МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра математического моделирования и анализа данных

Кожановский Василий Николаевич

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА, ОСНОВАННЫХ НА ИНТЕРПОЛЯЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

студента 5 курса 7 группы

"Допустить к защите"

Руководитель работы

____

“____”_____________ 2016 г.

Научный руководитель

Егоров Александр Дмитриевич

доктор физико-математических наук, профессор,

Институт математики НАН Беларуси

Минск 2017

РЕФЕРАТ

Димпломная работа, 20 стр.,2 табл., 1 приложение, 5 источников.

Ключевые слова: ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ФОРМУЛА ИНТЕРПОЛЯЦИИ, АПРОКСИМАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ПРОЦЕССА.

Объект исследования – математическое ожидание функционалов от гауссовского процесса.

Цель работы – пременение формулы интерполяции корреляционной функции гауссовского процесса к приближенному вычислению функционалов от процессов.

Методы исследования – методы вычислительной математики, теория случайных процессов.

Результатом являются полученные оценки точности метода вычисления мат. ожиданий функционалов.

Областью применения является аппроксимация математических ожиданий функционалов от гауссовских процессов.

РЭФЕРАТ

Дыпломная праца, 20 с., 2 табл., 1 дадатак, 5 крыніц.

Ключавыя словы: ГАУСЫВЫ ПРАЦЭСЫ, ФОРМУЛА ІНТЭРПАЛЯЦЫ, МАТЭМАТЫЧНАЕ ЧАКАННЕ, ФУНКЦЫЯНАЛЫ АД ПРАЦЭСУ.

Аб'ект даследавання – матэматычнае чаканне ад гаусавых прасэсаў.

Мэта працы – даследаваць апраксімацыі матэматычных чаканняў функцыяналаў ад рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўненняў.

Метады даследавання – метады вылічальнай матэматыкі, тэорыя выпадковых працэсаў.

Вынікам з'яўляюцца атрыманыя ацэнкі дакладнасці метаду вылічэння мат. чакання функцыяналаў.

Вобласцю ўжывання з'яўляецца апраксімацыя матэматычных чаканняў функцыяналаў.

ABSTRACT

Graduation assignment, 2 p., 2 tables, 1 app, 5 sources.

Keywords: GAUSSIAN PROCESSES, INTERPOLATION FORMULA , MATHEMATICAL EXPECTATION, FUNCTIONALS.

Research object – mathematical expectation from gaussian processes.

Purpose of the work – explore the approximation of the mathematical expectations of functionals of solutions of stochastic differential equations.

Research methods – methods of computational mathematics, chaotic decomposition.

The result is obtained estimates of the accuracy of the method of calculating the math. functional expectations.

Sphere of application is approximation of the mathematical expectations of functionals.

Содержание

Введение

Применение приближенных формул к вычислению математических ожиданий функционалов от гауссовских процессов вида $f(x) = \exp\{-\int_0^T V(x(t))dt\}$ сильно зависит от величины T. Имеющиеся в литературе приближенные формулы теряют свою эффективность при $T > 1$. В данной работе рассматривается метод преобразования математических ожиданий от гауссовского процесса, заданного на $[0;T]$, к математическим ожиданиям от гауссовских процессов, заданных на промежутках меньшей длины.

Семейство S-значных случайных величин $X = (X_t) = (X_t(\omega))$, $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, назывется S- *значным случайным процессом*, где $(\Omega, \mathcal{F}, P)-$ вероятностное пространство, а S называется *фазовым пространством процесса* X. Если $S = \mathbb{R}^n$, то процесс называется n-мерным, а если $n = 1$, то процесс называется действительным случайным процессом. Для действительного случайного процесса мера в $\mathbb{R}^n$, определяемая равенством

$$P_{t_1,\dots,t_n}(B) \equiv P^X_{t_1,\dots,t_n}(B) = P\{\omega \in \Omega : (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

назывется *конечномерным распределением* X. Наиболее часто конечномерное распределение задается конечномерной функцией распределения процесса

$$F_{t_1,\dots,t_n}(u_1, \dots, u_n) = P_{t_1,\dots,t_n}((-\infty, u_1]\times) \dots \times (-\infty, u_n].$$

При рассмотрении случайных процессов основным вычислительным соотношением является

$$Eg(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \int_\Omega g(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega))dP(\omega) = \int_{R^n} g(u_1, \dots, u_n)dF_{t_1,\dots,t_n}(u_1, \dots, u_n).$$

Функция $t \to X_t(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ называется выборочной функцией или траекторией процесса.

Процесс называется *непрерывным, непрерывным справа или слева*, если почти все траектории процесса обладают соответствующим свойством.

Далее в работе рассматривается гауссовский случайный процесс, функция распределения которого задается плотностью. Плотность конечномерного распределения гауссовского процесса задаётся равенством:

$$p_{t_1,\ldots,t_n}(u) = (2\pi)^{-n/2}(\det B)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(B^{-1}(u-m), u-m)\Big\},$$

где B – матрица с элементами $b_{ij} = B(t_i, t_j)$, $i, j = 1...n$; $m = (m(t_1), ..., m(t_n))$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$; $B(t,s)$ и $m(t)$ – заданные функции. Здесь

$$(B^{-1}(u-m), u-m) = \sum_{k,j=1}^{n} c_{kj}(u_k - m(t_k))(u_j - m(t_j)),$$

где c_{kj} - элемент матрицы B^{-1} обратной к матрице B.

Равенство (1) в случае гауссовского процесса имеет вид:

$$Eg(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \equiv \int_\Omega g(X_{t_1}(\omega), ..., X_{t_n}(\omega)dP(\omega) =$$

$$= \int_{R^n} g(u)(2\pi)^{-n/2}(\det B)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(B^{-1}(u-m), u-m)\Big\}d^n u,$$

где $d^n u = du_1 \ldots du_n$.

Непосредственным вычислением по формуле (2) можно найти, что

$$m(t) = E[X(t)], \qquad B(t,s) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))].$$

Функции $m(t)$ и $B(t,s)$ называются средним значением и корреляционной функцией гауссовского процесса X_t.

Будем предполагать далее, что выборочные функции (траектории) рассматриваемого гауссовского процесса непрерывны.

Часто используемым объектом, рассматриваемым в теории гауссовских процессов, является функционал от траекторий гауссовского процесса. Наиболее простым объектом такого типа является функционал вида

$$\langle \xi, X \rangle = \int_0^T X_t d\xi(t), \tag{1}$$

где $\xi = \xi(s)$ – функция ограниченной вариации.

В силу непрерывности траекторий процесса и ограниченности вариации функции ξ, интеграл в правой части (1) существует как интеграл Стилтьеса для всех $\omega \in \Omega$ и имеет место равенство

$$\int_0^T X_t d\xi(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} X_{t_k}[\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)], \tag{2}$$

где $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ – разбиение отрезка $[0, T]$; $\Delta t = \max(t_{k+1} - t_k), k = 1, \ldots, n$.

При вычислениях, связанных с гауссовскими процессами, мы будем использовать следующее равенство

$$(2\pi)^{-n/2}(\det A)^{-1/2} \int\limits_{R^n} \exp\Big\{ - i(u, v) - \frac{1}{2}(A^{-1}u, u)\Big\} d^n u =$$

$$= \exp\Big\{ - \frac{1}{2}(Av, v)\Big\},$$

где A – произвольная невырожденная матрица, i – мнимая единица.

Для случая $n = 1$ эта формула имеет вид:

$$\int\limits_R \exp\{au^2 + bu\} du = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} \exp\{-b^2/4a\}.$$

Можно показать, что функционал $\langle \xi, X \rangle$ является гауссовской случайной величиной. Среднее значение и дисперсию этой величины можно вычислить с помощью характеристического функционала гауссовского процесса, определяемого равенством

$$\chi_X(\xi) = E\Big[\exp\Big\{ i\langle \xi, X \rangle \Big\}\Big].$$

Используя аппроксимацию (2), можно показать, что

$$E\Big[\exp\Big\{ i\langle \xi, X \rangle \Big\}\Big] = \exp\Big\{ i\int\limits_0^T m(t) d\xi(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \int\limits_0^T B(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\Big\}. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) $\lambda\xi$ вместо ξ, получим равенство

$$E\Big[\exp\Big\{ i\lambda\langle \xi, X \rangle \Big\}\Big] = \exp\Big\{ i\lambda\int\limits_0^T m(t) d\xi(t) - \frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^T \int\limits_0^T B(t, s) d\xi(t) d\xi(s)\Big\},$$

из которого следует, что характеристическая функция случайной величины $\langle \xi, X \rangle$ является х. ф. гауссовской случайной величины, имеющей среднее значение и дисперсию

$$m(\xi) = \int\limits_0^T m(t) d\xi(t), \quad K(\xi, \xi) = \int\limits_0^T \int\limits_0^T B(t, s) d\xi(t) d\xi(s).$$

Подставляя в (3) $\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \xi_j$ вместо ξ, получим равенство

$$E\Big[\exp\Big\{ i\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \xi_j, X \rangle \Big\}\Big] = \exp\Big\{ i\sum_{j=1}^n \lambda_j \int\limits_0^T m(t) d\xi_j(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\lambda_k\lambda_j\int\limits_0^T\int\limits_0^T B(t,s)d\xi_k(t)d\xi_j(s)\Big\}, \tag{4}$$

из которого следует, что характеристическая функция случайного вектора $(\langle\xi_1,X\rangle,\ldots,\langle\xi_n,X\rangle)$ является х. ф. гауссовского случайного вектора, имеющеющего вектор среднего значения и матрицу ковариации с элементами

$$m(\xi_j)=\int\limits_0^T m(t)d\xi_j(t),\quad K(\xi_k,\xi_j)=\int\limits_0^T\int\limits_0^T B(t,s)d\xi_k(t)d\xi_j(s).$$

Отсюда следует, что плотность распределения случайного вектора $(\langle\xi_1,X\rangle,\ldots,\langle\xi_n,X\rangle)$ имеет вид

$$p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(u)=(2\pi)^{-n/2}(\det K)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(K^{-1}(u-m),u-m)\Big\},$$

где K – матрица с элементами $K(\xi_i,\xi_j)$, $i,j=1...n$; $m=(m(\xi_1),...,m(\xi_n))$, $u=(u_1,\ldots,u_n)$, и имеет место формула

$$E[g(\langle\xi_1,X\rangle,...,\langle\xi_n,X\rangle)]=\int_{R^n}g(u)p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(u)d^nu.$$

В частности,

$$E[g(\langle\xi,X\rangle)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi K(\xi,\xi)}}\int_R g(u)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\frac{(u-m(\xi))^2}{K(\xi,\xi)}\Big\}du.$$

Характеристический функционал (а именно, равенство (4)) может быть использован для вычисления моментов:

$$E\Big[\prod_{k=1}^{n}\langle\xi_k,X\rangle\Big]=\frac{1}{i^n}\frac{d^n}{d\lambda_1\ldots d\lambda_n}\chi_X\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k\Big)\Big|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0}. \tag{5}$$

Будем полагать в дальнейшем $m(t)=0$ и, следовательно, $m(\xi)=0$. Тогда

$$E[\langle\xi,X\rangle\langle\eta,X\rangle]=K(\xi,\eta).$$

Пусть далее выполняется условие

$$K(\xi,\xi)=0\quad\text{тогда и только тогда, когда } \xi=0. \tag{6}$$

В силу нашего предположения о непрерывности траекторий процесса, корреляционная функция $B(t,s)$ является непрерывной по двум переменным и, следовательно, удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^T B(t,t)dt\le\infty,$$

из которого следует, что ядро $B(t,s)$ обладает счетным набором собственных значений и собственных функций $\lambda_j,\ \phi_j,\ j=\overline{1,n}$, причем сумма собственных значений конечна:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_j \leq \infty.$$

Собственные функции $\phi_j,\ j=\overline{1,n}$, образуют ортонормированный базис в $L_2([0,T])$.

В случае $\xi_j=\varphi_j(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\int\limits_0^t\phi_j(\tau)d\tau,\ j=1,\dots,n$, в силу того, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T B(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds=\delta_{ij},\ (K^{-1}u,u)=\sum_{i=1}^n u_i^2,$$

формула (19) преобразуется к виду

$$E[g(\langle\varphi_1,X\rangle,...,\langle\varphi_n,X\rangle)]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{R^n}g(u_1,\dots,u_n)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n u_i^2\Big\}. \tag{7}$$

Имеет место разложение

$$X_t=\sum_{k=1}^{\infty}\langle\varphi_k,X\rangle e_k(t), \tag{8}$$

где $e_k(t)=\sqrt{\lambda}\phi_k(t)$, которое сходится в $sup-$норме пространства $C[0,T]$ для почти всех $\omega\in\Omega$.

Так как $\langle\varphi_k,X\rangle,\ k=1,2,\dots$, представляют собой независимые стандартные гауссовы величины (со средним 0 и дисперсией 1), для них часто используется обозначение $\xi_k=\langle\varphi_k,X\rangle$, и тогда ряд (8) записывается в виде

$$X_t=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k(t). \tag{9}$$

Частный случай такого ряда

$$X_t=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\xi_k\phi_k(t), \tag{10}$$

где $\lambda_k,\ \phi_k$ – собственные значения и собственные функции ядра $B(t,s)$, называется *разложением Карунена-Лоэва.*

Имеет место следующая формула

$$E[f(X_{(\cdot)}+a(\cdot))]=E[f(X_{(\cdot)})\exp\{a\langle X\rangle-\frac{1}{2}\|a\|^2_{\mathcal{H}}\}], \tag{11}$$

Далее будут использоваться вариации и производные случайных функционалов, заданных на траекториях непрерывных гауссовских процессов.
Вариация функционала $f(X_{(\cdot)})$ по направлению $a \in \mathcal{H}$ определяется равенством

$$\delta_a f(X_{(\cdot)}) = \frac{d}{d\lambda} f(X_{(\cdot)} + \lambda a)\Big|_{\lambda=0}, \tag{12}$$

$$\delta_{a_1,a_2} f(X_{(\cdot)}) = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} f(X_{(\cdot)} + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)\Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0}.$$

Заметим, что для обычной функции вещественной переменной

$$\delta_a f(u) = \frac{d}{d\lambda} f(u + \lambda a)\Big|_{\lambda=0} = a f'(u),\ u \in R,$$

а для функции n переменных

$$\delta_a f(u) = \frac{d}{d\lambda} f(u + \lambda a) = \frac{d}{d\lambda} f(u_1 + \lambda_1 a_1, ..., u_n + \lambda_n a_n)\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{u_i} a_i = (f'(u), a)_{R^n}, \tag{13}$$

где $f'(u) = grad\, f(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f(u)}{\partial u_n}\right)$, $f'_i(u) = \frac{\partial f(u_1,...,u_n)}{\partial u_i}$.

Если найдется такой элемент $f'(X_{(\cdot)}) \in V_0[0,T]$, что $\delta_a f(X_{(\cdot)}) =< f'(X_{(\cdot)}), a >$, то он называется производной Гато или слабой производной от $f(X_{(\cdot)})$.

Если найдется такой оператор $f''(X_{(\cdot)}) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, что

$$\delta_{a_1,a_2} f(X_{(\cdot)}) = (f''(X_{(\cdot)}) a_1, a_2)_{\mathcal{H}},$$

то $f''(X_{(\cdot)}) \equiv f''(X_{(\cdot)})(t,s)$ называется второй производной от $f(X_{(\cdot)})$.

Пример. Пусть $f(\omega) =< \xi, \omega >$, тогда $\delta_a f =< \xi, a >$ и $f'(x) = \xi$.

Но уже для функционала $a\langle X\rangle$ вариация $\delta_{a_1}(a\langle X\rangle) = (a_1, a)_{\mathcal{H}}$, и ясно, что в общем случае не найдется такого элемента ξ_a, что $(a_1, a)_{\mathcal{H}} = \langle \xi_a, a_1\rangle$. Таким образом,уже в простых случаях производная Гато не годится в качестве производной функционалов от случайных процессов. Подходящим определением является следующее. Если существует $f'(X_{(\cdot)}) \in \mathcal{H}$ для почти всех $X_{(\cdot)}$ такое, что выполняется равенство

$$\delta_a f(X_{(\cdot)}) = (f'(X_{(\cdot)}), a)_{\mathcal{H}}, \tag{14}$$

то $f'(X_{(\cdot)})$ называется производной $f(X_{(\cdot)})$ по подпространству $\mathcal{H}$ или $\mathcal{H}-$производной. Для $f'(X_{(\cdot)})$ используется также обозначение $Df(X_{(\cdot)})$.

Используя равенство (11), получим

$$E[\delta_a f(X)] = \frac{d}{d\lambda} E[f(X + \lambda a)]\Big|_{\lambda=0} = E[f(X) \frac{d}{d\lambda} \exp\left\{\lambda a\langle X\rangle - \frac{\lambda^2}{2}\|a\|^2_{\mathcal{H}}\right\}\Big|_{\lambda=0}],$$

откуда следует

$$E[\delta_a f(X)] = E[f(X)a\langle X\rangle]. \tag{15}$$

Используя (54), а также равенство

$$\delta_a(f(X)g(X)) = (\delta_a f(X))g(X) + f(X)\delta_a g(X), \tag{16}$$

приходим к формуле интегрирования по частям

$$E[(\delta_a f(X))g(X)] = E[f(X)g(X)a\langle X\rangle] - E[f(X)\delta_a g(X)]. \tag{17}$$

Примеры. 1. $D(a\langle X\rangle) = a$.

2. $\delta_{a_1}\langle \xi, X\rangle = \langle \xi, a_1\rangle = (R\xi, a_1)_{\mathcal{H}}$, откуда следует

$$D(\langle \xi, X\rangle) = R\xi.) \tag{18}$$

3. $f(X) = g(a_1\langle X\rangle, \ldots, a_n\langle X\rangle)$,

$$\delta_a f(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u_j}((a_1\langle X\rangle, \ldots, a_n\langle X\rangle)(a, a_j)_{\mathcal{H}},$$

$$Dg(a_1\langle X\rangle, \ldots, a_n\langle X\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u_j}((a_1\langle X\rangle, \ldots, a_n\langle X\rangle)a_j.$$

Глава 1

Формула преобразования математического ожидания при интерполяции корреляционной функции

Для двух гауссовских случайных процесов $X_t,\ t \in [0,T]$, с нулевым средним значением и корреляционными функционалами $K(\xi,\eta)$ и $K_0(\xi,\eta)$ соответственно определим гауссовкий процесс с корреляционным функционалом

$$K_u(\xi,\eta) = uK(\xi,\eta) + (1-u)K_0(\xi,\eta), u \in [0,1].$$

Соответственно для корреляционных функций имеем

$$B_u(t,s) = uB(t,s) + (1-u)B_0(t,s), u \in [0,1].$$

Будем предпологать, что эти гауссовские процессы имеют непрерывные траектории, которые в дальнейшем будем обозначать $X_t = X_t(\omega),\ t \in [0,T],\ \omega \in \Omega$.

В обычном анализе имеет место следующая формула

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b f(x)p_0(x)dx + \int_0^1 \frac{d}{du}\int_a^b f(x)p_u(x)dxdu, \tag{1.1}$$

где $p_u(x) = up(x) + (1-u)p_0(x)$. Аналогичная формула имеет место и для математических ожиданий

$$E[f(X_{(\cdot)})] = E_0[f(X_{(\cdot)})] + \int_0^1 \frac{d}{du}E_u[f(X_{(\cdot)})]du, \tag{1.2}$$

Из формулы (1.2) следует следующая фомула

$$E[F(X_{(\cdot)})] = E_0[F(X_{(\cdot)})] + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^T\int_0^T (B(t,s) - B_0(t,s))E_u[F''(X_{(\cdot)};t,s)]dtdsdu, \tag{1.3}$$

Докажем ее справедливость для функционалов вида

$$F(X_{(\cdot)}) = \exp\{< \xi, X >\}, \quad \forall \xi \in V[0,T].$$

Отсюда будет следовать ее справедливость для произвольных $F(X_{(\cdot)}) \in L_2(\Phi, P)$, в силу того, что любой функционал из этого класса опроксимируется линейными комбинациями функционалов вида $\exp\{< \xi, X >\}$.

Возьмем формулу

$$E[F(X_{(\cdot)})] = E_0[F(X_{(\cdot)})] + \int_0^1 \frac{d}{du} E_u[F(X_{(\cdot)})]du, \tag{1.4}$$

и применим ее к функционалу $\exp\{< \xi, X >\}$.
Имеем в левой части (1.4):

$$E[\exp\{< \xi, X >\}] = \exp\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B(t,s) d\xi(t) d\xi(s)\}.$$

В правой части (1.4):

$$E_0[\exp\{< \xi, X >\}] = \exp\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_0(t,s) d\xi(t) d\xi(s)\},$$

$$\frac{d}{du} E_u[\exp\{< \xi, X >\}] = \frac{d}{du} \exp\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_u(t,s) d\xi(t) d\xi(s)\} =$$

$$\frac{1}{2} \exp\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_u(t,s) d\xi(t) d\xi(s)\} \int_0^T \int_0^T \frac{d}{du}(uB(t,s) + (1-u)B_0(t,s)) d\xi(t) d\xi(s) =$$

$$= \frac{1}{2} \exp\{\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T B_u(t,s) d\xi(t) d\xi(s)\} \int_0^T \int_0^T \frac{d}{du}(B(t,s) + B_0(t,s)) d\xi(t) d\xi(s)$$

Вычислим математическое ожидание во втором слогаемом в правой части равенства (1.3) для функционала $F(X_{(\cdot)}) = \exp\{< \xi, X >\}$. Для этого вычислим сначала

$$\delta_{a_1,a_2} \exp\{< \xi, X >\} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \exp\{< \xi, X + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 >\}\big|_{\lambda_1 = \lambda_2 = a} =$$

$$= \exp\{< \xi, X >\} < \xi, a_1 >< \xi, a_2 >=$$

$$= \int_0^T \int_0^T \exp\{< \xi, X >\} a_1(t) a_2(s) d\xi(t) d\xi(s),$$

откуда следует, что

$$(\exp\{< \xi, X >\})''(t,s) = \exp\{< \xi, X >\} \xi(t) \xi(s). \tag{1.5}$$

И далее, так как

$$E_u[(\exp\{<\xi, X>\})''(t,s)] = E_u[\exp\{<\xi, X>\})]\xi(t)\xi(s) =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T B_u(t,s)d\xi(t)d\xi(s)\}\xi(t)\xi(s),$$

то

$$\frac{d}{du}E_u[\exp\{<\xi, X>\})] = \frac{1}{2}\exp\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T B_u(t,s)d\xi(t)d\xi(s)\}\times$$

$$\times\int_0^T\int_0^T (B(t,s)-B_0(t,s))d\xi(t)d\xi(s) =$$

$$= \int_0^T\int_0^T (B(t,s)-B_0(t,s))E_u[(\exp\{<\xi, X>\})''(t,s)]dtds,$$

и далее справедливость форвулы (1.3).

Корреляционную функцию $B_0(t,\tau)$ выберем следующим образом: разобъем область $[0,T]\times[0,T]$ на четыре квадрата

$$[0,T/2]\times[0,T/2], [0,T/2]\times[T/2,T], [T/2,T]\times[0,T/2], [T/2,T]\times[T/2,T]$$

и положим $B_0(t,\tau) = B(t,\tau)$ на диагональных квадратах, и $B_0(t,\tau) = 0$ вне диагональных квадратов.

Применим формулу (1.3) к математическому ожиданию в правой части этой же формулы:

$$E[f(X_{(\cdot)})] = E_0[f(X_{(\cdot)})] + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^T\int_0^T (B-B_0)(t,s)E_u[f''(X_{(\cdot)};t,s)]dtdsdu =$$

$$= E_0[f(X_{(\cdot)})] + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^T\int_0^T (B-B_0)(t_1,s_1)E_0[f''(X_{(\cdot)};t_1,s_1)]dt_1ds_1du_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^T\int_0^T (B-B_0)(t_2,s_2)\big(\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^T\int_0^T (B_{u_1}-B_0)(t_1,s_1)\times$$

$$\times E_{u_1,u_2}[f^{(4)}(X_{(\cdot)};t_1,s_1;t_2,s_2)]dt_1ds_1du_1\big)dt_2ds_2du_2$$

$$= E_0[f(X_{(\cdot)})] + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T (B-B_0)(t_1,s_1)E_0[f''(X_{(\cdot)};t_1,s_1)]dt_1ds_1 +$$

$$+\frac{1}{2^2}\int_0^1\int_0^1\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T u_1(B-B_0)(t_2,s_2)(B-B_0)(t_1,s_1)\times$$

$$\times E_{u_1,u_2}[f^{(4)}(X_{(\cdot)};t_1,s_1;t_2,s_2)]dt_1ds_1dt_2ds_2du_1du_2.$$

Продолжая этот процесс итерации N раз, приходим к формуле

$$\begin{aligned} E[f(X_{(\cdot)})] = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k k!} \int_0^T \overset{(2k)}{\cdots} \int_0^T \prod_{j=1}^{k} (B - B_0)(t_j, \tau_j) \times \\ \times E[F^{(2k)}(X_{(\cdot)}; t, \tau)] d^k t d^k \tau + r_N(F(X_{(\cdot)})), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $r_N(F(X_{(\cdot)}))-$ остаток, $t = (t_1, t_2, ..., t_k)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)$.

Глава 2

Описание метода апроксимации функционалов от гауссовского процесса, основанного на формуле интерполяции

Имеет место соотношение

$$E_0[F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)})G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)})] = E[F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)})]E[G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)})], \tag{2.1}$$

где $F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)}), G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)})$− функционалы, зависящие от траекторий процесса X_t на отрезках $[0, T/2]$ и $[T/2, T]$ соответственно.

Приведем пример, который нам понадобится в последующем. Пусть

$$F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)}) = \exp\{\int_0^{T/2} f(\tau)X_\tau d\tau\},$$

$$G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)}) = \exp\{\int_{T/2}^{T} g(\tau)X_\tau d\tau\}.$$

Обозначим $\hat{f}(\tau) = f(\tau)$ на $[0, T/2]$ и $\hat{f}(\tau) = 0$ на $[T/2, T]$, $\hat{g}(\tau) = g(\tau)$ на $[T/2, T]$ и $\hat{g}(\tau) = 0$ на $[0, T/2]$. Тогда имеем для данного случая в левой части (2.1):

$$E_0[F_{[0,T/2]}(X_{(\cdot)})G_{[T/2,T]}(X_{(\cdot)})] =$$

$$= E_0[\exp\{\int_0^{T/2} f(\tau)X_\tau d\tau\} \exp\{\int_{T/2}^{T} g(\tau)X_\tau d\tau\}] =$$

$$= E_0[\exp\{\int_0^{T} (\hat{f}(\tau) + \hat{g}(\tau))X_\tau d\tau\}] =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T B(\tau_1\tau_2)(\hat{f}(\tau_1) + \hat{g}(\tau_1))(\hat{f}(\tau_2) + \hat{g}(\tau_2))d\tau_1\tau_2\} =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2}\int_0^{T/2}\int_0^{T/2} B(\tau_1\tau_2)f(\tau_1)f(\tau_2)d\tau_1\tau_2\}\times$$

$$\times \exp\{\frac{1}{2}\int_{T/2}^{T}\int_{T/2}^{T} B(\tau_1\tau_2)g(\tau_1)g(\tau_2)d\tau_1\tau_2\}\times$$

$$\times \exp\{\frac{1}{2}\int_0^{T/2}\int_{T/2}^{T} B(\tau_1\tau_2)\hat{f}(\tau_1)\hat{g}(\tau_2)d\tau_1\tau_2\}\times$$

$$\times \exp\{\frac{1}{2}\int_{T/2}^{T}\int_0^{T/2} B(\tau_1\tau_2)\hat{f}(\tau_1)\hat{g}(\tau_2)d\tau_1\tau_2\} =$$

$\Big[$ воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{2}\int_0^{T/2}\int_{T/2}^{T} B(\tau_1\tau_2)\hat{f}(\tau_1)\hat{g}(\tau_2)d\tau_1\tau_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{T/2}^{T}\int_0^{T/2} B(\tau_1\tau_2)\hat{f}(\tau_1)\hat{g}(\tau_2)d\tau_1\tau_2 = 0 \ \Big]$$

$$= \exp\{\frac{1}{2}\int_0^{T/2}\int_0^{T/2} B(\tau_1\tau_2)f(\tau_1)f(\tau_2)d\tau_1\tau_2\}\exp\{\frac{1}{2}\int_{T/2}^{T}\int_{T/2}^{T} B(\tau_1\tau_2)g(\tau_1)g(\tau_2)d\tau_1\tau_2\} =$$

$$= E[\exp\{\int_0^{T/2} B(\tau_1\tau_2)f(\tau_1)f(\tau_2)d\tau_1\tau_2\}]E[\exp\{\int_{T/2}^{T} B(\tau_1\tau_2)g(\tau_1)g(\tau_2)d\tau_1\tau_2\}],$$

что совпадает с правой частью (2.1).

Глава 3

Численные результаты

В качестве численного примера рассмотрим вычисление математического ожидания фукционала $\exp\{i\lambda \int_0^T g(\tau)X_\tau d\tau\}$ от гауссовского процесса с нулевым средним и корреляционной функцией $B(t,\tau) = \frac{1}{2}\exp(-m|t-\tau|)$ по пространству функций $X = X[0,T]$:

$$I \equiv I(T) = E_{[0,T]}[\exp\{i\lambda \int_0^T g(\tau)X_\tau d\tau\}] =$$

$$\exp\Big\{ -\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B(t,s)d\xi(t)d\xi(s)\Big\} =$$

$$\exp\Big\{ -\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B(t,s)g(t)g(s)dtds\Big\} =$$

$$\exp\Big\{ -\frac{\lambda^2}{4}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \exp(-m|t-s|)g(t)g(s)dtds\Big\}.$$

В рассматриваемом случае

$$(<\xi, X>)'(t) = g(t),$$

поскольку имеет место равенство $<\xi, X>= i\lambda\int_0^T g(\tau)X_\tau d\tau$, имеем $(<\xi, X>)^{(n)}(t) = 0$, при $n > 1$.

$$I(T) \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k k!}(i\lambda)^{2k}\times$$

$$\times E_{[0,T/2]}[(\int_0^{T/2} g(\tau)e^{m\tau}d\tau)^k \exp\{i\lambda\int_0^{T/2} g(\tau)X_\tau d\tau\}]\times$$

$$\times E_{[0,T/2]}[(e^{-\frac{mT}{2}}\int_0^{T/2} g(\tau)e^{-m\tau}d\tau)^k \exp\{i\lambda\int_0^{T/2} g(\tau)X_\tau d\tau\}]$$

Для численных расчетов будем пологать $g(t)=e^{-t}$, тогда имеем

$$I(T)\approx\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\lambda^{2k}}{2^kk!}\times$$

$$(\int_0^{T/2}e^{-\tau}e^{m\tau}d\tau)^k\times$$

$$(e^{-\frac{mT}{2}}\int_0^{T/2}e^{-\tau}e^{-m\tau}d\tau)^kI^2(\frac{T}{2})=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\lambda^{2k}}{2^kk!}(\int_0^{T/2}e^{\tau(m-1)}d\tau)^k\times$$

$$(e^{-\frac{mT}{2}}\int_0^{T/2}e^{-\tau(m+1)}d\tau)^kI^2(\frac{T}{2})=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\lambda^{2k}}{2^kk!}(\frac{1}{m-1}(e^{\frac{T}{2}(m-1)}-1))^k\times$$

$$(\frac{-1}{m+1}(e^{-\frac{T}{2}(m+1)}-1)e^{-\frac{mT}{2}})^k\times I^2(\frac{T}{2})=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^{2k}}{2^kk!(m^2-1)^k}(e^{-\frac{T}{2}(m+1)}-1)^k(e^{-\frac{T}{2}}-e^{-\frac{mT}{2}})^kI^2(\frac{T}{2}).$$

Проделав аналогичные вычисления для $(\frac{T}{2})$ и $(\frac{T}{4})$, получим

$$I(T)\approx\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^{2k}}{2^kk!(m^2-1)^k}(e^{-\frac{T}{2}(m+1)}-1)^k(e^{-\frac{T}{2}}-e^{-\frac{mT}{2}})^k\times$$

$$\times[\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^{2k}}{2^kk!(m^2-1)^k}(e^{-\frac{T}{2^2}(m+1)}-1)^k(e^{-\frac{T}{2^2}}-e^{-\frac{mT}{2^2}})^k]^2I^{2^2}(\frac{T}{2^2})\approx$$

$$\approx\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^{2k}}{2^kk!(m^2-1)^k}(e^{-\frac{T}{2}(m+1)}-1)^k(e^{-\frac{T}{2}}-e^{-\frac{mT}{2}})^k\times$$

$$\times[\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^{2k}}{2^kk!(m^2-1)^k}(e^{-\frac{T}{2^2}(m+1)}-1)^k(e^{-\frac{T}{2^2}}-e^{-\frac{mT}{2^2}})^k]^2I^{2^2}(\frac{T}{2^2})\times$$

$$\times[\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^{2k}}{2^kk!(m^2-1)^k}(e^{-\frac{T}{2^3}(m+1)}-1)^k(e^{-\frac{T}{2^3}}-e^{-\frac{mT}{2^3}})^k]^3I^{2^3}(\frac{T}{2^3}).$$

Проделав l подобных итераций приходим к выражению

$$I(T) \approx \prod_{j=0}^{l-1} (\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^{2k}}{2^k k! (m^2-1)^k} (e^{-\frac{T}{2^{j+1}}(m+1)} - 1)^k (e^{-\frac{T}{2^{j+1}}} - e^{-\frac{mT}{2^{j+1}}})^k)^{2^j} I^{2^l}(\frac{T}{2^l}). \qquad (3.1)$$

Вычислим точное значение интеграла $I(T) = \exp\Big\{ -\frac{\lambda^2}{4} \int_0^T \int_0^T e^{-t} e^{-s} e^{-m|t-s|} dt ds \Big\}$. Для этого вычислим сначала

$$\int_0^T \int_0^T e^{-t} e^{-s} e^{-m|t-s|} dt ds =$$

$$\int_0^T \int_0^T e^{-t-s-m|t-s|} dt ds =$$

$$\int_0^T \Big[\int_0^s e^{-t-s+m(t-s)} dt + \int_s^T e^{-t-s-m(t-s)} dt \Big] ds =$$

$$\int_0^T \Big[\int_0^s e^{-t-s+m(t-s)} dt + \int_s^T e^{-t-s-m(t-s)} dt \Big] ds =$$

$$\int_0^T \Big[\int_0^s e^{-s(m+1)} e^{t(m-1)} dt + \int_s^T e^{s(m-1)} e^{-t(m+1)} dt \Big] ds =$$

$$\int_0^T \Big[e^{-s(m+1)} \int_0^s e^{t(m-1)} dt + e^{s(m-1)} \int_s^T e^{-t(m+1)} dt \Big] ds =$$

$$\int_0^T \Big[e^{-s(m+1)} \frac{1}{m-1} e^{t(m-1)} \Big|_0^s + e^{s(m-1)} \frac{-1}{m+1} e^{-t(m+1)} \Big|_s^T \Big] ds =$$

$$\int_0^T \Big[e^{-s(m+1)} \frac{1}{m-1} (e^{s(m-1)} - 1) + e^{s(m-1)} \frac{-1}{m+1} (e^{-s(m+1)} - e^{-T(m+1)}) \Big] ds =$$

$$\int_0^T \Big[\frac{-1}{m-1} e^{-s(m+1)} + \frac{1}{m-1} e^{-2s} + \frac{-1}{m+1} e^{s(m-1)} e^{-T(m+1)} + \frac{1}{m+1} e^{-2s)} \Big] ds =$$

$$\int_0^T \Big[\frac{2m}{m^2-1} e^{-2s} + \frac{-1}{m-1} e^{-s(m+1)} + \frac{-1}{m+1} e^{s(m-1)} e^{-T(m+1)} \Big] ds =$$

$$= \frac{2m}{m^2-1} (\frac{-1}{2} e^{-2s} \Big|_0^T) + \frac{-1}{m-1} (\frac{-1}{m+1} e^{-s(m+1)} \Big|_0^T) +$$
$$+ \frac{-1}{m+1} e^{-T(m+1)} (\frac{1}{m-1} e^{s(m-1)} \Big|_0^T) =$$

$$= \frac{-m}{m^2-1} (e^{-2T} - 1) + \frac{1}{m^2-1} (e^{-T(m+1)} - 1) +$$
$$+ \frac{-1}{m^2-1} e^{-T(m+1)} (e^{T(m-1)} - 1) =$$

$$= \frac{-m}{m^2-1}e^{-2T} + \frac{m}{m^2-1} + \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)} - \frac{1}{m^2-1} -$$
$$-\frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)}e^{T(m-1)} + \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)} =$$

$$= \frac{-m}{m^2-1}e^{-2T} + \frac{m}{m^2-1} + \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)} - \frac{1}{m^2-1} -$$
$$-\frac{1}{m^2-1}e^{-2T} + \frac{1}{m^2-1}e^{-T(m+1)} =$$

$$= \frac{1}{m^2-1}(-me^{-2T} + m + e^{-T(m+1)} - 1 - e^{-2T} + e^{-T(m+1)} =$$
$$= \frac{1}{m^2-1}(2e^{-T(m+1)} - e^{-2T}(m+1) + m - 1) =$$

Тогда имеем точное значение

$$I(T) = \exp\{\frac{-\lambda^2}{4(m^2-1)}(2e^{-T(m+1)} - e^{-2T}(m+1) + m - 1)\}.$$

Используем (3.1) для вычисления интеграла $I(\frac{T}{2^l})$. Результаты вычислений по фурмуле (3.1) для различных значений T при $\lambda = 0.2,\ m = 2, N = 5, l = 5$ приведены в следующей таблице:

T	2	4	8	16
точн.знач. по ф-ле (3.1)	0.996838 0.996845	0.996675 0.996682	0.996673 0.995625	0.996672 0.953672

При $\lambda = 0.5,\ m = 10, N = 10, l = 10$ приведены в следующей таблице:

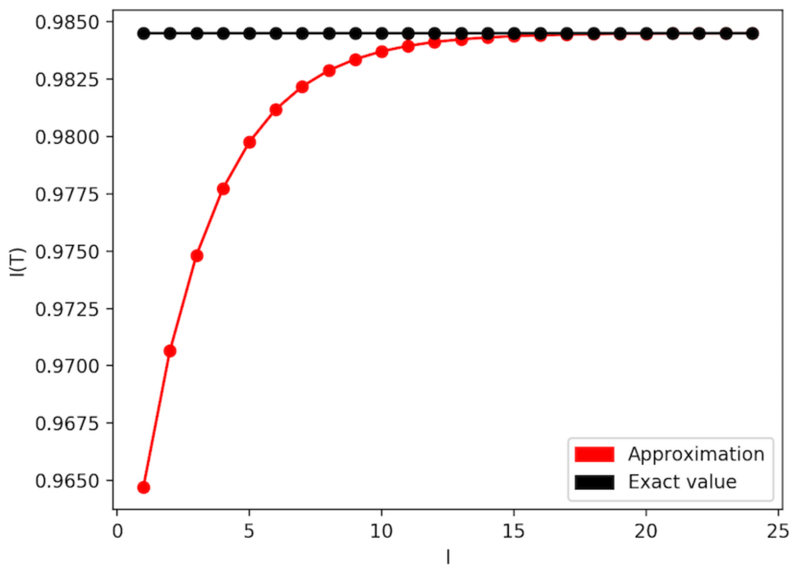
T	2	4	8	16
точн.знач. по ф-ле (3.1)	0.994460 0.994460	0.994336 0.994335	0.994333 0.994332	0.994334 0.994312

При $\lambda = 0.9,\ m = 15, N = 15, l = 15$ приведены в следующей таблице:

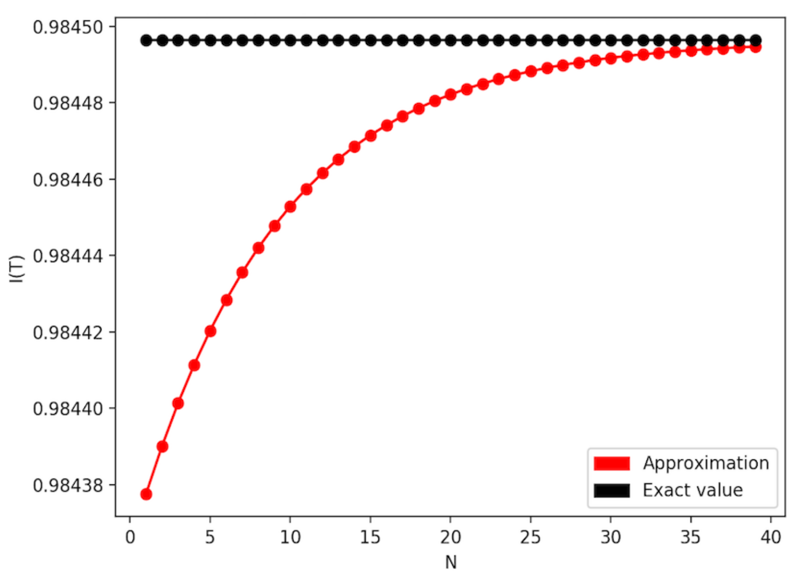
T	2	4	8	16
точн.знач. по ф-ле (3.1)	0.987685 0.987685	0.987428 0.987428	0.987423 0.987422	0.987423 0.987422

На следующих графиках отображена зависимость погрешности от количества итераций при изменениях параметров l и N.

При $T = 16, \lambda = 0.5,\ m = 3,\ N = 5,\ l = 1...25$ имеем:



При $T = 16, \lambda = 0.5,\ m = 3,\ l = 2,\ N = 1...40$ имеем:



Приложение 1. Листинг программы

```python
#!/usr/bin/python

from math import factorial
from math import exp
from functools import reduce

import matplotlib.patches as mpatches
import matplotlib.pyplot as plot


# exact integral value
def integral_value(t, m):
    e1 = exp(-2. * t)
    e2 = exp(-t * (m + 1.))
    denominator = (m ** 2. - 1.)
    return (2.0 * e2 - e1 * (m + 1.) + m - 1.) / denominator


# accurate value
def exact_value(t, lam, m):
    multiplier = -(lam ** 2.0) / 4.0
    inside = multiplier * integral_value(t, m)
    result = exp(inside)
    return result


# APPROXIMATION
```

```python
# under sum value calculation
def under_sum(t, lam, m, j: int, k: int):
    numerator = lam ** (2. * k)
    denominator = (2. ** k) * factorial(k) *
    ((m ** 2.0 - 1.0) ** k)
    degree = 2 ** (j + 1)
    e1 = exp(-(m + 1.) * t / degree)
    e2 = exp(-t / degree)
    e3 = exp(-m * t / degree)
    return (numerator / denominator) * (e1 - 1.) **
    k * (e2 - e3) ** k


def sum_value(t, lam, m, n: int, j: int):
    f = lambda s, k: s + under_sum(t, lam, m, j, k)
    result = reduce(f, range(0, n + 1), 0)
    return result


def prod_value(t, lam, m, n: int, l: int):
    f = lambda p, j: p * sum_value(t, lam, m, n, j) ** (2. ** j)
    result = reduce(f, range(0, l), 1.)
    return result


# approximation
# using prod formula
def approximation(t: float, lam, m, n, l):
    prod = prod_value(t, lam, m, n, l)
    exact_t = t / (2. ** l)
    exact = exact_value(exact_t, lam, m) ** (2. ** l)
    return prod * exact


# TESTS
```

```python
# tests running
def run_test(t, lam, m, n: int, l: int):
    exact = exact_value(t, lam, m)
    approx = approximation(t, lam, m, n, l)
    test_format = "Test with T: %s, lambda: %s, m: %s, N: %s, l: %s"
    print(test_format % (t, lam, m, n, l))
    print("exact value: %.6f" % exact)
    print("approximation: %.6f" % approx)


def test():
    t_values = [
        2.,
        4.,
        8.,
        16.
    ]

    for value in t_values:
        run_test(value, 0.2, 2.0, 5, 5)

    for t in t_values:
        run_test(t, 0.5, 10.0, 10, 10)

    for t in t_values:
        run_test(t, 0.9, 15.0, 15, 15)


def plot_l_dependency():
    n = 5
    m = 3
    t = 16
    lam = 0.5
    exact = exact_value(t, lam, m)
```

```
    l_array = range(1, 25)
    values = [approximation(t, lam, m, n, l) for l in l_array]
    exact_values = [exact for l in l_array]

    approx_patch = mpatches.Patch(color='red',
    label='Approximation')
    exact_patch = mpatches.Patch(color='black',
    label='Exact␣value')
    plot.legend(handles=[approx_patch, exact_patch])

    plot.plot(l_array, values, 'r', l_array, values, 'ro')
    plot.plot(l_array, exact_values, 'k', l_array,
    exact_values, 'ko')
    plot.xlabel('l')
    plot.ylabel('I(T)')
    plot.savefig('l_dependency.png')
    plot.show()

    # linear
    plot.subplot(221)
    plot.plot(x, y)
    plot.yscale('linear')
    plot.title('linear')
    plot.grid(True)

    # log
    plot.subplot(222)
    plot.plot(x, y)
    plot.yscale('log')
    plot.title('log')
    plot.grid(False)


def plot_n_dependency():
    l = 2
```

```
    m = 3
    t = 16
    lam = 0.5
    exact = exact_value(t, lam, m)

    n_array = range(1, 40)
    values = [approximation(t, lam, m, n, l) for l in n_array]
    exact_values = [exact for n in n_array]

    approx_patch = mpatches.Patch(color='red',
    label='Approximation')
    exact_patch = mpatches.Patch(color='black',
    label='Exact value')
    plot.legend(handles=[approx_patch, exact_patch])

    plot.plot(n_array, values, 'r', n_array, values, 'ro')
    plot.plot(n_array, exact_values, 'k', n_array,
    exact_values, 'ko')
    plot.xlabel('l')
    plot.ylabel('I(T)')
    plot.savefig('n_dependency.png')
    plot.show()


test()
# plot_l_dependency()
# plot_n_dependency()
```

Литература

[1] Егоров А.Д. Лекции по стохастическому анализу и его применениям (рукописн.)

[2] Wuan Luo. Wiener Chaos Expansion and Numerical Solutions of Stohastic Partial Differential Equations / Dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology, 2006.

[3] Харин Ю. С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика: учебник / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук. - Минск: БГУ, 2011. - 463 с.

[4] Егоров А.Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / Егоров А.Д., Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. - Физмалит: Москва, 2006. - 400 с.

[5] Егоров А.Д. О составной формуле для математического ожидания функционалов от решения уравнения Ито / Вести НАН Беларуси. Сер.физ.-мат.наук, 2010. №1. С.4-8.