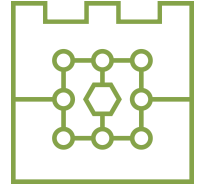




**Politechnika Krakowska**  
**im. Tadeusza Kościuszki**  
Wydział Informatyki i Telekomunikacji



**Szymon Sroka**

numer albumu: 130471

**Kwaterniony, obroty i animacje komputerowe**  
**Selected theorems on linear capacity of matrix sets**

praca magisterska  
na kierunku Matematyka

Praca przygotowana pod kierunkiem  
**dra Marcina Skrzyńskiego**

Recenzent pracy:  
**dr hab. Ihor Mykytyuk, prof. PK**

Kraków 2023



# Spis treści

<b>Wstęp</b>	1
<b>Podstawowe informacje</b>	2
<b>1. Algebra czterowymiarowa kwaternionów</b>	3
1.1. Własności działania mnożenia w algebrze kwaternionów	3
1.1.1. Element neutralny	3
1.1.2. Przemienność i nieprzemienność	4
1.1.3. Łączność	4
1.2. Alternatywna definicja	5
1.3. Kwaternion odwrotny	6
1.3.1. Norma oraz sprzężenie kwaternionu	6
1.4. Przykładowe algebry kwaternionów	8
1.4.1. Postać kanoniczna	8
1.4.2. Postać hamiltonowska	8
1.4.3. Postać macierzowa	9
1.4.4. Postać trygonometryczna	10
<b>2. Powiązanie z geometrią</b>	11
2.1. Obrót w przestrzeni dwuwymiarowej	11
2.1.1. Opis macierzowy obrotu	12
2.1.2. Macierze odbicia	13
2.1.3. Opis obrotu za pomocą liczb zespolonych	15
2.2. Obrót w przestrzeni w $\mathbb{R}^3$	15
2.2.1. Kierunek obrotu	15
2.2.2. Opis macierzowy obrotu w przestrzeni	15
2.2.3. Wielokrotne obroty	16
2.2.4. Macierz obrotu względem dowolnej osi obrotu	17
2.2.5. Opis kwaternionowy obrotu w przestrzeni	20
<b>3. Zastosowanie</b>	21
<b>4. Literatura</b>	22



**Wstęp**

•

## Podstawowe informacje

**Definicja 1.** Algebra nad ciałem Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{F}$ . Jeśli dane jest działanie dwuargumentowe  $X \times X \rightarrow X$  mnożenia wektorów, które dla dowolnych  $x, y, z \in X$  oraz  $a \in \mathbb{F}$  spełnia poniższe warunki:

1. Lewostronna rozdzielności względem dodawania wektorów, tzn.

$$(x + y)z = xz + yz,$$

2. Prawostronna rozdzielności względem dodawania wektorów, tzn.

$$x(y + z) = xy + xz.$$

3. Zgodności z działaniem mnożenia przez skalary, tzn.

$$a(xy) = (ax)y = x(ay),$$

to  $X$  z tak wprowadzonym działaniem algebraicznym nazywamy algebrą nad ciałem  $\mathbb{F}$ .

**Definicja 2.** Odwzorowanie  $\|\cdot\|$  nazywamy normą na przestrzeni  $X$

# 1. Algebra czterowymiarowa kwaternionów

Weźmy przestrzeń wektorową czterowymiarową nad dowolnym ciałem  $\mathbb{F}$ . Niech  $\{e, i, j, k\}$  będzie pewną konkretną bazą tej przestrzeni. Zdefiniujemy mnożenie dla wektorów bazowych tej przestrzeni oraz przedstawmy je w formie tabeli.

Tabela 1.1. Tabela mnożenia elementów bazowych.

$\times$	$e$	$i$	$j$	$k$
$e$	$e$	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	$-e$	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	$-e$	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	$-e$

Dowolny element należący do rozważanej przestrzeni możemy przedstawić w postaci

$$ae + bi + cj + dk, \text{ gdzie } a, b, c, d \in \mathbb{F}.$$

Przedłużmy teraz mnożenie wektorów bazowych na całą przestrzeń. Weźmy dwa dowolne wektory  $q_1 = a_1e + b_1i + c_1j + d_1k$ ,  $q_2 = a_2e + b_2i + c_2j + d_2k$  i przy użyciu powyższej tabeli wykonajmy mnożenie wektorów  $q_1, q_2$ .

$$\begin{aligned}
 q_1q_2 &= (a_1e + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2e + b_2i + c_2j + d_2k) = \\
 &= a_1a_2e^2 + a_1b_2ei + a_1c_2ej + a_1d_2ek + b_1a_2ie + b_1b_2i^2 + b_1c_2ij + b_1d_2ik + \\
 &+ c_1a_2je + c_1b_2ji + c_1c_2j^2 + c_1d_2jk + d_1a_2ke + d_1b_2ki + d_1c_2kj + d_1d_2k^2 = \\
 &= a_1a_2e + a_1b_2i + a_1c_2j + a_1d_2k + b_1a_2i - b_1b_2e + b_1c_2k - b_1d_2j + \\
 &+ c_1a_2j - c_1b_2k - c_1c_2e + c_1d_2i + d_1a_2k + d_1b_2j - d_1c_2i - d_1d_2e = \\
 &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)e + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\
 &+ (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k.
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że mamy spełnione warunki z definicji 1. Zatem rozważana przestrzeń jest algebrą nad ciałem  $\mathbb{F}$ . W dalszej części będziemy ją oznaczać przez symbol  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ .

## 1.1. Własności działania mnożenia w algebrze kwaternionów

### 1.1.1. Element neutralny

Spróbujmy teraz znaleźć element neutralny względem mnożenia wektorów dla  $\mathcal{H}$ , przyjrzyjmy się tabeli 1.1. Patrząc na nią dobrym kandydatem do sprawdzenia jest element bazy przestrzeni  $e$ . Niech  $q = ae + bi + cj + dk$  będzie dowolnym elementem przestrzeni, wtedy:

$$\begin{aligned}
 eq &= e(ae + bi + cj + dk) = ae^2 + bei + cej + dek = ae + bei + cej + dk = q, \\
 qe &= (ae + bi + cj + dk)e = ae^2 + bie + cje + dke = ae + bei + cej + dk = q, \\
 eq &= q = qe.
 \end{aligned}$$

Zatem  $e$  jest elementem neutralnym dla mnożenia

### 1.1.2. Przemienność i nieprzemienność

Po zapoznaniu się z tabelą 1.1. możemy odnieść wrażenie, że działanie mnożenia wektorów nad rozważaną algebrą jest nieprzemienne. Zastanówmy się teraz, czy istnieją warunki które spełnione spowodują przemienność mnożenia wektorów w algebrze  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ . Niech  $q_1 = a_1e + b_1i + c_1j + d_1k$  oraz  $q_2 = a_2e + b_2i + c_2j + d_2k$  będą dowolnymi elementami  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ . By mnożenie wektorów było przemienne musi zachodzić równość  $q_1q_2 - q_2q_1 = 0$ . W takim razie

$$q_1q_2 - q_2q_1 = (2c_1d_2 - 2d_1c_2)i + (2d_1b_2 - 2b_1d_2)j + (2b_1c_2 - 2c_1b_2)k.$$

Zauważmy, że równość  $q_1q_2 - q_2q_1 = 0$  dla dowolnych elementów algebry  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ . Podsumowując, mnożenie wektorów w  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  jest działaniem przemennym wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka ciała  $\mathbb{F}$  jest równa 2.

*Wniosek.* Centrum  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  jest zależne od ciała. Jeśli  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ , to działanie mnożenia jest przemienne. W takim razie mamy do czynienia z algebrą przemienne. Natomiast jeśli  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  to centrum rozważanej algebry jest równe  $\mathbb{F}$ .

### 1.1.3. Łączność

Przyjrzymy się teraz czy mnożenie wektorów w  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  jest działaniem łącznym. Zaczniemy od udowodnienia pewnego lematu.

**Lemat 1.** Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową o bazie  $(e_1, \dots, e_n)$ . Ustalmy  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Dla dowolnych odwzorowań  $k$ -liniowych  $f, g : V^k \rightarrow V$  następujące warunki są równoważne:

1. odwzorowania  $f$  i  $g$  są równe
2. dla dowolnego ciągu wektorów bazowych  $\{e_{i_1}\}_{i=1}^k$  zachodzi równość  $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = g(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ .

**DOWÓD.** Zaczniemy od udowodnienia lematu dla  $k = 1$ . Niech  $a$  będzie dowolnym wektorem przestrzeni  $V$  nad dowolnym ciałem  $\mathbb{F}$  i niech  $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , gdzie  $e$  jest elementem bazy przestrzeni  $V$  oraz  $\alpha \in \mathbb{F}$ . Wówczas

$$f(a) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(e_i) = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = g(a).$$

Z powyższej równości wynika, że lemat 1 jest prawdziwy dla  $k = 1$ .

Założmy teraz, że lemat nasz jest spełniony dla  $k = m$ , gdzie  $m \in \mathbb{N}$ . Jeśli z tym założeniem uda nam się pokazać, że lemat jest spełniony dla  $k = m + 1$  to na mocy zasady indukcji matematycznej uda nam popęlnić dowód lematu 1.

Weźmy dwie funkcje  $f, g : V^{m+1} \rightarrow V$ , które dla dowolnego ciągu wektorów bazowych  $\{e_{i_1}\}_{i=1}^m$  zachodzi równość  $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_{i_{m+1}}) = g(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_{i_{m+1}})$ . Niech  $e_0$  będzie dowolnie wybranym wektorem bazowym. Weźmy teraz funkcje  $\tilde{f}, \tilde{g} : V^m \rightarrow V$  zdefiniowane za pomocą wzorów

$$\tilde{f}(a_1, \dots, a_m) = f(a_1, \dots, a_m, e_0), \quad \tilde{g}(a_1, \dots, a_m) = g(a_1, \dots, a_m, e_0).$$

Warto zaznaczyć, że  $\tilde{f}, \tilde{g}$  są  $m$ -liniowe. Jest to bezpośrednią konsekwencją  $m + 1$ -liniowości funkcji  $f, g$ .

$$f(e_1, \dots, e_m, e_0) = \tilde{f}(e_1, \dots, e_m) = \tilde{g}(e_1, \dots, e_m) = g(e_1, \dots, e_m, e_0).$$

W takim razie zachodzi poniższa równość.

$$\tilde{f}(a_1, \dots, a_m) = \tilde{g}(a_1, \dots, a_m)$$

Korzystając z powyższej równości możemy przejść do ostatniej równości.

$$f(a_1, \dots, a_m, \alpha) = f\left(a_1, \dots, a_m, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_1, \dots, a_m, e_i) =$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{f}_i(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{g}_i(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(a_1, \dots, a_m, e_i) = \\
&= g\left(a_1, \dots, a_m, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i\right) = g(a_1, \dots, a_m, \alpha).
\end{aligned}$$

■

Zastanówmy się teraz, czy mnożenie wektorów jest działaniem łącznym. Rozważmy funkcje  $f, g : \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathcal{H}$  zdefiniowane za pomocą wzorów:

$$f(x, y, z) = (xy)z, \quad g(x, y, z) = x(yz).$$

Wystarczy sprawdzić, czy dla dowolnego ciągu wektorów bazowych  $\{e_{i_1}\}_{i=1}^3$  algebry  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  zachodzi równość  $f(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}) = g(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ . Zauważmy jednak, że wśród elementów bazowych znajduje się również element neutralny względem mnożenia  $e$ . W takim razie wystarczy sprawdzić czy powyższa równość zachodzi, dla dowolnego ciągu wektorów bazowych bez wektora  $e$ . Zauważmy dodatkowo, że dla trzech tych samych wektorów bazowych funkcje  $f, g$  również dadzą ten sam wynik. Rozważmy teraz przypadki kiedy elementami trójelementowego ciągu wektorów bazowych, gdzie wszystkie elementy ciągu będą różne. Wówczas równość również funkcji  $f, g$  również będzie zachodzić. Pozostaje, więc sprawdzić równość dla trójelementowego ciągu wektorów bazowych, gdzie jeden z elementów bazowych występuje dwa razy. Łatwo jednak zauważyć, że równość funkcji  $f, g$  będzie zachodzić również, gdy powtarzające się elementy będą ze sobą sąsiadowały. Rozważmy pozostałe przypadki

$$\begin{aligned}
f(i, j, i) &= (ij)i = j = i(ji) = g(i, j, i), \quad f(j, i, j) = (ji)j = i = j(ij) = g(j, i, j), \\
f(k, i, k) &= (ki)k = i = k(ik) = g(k, i, k), \quad f(i, k, i) = (ki)k = i = k(ik) = g(i, k, i), \\
f(k, j, k) &= (kj)k = j = k(jk) = g(i, j, i), \quad f(j, k, j) = (jk)j = k = j(kj) = g(j, k, j).
\end{aligned}$$

Wynika z tego, że dla dowolnego ciągu wektorów bazowych  $\{e_{i_1}\}_{i=1}^3$  zachodzi równość  $f(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}) = g(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ . Powołując się zatem na lemat 1. działanie mnożenia wektorów na  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  jest działaniem łącznym.

## 1.2. Alternatywna definicja

**Twierdzenie 1.** *Dla algebry łącznej o bazie  $(e, i, j, k)$  następujące warunki są równoważne:*

1. *spełnione są tożsamości z tabeli 1.1,*
2. *zachodzą następujące równości  $i^2 = j^2 = k^2 = -e = ijk$ .*

**DOWÓD.** Zauważmy, że z warunku 1. bezpośrednio wynikają równości z warunku 2. Pozostaje więc sprawdzić, czy z równości zawartych w 2. możemy wyprowadzić wszystkie równości z tabeli 1.1.

$$\begin{aligned}
ee &= ijkijk = e, \quad ei = (-ijk)jk = i = jk(-ijk) = ie, \\
ej &= (-ijk)ki = j = ki(-ijk) = je, \quad ek = (-ijk)ij = k = ij(-ijk) = ke, \\
ijk &= -1 \Rightarrow i(ijk) = -i \Rightarrow jk = i, \\
ijk &= -1 \Rightarrow (ijk)k = -k \Rightarrow ij = k, \\
ijk &= -1 \Rightarrow i(ijk)k = -ik \Rightarrow -ik = j, \\
j^2 &= -1 \Rightarrow j^2i = -i \Rightarrow j(ji) = j(-k) \Rightarrow ji = -k \Rightarrow ki = j, \quad kj = -i.
\end{aligned}$$

Z powyższych równań udało nam się wyprowadzić wszystkie działania uwzględnione w tabeli 1.1. Oznacza to że warunki 1. i 2. są równoważne. ■

### 1.3. Katernion odwrotny

Niech  $q$  będzie pewnym kwaternionem w dowolnej algebrze czterowymiarowej kwaternionu. Kwaternionem odwrotnym do naszego kwaternionu  $q$  będziemy nazywać taki element algebry, który pomnożony przez  $q$  zwróci nam element neutralny. W tej sekcji zaczniemy od zdefiniowania normy i sprzężenia kwaternionu, omówimy własności sprzężenia. Następnie przedstawimy wzór na kwaternion odwrotny oraz opiszemy jego własności. Na końcu odpowiemy na pytanie, jakie warunki musi spełniać algebra, by każdy kwaternion poza elementem 0 miał swój kwaternion odwrotny.

#### 1.3.1. Norma oraz sprzężenie kwaternionu

Niech  $q = ae + bi + cj + dk$  będzie elementem algebry kwaternionów nad dowolnym ciałem  $\mathbb{F}$ , gdzie  $a, b, c, d \in \mathbb{F}$  oraz  $e, i, j, k$  są elementami bazowymi algebry, przy czym  $e$  jest również elementem neutralnym względem działania mnożenia kwaternionów.

**Definicja 3.** Moduł kwaternionu definiujemy jako pierwiastek z sumy kwadratów współczynników tzn.

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Moduł kwaternionu będziemy oznaczać jako  $|q|$ .

W podobny sposób definiujemy normę kwaternionu.

**Definicja 4.** Normę kwaternionu będziemy definiować jako sumę kwadratów współczynników, tzn.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Normę będziemy oznaczać jako  $\mathcal{N}(q)$ .

*Wniosek.* Łatwo zauważyć, że jeśli  $q = 0$ , to  $\mathcal{N}(q) = 0$ . Jednakże, odwrotna implikacja nie zawsze zachodzi. W dalszej części tego rozdziału przedstawimy przykład algebry, gdzie odwrotna implikacja nie występuje.

Przejdźmy teraz do zdefiniowania sprzężenia kwaternionu oraz udowodnienia kilku jego własności.

**Definicja 5.** Sprzężenie kwaternionu  $q$  nazywamy liczbę  $ae - bi - cj - dk$  oraz będziemy ją oznaczać jako  $\bar{q}$ .

**Twierdzenie 2.** [Własności sprzężenia] Niech  $q, q_1, q_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{F})$ . Wtedy

1.  $\bar{\bar{q}} = q$ ,
2.  $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ ,
3.  $\bar{q}q = q\bar{q} = \mathcal{N}(q)e$ ,
4.  $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$ .

DOWÓD. Zaczniemy od zapisania  $q, q_1, q_2$  w postaci sumy wektorów bazowych, wówczas

$$q = ae + bi + cj + dk, q_i = a_i e + b_i i + c_i j + d_i k,$$

gdzie  $a, a_i, b, b_i, c, c_i, d, d_i \in \mathbb{F}$  oraz  $i \in \{1, 2\}$ .

Dowód punktu 1. wynika bezpośrednio z definicji sprzężenia. Skupmy się na udowodnieniu pozostałych punktów. By udowodnić drugą własność dodamy do siebie sprzężenia kwaternionów  $q_1, q_2$ . W efekcie tego otrzymujemy poniższą równość.

$$\begin{aligned} \overline{q_1 + q_2} &= a_1 e - b_1 i - c_1 j - d_1 k + a_2 e - b_2 i - c_2 j - d_2 k = (a_1 + a_2)e - (b_1 + b_2)i - (c_1 + c_2)j - (d_1 + d_2)k = \\ &= \overline{q_1} + \overline{q_2}. \end{aligned}$$

W ten sposób udowodniliśmy własność z punktu 2. Zatem przejdźmy do udowodnienia przedostatniej pozycji z powyższego twierdzenia.

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= (ae + bi + cj + dk)(ae - bi - cj - dk) = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)e + (-ab + ba - cd + dc)i + (-ac + bd + ca - db)j + (-ad - bc + cb + da)k = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)e = \mathcal{N}(q)e. \end{aligned}$$

By zakończyć dowód punktu 3. pozostaje nam pokazać, że iloczyn  $\bar{q}q$  również wyniesie  $\mathcal{N}(q)e$ .

$$\begin{aligned} \bar{q}q &= (ae - bi - cj - dk)(ae + bi + cj + dk) = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)e + (-ab + ba - cd + dc)i + (-ac + bd + ca - db)j + (-ad - bc + cb + da)k = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)e = \mathcal{N}(q)e. \end{aligned}$$

By pokazać ostatnią własność pomnożymy przez siebie kwaterniony  $q_1, q_2$ , a następnie na produkcie tych kwaternionów dokonamy sprzężenia.

$$\begin{aligned} \overline{q_1 q_2} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2)e + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i + \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k, \end{aligned}$$

Pozostaje teraz pomnożyć przez siebie sprzężenia kwaternionów  $q_2, q_1$  oraz porównać wynik.

$$\begin{aligned} \bar{q}_2 \bar{q}_1 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2)e + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i + \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k. \end{aligned}$$

■

Z powyższego twierdzenia możemy wyprowadzić ciekawy wniosek dotyczący modułu kwaternionu.

*Wniosek.* Niech  $q_1 q_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{F})$ . Wówczas  $|q_1 q_2| = |q_1| |q_2|$ .

**DOWÓD.** By dopełnić dowód powyższego wniosku skorzystamy z 3 i 4. Zauważmy dodatkowo, że  $\sqrt{e} = e$ , bo  $e^2 = e$ . W takim razie

$$|q_1 q_2|e = \sqrt{\mathcal{N}(q_1 q_2)e} = \sqrt{q_1 q_2 \overline{q_1 q_2}} = \sqrt{q_1 q_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1} = \sqrt{\mathcal{N}(q_1)e \mathcal{N}(q_2)e} = |q_1| |q_2|e.$$

■

Mając zdefiniowaną normę oraz sprzężenie kwaternionu, możemy w końcu zdefiniować kwaternion odwrotny.

**Definicja 6.** Niech  $q$  będzie elementem algebry kwaternionów nad dowolnym ciałem  $\mathbb{F}$ , którego  $\mathcal{N}(q) \neq 0$ . Element odwrotny do  $q$  określamy wzorem  $\frac{\bar{q}}{\mathcal{N}(q)}$  i będziemy go oznaczać jako  $q^{-1}$ .

Z powyższej definicji wynika, że element odwrotny kwaternionu istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy norma rozważanego kwaternionu jest większa od 0.

**Przykład 1.** Niech  $q = ae + ai$  będzie elementem algebry kwaternionów nad ciałem  $\mathbb{F}$ , gdzie  $a \in \mathbb{F}$  oraz  $e, i, j, k$  są elementami bazowymi algebry, przy czym  $e$  jest również elementem neutralnym względem działania mnożenia kwaternionów. Dodatkowo, niech  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ . Obliczmy teraz normę wypisanego kwaternionu.

$$\mathcal{N}(q) = a^2 + a^2 = 2a^2 = 0.$$

Ze względu na to, że norma kwaternionu jest równa 0, nie ma on elementu odwrotnego.

Udało nam się pokazać, że implikacja odwrotna zawarta w wniosku do definicji 4, nie zachodzi jeśli charakterystyka ciała nad przestrzenią kwaternionów jest równa 2.

*Wniosek.* Wszystkie elementy poza 0 w  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  posiadają element odwrotny, jeśli  $\mathbb{F}$  jest ciałem formalnie rzeczywistym.

**Twierdzenie 3.** Niech  $q \in \mathcal{H}(\mathbb{F})$  będzie elementem dla którego istnieje  $q^{-1}$ . Wówczas

$$qq^{-1} = q^{-1}q = e.$$

Dowód. By udowodnić powyższą własność wystarczy skorzystać z ostatniej własności podanej w twierdzeniu 2.

$$qq^{-1} = q \frac{\bar{q}}{\mathcal{N}(q)} = \frac{\mathcal{N}(q)}{\mathcal{N}(q)} = e = \frac{\mathcal{N}(q)}{\mathcal{N}(q)} = \frac{\bar{q}}{\mathcal{N}(q)} q = q^{-1}q.$$

■

## 1.4. Przykładowe algebry kwaternionów

W tym rozdziale przedstawimy przykładowe interpretacje algebry kwaternionów oraz ich własności.

### 1.4.1. Postać kanoniczna

Rozważmy przestrzeń  $\mathbb{R}^4$ . Zbiór  $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$  jest bazą kanoniczną przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . Oznaczmy te elementy odpowiednio jako  $e, i, j, k$ . Definiując mnożenie elementów bazowych, w ten sposób by spełniały one warunki z tabeli 1.1. Uzyskujemy w ten sposób jedną z najbardziej oczywistych interpretacji algebry kwaternionów na ciele liczb rzeczywistych.

### 1.4.2. Postać hamiltonowska

Rozważmy teraz przestrzeń  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ . Jedną z baz tej przestrzeni jest zbiór  $\{1, (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ , i tak jak wyżej, oznaczmy te elementy kolejno jako  $e, i, j, k$ . Dodawanie elementów w tej przestrzeni, możemy definiujemy w następujący sposób. Niech  $q_1, q_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , przy czym  $q_i = a_i + (b_i, c_i, d_i)$  dla  $i \in \{1, 2\}$ . Wówczas

$$q_1 + q_2 = a_1 + (b_1, c_1, d_1) + a_2 + (b_2, c_2, d_2) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

. Przejdźmy teraz do rozważenia mnożenia. Działanie to definiujemy w następujący sposób, wektory bazowe muszą spełniać warunki z tabeli 1.1, następnie rozszerzamy je na całą przestrzeń. W ten oto sposób udało nam się przedstawić

$$q_1 q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) +$$

$$+ (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2, a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2, a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2).$$

Spróbujmy uprościć otrzymany wzór. Zaczniemy od wprowadzenia dwóch nowych pojęć, jakimi będą część skalarna oraz część wektorowa kwaternionu. Współczynnik przy elemencie neutralnym względem działania mnożenia nazywamy częścią skalarną kwaternionu, natomiast wektor wchodzący w skład kwaternionu nazywamy częścią wektorową kwaternionu. Część wektorową kwaternionu  $q$  będziemy oznaczać jako  $\vec{q}$ .

Przyjrzyjmy się najpierw części skalarnej otrzymanego iloczynu. Łatwo zauważyć, że składa się ona z dwóch części. Pierwszą z nich jest iloczyn części skalnych mnożonych kwaternionów. Drugą częścią, co łatwo zauważyć, jest element przeciwny do iloczynu skalarnej części wektorowych mnożonych kwaternionów. Podsumowując część skalarną iloczynu możemy zapisać jako

$$a_1 a_2 - \vec{q}_1 \circ \vec{q}_2.$$

Skupmy się teraz na części wektorowej iloczynu. Zaczniemy od przedstawienia go jako sumę dwóch wektorów, oznaczmy je kolejno jako  $\vec{w}_1$  oraz  $\vec{w}_2$ .

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 + \vec{w}_2 &= (a_1 b_2 + a_2 b_1, a_1 c_2 + a_2 c_1, a_1 d_2 + a_2 d_1) + (c_1 d_2 - d_1 c_2, d_1 b_2 - b_1 d_2, b_1 c_2 - c_1 b_2) = \\ &= (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2, a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2, a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że wektor  $\vec{w}_1$  to jest sumą części wektorowych kwaternionów pomnożonych przez część skalarną drugiego kwaternionu, tzn.  $a_1 \vec{q}_2 + a_2 \vec{q}_1$ .

Przyjrzyjmy się teraz wektorowi  $\vec{w}_2$ . Wektor ten możemy, przedstawić w postaci iloczynu wektorowego części wektorowych kwaternionów, tzn.  $\vec{w}_2 = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2$ .

Podsumowując, mnożenie kwaternionów można przedstawić poniższym wzorem.

$$q_1 q_2 = a_1 a_2 - \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + a_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2.$$

### 1.4.3. Postać macierzowa

Niech  $V = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Łatwo zauważyć, że zbiór  $V$  jest podprzestrzenią liniową  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Jedną z baz przestrzeni  $V$  jest zbiór

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

oznaczymy te macierze kolejno jako  $e, i, j, k$ . Działanie mnożenia macierzy spełnia warunki z zawarte w tabeli 1.1. W ten sposób udało nam się zdefiniować postać macierzową kwaternionu.

Rozważmy jakie własności posiada postać macierzowa. Niech

$$q = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

będzie dowolnym elementem przestrzeni  $V$ . Norma kwaternionu  $q$  jest równa  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Dodając wszystkie elementy do siebie otrzymamy macierz

$$q = \begin{bmatrix} a + ib & c + id \\ c - id & a - ib \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że wyznacznik tej macierzy jest równy  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . W ten sposób udało się nam pokazać, że norma kwaternionu jest równa jest równa wyznacznikowi w postaci macierzowej, tzn.  $\mathcal{N}(q) = \det(q)$ .

Przejdźmy teraz do tego jak wygląda sprzężenie w postaci macierzowej.

$$\bar{q} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - d \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Efektom dodania wszystkich elementów do siebie jest macierz

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{bmatrix}.$$

Rozważmy, teraz jak będzie wyglądać macierz  $q$ , na której dokonamy sprzężenie hermitowskie.

$$\begin{bmatrix} a + ib & c + id \\ c - id & a - ib \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{bmatrix}.$$

W ten sposób udało nam się pokazać, że sprzężenie kwaternionu w postaci macierzowej jest tak naprawdę macierzą  $q$  na której popelniono sprzężenie hermitowskie, tzn.  $\bar{q} = q^\dagger$ .

Z powyższych własności wynika poniższy wzór na element odwrotny:

$$q^{-1} = \frac{1}{\det(q)} \begin{bmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{bmatrix}.$$

Okazało się, że by znaleźć element odwrotny kwaternionu  $q$ , wystarczy obliczyć macierz odwrotną postaci kwaternionowej kwaternionu.

#### 1.4.4. Postać trygonometryczna

Rozważmy kwaternion postaci hamiltonowskiej  $q = q_0 + \vec{q}$ , której moduł jest równy 1. Spełnione tutaj są następujące własności

$$\begin{cases} \mathcal{N}(q) = 1 \\ q_0^2 + \|\vec{q}\|_e^2 = 1 \end{cases},$$

gdzie  $\|\vec{q}\|_e$  jest normą euklidesową wektora  $\vec{q}$ . Korzystając z równania na jedynek trygonometryczną, otrzymujemy

$$q_0^2 + \|\vec{q}\|_e^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta.$$

Oznacza to, że istnieje  $\theta \in (0, 2\pi)$  takie, że

$$\begin{cases} q_0^2 = \cos^2 \theta \\ \|\vec{q}\|_e^2 = \sin^2 \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0 = \cos \theta \\ \|\vec{q}\|_e = \sin \theta \end{cases}$$

Zdefiniujmy, wektor  $\vec{u} = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|_e}$ . Wówczas kwaternion  $q$  możemy zapisać w postaci  $\cos \theta + \vec{u} \sin \theta$ . Postać tą nazywamy postacią trygonometryczną kwaternionu. Zastanówmy się teraz jak będzie wyglądać postać trygonometryczna kwaternionu, którego moduł jest różny od 0. Zauważmy, że dowolny kwaternion  $q = q_0 + \vec{q}$  możemy zapisać jako  $q = |q| \left( \frac{1}{|q|} q_0 + \frac{1}{|q|} \vec{q} \right)$ . Łatwo zauważyć, że  $\left| \frac{1}{|q|} q_0 + \frac{1}{|q|} \vec{q} \right| = 1$ . Podsumowując postać trygonometryczna kwaternionu ma postać

$$q = |q|(\cos \theta + \vec{u} \sin \theta).$$

Mówmy teraz jak w sprzężenie, norma oraz kwaternion odwrotny w postaci trygonometrycznej

Sprzężenie dla postaci trygonometrycznej ma postać

$$\bar{q} = |q|(\cos \theta + \vec{u} \sin \theta).$$

Korzystając jednak z własności parzystości i nieparzystości funkcji kolejno cosinus i sinus, łatwo zauważyć, że

$$\bar{q} = |q|(\cos \theta - \vec{u} \sin \theta) = |q|(\cos(-\theta) + \vec{u} \sin(-\theta)).$$

## 2. Powiązanie z geometrią

### 2.1. Obrót w przestrzeni dwuwymiarowej

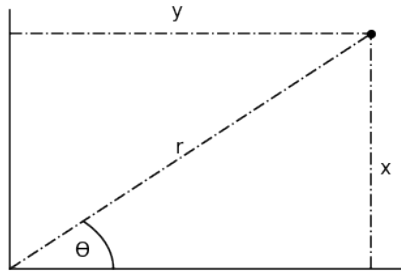
Przypomnijmy teraz analityczny i macierzowy opis obrotu na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ .

Niech  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  będzie pewnym punktem zapisanym za pomocą w współrzędnych kartezjańskich. Wówczas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x}.$$

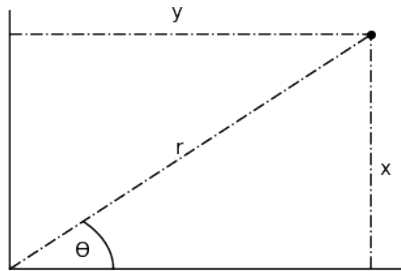
Rozważmy teraz przejście ze współrzędnych biegunowych na współrzędne kartezjańskie. Niech  $p = (r, \theta) \in \mathbb{R}^2$  będzie pewnym punktem zapisanym za pomocą w współrzędnych biegunowych. Wówczas:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta.$$



Rysunek 2.1. Związek między biegunowym i kartezjańskim układem współrzędnych

Rozważmy teraz obrót wektora  $\vec{v}$  o kąt  $\psi$ . Efektem obrotu jest powstanie wektora  $\vec{v}' = (r, \theta + \psi)$ . Spróbujmy zapisać wektor  $\vec{v}'$  przy użyciu współrzędnych kartezjańskich.



Rysunek 2.2. Wizualizacja obrotu

$$x_{\Delta} = r \cos(\theta + \psi) = r(\cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) = (r \cos \theta) \cos \psi - (r \sin \theta) \sin \psi = x \cos \psi - y \sin \psi,$$

$$y_{\Delta} = r \sin(\theta + \psi) = r(\sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi) = (r \sin \theta) \cos \psi + (r \cos \theta) \sin \psi = x \sin \psi + y \cos \psi.$$

### 2.1.1. Opis macierzowy obrotu

Powyższe równości możemy przedstawić za pomocą notacji macierzowej

$$\begin{bmatrix} x_{\Delta} \\ y_{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

Powyższą macierz kwadratową nazywamy macierzą obrotu na płaszczyźnie i oznaczamy jako  $\mathcal{R}_2(\psi)$ .

**Definicja 7.** Niech  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Zbiór macierzy spełniający warunki:

1.  $AA^t = I_n A^t A$ ,
2.  $\det(A) = 1$ ,

nazywamy specjalną grupą ortogonalną przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i oznaczamy ją jako  $\text{SO}(n)$ .

Okazuje się każda macierz będąca elementem zbioru  $\text{SO}(n)$ , jest tak naprawdę opisem obrotu o pewien kąt w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Skupimy się teraz na dowodzie dla  $n = 2$ , w następnym rozdziale po przedstawieniu macierzy obrotu dla przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , popelnimy dowód dla  $n = 3$ .

**Twierdzenie 4.** Niech  $A \in \text{SO}(2)$ . Wówczas  $A$  jest macierzą obrotu na płaszczyźnie liczb rzeczywistych.

**DOWÓD.** Niech  $A = [a_{ij}]$  będzie dowolną macierzą ze zbioru  $\text{SO}(2)$ . Oznacza to, że  $A^t = A^{-1}$  oraz  $\det A = \det A^t = \det A^{-1} = 1$ . Z pierwszej równości dowiadujemy się, że macierz  $A$  ma tak naprawdę postać

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

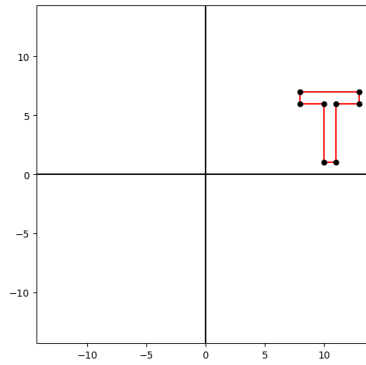
Dodatkowo z drugiej równości wynika, że  $\det A = a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ . W takim razie, posilkując się wzorem na jedynekę trygonometryczną, istnieje taki kąt  $\psi$ , że  $a_{11} = \cos \psi$  i  $a_{12} = \sin \psi$ . Podsumowując, dowolna macierz ze zbioru  $\text{SO}(2)$  jest tak naprawdę opisem obrotu o pewien kąt na płaszczyźnie rzeczywistej. ■

**Przykład 2.** W ramach przykładu dokonamy obrotu litery T, o kolejno  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ . Zaczniemy od narysowania litery. Zauważmy, że by narysować literę T, wystarczy w odpowiedni sposób połączyć 8 dokładnie dobranych punktów. Punktami jakimi posłużymy się w wygenerowaniu litery T, są:

$$\begin{aligned} x_1 &= (10, 1), x_2 = (11, 1), x_3 = (11, 6), x_4 = (13, 6), \\ x_5 &= (13, 7), x_6 = (8, 7), x_7 = (8, 6), x_8 = (10, 6). \end{aligned}$$

By wygenerować omawianą literę wystarczy w linii prostej połączyć punkt  $x_i$  z punktem  $x_{i+1}$ , gdzie  $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ . Dodatkowo, łączymy punkt  $x_8$  z  $x_1$ , uzyskujemy w ten sposób krzywe zamkniętą w kształcie litery T.



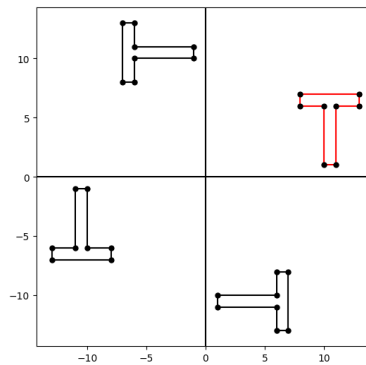


Rysunek 2.3.

By obrócić literę  $T$  wystarczy, że obrócimy punkty, które posłużyły do jej narysowania. By to zrobić skorzystamy z macierzy obrotu dla  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ . Mają one postać odpowiednio

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, R_{\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

W tym momencie wystarczy każdy z punktów przemnożyć przez powyższe macierze, a otrzymane wyniki będą obróconymi punktami. Punkty te łączymy w taki sam sposób, co oryginalne. W efekcie otrzymujemy:



Rysunek 2.4. Wizualizacja

### 2.1.2. Macierze odbicia

Naturalnym pytaniem po zapoznaniu się z macierzami obrotu, jest co w przypadku gdy macierz ortogonalna posiada wyznacznik równy  $-1$ . W dowodzie do twierdzenie 4. udało nam pokazać, że dowolna macierz ortogonalna w  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  jesteśmy w stanie zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Pamiętając o tym jak wygląda macierz obrotu, możemy wywnioskować, że dowolną macierz ortogonalną stopnia 2 o elementach rzeczywistych, której wyznacznik jest równy  $-1$  ma postać

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Rozważmy zatem „obrót” pewnego punktu  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  o kąt równy 0, jednak zamiast typowej macierzy obrotu użyjemy nam powyższej macierzy. W efekcie otrzymujemy

$$\begin{cases} x_{\Delta} = x \cos 0 - y \sin 0 = x \\ y_{\Delta} = x \sin 0 - y \cos 0 = -y \end{cases}.$$

Efektem wykonanego „obrotu” jest odbicie lustrzane pierwotnego punktu względem osi  $y$ . Pytaniem na jakie spróbujemy teraz odpowiedzieć to jak wygląda zmiana kąta wpływa na odbicie. By odpowiedzieć na to pytanie powtórzmy obrót litery  $T$  z przykładu 2.

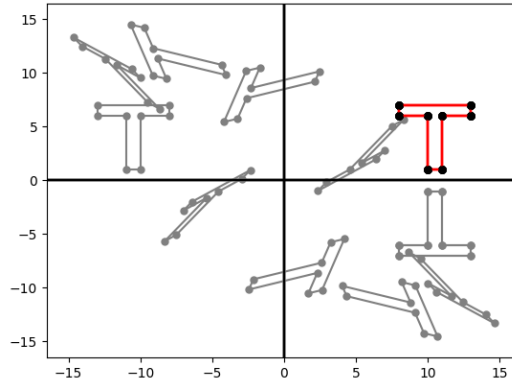
**Przykład 3.** W celu lepszej wizualizacji wykorzystamy te same punkty  $x_1, \dots, x_8$  oraz połączymy je w taki sam sposób jak w przykładzie 2. Dla ułatwienia zapisu wprowadźmy pewne oznaczenia. Oznaczmy, zatem

$$\mathcal{O}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta_n & \sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{bmatrix}.$$

Katy „obrotu” dzięki, których użyjemy do określenia wartości elementów powyższej macierzy będą elementami zbioru  $\left\{ \frac{2\pi x}{10} : x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge x \leq 10 \right\}$ . Podane punkty przemnożymy przez zdefiniowane w ten sposób macierze. Wynik wizualizujemy na płaszczyźnie w następujący sposób:

- kolorem czerwonym zaznaczymy boki oryginalnej litery  $T$ ,
- kolorem szarym zaznaczymy boki „obróconej” litery  $T$ .

W efekcie otrzymujemy. Możemy łatwo zauważyć, że dokonanie „obrotu” macierzami ortogo-



Rysunek 2.5. Wizualizacja odbicia

nalnymi o wyznaczniku równym  $-1$  nie spełnia założeń obrotu. Najbardziej widoczne jest to na porównaniu pól obróconej litry  $T$  z jej pierwotną. W powyższym przykładzie tylko 2 obroty mają identyczne pola co do wyjściowej. „Obroty” te zostały wykonane przez macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Okazuje się, że przemnożenie dowolnego punktu przez dwie powyższe macierze daje w efekcie kolejno odbicie względem osi  $y$  oraz odbicie osi  $x$ .

Z powyższego przykładu możemy wywnioskować, że mnożenie przez macierze ortogonalne o wyznaczniku równym  $-1$  ma mało wspólnego z obrotem, za to dużo więcej z odbiciem. Z tego względu na zakończenie tej sekcji wprowadźmy dwie nowe definicje.

**Definicja 8.** Macierz ortogonalną stopnia  $n$  o elementach rzeczywistych, której wyznacznik jest równy  $-1$  nazywamy macierzą odbicia w przestrzeni  $n$ .

**Definicja 9.** Zbiór składający się z macierzy ortogonalną stopnia  $n$  o elementach rzeczywistych, nazywamy grupą ortogonalną stopnia  $n$ . Omawiany zbiór oznaczamy jako  $O(n)$ .

### 2.1.3. Opis obrotu za pomocą liczb zespolonych

Alternatywnym sposobem opisu obrotu na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  jest użycie liczby zespolonych. Wówczas dowolny punkt o współrzędnych kartezjańskich  $(a, b)$  jesteśmy w stanie przedstawić w postaci  $a + bi$ , gdzie  $a, b$  są liczbami rzeczywistymi, natomiast  $i$  jest jednostką urojoną spełniającą warunek  $i^2 = -1$ . Powyższy sposób zapisu nazywamy postacią kanoniczną liczby zespolonej. Alternatywnym sposobem zapisu  $a + bi$  jest postać trygonometryczna. Przedstawia się ona w sposób  $|z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , gdzie  $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\theta = \arctg \frac{b}{a}$ .

Rozważmy teraz mnożenie liczb zespolonych. Niech  $z_1 = r_1(\cos \theta + i \sin \theta)$  oraz niech  $z_2 = r_2(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Wówczas mnożenie przedstawia się wzorem

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta + \psi) + i \sin(\theta + \psi)).$$

Zauważmy, że by dokonać obrotu liczby zespolonej o kąt  $\psi$  wystarczy pomnożyć ją przez liczbę postaci

$$\cos \psi + i \sin \psi.$$

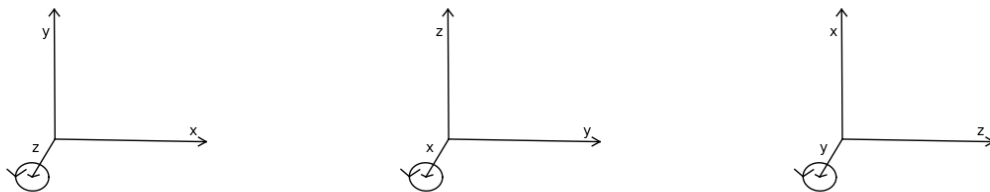
Podsumowując, obrót punktu na płaszczyźnie możemy interpretować jako mnożenie liczb zespolonych.

## 2.2. Obrót w przestrzeni w $\mathbb{R}^3$

W tym rozdziale skupimy się na opisie obrotu w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Począwszy od opisu macierzowego obrotu dookoła osi  $x, y$  oraz  $z$ , następnie rozważymy postać macierzy dookoła dowolnej osi obrotu.

### 2.2.1. Kierunek obrotu

W przestrzeni trójwymiarowej ważne jest ujednolicenie obrotu między osiami. W tym celu kierunek obrotu będzie u nas wyznaczała powszechnie znana metoda o nazwie „reguła prawej dłoni”. W ramach przypomnienia działania reguły, jeśli ustawimy kciuk prawej dłoni wzdłuż osi wokół której chcemy dokonać obrotu, to zgięte palce będą przedstawiać kierunek obrotu. Dzięki takiemu ujednoliceniu obrotu mamy tak naprawdę trzy osobne obroty względem osi  $x, y$  oraz  $z$ .



Rysunek 2.6. Wizualizacja zasady prawej ręki w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$

### 2.2.2. Opis macierzowy obrotu w przestrzeni

W tym podrozdziale skupimy się na znalezieniu macierzy obrotu dla przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . W tym celu dla pewnego losowego punktu w tej przestrzeni dokonamy obroty względem głównych osi układu współrzędnych.

Niech  $p = (x_p, y_p, z_p)$  będzie pewnym punktem w  $\mathbb{R}^3$ . Zamodelujmy teraz obrót punktu  $p$  względem osi  $z$ , o kąt równy  $\psi$ . Dodatkowo niech  $p_\Delta = (x_{p_\Delta}, y_{p_\Delta}, z_{p_\Delta})$  będzie punktem w  $\mathbb{R}^3$ , który jest efektem rozważanego obrotu. Zauważmy, że wartość współrzędnej odpowiadająca osi  $z$  nie ulega zmianie. Zmieniają się współrzędne odpowiadające osi  $x$  oraz  $y$ . W takim razie, możemy skorzystać ze wzorów wyprowadzonych z podrozdziału 2.1. Podsumowując

$$\begin{cases} x_{p_\Delta} = x_p \cos \psi - y_p \sin \psi \\ y_{p_\Delta} = x_p \sin \psi + y_p \cos \psi \\ z_{p_\Delta} = z_p \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_{p_\Delta} \\ y_{p_\Delta} \\ z_{p_\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}.$$

Powyższa macierz kwadratowa jest macierzą obrotu względem osi  $z$  o kąt równy  $\psi$ , oznaczając ją jako  $\mathcal{R}_z(\psi)$ .

. W sposób analogiczny jesteśmy w stanie zdefiniować obrót względem pozostałych osi.

Macierz obrotu względem osi  $x$  o kąt  $\psi$  ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix},$$

oznaczając ją jako  $\mathcal{R}_x(\psi)$ .

Natomiast, macierz obrotu względem osi  $y$  o kąt  $\psi$  ma postać

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix},$$

oznaczając ją jako  $\mathcal{R}_y(\psi)$ .

W ten oto sposób udało nam się rozważyć obrót na trzech podstawowych osiach.

### 2.2.3. Wielokrotne obroty

Pytaniem na jakie spróbujemy teraz odpowiedzieć będzie to, czy kolejność obrotu ma znaczenie. Okazuje się, że ma bardzo duże znaczenie. Istotność kolejności obrotu pokażemy w poniższym przykładzie.

**Przykład 4.** W przykładzie rozważymy obrót punktu  $p = (1, 1, 1)$  wokół osi  $x, z$  o kąt równy w obu przypadkach  $\frac{\pi}{2}$ . Macierze obrotu mają wówczas postać

$$\mathcal{R}_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zacznijmy od rozważenia przypadku, gdzie najpierw dokonujemy obrót względem osi  $x$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Po wykonaniu pierwszego obrotu uzyskaliśmy punkt o współrzędnych  $(1, -1, 1)$ . Wykonajmy obrót otrzymanego punktu względem osi  $z$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Efektem obrócenia punktu  $p$  najpierw względem osi  $x$ , a następnie względem osi  $z$  o kąt równy  $\frac{\pi}{2}$  w obu przypadkach, jest otrzymanie punktu wyjściowego. Rozważmy teraz sytuację, gdzie najpierw dokonujemy obrotu względem osi  $z$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Efektem obrócenia względem osi  $z$  jest otrzymanie punktu  $(-1, 1, 1)$ . Wykonamy ostatni obrót względem osi  $x$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Efektem obrócenia punktu  $p$  najpierw względem osi  $z$ , a następnie względem osi  $x$  o kąt równy  $\frac{\pi}{2}$  w obu przypadkach, jest punkt  $(-1, -1, 1)$ . W ten sposób udało nam się pokazać, że kolejność obrotu względem osi ma znaczenie.

Zauważmy, że dowolny obrót w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  jesteśmy w stanie przedstawić w postaci  $(\psi, \theta, \gamma)$ , gdzie

- $\psi$  jest kątem obrotu względem osi  $z$ ,
- $\theta$  jest kątem obrotu względem osi  $y$ ,
- $\gamma$  jest kątem obrotu względem osi  $x$ .

Wyżej wymienioną trojkę nazywamy kątem Eulera.

#### 2.2.4. Macierz obrotu względem dowolnej osi obrotu

Rozważmy teraz sytuację kiedy obracamy pewien punkt najpierw o kąt równy  $\phi$  względem osi  $z$ , następnie o kąt  $\theta$  względem osi  $y$ , kończąc na obrocie o kąt  $\psi$  względem osi  $x$ . Zaczniemy od pomnożenia obrotu względem osi  $x$  przez obrót względem osi  $y$ .

$$\mathcal{R}_y(\theta)\mathcal{R}_x(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{R}_z(\phi)(\mathcal{R}_y(\theta)\mathcal{R}_x(\psi)) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Otrzymany produkt pomnożmy teraz przez macierz obrotu względem osi  $z$ .

$$\mathcal{R}_{z(\phi)y(\theta)x(\psi)} = \mathcal{R}_z(\phi)\mathcal{R}_y(\theta)\mathcal{R}_x(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}.$$

W ten sposób udało nam się znaleźć macierz obrotu dla kąta Eulera równego  $(\phi, \theta, \psi)$ .

Sprawdźmy teraz, czy macierz  $\mathcal{R}_{z(\phi)y(\theta)x(\psi)}$  jest elementem specjalnej grupy ortogonalnej w  $\mathbb{R}^3$ .

Zaczniemy od obliczenia wyznacznika macierzy. Zauważmy, że stosując rozwinięcie Laplace'a na macierzach obrotu względem osi  $x, y$  oraz  $z$  na kolejno 1, 2 i 3 kolumnie, mamy tak naprawdę do obliczenia minor, który jest macierzą obrotu na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Oznacza to, że każda z

macierzy wyżej wspomnianych macierzy ma wyznacznik równy 1. W takim razie, korzystając z twierdzenia Cauchy'ego w produkcie wyznacznika otrzymujemy:

$$\det(\mathcal{R}_{z(\phi)y(\theta)x(\psi)}) = \det(\mathcal{R}_z(\phi)\mathcal{R}_y(\theta)\mathcal{R}_x(\psi)) = \det(\mathcal{R}_z(\phi))\det(\mathcal{R}_y(\theta))\det(\mathcal{R}_x(\psi)) = 1.$$

Zostało nam pokazać, że macierzą odwrotną do  $\mathcal{R}_{z(\phi)y(\theta)x(\psi)}$  jest jej macierz transponowana. Zaczynimy od zauważenia, że macierzami odwrotnymi dla  $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z$  są ich macierze transponowane. W takim razie

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{z(\phi)y(\theta)x(\psi)}\mathcal{R}_{z(\phi)y(\theta)x(\psi)}^T &= \mathcal{R}_z(\phi)\mathcal{R}_y(\theta)\mathcal{R}_x(\psi)(\mathcal{R}_z(\phi)\mathcal{R}_y(\theta)\mathcal{R}_x(\psi))^T = \\ &= \mathcal{R}_z(\phi)\mathcal{R}_y(\theta)\mathcal{R}_x(\psi)\mathcal{R}_x^T(\psi)\mathcal{R}_y^T(\theta)\mathcal{R}_z^T(\phi) = I_n.\end{aligned}$$

W ten sposób udało nam się pokazać, że  $\mathcal{R}_{z(\phi)y(\theta)x(\psi)} \in \text{SO}(3)$ .

Przedstawimy teraz, że inkluzja zachodzi również w drugą stronę, tzn. że każda macierz z specjalnej grupy ortogonalnej jest tak naprawdę macierzą obrotu w przestrzeni  $R^3$ . W tym celu przedstawię dowód dwóch lematów, które ułatwią nam prace nad ostatecznym dowodem.

**Lemat 2.** *Niech  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , gdzie  $n$  jest liczną naturalną nieparzystą. Wówczas macierz  $A$  posiada przynajmniej jedną rzeczywistą wartość własną.*

**DOWÓD.** Wartości własne macierzy  $A$ , znajdziemy obliczając miejsca zerowe jej wielomianu charakterystycznego.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

gdzie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są rzeczywistymi współczynnikami wielomianu charakterystycznego macierzy  $A$ . Obliczmy teraz granice jakie przyjmuje  $p_A(\lambda)$  w  $-\infty$  oraz  $\infty$ .

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p_A(\lambda) = -\infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p_A(\lambda) = \infty.$$

Ze względu na to, że  $p_A(\lambda)$  jest funkcją ciągłą to musi istnieć przynajmniej jedno rzeczywiste miejsce zerowe wielomianu charakterystycznego macierzy  $A$ . Oznacza to, że macierz  $A$  posiada przynajmniej jedną rzeczywistą wartość własną. ■

**Lemat 3.** *Niech  $A \in \text{O}(n)$ , gdzie  $n$  jest liczną naturalną nieparzystą. Niech dodatkowo  $\lambda_0$  będzie rzeczywistą wartością własną macierzy  $A$ . Wówczas  $\lambda_0 = \pm 1$ .*

**DOWÓD.** Z lematu 2. wiemy, że macierz  $A$  pewną ma przynajmniej jedną rzeczywistą wartość własną  $\lambda_0$ . Oznacza to, że istnieje odpadający wartości własnej  $\lambda_0$ , wektor własny  $v = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$  tzn.  $Av = \lambda_0 v$ . Pamiętając, że  $A$  jest macierzą ortogonalną, przejdźmy wyrowadzenia pierwszej równości.

$$\lambda_0 v^T v = (\lambda_0 v)^T \lambda_0 v = (Av)^T Av = v^T A^T Av = v^T v.$$

W konsekwencji

$$\lambda_0^2 v^T v = v^T v \Rightarrow \lambda_0^2 = 1 \Rightarrow \lambda_0 = \pm 1.$$

■

**Twierdzenie 5.** *Jeśli  $R \in \text{SO}(3)$ , to jest ona macierzą obrotu o pewien kąt.*

DOWÓD. Dzięki lematowi 3. wiemy, że rzeczywistą wartością własną macierzy  $A$  jest  $-1$  lub  $1$ . By pokazać prawdziwość powyższego twierdzenia pokażemy jego prawdziwość najpierw z założeniem, że  $1$  jest wartością własną macierzy  $A$ , a następnie powtórzmy to dla wartości własnej równej  $-1$ .

Załóżmy zatem, że  $1$  jest wartością własną macierzy  $A$ . Przypiszmy zatem do podanej wartości własnej odpowiadający jej jednostkowy wektor własny  $v_3 \in \mathbb{R}$ . Weźmy dodatkowo wektory  $v_1, v_2$ , które będą bazą ortonormalną podprzestrzeni  $v_3^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \circ v_3 = 0\}$ . Używając wektorów  $v_1, v_2, v_3$  skonstruujemy macierz  $B = [v_1, v_2, v_3]$ , gdzie podane wektory są kolumnami macierzy. Zauważmy, że macierz  $B$  jest macierzą ortogonalną. By to potwierdzić pomnożmy macierz  $B$  przez jej macierz transponowaną.

$$BB^T = [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix},$$

gdzie  $v_1^T, v_2^T, v_3^T$  są wersami macierzy transponowanej  $B$ . Ze względu na to, że każdy z wektorów jest prosto padły do pozostałych, to zachodzi równość

$$v_i \circ v_j = 0,$$

gdzie  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  przy czym  $i \neq j$ . Natomiast, w przypadku  $i = j$  to powyższy iloczyn skary wynosi  $1$ , wynika to z faktu ortonormalności wektorów rozważanych wektorów. Podsumowując

$$BB^T = [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} = I_3,$$

zatem udało nam się potwierdzić ortogonalność macierzy  $B$ . Oznacza to, że wyznacznik macierzy  $A$  jest równy  $1$  lub  $-1$ . Ze względu na to, że zamiana kolejności wierszy zmienia znak wyznacznika wybierzemy wyznacznik równy  $1$  bez straty ogólności. Oznacz to, że  $B \in \text{SO}(3)$ . W takim razie

$$AB = [Bv_1, Bv_2, Bv_3],$$

pamiętając jednak o tym, że  $v_3$  jest wektorem własnym macierzy  $A$ , zatem  $Av_3 = v_3$ . Dodatkowo, iloczyn dwóch macierzy ortogonalnych również jest macierzą ortogonalną. Oznacza to, że macierz  $AB$  jest macierzą ortogonalną. Dodatkowo,  $Bv_1, Bv_2 \in v_3^\perp$ . W takim razie  $A(v_1) = av_1 + bv_2$ ,  $A(v_2) = cv_1 + dv_2$ ,  $A(v_3) = v_3$ , co w konsekwencji daje nam macierz

$$B^{-1}AB \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{SO}(3) \implies \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \text{SO}(2).$$

Oznacza to, że macierz  $A$  jest macierzą obrotu o pewien kąt.

Przypuśćmy teraz, że wartość własną macierzy  $A$  jest równa  $-1$ . Niech  $v_3$  będzie odpowiadającym ortogonalnym wektorem własnym do podanej wartości własnej. Definiując macierz  $B$  w analogiczny sposób jak wyżej otrzymujemy

$$B^{-1}AB \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \implies \det \left( \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right) = -1.$$

Oznacza to, że  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  jest elementem zbioru  $\text{O}(2)$ . Oznacza to, że istnieje niezerowy wektor  $v \in v_3^\perp$  taki, że  $Av = v$ . Oznacza to, że  $1$  jest również wartością własną macierzy  $A$ . W ten sposób udało nam się pokazać, że jeśli  $A \in \text{SO}(3)$  to jest ona tak naprawdę macierzą obrotu. ■

### 2.2.5. Opis kwaternionowy obrotu w przestrzeni

**Definicja 10.** Kwaternion którego moduł jest równy 0, nazywamy kwaternionem jednostkowym.

**Definicja 11.** Kwaternion którego część skalarna jest równa 0, nazywamy czysto wektorową.



### **3. Zastosowanie**

## 4. Literatura