

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра математического моделирования и анализа данных

Кожановский Василий Николаевич

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА,
ОСНОВАННЫХ НА ИНТЕРПОЛЯЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ
ФУНКЦИИ**

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

студента 5 курса 7 группы

”Допустить к защите”

Руководитель работы

“ ____ ” _____ 2016 г.

Научный руководитель

Егоров Александр Дмитриевич

доктор физико-математических
наук, профессор,

Институт математики НАН Бела-
руси

Минск 2017

РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 20 стр., 2 табл., 1 приложение, 5 источников.

Ключевые слова: ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ФОРМУЛА ИНТЕРПОЛЯЦИИ, АПРОКСИМАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ПРОЦЕССА.

Объект исследования – математическое ожидание функционалов от гауссовского процесса.

Цель работы – применение формулы интерполяции корреляционной функции гауссовского процесса к приближенному вычислению функционалов от процессов.

Методы исследования – методы вычислительной математики, теория случайных процессов.

Результатом являются полученные оценки точности метода вычисления мат. ожиданий функционалов.

Областью применения является аппроксимация математических ожиданий функционалов от гауссовских процессов.

РЭФЕРАТ

Дыпломная праца, 20 с., 2 табл., 1 дадатак, 5 крыніц.

Ключавыя словы: ГАУСЫВЫ ПРАЦЭСЫ, ФОРМУЛА ІНТЭРПАЛЯЦЫ, МАТЭМАТЫЧНАЕ ЧАКАННЕ, ФУНКЦЫЯНАЛЫ АД ПРАЦЭСУ.

Аб’ект даследавання – матэматычнае чаканне ад гаусавых прасэсаў.

Мэта працы – даследаваць апраксімацыі матэматычных чаканняў функцыяналаў ад рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўненняў.

Метады даследавання – метады вылічальнай матэматыкі, тэорыя выпадковых працэсаў.

Вынікам з’яўляюцца атрыманыя ацэнкі дакладнасці метаду вылічэння мат. чакання функцыяналаў.

Вобласцю ўжывання з’яўляецца апраксімацыя матэматычных чаканняў функцыяналаў.

ABSTRACT

Graduation assignment, 2 p., 2 tables, 1 app, 5 sources.

Keywords: GAUSSIAN PROCESSES, INTERPOLATION FORMULA, MATHEMATICAL EXPECTATION, FUNCTIONALS.

Research object – mathematical expectation from gaussian processes.

Purpose of the work – explore the approximation of the mathematical expectations of functionals of solutions of stochastic differential equations.

Research methods – methods of computational mathematics, chaotic decomposition.

The result is obtained estimates of the accuracy of the method of calculating the math. functional expectations.

Sphere of application is approximation of the mathematical expectations of functionals.

Содержание

Введение	5
1 Формула преобразования математического ожидания при интерполяции корреляционной функции	12
2 Описание метода аппроксимации функционалов от гауссовского процесса, основанного на формуле интерполяции	16
3 Численные результаты	18
Приложение 1. Листинг программы	22

Введение

Применение приближенных формул к вычислению математических ожиданий функционалов от гауссовских процессов вида $f(x) = \exp\{-\int_0^T V(x(t))dt\}$ сильно зависит от величины T . Имеющиеся в литературе приближенные формулы теряют свою эффективность при $T > 1$. В данной работе рассматривается метод преобразования математических ожиданий от гауссовского процесса, заданного на $[0; T]$, к математическим ожиданиям от гауссовских процессов, заданных на промежутках меньшей длины.

Семейство S -значных случайных величин $X = (X_t) = (X_t(\omega))$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$, называется S -значным случайным процессом, где (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство, а S называется фазовым пространством процесса X . Если $S = \mathbb{R}^n$, то процесс называется n -мерным, а если $n = 1$, то процесс называется действительным случайным процессом. Для действительного случайного процесса мера в \mathbb{R}^n , определяемая равенством

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B) \equiv P_{t_1, \dots, t_n}^X(B) = P\{\omega \in \Omega : (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

называется конечномерным распределением X . Наиболее часто конечномерное распределение задается конечномерной функцией распределения процесса

$$F_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = P_{t_1, \dots, t_n}((-\infty, u_1] \times \dots \times (-\infty, u_n]).$$

При рассмотрении случайных процессов основным вычислительным соотношением является

$$Eg(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \int_{\Omega} g(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(u_1, \dots, u_n)dF_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n).$$

Функция $t \rightarrow X_t(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ называется выборочной функцией или траекторией процесса.

Процесс называется непрерывным, непрерывным справа или слева, если почти все траектории процесса обладают соответствующим свойством.

Далее в работе рассматривается гауссовский случайный процесс, функция распределения которого задается плотностью. Плотность конечномерного распределения гауссовского процесса задаётся равенством:

$$p_{t_1, \dots, t_n}(u) = (2\pi)^{-n/2} (\det B)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (B^{-1}(u - m), u - m) \right\},$$

где B – матрица с элементами $b_{ij} = B(t_i, t_j)$, $i, j = 1 \dots n$; $m = (m(t_1), \dots, m(t_n))$, $u = (u_1, \dots, u_n)$; $B(t, s)$ и $m(t)$ – заданные функции. Здесь

$$(B^{-1}(u - m), u - m) = \sum_{k, j=1}^n c_{kj} (u_k - m(t_k))(u_j - m(t_j)),$$

где c_{kj} – элемент матрицы B^{-1} обратной к матрице B .

Равенство (1) в случае гауссовского процесса имеет вид:

$$\begin{aligned} Eg(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) &\equiv \int_{\Omega} g(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) dP(\omega) = \\ &= \int_{R^n} g(u) (2\pi)^{-n/2} (\det B)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (B^{-1}(u - m), u - m) \right\} d^n u, \end{aligned}$$

где $d^n u = du_1 \dots du_n$.

Непосредственным вычислением по формуле (2) можно найти, что

$$m(t) = E[X(t)], \quad B(t, s) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))].$$

Функции $m(t)$ и $B(t, s)$ называются средним значением и корреляционной функцией гауссовского процесса X_t .

Будем предполагать далее, что выборочные функции (траектории) рассматриваемого гауссовского процесса непрерывны.

Часто используемым объектом, рассматриваемым в теории гауссовских процессов, является функционал от траекторий гауссовского процесса. Наиболее простым объектом такого типа является функционал вида

$$\langle \xi, X \rangle = \int_0^T X_t d\xi(t), \tag{1}$$

где $\xi = \xi(s)$ – функция ограниченной вариации.

В силу непрерывности траекторий процесса и ограниченности вариации функции ξ , интеграл в правой части (1) существует как интеграл Стильеса для всех $\omega \in \Omega$ и имеет место равенство

$$\int_0^T X_t d\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X_{t_k} [\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)], \tag{2}$$

где $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ – разбиение отрезка $[0, T]$; $\Delta t = \max(t_{k+1} - t_k), k = 1, \dots, n$.

При вычислениях, связанных с гауссовскими процессами, мы будем использовать следующее равенство

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n/2}(\det A)^{-1/2} \int_{R^n} \exp \left\{ -i(u, v) - \frac{1}{2}(A^{-1}u, u) \right\} d^n u = \\ = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(Av, v) \right\}, \end{aligned}$$

где A – произвольная невырожденная матрица, i – мнимая единица.

Для случая $n = 1$ эта формула имеет вид:

$$\int_R \exp\{au^2 + bu\} du = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} \exp\{-b^2/4a\}.$$

Можно показать, что функционал $\langle \xi, X \rangle$ является гауссовской случайной величиной. Среднее значение и дисперсию этой величины можно вычислить с помощью характеристического функционала гауссовского процесса, определяемого равенством

$$\chi_X(\xi) = E \left[\exp \left\{ i \langle \xi, X \rangle \right\} \right].$$

Используя аппроксимацию (2), можно показать, что

$$E \left[\exp \left\{ i \langle \xi, X \rangle \right\} \right] = \exp \left\{ i \int_0^T m(t) d\xi(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B(t, s) d\xi(t) d\xi(s) \right\}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) $\lambda \xi$ вместо ξ , получим равенство

$$E \left[\exp \left\{ i \lambda \langle \xi, X \rangle \right\} \right] = \exp \left\{ i \lambda \int_0^T m(t) d\xi(t) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T \int_0^T B(t, s) d\xi(t) d\xi(s) \right\},$$

из которого следует, что характеристическая функция случайной величины $\langle \xi, X \rangle$ является х. ф. гауссовской случайной величины, имеющей среднее значение и дисперсию

$$m(\xi) = \int_0^T m(t) d\xi(t), \quad K(\xi, \xi) = \int_0^T \int_0^T B(t, s) d\xi(t) d\xi(s).$$

Подставляя в (3) $\sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j$ вместо ξ , получим равенство

$$E \left[\exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \xi_j, X \rangle \right\} \right] = \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \lambda_j \int_0^T m(t) d\xi_j(t) - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n \lambda_k \lambda_j \int_0^T \int_0^T B(t, s) d\xi_k(t) d\xi_j(s) \Big\}, \quad (4)$$

из которого следует, что характеристическая функция случайного вектора $(\langle \xi_1, X \rangle, \dots, \langle \xi_n, X \rangle)$ является х. ф. гауссовского случайного вектора, имеющего вектор среднего значения и матрицу ковариации с элементами

$$m(\xi_j) = \int_0^T m(t) d\xi_j(t), \quad K(\xi_k, \xi_j) = \int_0^T \int_0^T B(t, s) d\xi_k(t) d\xi_j(s).$$

Отсюда следует, что плотность распределения случайного вектора $(\langle \xi_1, X \rangle, \dots, \langle \xi_n, X \rangle)$ имеет вид

$$p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(u) = (2\pi)^{-n/2} (\det K)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (K^{-1}(u - m), u - m) \right\},$$

где K – матрица с элементами $K(\xi_i, \xi_j)$, $i, j = 1 \dots n$; $m = (m(\xi_1), \dots, m(\xi_n))$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, и имеет место формула

$$E[g(\langle \xi_1, X \rangle, \dots, \langle \xi_n, X \rangle)] = \int_{R^n} g(u) p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(u) d^n u.$$

В частности,

$$E[g(\langle \xi, X \rangle)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi K(\xi, \xi)}} \int_R g(u) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(u - m(\xi))^2}{K(\xi, \xi)} \right\} du.$$

Характеристический функционал (а именно, равенство (4)) может быть использован для вычисления моментов:

$$E \left[\prod_{k=1}^n \langle \xi_k, X \rangle \right] = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\lambda_1 \dots d\lambda_n} \chi_X \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \right) \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}. \quad (5)$$

Будем полагать в дальнейшем $m(t) = 0$ и, следовательно, $m(\xi) = 0$. Тогда

$$E[\langle \xi, X \rangle \langle \eta, X \rangle] = K(\xi, \eta).$$

Пусть далее выполняется условие

$$K(\xi, \xi) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда } \xi = 0. \quad (6)$$

В силу нашего предположения о непрерывности траекторий процесса, корреляционная функция $B(t, s)$ является непрерывной по двум переменным и, следовательно, удовлетворяет условию

$$\int_0^T B(t, t) dt \leq \infty,$$

из которого следует, что ядро $B(t, s)$ обладает счетным набором собственных значений и собственных функций $\lambda_j, \phi_j, j = \overline{1, n}$, причем сумма собственных значений конечна:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_j \leq \infty.$$

Собственные функции $\phi_j, j = \overline{1, n}$, образуют ортонормированный базис в $L_2([0, T])$.

В случае $\xi_j = \varphi_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t \phi_j(\tau) d\tau, j = 1, \dots, n$, в силу того, что

$$\int_0^T \int_0^T B(t, s) \varphi_i(t) \varphi_j(s) dt ds = \delta_{ij}, \quad (K^{-1}u, u) = \sum_{i=1}^n u_i^2,$$

формула (19) преобразуется к виду

$$E[g(\langle \varphi_1, X \rangle, \dots, \langle \varphi_n, X \rangle)] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{R^n} g(u_1, \dots, u_n) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i^2 \right\}. \quad (7)$$

Имеет место разложение

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k, X \rangle e_k(t), \quad (8)$$

где $e_k(t) = \sqrt{\lambda_k} \phi_k(t)$, которое сходится в sup -норме пространства $C[0, T]$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Так как $\langle \varphi_k, X \rangle, k = 1, 2, \dots$, представляют собой независимые стандартные гауссовы величины (со средним 0 и дисперсией 1), для них часто используется обозначение $\xi_k = \langle \varphi_k, X \rangle$, и тогда ряд (8) записывается в виде

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k(t). \quad (9)$$

Частный случай такого ряда

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k \phi_k(t), \quad (10)$$

где λ_k, ϕ_k – собственные значения и собственные функции ядра $B(t, s)$, называется *разложением Карунена-Лоева*.

Имеет место следующая формула

$$E[f(X_{(\cdot)} + a(\cdot))] = E[f(X_{(\cdot)}) \exp\{a\langle X \rangle - \frac{1}{2} \|a\|_{\mathcal{H}}^2\}], \quad (11)$$

Далее будут использоваться вариации и производные случайных функционалов, заданных на траекториях непрерывных гауссовских процессов.

Вариация функционала $f(X_{(\cdot)})$ по направлению $a \in \mathcal{H}$ определяется равенством

$$\delta_a f(X_{(\cdot)}) = \left. \frac{d}{d\lambda} f(X_{(\cdot)} + \lambda a) \right|_{\lambda=0}, \quad (12)$$

$$\delta_{a_1, a_2} f(X_{(\cdot)}) = \left. \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} f(X_{(\cdot)} + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \right|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}.$$

Заметим, что для обычной функции вещественной переменной

$$\delta_a f(u) = \left. \frac{d}{d\lambda} f(u + \lambda a) \right|_{\lambda=0} = a f'(u), \quad u \in R,$$

а для функции n переменных

$$\begin{aligned} \delta_a f(u) &= \left. \frac{d}{d\lambda} f(u + \lambda a) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} f(u_1 + \lambda_1 a_1, \dots, u_n + \lambda_n a_n) \right|_{\lambda=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{u_i} a_i = (f'(u), a)_{R^n}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $f'(u) = \text{grad } f(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f(u)}{\partial u_n} \right)$, $f'_i(u) = \frac{\partial f(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i}$.

Если найдется такой элемент $f'(X_{(\cdot)}) \in V_0[0, T]$, что $\delta_a f(X_{(\cdot)}) = \langle f'(X_{(\cdot)}), a \rangle$, то он называется производной Гато или слабой производной от $f(X_{(\cdot)})$.

Если найдется такой оператор $f''(X_{(\cdot)}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, что

$$\delta_{a_1, a_2} f(X_{(\cdot)}) = (f''(X_{(\cdot)}) a_1, a_2)_{\mathcal{H}},$$

то $f''(X_{(\cdot)}) \equiv f''(X_{(\cdot)})(t, s)$ называется второй производной от $f(X_{(\cdot)})$.

Пример. Пусть $f(\omega) = \langle \xi, \omega \rangle$, тогда $\delta_a f = \langle \xi, a \rangle$ и $f'(x) = \xi$.

Но уже для функционала $a \langle X \rangle$ вариация $\delta_{a_1} (a \langle X \rangle) = (a_1, a)_{\mathcal{H}}$, и ясно, что в общем случае не найдется такого элемента ξ_a , что $(a_1, a)_{\mathcal{H}} = \langle \xi_a, a_1 \rangle$. Таким образом, уже в простых случаях производная Гато не годится в качестве производной функционалов от случайных процессов. Подходящим определением является следующее. Если существует $f'(X_{(\cdot)}) \in \mathcal{H}$ для почти всех $X_{(\cdot)}$ такое, что выполняется равенство

$$\delta_a f(X_{(\cdot)}) = (f'(X_{(\cdot)}), a)_{\mathcal{H}}, \quad (14)$$

то $f'(X_{(\cdot)})$ называется производной $f(X_{(\cdot)})$ по подпространству \mathcal{H} или \mathcal{H} -производной. Для $f'(X_{(\cdot)})$ используется также обозначение $Df(X_{(\cdot)})$.

Используя равенство (11), получим

$$E[\delta_a f(X)] = \left. \frac{d}{d\lambda} E[f(X + \lambda a)] \right|_{\lambda=0} = E[f(X) \frac{d}{d\lambda} \exp \left\{ \lambda a \langle X \rangle - \frac{\lambda^2}{2} \|a\|_{\mathcal{H}}^2 \right\} \Big|_{\lambda=0}],$$

откуда следует

$$E[\delta_a f(X)] = E[f(X)a\langle X \rangle]. \quad (15)$$

Используя (54), а также равенство

$$\delta_a(f(X)g(X)) = (\delta_a f(X))g(X) + f(X)\delta_a g(X), \quad (16)$$

приходим к формуле интегрирования по частям

$$E[(\delta_a f(X))g(X)] = E[f(X)g(X)a\langle X \rangle] - E[f(X)\delta_a g(X)]. \quad (17)$$

Примеры. 1. $D(a\langle X \rangle) = a$.

2. $\delta_{a_1}\langle \xi, X \rangle = \langle \xi, a_1 \rangle = (R\xi, a_1)_{\mathcal{H}}$, откуда следует

$$D(\langle \xi, X \rangle) = R\xi. \quad (18)$$

3. $f(X) = g(a_1\langle X \rangle, \dots, a_n\langle X \rangle)$,

$$\delta_a f(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_j}((a_1\langle X \rangle, \dots, a_n\langle X \rangle)(a, a_j)_{\mathcal{H}}),$$

$$Dg(a_1\langle X \rangle, \dots, a_n\langle X \rangle) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_j}((a_1\langle X \rangle, \dots, a_n\langle X \rangle)a_j).$$

Глава 1

Формула преобразования математического ожидания при интерполяции корреляционной функции

Для двух гауссовских случайных процессов X_t , $t \in [0, T]$, с нулевым средним значением и корреляционными функционалами $K(\xi, \eta)$ и $K_0(\xi, \eta)$ соответственно определим гауссовский процесс с корреляционным функционалом

$$K_u(\xi, \eta) = uK(\xi, \eta) + (1 - u)K_0(\xi, \eta), u \in [0, 1].$$

Соответственно для корреляционных функций имеем

$$B_u(t, s) = uB(t, s) + (1 - u)B_0(t, s), u \in [0, 1].$$

Будем предполагать, что эти гауссовские процессы имеют непрерывные траектории, которые в дальнейшем будем обозначать $X_t = X_t(\omega)$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$.

В обычном анализе имеет место следующая формула

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b f(x)p_0(x)dx + \int_0^1 \frac{d}{du} \int_a^b f(x)p_u(x)dx du, \quad (1.1)$$

где $p_u(x) = up(x) + (1 - u)p_0(x)$. Аналогичная формула имеет место и для математических ожиданий

$$E[f(X_{(\cdot)})] = E_0[f(X_{(\cdot)})] + \int_0^1 \frac{d}{du} E_u[f(X_{(\cdot)})] du, \quad (1.2)$$

Из формулы (1.2) следует следующая формула

$$E[F(X_{(\cdot)})] = E_0[F(X_{(\cdot)})] + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T \int_0^T (B(t, s) - B_0(t, s)) E_u[F''(X_{(\cdot)}; t, s)] dt ds du, \quad (1.3)$$

Докажем ее справедливость для функционалов вида

$$F(X_{(\cdot)}) = \exp\{\langle \xi, X \rangle\}, \quad \forall \xi \in V[0, T].$$

Отсюда будет следовать ее справедливость для произвольных $F(X_{(\cdot)}) \in L_2(\Phi, P)$, в силу того, что любой функционал из этого класса опроксимируется линейными комбинациями функционалов вида $\exp\{\langle \xi, X \rangle\}$.

Возьмем формулу

$$E[F(X_{(\cdot)})] = E_0[F(X_{(\cdot)})] + \int_0^1 \frac{d}{du} E_u[F(X_{(\cdot)})] du, \quad (1.4)$$

и применим ее к функционалу $\exp\{\langle \xi, X \rangle\}$.

Имеем в левой части (1.4):

$$E[\exp\{\langle \xi, X \rangle\}] = \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\right\}.$$

В правой части (1.4):

$$\begin{aligned} E_0[\exp\{\langle \xi, X \rangle\}] &= \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_0(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\right\}, \\ \frac{d}{du} E_u[\exp\{\langle \xi, X \rangle\}] &= \frac{d}{du} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_u(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\right\} = \\ \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_u(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\right\} \int_0^T \int_0^T \frac{d}{du} (uB(t, s) + (1-u)B_0(t, s)) d\xi(t) d\xi(s) &= \\ = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_u(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\right\} \int_0^T \int_0^T \frac{d}{du} (B(t, s) + B_0(t, s)) d\xi(t) d\xi(s) \end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание во втором слагаемом в правой части равенства (1.3) для функционала $F(X_{(\cdot)}) = \exp\{\langle \xi, X \rangle\}$. Для этого вычислим сначала

$$\begin{aligned} \delta_{a_1, a_2} \exp\{\langle \xi, X \rangle\} &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \exp\{\langle \xi, X + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \rangle\} \Big|_{\lambda_1 = \lambda_2 = a} = \\ &= \exp\{\langle \xi, X \rangle\} \langle \xi, a_1 \rangle \langle \xi, a_2 \rangle = \\ &= \int_0^T \int_0^T \exp\{\langle \xi, X \rangle\} a_1(t) a_2(s) d\xi(t) d\xi(s), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(\exp\{\langle \xi, X \rangle\})''(t, s) = \exp\{\langle \xi, X \rangle\} \xi(t) \xi(s). \quad (1.5)$$

И далее, так как

$$\begin{aligned} E_u[(\exp\{\langle \xi, X \rangle\})''(t, s)] &= E_u[\exp\{\langle \xi, X \rangle\}]\xi(t)\xi(s) = \\ &= \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_u(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\right\} \xi(t)\xi(s), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} E_u[\exp\{\langle \xi, X \rangle\}] &= \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_u(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\right\} \times \\ &\times \int_0^T \int_0^T (B(t, s) - B_0(t, s)) d\xi(t) d\xi(s) = \\ &= \int_0^T \int_0^T (B(t, s) - B_0(t, s)) E_u[(\exp\{\langle \xi, X \rangle\})''(t, s)] dt ds, \end{aligned}$$

и далее справедливость формулы (1.3).

Корреляционную функцию $B_0(t, \tau)$ выберем следующим образом:
разобьем область $[0, T] \times [0, T]$ на четыре квадрата

$$[0, T/2] \times [0, T/2], [0, T/2] \times [T/2, T], [T/2, T] \times [0, T/2], [T/2, T] \times [T/2, T]$$

и положим $B_0(t, \tau) = B(t, \tau)$ на диагональных квадратах, и $B_0(t, \tau) = 0$ вне диагональных квадратов.

Применим формулу (1.3) к математическому ожиданию в правой части этой же формулы:

$$\begin{aligned} E[f(X_{(\cdot)})] &= E_0[f(X_{(\cdot)})] + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T \int_0^T (B - B_0)(t, s) E_u[f''(X_{(\cdot)}; t, s)] dt ds du = \\ &= E_0[f(X_{(\cdot)})] + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T \int_0^T (B - B_0)(t_1, s_1) E_0[f''(X_{(\cdot)}; t_1, s_1)] dt_1 ds_1 du_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T \int_0^T (B - B_0)(t_2, s_2) \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T \int_0^T (B_{u_1} - B_0)(t_1, s_1) \times \right. \\ &\quad \left. \times E_{u_1, u_2}[f^{(4)}(X_{(\cdot)}; t_1, s_1; t_2, s_2)] dt_1 ds_1 du_1 \right) dt_2 ds_2 du_2 \\ &= E_0[f(X_{(\cdot)})] + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T (B - B_0)(t_1, s_1) E_0[f''(X_{(\cdot)}; t_1, s_1)] dt_1 ds_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2^2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T u_1 (B - B_0)(t_2, s_2) (B - B_0)(t_1, s_1) \times \\ &\quad \times E_{u_1, u_2}[f^{(4)}(X_{(\cdot)}; t_1, s_1; t_2, s_2)] dt_1 ds_1 dt_2 ds_2 du_1 du_2. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс итерации N раз, приходим к формуле

$$\begin{aligned}
 E[f(X_{(\cdot)})] = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k k!} \int_0^T \overset{(2k)}{\dots} \int_0^T \prod_{j=1}^k (B - B_0)(t_j, \tau_j) \times \\
 \times E[F^{(2k)}(X_{(\cdot)}; t, \tau)] d^k t d^k \tau + r_N(F(X_{(\cdot)})),
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $r_N(F(X_{(\cdot)}))$ — остаток, $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$.

Глава 2

Описание метода аппроксимации функционалов от гауссовского процесса, основанного на формуле интерполяции

Имеет место соотношение

$$E_0[F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)})G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)})] = E[F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)})]E[G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)})], \quad (2.1)$$

где $F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)})$, $G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)})$ – функционалы, зависящие от траекторий процесса X_t на отрезках $[0, T/2]$ и $[T/2, T]$ соответственно.

Приведем пример, который нам понадобится в последующем. Пусть

$$F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)}) = \exp\left\{\int_0^{T/2} f(\tau)X_\tau d\tau\right\},$$

$$G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)}) = \exp\left\{\int_{T/2}^T g(\tau)X_\tau d\tau\right\}.$$

Обозначим $\hat{f}(\tau) = f(\tau)$ на $[0, T/2]$ и $\hat{f}(\tau) = 0$ на $[T/2, T]$, $\hat{g}(\tau) = g(\tau)$ на $[T/2, T]$ и $\hat{g}(\tau) = 0$ на $[0, T/2]$. Тогда имеем для данного случая в левой части (2.1):

$$\begin{aligned} & E_0[F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)})G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)})] = \\ & = E_0[\exp\left\{\int_0^{T/2} f(\tau)X_\tau d\tau\right\} \exp\left\{\int_{T/2}^T g(\tau)X_\tau d\tau\right\}] = \\ & = E_0[\exp\left\{\int_0^T (\hat{f}(\tau) + \hat{g}(\tau))X_\tau d\tau\right\}] = \\ & = \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B(\tau_1\tau_2)(\hat{f}(\tau_1) + \hat{g}(\tau_1))(\hat{f}(\tau_2) + \hat{g}(\tau_2))d\tau_1d\tau_2\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} B(\tau_1 \tau_2) f(\tau_1) f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right\} \times \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2} \int_{T/2}^T \int_{T/2}^T B(\tau_1 \tau_2) g(\tau_1) g(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right\} \times \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^{T/2} \int_{T/2}^T B(\tau_1 \tau_2) \hat{f}(\tau_1) \hat{g}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right\} \times \\
&\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2} \int_{T/2}^T \int_0^{T/2} B(\tau_1 \tau_2) \hat{f}(\tau_1) \hat{g}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right\} =
\end{aligned}$$

[воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{2} \int_0^{T/2} \int_{T/2}^T B(\tau_1 \tau_2) \hat{f}(\tau_1) \hat{g}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} \int_{T/2}^T \int_0^{T/2} B(\tau_1 \tau_2) \hat{f}(\tau_1) \hat{g}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = 0]$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} B(\tau_1 \tau_2) f(\tau_1) f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} \int_{T/2}^T \int_{T/2}^T B(\tau_1 \tau_2) g(\tau_1) g(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right\} = \\
&= E[\exp\left\{\int_0^{T/2} B(\tau_1 \tau_2) f(\tau_1) f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right\}] E[\exp\left\{\int_{T/2}^T B(\tau_1 \tau_2) g(\tau_1) g(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right\}],
\end{aligned}$$

что совпадает с правой частью (2.1).

Глава 3

Численные результаты

Интеграл по гауссовой мере с нулевым средним и корреляционной функцией $B(t, \tau) = \frac{1}{2} \exp(-m|t - \tau|)$ по пространству функций $X = X[0, T]$:

$$\begin{aligned} I \equiv I(T) &= E_{[0, T]}[\exp\{i\lambda \int_0^T g(\tau) X_\tau d\tau\}] = \\ &\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2} \int_0^T \int_0^T B(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\right\} = \\ &\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2} \int_0^T \int_0^T B(t, s) g(t) g(s) dt ds\right\} = \\ &\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4} \int_0^T \int_0^T \exp(-m|t - s|) g(t) g(s) dt ds\right\}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае

$$(< \xi, X >)'(t) = g(t),$$

поскольку имеет место равенство $< \xi, X > = i\lambda \int_0^T g(\tau) X_\tau d\tau$, имеем $(< \xi, X >)^{(n)}(t) = 0$, при $n > 1$.

$$\begin{aligned} I(T) &\approx \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k k!} (i\lambda)^{2k} \times \\ &\times E_{[0, T/2]}[(\int_0^{T/2} g(\tau) e^{m\tau} d\tau)^k \exp\{i\lambda \int_0^{T/2} g(\tau) X_\tau d\tau\}] \times \\ &\times E_{[0, T/2]}[(e^{-\frac{mT}{2}} \int_0^{T/2} g(\tau) e^{-m\tau} d\tau)^k \exp\{i\lambda \int_0^{T/2} g(\tau) X_\tau d\tau\}] \end{aligned}$$

Для численных расчетов будем полагать $g(t) = e^{-t}$, тогда имеем

$$\begin{aligned}
I(T) &\approx \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{2^k k!} \times \\
&E_{[0, T/2]} \left[\left(\int_0^{T/2} e^{-\tau} e^{m\tau} d\tau \right)^k \right] \times \\
&E_{[0, T/2]} \left[\left(e^{-\frac{mT}{2}} \int_0^{T/2} e^{-\tau} e^{-m\tau} d\tau \right)^k \right] I^2\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{2^k k!} E_{[0, T/2]} \left[\left(\int_0^{T/2} e^{\tau(m-1)} d\tau \right)^k \right] \times \\
&E_{[0, T/2]} \left[\left(e^{-\frac{mT}{2}} \int_0^{T/2} e^{-\tau(m+1)} d\tau \right)^k \right] I^2\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{2^k k!} \left(\frac{1}{m-1} (e^{\frac{T}{2}(m-1)} - 1) \right)^k \times \\
&\left(\frac{-1}{m+1} (e^{-\frac{T}{2}(m+1)} - 1) \right)^k e^{-\frac{mT}{2}k} \times I^2\left(\frac{T}{2}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{\lambda^{2k}}{2^k k! (m^2 - 1)^k} (e^{-\frac{T}{2}(m+1)} - 1)^k (e^{-\frac{T}{2}} - 1)^k I^2\left(\frac{T}{2}\right).
\end{aligned}$$

Проделав аналогичные вычисления для $(\frac{T}{2})$ и $(\frac{T}{4})$, получим

$$\begin{aligned}
I(T) &\approx \sum_{k=0}^N \frac{\lambda^{2k}}{2^k k! (m^2 - 1)^k} (e^{-\frac{T}{2}(m+1)} - 1)^k (e^{-\frac{T}{2}} - 1)^k \times \\
&\times \left[\sum_{k=0}^N \frac{\lambda^{2k}}{2^k k! (m^2 - 1)^k} (e^{-\frac{T}{2^2}(m+1)} - 1)^k (e^{-\frac{T}{2^2}} - 1)^k \right]^2 I^{2^2}\left(\frac{T}{2^2}\right) \approx \\
&\approx \sum_{k=0}^N \frac{\lambda^{2k}}{2^k k! (m^2 - 1)^k} (e^{-\frac{T}{2}(m+1)} - 1)^k (e^{-\frac{T}{2}} - 1)^k \times \\
&\times \left[\sum_{k=0}^N \frac{\lambda^{2k}}{2^k k! (m^2 - 1)^k} (e^{-\frac{T}{2^2}(m+1)} - 1)^k (e^{-\frac{T}{2^2}} - 1)^k \right]^2 I^{2^2}\left(\frac{T}{2^2}\right) \times \\
&\times \left[\sum_{k=0}^N \frac{\lambda^{2k}}{2^k k! (m^2 - 1)^k} (e^{-\frac{T}{2^3}(m+1)} - 1)^k (e^{-\frac{T}{2^3}} - 1)^k \right]^3 I^{2^3}\left(\frac{T}{2^3}\right).
\end{aligned}$$

Проделав l подобных итераций приходим к выражению

$$I(T) \approx \prod_{j=0}^{l-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda^{2k}}{2^k k! (m^2 - 1)^k} (e^{-\frac{T}{2^{j+1}}(m+1)} - 1)^k (e^{-\frac{T}{2^{j+1}}} - 1)^k \right)^{2^j} I^{2^l} \left(\frac{T}{2^l} \right). \quad (3.1)$$

Вычислим точное значение интеграла $I(T) = \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{4} \int_0^T \int_0^T e^{-t} e^{-s} e^{-m|t-s|} dt ds \right\}$.

Для этого вычислим сначала

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T e^{-t} e^{-s} e^{-m|t-s|} dt ds = \\ & \int_0^T \int_0^T e^{-t-s-m|t-s|} dt ds = \\ & \int_0^T \left[\int_0^s e^{-t-s+m(t-s)} dt + \int_s^T e^{-t-s-m(t-s)} dt \right] ds = \\ & \int_0^T \left[\int_0^s e^{-t-s+m(t-s)} dt + \int_s^T e^{-t-s-m(t-s)} dt \right] ds = \\ & \int_0^T \left[\int_0^s e^{-s(m+1)} e^{t(m-1)} dt + \int_s^T e^{s(m-1)} e^{-t(m+1)} dt \right] ds = \\ & \int_0^T \left[e^{-s(m+1)} \int_0^s e^{t(m-1)} dt + e^{s(m-1)} \int_s^T e^{-t(m+1)} dt \right] ds = \\ & \int_0^T \left[e^{-s(m+1)} \frac{1}{m-1} e^{t(m-1)} \Big|_0^s + e^{s(m-1)} \frac{-1}{m+1} e^{-t(m+1)} \Big|_s^T \right] ds = \\ & \int_0^T \left[e^{-s(m+1)} \frac{1}{m-1} (e^{s(m-1)} - 1) + e^{s(m-1)} \frac{-1}{m+1} (e^{-s(m+1)} - e^{-T(m+1)}) \right] ds = \\ & \int_0^T \left[\frac{-1}{m-1} e^{-s(m+1)} + \frac{1}{m-1} e^{-2s} + \frac{-1}{m+1} e^{s(m-1)} e^{-T(m+1)} + \frac{1}{m+1} e^{-2s} \right] ds = \\ & \int_0^T \left[\frac{2m}{m^2-1} e^{-2s} + \frac{-1}{m-1} e^{-s(m+1)} + \frac{-1}{m+1} e^{s(m-1)} e^{-T(m+1)} \right] ds = \\ & = \frac{2m}{m^2-1} \left(\frac{-1}{2} e^{-2s} \Big|_0^T \right) + \frac{-1}{m-1} \left(\frac{-1}{m+1} e^{-s(m+1)} \Big|_0^T \right) + \\ & \quad + \frac{-1}{m+1} e^{-T(m+1)} \left(\frac{1}{m-1} e^{s(m-1)} \Big|_0^T \right) = \\ & = \frac{-m}{m^2-1} (e^{-2T} - 1) + \frac{1}{m^2-1} (e^{-T(m+1)} - 1) + \\ & \quad + \frac{-1}{m^2-1} e^{-T(m+1)} (e^{T(m-1)} - 1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-m}{m^2-1}e^{-2T} + \frac{m}{m^2-1} + \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)} - \frac{1}{m^2-1} - \\
&\quad - \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)}e^{T(m-1)} + \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)} = \\
&= \frac{-m}{m^2-1}e^{-2T} + \frac{m}{m^2-1} + \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)} - \frac{1}{m^2-1} - \\
&\quad - \frac{1}{m^2-1}e^{-2T} + \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)} = \\
&= \frac{1}{m^2-1}(-me^{-2T} + m + e^{-T(m+1)} - 1 - e^{-2T} + e^{-T(m+1)}) = \\
&= \frac{1}{m^2-1}(2e^{-T(m+1)} - e^{-2T}(m+1) + m - 1) =
\end{aligned}$$

Тогда имеем точное значение

$$I(T) = \exp\left\{\frac{-\lambda^2}{4(m^2-1)}(2e^{-T(m+1)} - e^{-2T}(m+1) + m - 1)\right\}.$$

Используем (3.1) для вычисления интеграла $I(\frac{T}{2l})$. Результаты вычислений по формуле (3.1) для различных значений T при $\lambda = 0.5$, $m = 1$, $N = 5$, $l = 5$ приведены в следующей таблице:

T	2	4	8	16
точн.знач.	0.867693	0.685718	0.416845	0.153354
по ф-ле (3.1)	0.868138	0.684012	0.417032	0.153296

При $\lambda = 0.9$, $m = 10$, $N = 10$, $l = 10$ приведены в следующей таблице:

T	2	4	8	16
точн.знач.	0.925936	0.853892	0.726185	0.525213
по ф-ле (3.1)	0.925936	0.853892	0.726185	0.525213

Приложение 1. Листинг программы

```
#!/usr/bin/ruby

require 'fact'
require 'permutations'
require 'prod_value'

#def factorial tests
def test_factorial(n)
  factorial(3) == f(x)
end

# test under_sum value
def test_under_sum(t, lambda, m, j, k)
  numerator = ((-1.0)**k)*(lambda**(2.0*k))
  denominator = (2.0**k)*factorial(k)*(m**(2.0*k))
  e = Math.exp(-(m*t)/(2.0*(j+1.0)))
  (numerator / denominator)*((1.0 - e)**(2.0*k))
end

# test accurate value
def exact_value(t, l, m)
  multiplier = -(l**2.0) / 4.0
  inside = multiplier * exp_integral_value(t, m)
  Math.exp(inside)
end

# test approximation using prod formula
```

```

def approximation(t, lambda, m, n, l)
    prod = approximation_prod(t, lambda, m, n, l)
    exact_t = t / (2.0**l)
    exact = exact_value(exact_t, lambda, m)**(2.0**l)
    prod * exact
end

# test sum value
def test_sum_value(t, lambda, m, n, j)
    (0..n).inject(0) { |sum, k|
        sum + under_sum(t, lambda, m, j, k)
    }
end

def test_approximation_prod(t, lambda, m, n, l)
    (0...l).inject(1.0) { |prod, j|
        prod*sum_value(t, lambda, m, n, j)**(2.0**j)
    }
end

# REAL FUNCTIONALITY
# recursive factorial calculation
def factorial(n)
    (1..n).inject(:*) || 1.0
end

# exact exp_value
def exp_integral_value(t, m)
    e = (Math.exp(-m*t))
    (2.0 / m)*(t + e / m - 1.0 / m)
end

# accurate value
def exact_value(t, l, m)
    multiplier = -(1**2.0) / 4.0

```

```

    inside = multiplier * exp_integral_value(t, m)
    Math.exp(inside)
end

# under_sum value
def under_sum(t, lambda, m, j, k)
    numerator = ((-1.0)**k)*(lambda**(2.0*k))
    denominator = (2.0**k)*factorial(k)*(m**(2.0*k))
    e = Math.exp(-(m*t)/(2.0*(j+1.0)))
    (numerator / denominator)*((1.0 - e)**(2.0*k))
end

# sum value
def sum_value(t, lambda, m, n, j)
    (0..n).inject(0) { |sum, k|
        sum + under_sum(t, lambda, m, j, k)
    }
end

def approximation_prod(t, lambda, m, n, l)
    (0...l).inject(1.0) { |prod, j|
        prod*sum_value(t, lambda, m, n, j)**(2.0*j)
    }
end

# approximation
# using prod formula
def approximation(t, lambda, m, n, l)
    prod = approximation_prod(t, lambda, m, n, l)
    exact_t = t / (2.0*l)
    exact = exact_value(exact_t, lambda, m)**(2.0*l)
    prod * exact
end

####

```



```

# tests running
####
def run_test(t, lambda, m, n, l)
  exact = exact_value(t, lambda, m)
  approx = approximation(t, lambda, m, n, l)
  puts "Test_with_T:#{t},lambda:#{lambda},m:#{m},N:#{n},l:#{l}"
  puts "exact_value:#{exact}"
  puts "approximation:#{approx}"
end

t_values = [2, 4, 8, 16]
t_values.each do |t|
  run_test(t, 0.5, 1.0, 5, 5)
end

t_values.each do |t|
  run_test(t, 0.9, 10.0, 10, 10)
end

```

Литература

- [1] Егоров А.Д. Лекции по стохастическому анализу и его применениям (рукописн.)
- [2] Wuan Luo. Wiener Chaos Expansion and Numerical Solutions of Stochastic Partial Differential Equations / Dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology, 2006.
- [3] Харин Ю. С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика: учебник / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук. - Минск: БГУ, 2011. - 463 с.
- [4] Егоров А.Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / Егоров А.Д., Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. - Физмалит: Москва, 2006. - 400 с.
- [5] Егоров А.Д. О составной формуле для математического ожидания функционалов от решения уравнения Ито / Вести НАН Беларуси. Сер.физ.-мат.наук, 2010. №1. С.4-8.