Twierdzenie Gerstenhabera-Sieriożkina

czyli kilka słów o pojemności liniowej

Szymon Sroka

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki

11 maja 2022

Podstawowe oznaczenia

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$,
$M_{n\times m}(\mathbb{F})$ - przestrzeń wektorowa wszystkich macierzy o rozmiarach $n \times m$ nad ciałem $\mathbb{F}$,
$GL_n(\mathbb{F})$ - zbiór wszystkich macierzy nieosobliwych stopnia n nad ciałem $\mathbb{F}$,
$\mathcal{N}_n(\mathbb{F})$ - zbiór wszystkich macierzy nilpotentnych stopnia n nad ciałem $\mathbb{F}$,
I_n - macierz identycznościowa stopnia n,
$\mathbf{0}_{n\times m}$ - macierz zerowa rozmiaru $n \times m$,
$\sigma(A)$ - widmo macierzy A,
$p_A(x)$ - wielomian charakterystyczny macierzy A,
$S_n(A)$ - suma minorów głównych stopnia n macierzy A.

Pojemność liniowa

Definicja

Niech V będzie przestrzenią wektorową o skończonym wymiarze. Pojemność liniową zbioru $Z \subseteq V$ nazywamy

$$\sup \{\dim L : L \text{ jest podprzestrzenią liniową w } V, L \subseteq Z\}.$$

Pojemnością liniową zbioru Z będziemy oznaczać przez $\Lambda(Z)$.

Pojemność liniowa

Definicja

Niech V będzie przestrzenią wektorową o skończonym wymiarze. Pojemność liniową zbioru $Z \subseteq V$ nazywamy

$$\sup\{\dim L : L \text{ jest podprzestrzenią liniową w } V, L \subseteq Z\}.$$

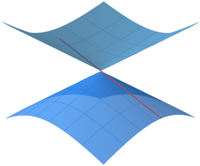
Pojemnością liniową zbioru Z będziemy oznaczać przez $\Lambda(Z)$.

Własności

Niech V oraz W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $E, G \subseteq V$ oraz $H \subseteq W$. Wówczas

1. $\Lambda(E) = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{0} \notin E$,
2. jeśli $E \subseteq G$, to $\Lambda(E) \leqslant \Lambda(G)$,
3. $\Lambda(E \times H) = \Lambda(E) + \Lambda(H)$ (traktujemy tu iloczyn $E \times H$ jako podzbiór przestrzeni wektorowej $V \times W$).

Rozważmy pojemność liniową poniższych zbiorów.

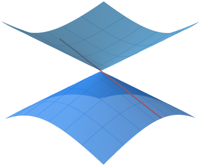


Rysunek: $\mathcal{A} : x^2 + y^2 = z^2$

Rysunek: $\mathcal{B} : (z - x^2 - y^2)z = 0$

Pojemność liniowa

Rozważmy pojemność liniową poniższych zbiorów.



Rysunek: $\mathcal{A} : x^2 + y^2 = z^2$

Rysunek: $\mathcal{B} : (z - x^2 - y^2)z = 0$

$$\Lambda(\mathcal{A}) = 1, \Lambda(\mathcal{B}) = 2$$

Twierdzenie Gerstenhabera-Sieriożkina

Twierdzenie Gerstenhabera-Sieriożkina

Pojemność liniowa pełnego stożka nilpotentnego $\mathcal{N}_n(\mathbb{F})$ jest równa $\frac{1}{2}n(n-1)$. Co więcej, jeśli $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$, zaś $\mathcal{L}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $M_n(\mathbb{F})$ spełniającą warunki $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{N}_n(\mathbb{F})$ oraz $\dim \mathcal{L} = \frac{1}{2}n(n-1)$, to istnieje taka macierz $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, że $\mathcal{L} = \{PAP^{-1} : A \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F})\}$.

Twierdzenie Gerstenhabera-Sierożkina

Pojemność liniowa pełnego stożka nilpotentnego $\mathcal{N}_n(\mathbb{F})$ jest równa $\frac{1}{2}n(n-1)$. Co więcej, jeśli $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$, zaś $\mathcal{L}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $M_n(\mathbb{F})$ spełniającą warunki $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{N}_n(\mathbb{F})$ oraz $\dim \mathcal{L} = \frac{1}{2}n(n-1)$, to istnieje taka macierz $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, że $\mathcal{L} = \{PAP^{-1} : A \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F})\}$.

Rozważmy zbiór macierzy ściśle górnotrójkątnych stopnia n nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz oznaczmy go jako $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F})$. Zauważmy, że $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F})$ jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(\mathbb{F})$ oraz składa się z macierzy nilpotentnych. Zatem

$$\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}) \subseteq \mathcal{N}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow \Lambda\left(\mathcal{N}_n(\mathbb{F})\right) \geqslant \dim \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Przygotowanie do dowodu

Niezdegenerowana forma dwuliniowa

Niech f będzie symetryczną formą dwuliniową w przestrzeni wektorowej V. Formę nazywamy niezdegenerowaną, jeśli jedynym wektorem $x \in V$ spełniającym warunek

$$\forall y \in V \ \ f(x, y) = 0$$

jest wektor zerowy.

Przygotowanie do dowodu

Niezdegenerowana forma dwuliniowa

Niech f będzie symetryczną formą dwuliniową w przestrzeni wektorowej V. Formę nazywamy niezdegenerowaną, jeśli jedynym wektorem $x \in V$ spełniającym warunek

$$\forall y \in V \;\; f(x,y) = 0$$

jest wektor zerowy.

Przykład

Funkcja

$$f : \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \ni (A,B) \longrightarrow \mathrm{tr}\,(AB) \in \mathbb{F}$$

jest symetryczną formą niezdegenerowaną.

Przygotowanie do dowodu

Dopełnienie ortogonalne

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V oraz niech f będzie symetryczną formą dwuliniową na przestrzeni V. Zbiór

$$W^{\perp} = \{x \in V : f(x, y) = 0 \text{ dla każdego } y \in W\}$$

nazywamy dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni W.

Przygotowanie do dowodu

Dopełnienie ortogonalne

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V oraz niech f będzie symetryczną formą dwuliniową na przestrzeni V. Zbiór

$$W^{\perp} = \{x \in V : f(x,y) = 0 \text{ dla każdego } y \in W\}$$

nazywamy dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni W.

Twierdzenie 1

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V oraz niech f będzie symetryczną formą dwuliniową niezdegenerowaną na przestrzeni V. Niech dodatkowo $\dim V < \infty$. Wtedy

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}.$$

Przygotowanie do dowodu

Oznaczania

Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem.
$\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ - podprzestrzeń złożona ze wszystkich macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{F}$, które są górnotrójkątne,
$\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F})$ - podprzestrzeń złożona ze wszystkich macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{F}$, które są górnotrójkątne i nilpotentne,
$\mathcal{T}_n^1(\mathbb{F})$ - podprzestrzeń złożona ze wszystkich macierzy stopnia n nad ciałem $\mathbb{F}$, które są górnotrójkątne oraz posiadają dokładnie jedną wartość własność.

$$A = \begin{bmatrix} x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{jeśli } x = 0 \text{ to } A \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}), \\ \text{w przeciwnym wypadku } A \in \mathcal{T}_n^1(\mathbb{F}) \end{array}$$

Przygotowanie do dowodu

Lemat 1

Podprzestrzeń $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ jest dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F})$ względem formy $f(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

Rozważmy dwie macierze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F}), B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}).$$

Przygotowanie do dowodu

Lemat 1

Podprzestrzeń $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ jest dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F})$ względem formy $f(A,B) = \operatorname{tr}(AB)$.

Rozważmy dwie macierze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{F}), B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}).$$

Zauważmy, że $f(A,B) = \operatorname{tr}(AB) = 0$. W takim razie $(\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}))^\perp \supseteq \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$. Zauważmy, że $\dim \mathcal{T}_n(\mathbb{F}) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Używając teraz twierdzenia 1 otrzymujemy

$$\dim M_n(\mathbb{F}) - \dim \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}) = \dim(\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}))^\perp = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Zatem $(\mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}))^\perp = \mathcal{T}_n(\mathbb{F})$.

Przygotowanie do dowodu

Lemat 2

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ będą macierzami nilpotentnymi. Dodatkowo, niech $A + B$ będzie macierzą nilpotentną. Wówczas $\mathrm{tr}(AB) = 0$.

Niech J będzie postacią kanoniczną Jordana macierzy B.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

Istnieje w takim razie $P \in GL_n(\mathbb{F})$, że $B = PJP^{-1}$. Niech macierz $\widehat{A} = P^{-1}AP$. Zauważmy, że

$$\widehat{A} + J = P^{-1}AP + PBP^{-1} = P^{-1}(A + B)P,$$

zatem $\widehat{A} + J$ jest macierzą podobną do $A + B$.

Przygotowanie do dowodu

Rozważmy teraz iloczyn AB.

$$AB = P\widehat{A}P^{-1}PJP^{-1} = P\widehat{A}JP^{-1},$$

Powyższa równość oznacza, że macierze AB i $\widehat{A}J$ są podobne. Przyjmijmy, że $\widehat{A} = [a_{ij}]$. Mamy wtedy

$$\mathrm{tr}(\widehat{A}J) = 0 + \delta_2 a_{21} + \delta_3 a_{32} + \cdots + \delta_{n-1} a_{n,n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i a_{i+1,i}.$$

Dodatkowo

$$S_2(\widehat{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oraz

$$S_2(\widehat{A} + J) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \delta_1 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} + \delta_{n-1} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Skoro tak, to

$$S_2(\widehat{A}) - S_2(\widehat{A} + J) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \delta_1 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} + \delta_2 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} + \delta_{n-1} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_1 a_{21} + \delta_2 a_{32} + \ldots + \delta_{n-1} a_{n,n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i a_{i+1,i}.$$

Podsumowując

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(\widehat{A}J) = S_2(\widehat{A}) - S_2(\widehat{A} + J) = 0.$$

Dowód Mathesa-Omladiča-Radjaviego

Niech $\mathcal{L}$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $M_n(\mathbb{F})$ złożoną z macierzy nilpotentnych oraz niech $f(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$. By udowodnić twierdzenie Gerstenhabera-Sieriożkina wystarczy pokazać, że $\dim \mathcal{L} \leqslant \frac{1}{2}n(n-1)$. Dla skrócenia zapisu oznaczmy $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F})$. Niech $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{T}$ oraz niech $\mathcal{L}_2$ będzie ustalonym dopełnieniem prostym podprzestrzeni $\mathcal{L}_1$ w podprzestrzeni $\mathcal{L}$. Oznacza to, że:

- $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}$,
- $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\mathbf{0}_{n\times n}\}$,
- $\mathcal{L} = \{A + B : A \in \mathcal{L}_1, B \in \mathcal{L}_2\}$.

Dowód Mathesa-Omladiča-Radjaviego

Rozważmy macierze $A \in \mathcal{L}_1, B \in \mathcal{L}_2$ oraz $C \in \mathcal{T}^\perp$. Zauważmy, że $f(A, C) = 0$. Ponieważ $\{A, B, A + B\} \subseteq \mathcal{L}$, to macierze $A, B, A + B$ są nilpotentne. Używając lematu 2 otrzymujemy $f(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = 0$. Z dwuliniowości formy f wynika, że $f(A, B + C) = f(A, B) + f(A, C) = 0$, a w ten sposób mamy

$$\mathcal{L}_2 + \mathcal{T}^\perp = \left\{ B + C : B \in \mathcal{L}_2, C \in \mathcal{T}^\perp \right\} \subseteq \mathcal{L}_1^\perp.$$

Dowód Mathesa-Omladiča-Radjaviego

Rozważmy macierze $A \in \mathcal{L}_1, B \in \mathcal{L}_2$ oraz $C \in \mathcal{T}^\perp$. Zauważmy, że $f(A, C) = 0$. Ponieważ $\{A, B, A + B\} \subseteq \mathcal{L}$, to macierze $A, B, A + B$ są nilpotentne. Używając lematu 2 otrzymujemy $f(A, B) = \mathrm{tr}(AB) = 0$. Z dwuliniowości formy f wynika, że $f(A, B + C) = f(A, B) + f(A, C) = 0$, a w ten sposób mamy

$$\mathcal{L}_2 + \mathcal{T}^\perp = \left\{B + C : B \in \mathcal{L}_2, C \in \mathcal{T}^\perp\right\} \subseteq \mathcal{L}_1^\perp.$$

Dzięki lematowi 1 wiemy, że każda macierz należąca do $\mathcal{T}^\perp$ jest górnotrójkątna. Dodatkowo elementy podprzestrzeni $\mathcal{L}_2$ są macierzami nilpotentnymi. Zauważmy, że macierz górnotrójkątna jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ściśle górnotrójkątna.

Dowód Mathesa-Omladiča-Radjaviego

Skoro tak, to

$$\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{T} = \mathcal{L}_2 \cap (\mathcal{L} \cap \mathcal{T}) = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\mathbf{0}_{n\times n}\}.$$

W takim razie $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{T}^\perp \subseteq \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{T} = \{\mathbf{0}_{n\times n}\}$. Używając lematu 1 otrzymujemy

$$\dim(\mathcal{L}_2 + \mathcal{T}^\perp) = \dim \mathcal{L}_2 + \dim \mathcal{T}^\perp = \dim \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}n(n+1).$$

Używając teraz inkluzji $\mathcal{L}_2 + \mathcal{T}^\perp \subseteq \mathcal{L}_1$ oraz twierdzenia 1 otrzymujemy

$$\dim \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}n(n+1) = \dim\left(\mathcal{L}_2 + \mathcal{T}^\perp\right) \leqslant \dim \mathcal{L}_1^\perp = n^2 - \dim \mathcal{L}_1,$$

co w konsekwencji daje

$$\dim \mathcal{L} = \dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \leqslant n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Konsekwencje twierdzenia

Lemat 3

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$ i niech $\lambda \in \mathbb{F}$. Wtedy
$\sigma(A + \lambda I_n) = \{\alpha + \lambda : \alpha \in \sigma(A)\}$

Dowód

Niech macierz $B = A + \lambda I_n$. Wtedy

$$p_B(x) = \det(xI_n - B) = \det(xI_n - A - \lambda I_n) = \det((x-\lambda)I_n - A) = p_A(x-\lambda).$$

W takim razie

$$\sigma(B) = \{\beta \in \overline{\mathbb{F}} : p_B(\beta) = 0\} = \{\beta \in \overline{\mathbb{F}} : p_A(\beta - \lambda) = 0\} =$$

$$= \{\beta \in \overline{\mathbb{F}} : \beta - \lambda) \in \sigma(A)\} = \{\beta \in \overline{\mathbb{F}} : p_A(\beta - \lambda) = 0\} =$$

$$= \{\alpha + \lambda : \alpha \in \sigma(A)\}.$$

$\blacksquare$

Konsekwencje twierdzenia

Lemat 4

Niech $A \in M_n(\mathbb{F})$. Przypuśćmy, że $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \nmid n$ i że $\sigma(A)$ jest zbiorem jednoelementowym. Wówczas następuje warunki są równoważne:

1. A jest macierzą nilpotentną,
2. $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Dowód

$1) \implies 2)$
Oczywiste.
$2) \implies 1)$
Wiemy, że widmo składa się z jednego elementu α. W takim razie

$$\mathrm{tr}(A) = n\alpha = (n1)\alpha.$$

Ze względu na to, że $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \nmid n$ to $n1 \neq 0$. Podsumowując

$$\mathrm{tr}(A) = (n1)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

$\blacksquare$

Konsekwencje twierdzenia

Twierdzenie 2

Niech $\Upsilon = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : \operatorname{card} \sigma(A) = 1\}$. Załóżmy, że $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$ oraz niech $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \nmid n$. Wtedy:

1. $\Lambda(\Upsilon) = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$,
2. jeśli podprzestrzeń liniowa $\mathcal{L}$ przestrzeni $M_n(\mathbb{F})$ spełnia warunki $\mathcal{L} \subseteq \Upsilon$ oraz $\dim(\mathcal{L}) = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$, to istnieje taka macierz nieosobliwa $U \in M_n(\mathbb{F})$, że $U\mathcal{L}U^{-1} = \mathcal{T}_n^1$, gdzie $\mathcal{T}_n^1 = \mathcal{T}_n^0(\mathbb{F}) \oplus \mathbb{F}I_n$.

Dowód

Zauważmy, że $\mathcal{T}_n^1(\mathbb{F}) \subseteq \Upsilon$ oraz że $\dim \mathcal{T}_n^1(\mathbb{F}) = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$. W takim razie $\Lambda(\Upsilon) \geqslant \frac{1}{2}n(n-1)$.
Niech $\mathcal{L}$ będzie teraz podprzestrzenią liniową przestrzeni $M_n(\mathbb{F})$, spełniająca warunki $\mathcal{L} \subseteq \Upsilon$ oraz $\dim \mathcal{L} = \Lambda(\Upsilon)$. Połóżmy $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathbb{F}I_n$. Za sprawą lematu 3 wynika, że $\mathcal{L}_1 \subseteq \Upsilon$. W takim razie $\dim \mathcal{L}_1 \leqslant \Lambda(\Upsilon) = \dim \mathcal{L}$. Jednakże $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_1$, w konsekwencji $\dim \mathcal{L} \leqslant \dim \mathcal{L}_1$. Oznacza to, że

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \Rightarrow I_n \in \mathcal{L}.$$

Dowód

Zauważmy, że $\mathcal{T}_n^1(\mathbb{F}) \subseteq \Upsilon$ oraz że $\dim \mathcal{T}_n^1(\mathbb{F}) = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$. W takim razie $\Lambda(\Upsilon) \geqslant \frac{1}{2}n(n-1)$.
Niech $\mathcal{L}$ będzie teraz podprzestrzenią liniową przestrzeni $M_n(\mathbb{F})$, spełniająca warunki $\mathcal{L} \subseteq \Upsilon$ oraz $\dim \mathcal{L} = \Lambda(\Upsilon)$. Połóżmy $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathbb{F}I_n$. Za sprawą lematu 3 wynika, że $\mathcal{L}_1 \subseteq \Upsilon$. W takim razie $\dim \mathcal{L}_1 \leqslant \Lambda(\Upsilon) = \dim \mathcal{L}$. Jednakże $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_1$, w konsekwencji $\dim \mathcal{L} \leqslant \dim \mathcal{L}_1$. Oznacza to, że

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \Rightarrow I_n \in \mathcal{L}.$$

Niech

$$\mathcal{L}_0 = \{A \in \mathcal{L} : A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{F})\}$$

Za pomocą lematu 4 mamy

$$\mathcal{L}_0 = \{A \in \mathcal{L} : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

Dowód

Zbiór $\mathcal{L}_0$ więc jądrem niezerowego funkcjonału liniowego określonego na podprzestrzeni $\mathcal{L}$. W takim razie $\dim \mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{L} - 1$, przy czym $\mathcal{L}_0 \oplus \mathbb{F} I_n \subseteq \mathcal{L}$. Zatem

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathbb{F} I_n.$$

Stosujac teraz twierdzenie Gerstenhabera-Sieriożkina, otrzymujemy:

$$\Lambda(\Upsilon) = \dim(\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{L}_0 \oplus \mathbb{F} I_n) = \dim \mathcal{L}_0 + \dim \mathbb{F} I_n =$$

$$= \dim \mathcal{L}_0 + 1 \leqslant \frac{1}{2} n(n-1) + 1.$$

■

Bibliografia

- M. Gerstenhaber. *On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices*. IV, Ann. Math. (2) 75: 382–418 (1962),
- V. N. Serezhkin. *On linear transformations preserving nilpotency*, Izv. Akad. Nauk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk, (1985),
- B. Mathes, M. Omladič, H. Radjavi. *Linear spaces of nilpotent matrices*, Linear Algebra Appl. 149: 215–225 (1991),
- M. Omladič, P. Šemrl. *Matrix spaces with bounded number of eigenvalues*, Linear Algebra Appl. 249: 29–46 (1996).