Czy macierze AB i BA są podobne?

Szymon Sroka

28 listopada 2020

Weźmy dwie macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Iloczyn tych macierzy wynosi kolejno:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Weźmy dwie macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Iloczyn tych macierzy wynosi kolejno:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Spróbujmy znaleźć jakieś wspólne cechy tych dwóch macierzy.

Weźmy dwie macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Iloczyn tych macierzy wynosi kolejno:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Spróbujmy znaleźć jakieś wspólne cechy tych dwóch macierzy.

- $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = 6 = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$,

Weźmy dwie macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Iloczyn tych macierzy wynosi kolejno:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Spróbujmy znaleźć jakieś wspólne cechy tych dwóch macierzy.

- $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{tr(AB)} = 6 = \mathrm{tr(BA)}$,
- $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{BA}) = 1$, (Tw. Cauchy'ego),

Weźmy dwie macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Iloczyn tych macierzy wynosi kolejno:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Spróbujmy znaleźć jakieś wspólne cechy tych dwóch macierzy.

- $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{tr(AB)} = 6 = \mathrm{tr(BA)}$,
- $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{BA}) = 1$, (Tw. Cauchy'ego),
- $\mathrm{rank(AB)} = \mathrm{rank(BA)}$,

Weźmy dwie macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Iloczyn tych macierzy wynosi kolejno:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Spróbujmy znaleźć jakieś wspólne cechy tych dwóch macierzy.

- $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{tr(AB)} = 6 = \mathrm{tr(BA)}$,
- $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{BA}) = 1$, (Tw. Cauchy'ego),
- $\mathrm{rank(AB)} = \mathrm{rank(BA)}$,
- wielomiany charakterystyczne tych macierzy są takie same,

Weźmy dwie macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Iloczyn tych macierzy wynosi kolejno:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Spróbujmy znaleźć jakieś wspólne cechy tych dwóch macierzy.

- $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{tr(AB)} = 6 = \mathrm{tr(BA)}$,
- $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{BA}) = 1$, (Tw. Cauchy'ego),
- $\mathrm{rank(AB)} = \mathrm{rank(BA)}$,
- wielomiany charakterystyczne tych macierzy są takie same,
- macierze AB i BA są podobne.

Macierze podobne

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Macierze A i B nazywamy podobnymi, jeśli istnieje taka macierz nieosobliwa U, że zachodzi równość $U^{-1}AU = B$.

Macierze podobne

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Macierze A i B nazywamy podobnymi, jeśli istnieje taka macierz nieosobliwa U, że zachodzi równość $U^{-1}AU = B$.

Przykład :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Weźmy macierz $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, wtedy $U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zauważmy, że:

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = B.$$

Wobec tego macierze A i B są podobne.

Twierdzenie 1.

Niech $A \in GL(n, \mathbb{F})$ oraz niech $B \in M_n(\mathbb{F})$. Wówczas macierze AB i BA są podobne.

Twierdzenie 1.

Niech $A \in GL(n, \mathbb{F})$ oraz niech $B \in M_n(\mathbb{F})$. Wówczas macierze AB i BA są podobne.

Dowód:
Skoro macierz $A \in GL(n, \mathbb{F})$, to istnieje jej macierz odwrotna.
W takim razie zachodzi równość:
$A^{-1}(AB)A = A^{-1}ABA = A^{-1}A(BA) = BA$.
W związku z tym macierze AB i BA są podobne.

Twierdzenie 1.

Niech $A \in GL(n, \mathbb{F})$ oraz niech $B \in M_n(\mathbb{F})$. Wówczas macierze AB i BA są podobne.

Dowód:
Skoro macierz $A \in GL(n, \mathbb{F})$, to istnieje jej macierz odwrotna.
W takim razie zachodzi równość:
$A^{-1}(AB)A = A^{-1}ABA = A^{-1}A(BA) = BA.$
W związku z tym macierze AB i BA są podobne.

Wniosek

Jeśli $A, B \in GL(n, \mathbb{F})$, to macierze AB i BA są podobne.

Uwaga

Jeśli macierze A i B są macierzami osobliwymi, to macierze AB i BA nie zawsze będą podobne.

Weźmy dwie macierze rzędu 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Jeśli macierze A i B są macierzami osobliwymi, to macierze AB i BA nie zawsze będą podobne.

Weźmy dwie macierze rzędu 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iloczyn tych macierzy jest równy:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Jeśli macierze A i B są macierzami osobliwymi, to macierze AB i BA nie zawsze będą podobne.

Weźmy dwie macierze rzędu 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iloczyn tych macierzy jest równy:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że rank(AB)$= 1 \neq 0 =$rank(BA), więc macierze AB i BA nie są podobne.

Wielomian charakterystyczny

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$. Wielomian charakterystyczny macierzy A definiujemy jako: $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Wielomian charakterystyczny

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$. Wielomian charakterystyczny macierzy A definiujemy jako: $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Przykład:

Użyjemy macierzy ze wcześniejszego slajdu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, B - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$. Wielomian charakterystyczny macierzy A definiujemy jako: $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Przykład:

Użyjemy macierzy ze wcześniejszego slajdu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, B - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Wtedy:

$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$

$P_B(\lambda) = det(B - \lambda I_3) = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$

Twierdzenie 2.

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Jeśli macierze A i B są podobne, to $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

Twierdzenie 2.

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Jeśli macierze A i B są podobne, to $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

Dowód:
Jeśli macierze A i B są podobne, to istnieje macierz $V \in GL(n, F)$, spełniająca warunek $V^{-1}AV = B$. W takim razie:

$$
\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= det(B - \lambda I_n) = \\
&= det(V^{-1}AV - \lambda I_n) = \\
&= det(V^{-1}AV - V^{-1}\lambda I_n V) = \\
&= det(V^{-1}(A - \lambda I_n)V) = \\
&= det(V^{-1})det(A - \lambda I_n)det(V) = \\
&= det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda)
\end{aligned}
$$

Udało się pokazać, że $P_B(\lambda) = P_A(\lambda)$, co kończy dowód.

Twierdzenie 3.

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$ i niech rank(A)=r<n. Wtedy istnieją $U, V \in GL(n, F)$, że zachodzi równość:

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3.

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$ i niech rank(A)=r<n. Wtedy istnieją $U, V \in GL(n, F)$, że zachodzi równość:

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$ i niech rank(A)=r<n. Wtedy istnieją $U, V \in GL(n, F)$, że zachodzi równość:

$$A = U \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix} V$$

Twierdzenie 3.

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$ i niech rank(A)=r<n. Wtedy istnieją $U, V \in GL(n, F)$, że zachodzi równość:

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$ i niech rank(A)=r<n. Wtedy istnieją $U, V \in GL(n, F)$, że zachodzi równość:

$$A = U \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix} V$$

Twierdzenie 4.

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Wtedy wielomian charakterystyczny macierzy AB i BA są sobie równe.

Dowód:
Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$ i niech jej rząd będzie równy r<n.
Weźmy macierze $U, V \in GL(n, \mathbb{F})$, spełniające równość:

$$A = U \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix} V = U{\color{blue}C}V$$

W takim razie, dla macierzy $B \in M_n(\mathbb{F})$ mamy:

$$B = V^{-1} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} U^{-1} = V^{-1}{\color{red}D}U^{-1} \ , \ B_{11} \in M_r(\mathbb{F}).$$

Dowód:
Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$ i niech jej rząd będzie równy r<n.
Weźmy macierze $U, V \in GL(n, \mathbb{F})$, spełniające równość:

$$A = U \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix} V = U{\color{blue}C}V$$

W takim razie, dla macierzy $B \in M_n(\mathbb{F})$ mamy:

$$B = V^{-1} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} U^{-1} = V^{-1}{\color{red}D}U^{-1} \ , \ B_{11} \in M_r(\mathbb{F}).$$

Zauważmy, że:

$$AB = U{\color{blue}C}VV^{-1}{\color{red}D}U^{-1} = U{\color{blue}C}{\color{red}D}U^{-1} = U \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix} U^{-1}.$$

$$BA = V^{-1}{\color{red}D}U^{-1}U{\color{blue}C}V = V^{-1}{\color{red}D}{\color{blue}C}V = V^{-1} \begin{bmatrix} B_{11} & O_{r,n-r} \\ B_{21} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix} V.$$

Dla skrócenia obliczeń oznaczymy nasze macierze:

$$K = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} B_{11} & O_{r,n-r} \\ B_{21} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Dla skrócenia obliczeń oznaczymy nasze macierze:

$$K = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} B_{11} & O_{r,n-r} \\ B_{21} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Podsumowując:

$$P_{AB}(\lambda) = det(UKU^{-1} - \lambda I_n) = det(U(K - \lambda I_n)U^{-1}) =$$

$$= det(K - \lambda I_n) = det\left(\begin{bmatrix} B_{11} - \lambda I_r & B_{12} \\ O_{n-r,r} & -\lambda I_{n-r} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (-\lambda)^{n-r} P_{B_{11}}(\lambda).$$

Dla skrócenia obliczeń oznaczymy nasze macierze:

$$K = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} B_{11} & O_{r,n-r} \\ B_{21} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Podsumowując:

$$P_{AB}(\lambda) = det(UKU^{-1} - \lambda I_n) = det(U(K - \lambda I_n)U^{-1}) =$$
$$= det(K - \lambda I_n) = det\left(\begin{bmatrix} B_{11} - \lambda I_r & B_{12} \\ O_{n-r,r} & -\lambda I_{n-r} \end{bmatrix}\right) =$$
$$= (-\lambda)^{n-r} P_{B_{11}}(\lambda).$$

Analogicznie w przypadku BA:

$$P_{BA}(\lambda) = det(V^{-1}QV - \lambda I_n) = det(V^{-1}(Q - \lambda I_n)V) =$$
$$= det(Q - \lambda I_n) = det\left(\begin{bmatrix} B_{11} - \lambda I_r & O_{r,n-r} \\ B_{21} & -\lambda I_{n-r} \end{bmatrix}\right) =$$
$$= (-\lambda)^{n-r} P_{B_{11}}(\lambda).$$

Dla skrócenia obliczeń oznaczymy nasze macierze:

$$K = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} B_{11} & O_{r,n-r} \\ B_{21} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Podsumowując:

$$P_{AB}(\lambda) = det(UKU^{-1} - \lambda I_n) = det(U(K - \lambda I_n)U^{-1}) =$$
$$= det(K - \lambda I_n) = det\left(\begin{bmatrix} B_{11} - \lambda I_r & B_{12} \\ O_{n-r,r} & -\lambda I_{n-r} \end{bmatrix}\right) =$$
$$= (-\lambda)^{n-r} P_{B_{11}}(\lambda).$$

Analogicznie w przypadku BA:

$$P_{BA}(\lambda) = det(V^{-1}QV - \lambda I_n) = det(V^{-1}(Q - \lambda I_n)V) =$$
$$= det(Q - \lambda I_n) = det\left(\begin{bmatrix} B_{11} - \lambda I_r & O_{r,n-r} \\ B_{21} & -\lambda I_{n-r} \end{bmatrix}\right) =$$
$$= (-\lambda)^{n-r} P_{B_{11}}(\lambda).$$

Wykazaliśmy, że wielomiany charakterystyczne macierzy AB i BA są identyczne, co kończy dowód.

Niech macierz $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, niech rank(A)=r<n.
Weźmy takie macierze $U, V \in GL(n, \mathbb{F})$, takie że:

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Dla macierzy B mamy: $V^{-1}BU^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, B_{11} \in M_r(\mathbb{F})$.

Niech macierz $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, niech rank(A)=r<n.
Weźmy takie macierze $U, V \in GL(n, \mathbb{F})$, takie że:

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Dla macierzy B mamy: $V^{-1}BU^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, B_{11} \in M_r(\mathbb{F})$.

Twierdzenie 5.

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ będą macierzami osobliwymi. AB i BA są macierzami podobnymi, jeśli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

(a) $rank(B_{11}) = rank \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix}$

Niech macierz $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, niech rank(A)=r<n.
Weźmy takie macierze $U, V \in GL(n, \mathbb{F})$, takie że:

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Dla macierzy B mamy: $V^{-1}BU^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, $B_{11} \in M_r(\mathbb{F})$.

Twierdzenie 5.

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ będą macierzami osobliwymi. AB i BA są macierzami podobnymi, jeśli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

(a) $rank(B_{11}) = rank \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix}$

(b) $B_{11} = O_{r,r}$ i rank $B_{21} =$ rank B_{12}

Niech macierz $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, niech rank(A)=r<n.
Weźmy takie macierze $U, V \in GL(n, \mathbb{F})$, takie że:

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

Dla macierzy B mamy: $V^{-1}BU^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, $B_{11} \in M_r(\mathbb{F})$.

Twierdzenie 5.

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ będą macierzami osobliwymi. AB i BA są macierzami podobnymi, jeśli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

(a) $rank(B_{11}) = rank \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix}$

(b) $B_{11} = O_{r,r}$ i rank B_{21} = rank B_{12}

(c) Macierz $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & O_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$ jest macierzą symetryczną

Twierdzenie 6.

Niech $C \in M_n(\mathbb{F})$ będzie macierzą rzędu jeden i niech $\operatorname{tr} C = c$. Wtedy macierz C jest podobna do macierzy:

(a) $diag(c, 0, \ldots, 0)$, jeśli $c \neq 0$

(b) $diag\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 0, \ldots, 0\right)$, jeśli $c = 0$

Przykład:

Weźmy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix},$$

Twierdzenie 6.

Niech $C \in M_n(\mathbb{F})$ będzie macierzą rzędu jeden i niech $\mathrm{tr}\ \mathrm{C} = \mathrm{c}$. Wtedy macierz C jest podobna do macierzy:

(a) $diag(c, 0, \ldots, 0)$, jeśli $c \neq 0$

(b) $diag\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 0, \ldots, 0\right)$, jeśli $\mathrm{c} = 0$

Przykład:

Weźmy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \ \mathrm{rank(A)}=1, \ \mathrm{tr(A)} = 1+4+12=17.$$

Twierdzenie 6.

Niech $C \in M_n(\mathbb{F})$ będzie macierzą rzędu jeden i niech $\text{tr } C = c$. Wtedy macierz C jest podobna do macierzy:

(a) $diag(c, 0, \ldots, 0)$, jeśli $c \neq 0$

(b) $diag\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 0, \ldots, 0\right)$, jeśli $c = 0$

Przykład:

Weźmy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \text{ rank(A)=1, tr(A) } = 1+4+12=17.$$

W takim razie, macierz A jest podobna do macierzy:

$$B = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = diag(17, 0, 0, 0)$$

Literatura

PROKIP V.M.
On the similarity of matrices AB and BA over a field.

Ralph Howard
The Characteristic Polynomial of a Product.
people.math.sc.edu/howard/Classes/700/charAB.pdf

Andrzej Mostowski, Marceli Stark
Algebra liniowa.