P...

e-SESJA STUDENCKICH KÓŁ NAUKOWYCH
e-SSKN – 09.06.2021r.

TWIERDZENIE GERSTENHABERA-SIERIOŻKINA, CZYLI O POJEMNOŚCI ZBIORU MACIERZY NILPOTENTNYCH

Szymon Sroka

Studenckie Koło Naukowe Matematyków Politechniki Krakowskiej

Macierz A nazywamy macierzą nilpotentną, jeśli podniesiona do pewnej potęgi daje macierz zerową. Ze względu na to że suma dwóch macierzy nilpotentych nie zawsze jest macierzą nilpotentną, ciężko jest określić maksymalny wymiar podprzestrzeni liniowej złożonej jedynie z macierzy nilpotentych. Problematykę tę podjął w 1962 M. Gerstenhaber oraz niezależnie od niego W.N. Sieriożkin, dowodząc, że maksymalny wymiar takiej podprzestrzeni jest równy n(n-1)/2. Dowody były jednak dosyć obszerne oraz mocno techniczne. Okazuje się, że dowód tw. Gerstenhabera-Sieriożkina można uprościć, posługując się pojęciem dopełnienia ortogonalnego względem niezdegenerowanej formy dwuliniowej.

Macierze nilpotentne

Macierz A nazywamy macierzą nilpotentną, jeśli podniesiona do pewnej potęgi daje macierz zerową.

Macierze nilpotentne mają wiele ciekawych i użytecznych własności, takich jak:
1. wyznacznik równy 0,
2. ślad równy zero,
3. wszystkie wartości własne równe zero,
4. każda macierz ściśle górnotrójkątna lub ściśle dolnatrójkątna jest macierzą nilpotentną.

Rozważając macierze nilpotentne wartym zauważenia jest fakt że suma minorów głównych dowolnego rozmiaru jest równa zeru oraz że suma tych dwóch macierzy nilpotentych nie zawsze jest macierzą nilpotentną.

Forma dwuliniowa

Formą dwuliniowa na przestrzeni wektorowej V nad ciałem K, nazywamy funkcję B: V $\times$ V $\longrightarrow$ K, które jest liniowe, ze względu na każdą zmienną z osobna.

Istnieje kilka rodzajów form dwuliniowych, przykładowo:
1. forma refleksywna,
2. forma alternująca,
3. forma symetryczna.

Rozważmy w tym miejscu funkcja f(A,B) = tr(AB), gdzie A i B są macierzami kwadratowymi stopnia n. Zauważmy, że f(A,B)=tr(AB)=tr(BA)=f(B,A) w takim razie jest to formą symetryczną. Dodatkowo, dla każdej macierzy kwadratowej B stopnia n mamy:

$$\forall B \in M_n(K) : tr(AB) = 0 \Longrightarrow A = O_{n\times n}$$

W takim razie ślad iloczynu macierzy jest formą symetryczną niezdegenerowaną.

Dopełnienie ortogonalne

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V oraz niech f będzie symetryczną forma dwuliniową na przestrzenni V. Zbiór

$$\mathrm{W}^{\perp} = \{x \in \mathrm{V} : f(x,y) = 0 \text{ dla każdego } y \in \mathrm{W}\}$$

nazywamy dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni W względem formy f.

Rozważmy teraz podprzestrzeń złożona z macierzy kwadratowych stopnia n, które są ściśle górnotrójkątne. Dopełnieniem ortogonalnym tej podprzestrzeni względem formy (A,B)$\longrightarrow$tr(AB) jest podprzestrzeń złożona ze wszystkich macierzy górnotrójkątnych. Wartym zauważenia jest też fakt że, jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V, przy czym f jest formą symetryczną niezdegenerowaną na V oraz V ma skończony wymiar, wtedy wymiar przestrzeni V jest równy sumie wymiaru podprzestrzeni W i wymiaru dopełnienia ortogonalnego tej podprzestrzeni względem formy f.

Pojemność liniowa

Niech V będzie przestrzenią liniową o skończonym wymiarze. Pojemnością liniową zbioru zawartego w V nazywamy supremum wymiaru podprzestrzeni, które zawierają się w tym zbiorze. Pojemność liniową zbioru Z będziemy oznaczać przez Λ(Z).

Przydatne własności pojemności liniowej to np.:
1. Λ(Z)=-∞ wtedy i tylko wtedy, gdy wektor zerowy nie jest elementem zbioru Z,
2. Λ(A $\times$ B) = Λ(A) + Λ(B).

Rozważmy podprzestrzeń liniową złożona jedynie z macierzy kwadratowych stopnia n, które są ściśle górnotrójkątne. Zauważmy, wymiar tej podprzestrzeni jest równy n (n - 1)/2. Z tego faktu wynika, że pojemność liniowa zbioru wszystkich macierzy nilpotentnych rozmiaru n jest równa przynajmniej n(n-1)/2.

Twierdzenie Gerstenhabera-Sieriożkina

W 1962 M. Gerstenhaber udowodnił, że wymiar przestrzeni złożonej jedynie z macierzy nilpotentnych jest równy co najwyżej n(n-1)/2. Dowód tego twierdzenia zajmował 5 stron, był on trudny i bardzo techniczny, przy czym wymagał założenia, że ciało podstawowe ma co najmniej n elementów.

W 1985 W.N. Sieriożkinowi udało się uprościć dowód, dodatkowo udało mu się usunąć założenie mówiące o mocy ciała na którym znajdowały się macierze.

W 1990 roku trzej matematycy B. Mathes, M.Omladic oraz H.Radjavi jeszcze bardziej uprościli dowód. Aby tego dokonać, skorzystali z własności dopełnienia ortogonalnego względem niezdegenerowanej formy dwuliniowej. Formą, której użyli, jest ślad iloczynu macierzy.

Katedra Matematyki Stosowanej,
Studenckie Koło Naukowe Matematyków Politechniki Krakowskiej,
Ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków,
kontakt.sknmpk@gmail.com.

STUDENCKIE KOŁO NAUKOWE MATEMATYKÓW POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ