UCZELNIANA SESJA KÓŁ NAUKOWYCH

USKN – 03.06.2022r.

POWIERZCHNIE ALGEBRAICZNE – KSZTAŁTY CIEKAWSZE NIŻ MYŚLISZ

Szymon Sroka, Jan Bartula

Studenckie Koło Naukowe Matematyków Politechniki Krakowskiej

Powierzchnię algebraiczną można zdefiniować jako zbiór miejsc zerowych niestałego wielomianu trzech zmiennych. Choć wielomiany są bardzo prostymi funkcjami, to powierzchnie algebraiczne bywają tworami niezwykle skomplikowanymi. W ramach tego plakatu przedstawiliśmy najważniejsze definicje, wygenerowaliśmy grafiki i prostych, i bardziej skomplikowanych powierzchni oraz zaprezentowaliśmy schemat ewolucji powierzchni algebraicznej. Dodatkowo plakat zawiera kody QR, dzięki którym możliwe jest zobaczenie wizualizacji danych powierzchni w innej perspektywie.

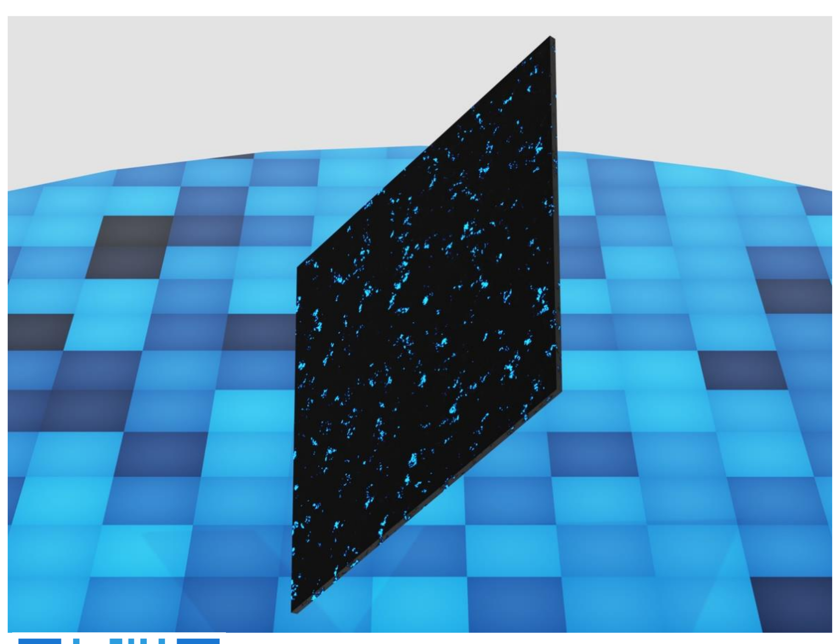
Powierzchnia algebraiczna

Niech F będzie niestałym wielomianem trzech zmiennych. Powierzchnię algebraiczną będziemy definiować jako zbiór punktów $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ spełniających warunek $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 0$.

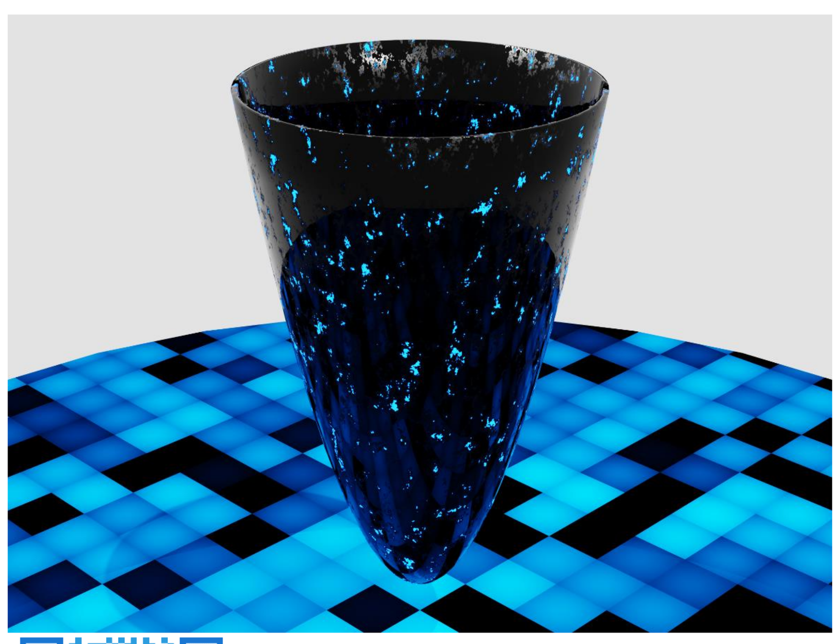
W dalszej części plakatu zmienne wielomianu będą liczbami rzeczywistymi, dzięki czemu powierzchnie algebraiczne uda się nam przedstawić w przestrzeni trójwymiarowej. Jednakże warto pamiętać o tym, że nic stoi na przeszkodzie, by zamiast liczb rzeczywistych użyć zespolonych. Czyni to sytuację bardziej skomplikowaną, ponieważ by wtedy w pełni narysować rozważaną powierzchnię, musielibyśmy działać w przestrzeni sześciowymiarowej, co mogłoby stwarzać pewne problemy.

Małe zmiany – ogromne różnice

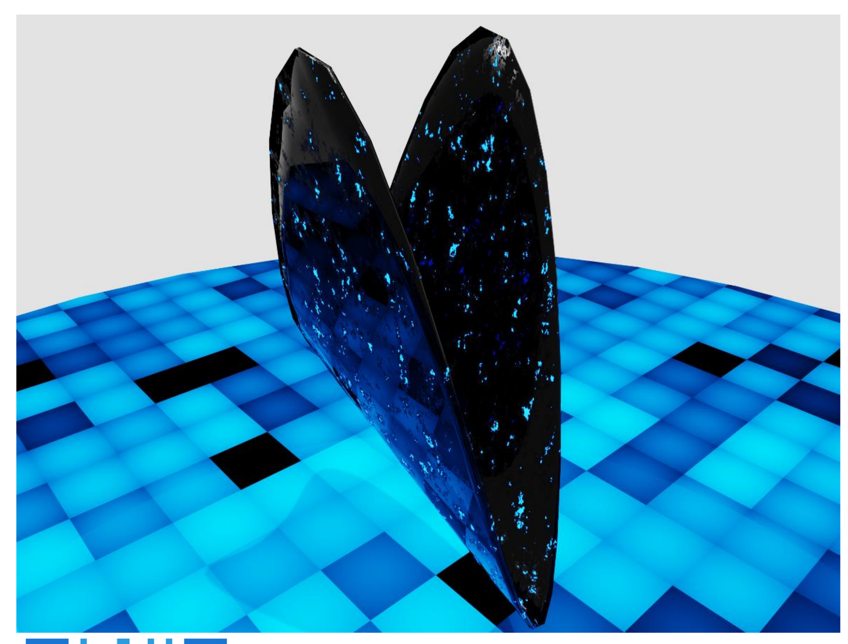
Rozważmy powierzchnię algebraiczną zdefiniowaną za pomocą równania $x + y - z = 0$. Okazuje się, że nawet niewielkie zmiany w wielomianie definiującym mogą powodować spore przekształcenia rozważanej powierzchni algebraicznej. Poniżej kilka przykładów:



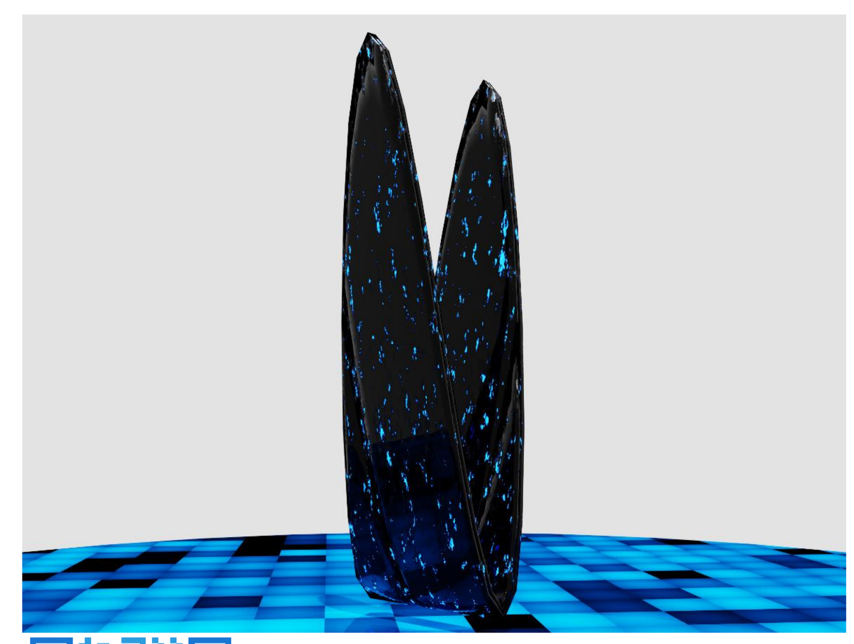
Rys. 1: $x + y - z = 0$



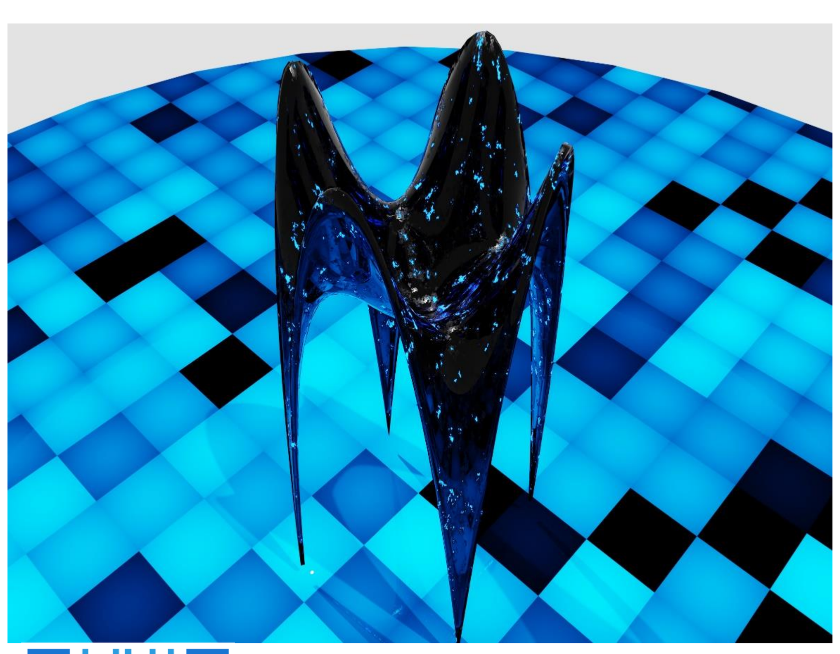
Rys. 2: $x^2 + y^2 - z = 0$



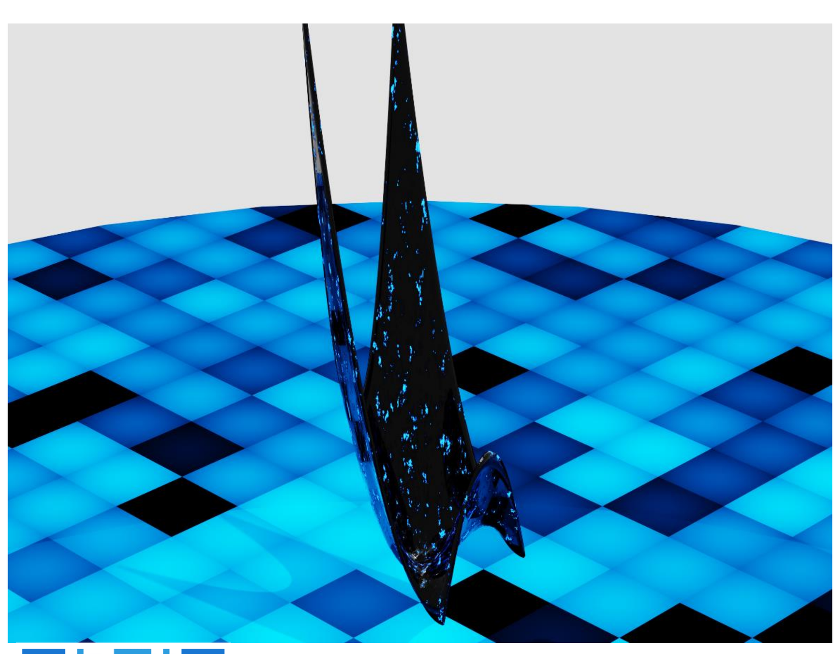
Rys. 3: $x + y^2 - z = 0$



Rys. 4: $(x + y)^2 - z = 0$



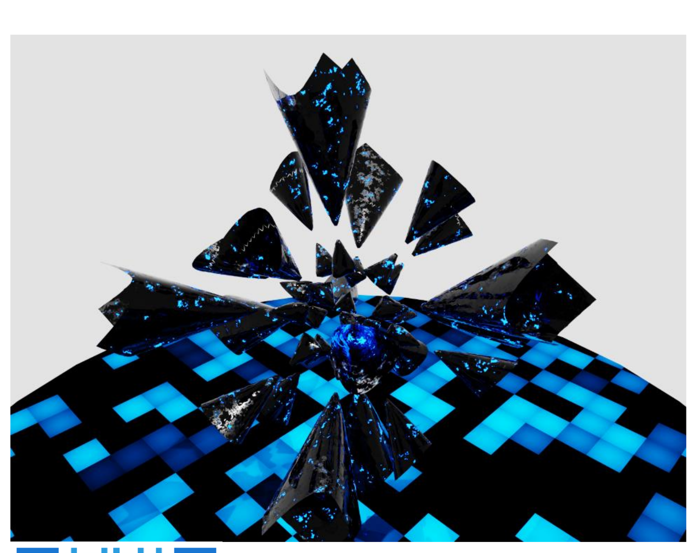
Rys. 5: $x^2 + y^2 - x^2y^2 - z = 0$



Rys. 6: $x^2 + y^2 - xy^2 - z = 0$

Punkt osobliwy

Punkt (a, b, c) na powierzchni algebraicznej $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ nazywamy osobliwym, jeśli pochodne cząstkowe względem x, y oraz z są równe 0 w punkcie (a, b, c).



Rys. 7: Umieszczona po prawej stronie powierzchnia algebraiczna posiada 65 punktów osobliwych. Znajdują się one w miejscach „złączeń”.
Warto pamiętać, że punkty te będą potencjalnie znajdować się w miejscach „charakterystycznych” dla danej powierzchni.

Wyścig za punktami osobliwymi

Jednym z ciekawszych wyzwań, jakie stawiają przed sobą matematycy i informatycy, jest wygenerowanie powierzchni algebraicznej z możliwie dużą liczbą punktów osobliwych.

Grafiki ilustrujące powierzchnie algebraiczne posiadające odpowiednio 65, 112, 345 punktów osobliwych:

Ewolucja powierzchni algebraicznej

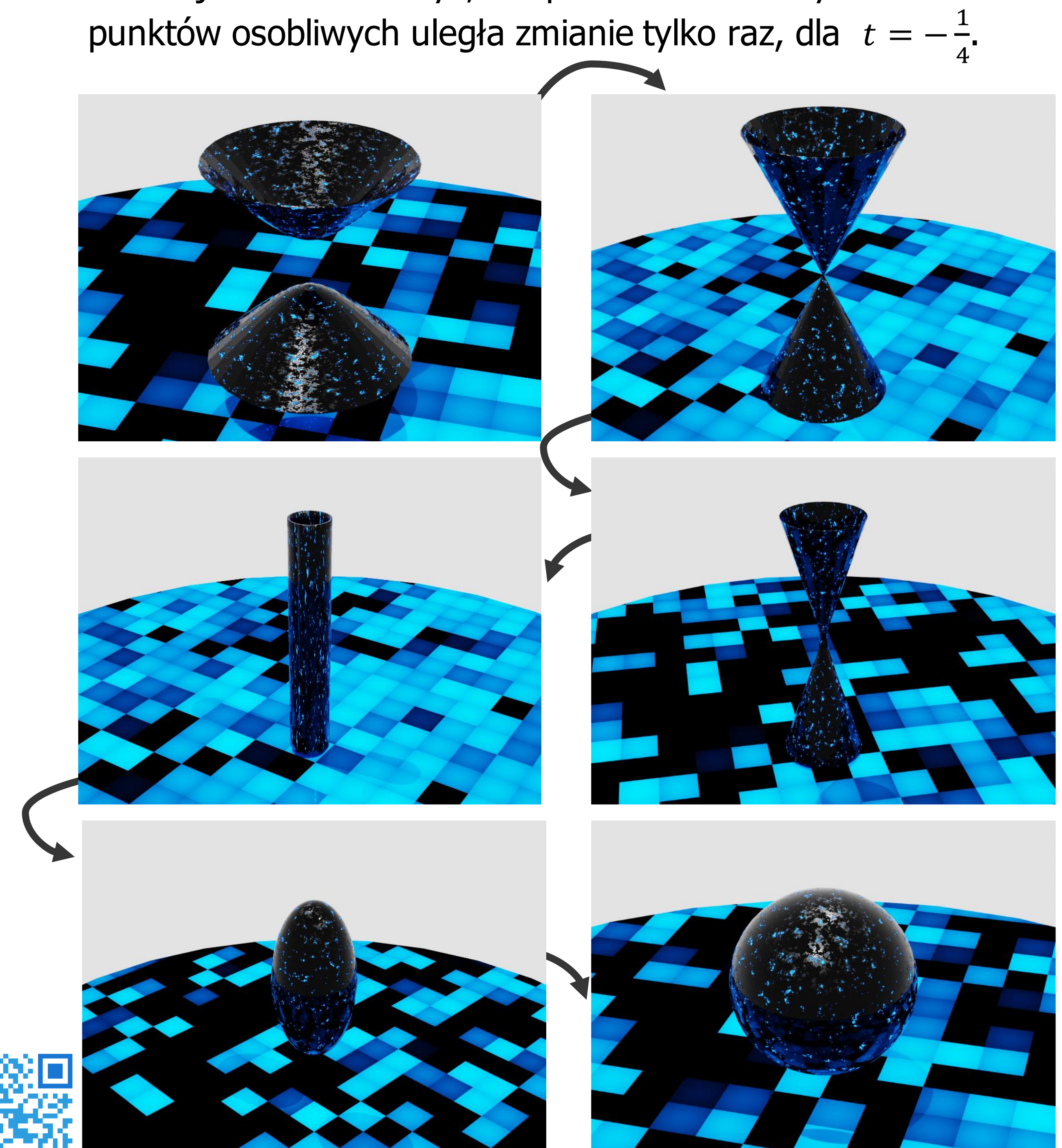
Teraz weźmy pod uwagę powierzchnię algebraiczną

$$x^2 + y^2 + tz^2 - t - \frac{1}{4} = 0,$$

zdefiniowaną z dodatkowym parametrem t. Będzie on oznaczał upływ czasu.

Poniżej przedstawiany schemat pokazuje jak rozważana powierzchnia drastycznie zmienia się ze względu na upływ czasu. Od nieograniczonej i niespójnej powierzchni, staje się ona spójna, by na końcu zostać ograniczoną „sferopodobną” powierzchnią algebraiczną.

Warto jednak zauważyć, że pomimo całkowitych zmian liczba punktów osobliwych uległa zmianie tylko raz, dla $t = -\frac{1}{4}$.



Katedra Matematyki Stosowanej,
Studenckie Koło Naukowe Matematyków Politechniki Krakowskiej,
Ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków,
kontakt.sknmpk@gmail.com.

KATEDRA MATEMATYKI STOSOWANEJ

STUDENCKIE KOŁO NAUKOWE MATEMATYKÓW POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ