

Discussion3-topic2

一、题目描述:

(1) 设计并实现一个稳定的一阶全通 IIR 滤波器（零极点自行安排），再级联成 N 阶（N 较大），计算此 N 阶全通滤波器的相位时延和群时延；讨论 N 的大小对时延的影响。

(2) 产生一段音频（注意设置频率等参数），通过这个 N 阶滤波器，输出结果，分析相位延迟的影响。

二、N 阶全通滤波器的相位时延和群时延:

根据题目要求,对于 N 个一阶全通滤波器级联而得到的 N 阶全通滤波器的设计。先由一阶因果全通传输函数表达式构造一个稳定因果全通传输函数,再将其进行级联得到传输函数表达式。根据表达式我们可以得到其相位延迟和群延迟。

1. 级联 N 阶全通滤波器的传输函数表达式

对于 M 阶因果全通传输函数,其表达式为:

$$A(z) = \pm \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

其中系数 a 决定系统的零极点,若要满足题目中的稳定全通滤波器,则需要构造的极点在单位圆以内。

由 N 个该一阶全通滤波器级联,得到的表达式并可以表示为:

$$A_N(z) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

令 $z = e^{j\omega}$ 可得表达式为:

$$H(e^{j\omega}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}}$$

2. 级联 N 阶全通滤波器的相位延迟和群延迟

在设计该一阶全通滤波器得零极点时,需要满足其极点在单位圆以内的要求。即 $|a| < 1$, 为方便分析,选用 $a = 0.9$ 。

确定了该一阶全通滤波器传输函数,为得到其相位函数,我们将表达式重写为:

$$A(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - 0.9}{1 - 0.9e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - 0.9e^{j\omega}}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$$

其相位函数很容易求得,为:

$$\theta_c(w) = -w - 2\arctan\left[\frac{0.9\sin w}{1 - 0.9\cos w}\right]$$

求得一阶全通滤波器的相位函数后，根据级联的性质我们很容易求得其相位函数为一阶相位函数的 N 倍。由相位延迟的定义可以得到：

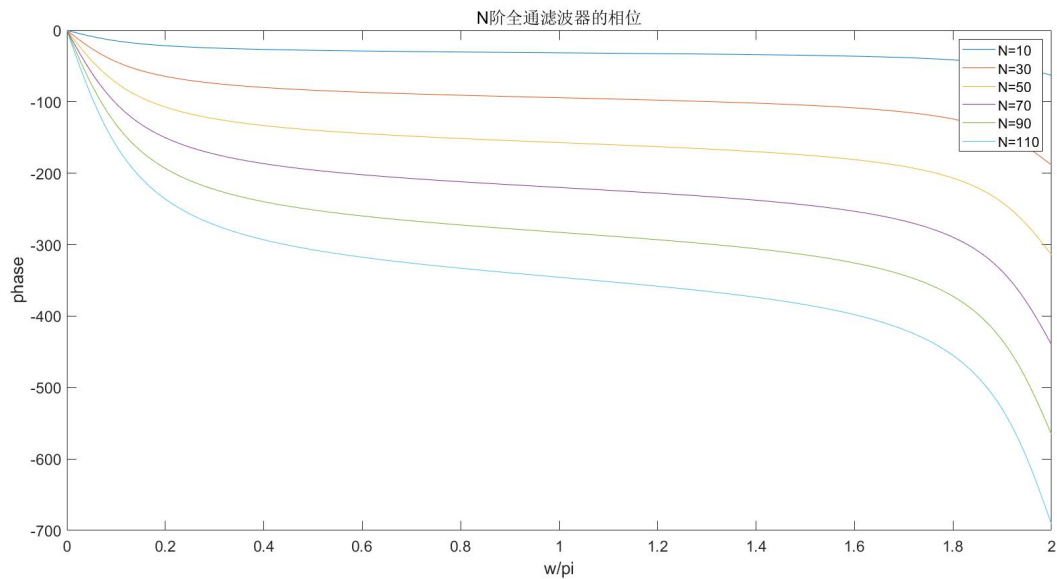
$$\tau_p(w) = -N \frac{\theta_c(w)}{w} = N + 2N \frac{\arctan \frac{0.9\sin w}{1-0.9\cos w}}{w}$$

由群延时的定义可以得到：

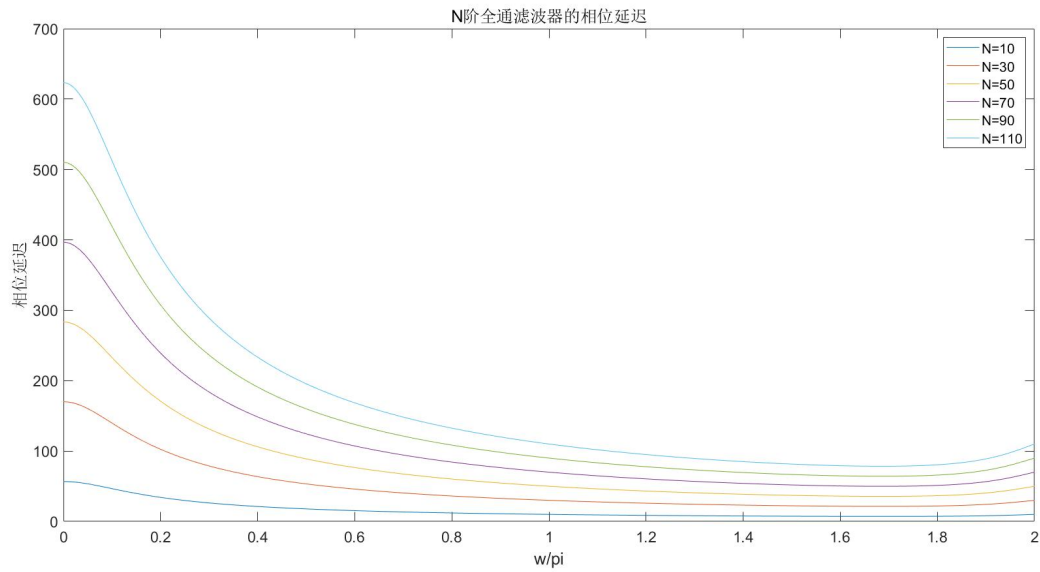
$$\tau_g(w) = -N \frac{d\theta_c(w)}{dw} = N + 2N \frac{d}{dw} \arctan \frac{0.9\sin w}{1 - 0.9\cos w}$$

由计算结果可以知道，群时延和相位时延都是一阶全通滤波器的群时延和相位时延的 N 倍，可知 N 阶全通滤波器的群时延和相位时延随 N 增大而增大。

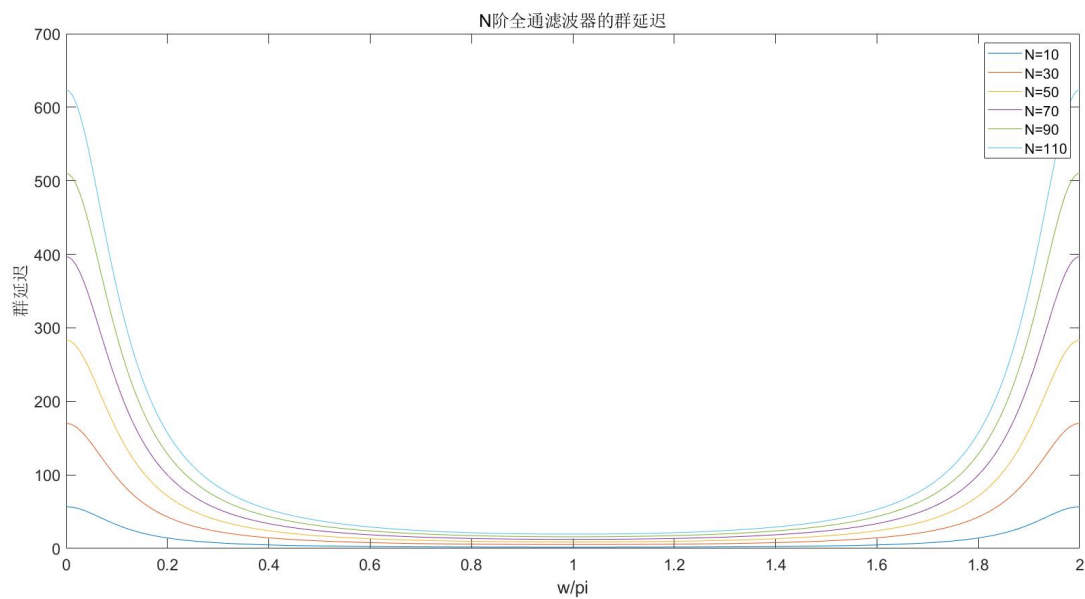
为验证理论计算结果，我们分别取 $N=10、30、50、70、90、110$ 画出其群时延和相位时延的结果图：



N 阶全通滤波器的相位



N 阶全通滤波器的相位延迟



N 阶全通滤波器的群延迟

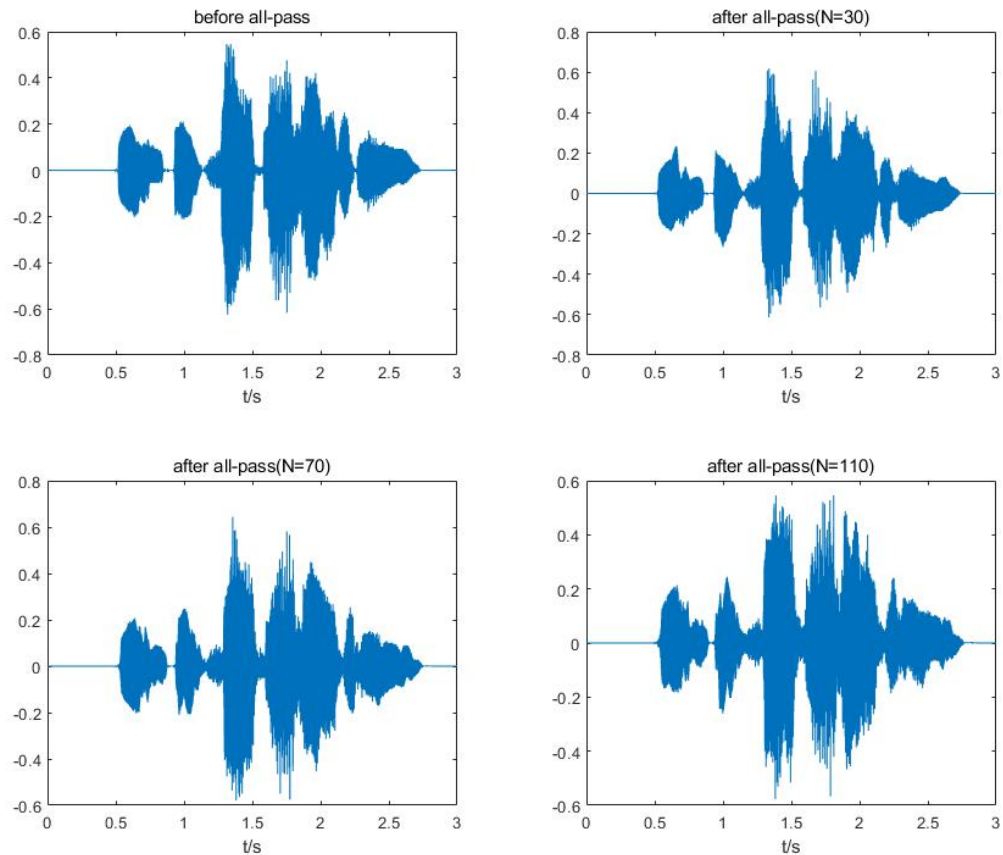
从结果图我们可以发现,随着 N 的增大,其相位时延和群时延都增大,符合理论计算的结果。

三、N 阶全通滤波器处理音频数据:

音频数据的读取:

首先使用 16khz 的采样频率录制时长为 3s 的音频,再以相同的采样频率对音频数据进行读取,分别通过阶数 $N=30、70、110$ 的全通滤波器,观察原始波形和通

过滤器后的波形图



音频波形图

根据之前的计算结果，可以发现理论上全通滤波器的相位延迟随阶数的增大而增大，从结果图中我们看出，随着阶数增大可以发现波形整体时移的现象变得明显，并且由于不同频率分量的相位时延不同，波形失真的现象也越来越严重

四、MATLAB 代码：

第一小问：

```
n=1:1:length(x);  
w=2*pi*n/length(n);  
allpass=(-0.7+exp(-1i*w))./(1-0.7*exp(-1i*w));%设极点为 0.7  
theta=-w-2*atan(0.7*sin(w)./(1-0.7*cos(w)));  
syms w1  
theta1=-w1-2*atan(0.7*sin(w1)./(1-0.7*cos(w1)));
```

```
group=diff(theta1,w1);%=(2*((7*cos(w1))/(10*((7*cos(w1))/10 - 1))
+ (49*sin(w1)^2)/(100*((7*cos(w1))/10 -
1)^2)))/((49*sin(w1)^2)/(100*((7*cos(w1))/10 - 1)^2) + 1) - 1
```

```
%%
```

```
% 画一阶全通滤波器的幅度和相位
```

```
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(w/pi,abs(allpass));
xlabel('w/pi');
ylabel('magnitude');
axis([0 2 0 2]);
title('一阶全通滤波器的幅度');
set(gca,'FontSize',14);

subplot(2,1,2)
plot(w/pi,unwrap(angle(allpass)));
xlabel('w/pi');
ylabel('phase');
title('一阶全通滤波器的相位');
set(gca,'FontSize',14);
```

```
%%
```

```
%画 N 阶全通滤波器的相位
```

```
figure(2)
for N=10:20:110
    %subplot(3,1,1);
    plot(w/pi,unwrap(angle(allpass.^N)));
    hold on
    xlabel('w/pi');
    ylabel('phase');
    legend({'N=10','N=30','N=50','N=70','N=90','N=110'});
    title('N 阶全通滤波器的相位');
    set(gca,'FontSize',14);
end
```

```
hold off
```

```
%%
```

```
%画 N 阶全通滤波器的相位延迟
```

```
figure(3)
for N=10:20:110
    tao_phase=-N*theta./w;
    plot(w/pi,tao_phase);
    hold on
    xlabel('w/pi');
```

```

        ylabel('相位延迟');
        legend({'N=10','N=30','N=50','N=70','N=90','N=110'});
        title('N 阶全通滤波器的相位延迟');
        set(gca,'FontSize',14);
    end
    hold off
    %%
    %画 N 阶全通滤波器的群延迟
    figure(4)
    for N=10:20:110
        tao_group=-N.*((2.*((7.*cos(w))./(10.*((7.*cos(w))./10 - 1))
+ (49*sin(w).^2)./(100.*((7.*cos(w))./10 -
1).^2)))./((49.*sin(w).^2)./(100.*((7.*cos(w))./10 - 1).^2) + 1)
- 1);
        plot(w/pi,tao_group);
        hold on
        xlabel('w/pi');
        ylabel('群延迟');
        legend({'N=10','N=30','N=50','N=70','N=90','N=110'});
        title('N 阶全通滤波器的群延迟');
        set(gca,'FontSize',14);
    end
end

```

第二小问：

```

%读取音频数据
y=audioread('sound_mix.wav');
N=length(y);
w=linspace(0,2*pi,N)';
t=linspace(0,3,N);
Yw=fft(y);
%原始音频波形图
subplot(2,2,1)
plot(t,y);
title('before all-pass');
xlabel('t/s');
%经过全通过滤波器后的音频波形图
subplot(2,2,2)
%指定阶数
N_order=30;
Hw=( (exp(-1j*w)-0.9 ) ./ ( 1-0.9*exp(-1j*w)) ).^N_order;

```

```

y=ifft(Yw.*Hw);
plot(t,y)
title('after all-pass(N=30)');
xlabel('t/s');

subplot(2,2,3)
%指定阶数
N_order=70;
Hw=( (exp(-1j*w)-0.9 ) ./ ( 1-0.9*exp(-1j*w)) ).^N_order;
y=ifft(Yw.*Hw);
plot(t,y)
title('after all-pass(N=70)');
xlabel('t/s');

subplot(2,2,4)
%指定阶数
N_order=110;
Hw=( (exp(-1j*w)-0.9 ) ./ ( 1-0.9*exp(-1j*w)) ).^N_order;
y=ifft(Yw.*Hw);
plot(t,y)
title('after all-pass(N=110)');
xlabel('t/s');

```