)

(c) ¿Qué observas sobre los lados izquierdo y derecho después de convertir a CNF? Explica cómo prueban tus resultados la respuesta al apartado i)

Los dos lados son idénticos en CNF y, por lo tanto, la oración original es de la forma P ⇒ P, que es válida para cualquier P.