Unidade Curricular de Otimização Heurística

Trabalho Individual 1

Elaborado por:

Sebastião Manuel Inácio Rosalino, n.º 98437

Licenciatura de Ciência de Dados - 2º ano - Turna CDB1

Ano Letivo 2021/2022 - 2º Semestre

Docente:

Professora Anabela Costa

22 de Maio de 2022

Índice

Parte 1

1 – Enquadramento

O caso em apreciação tem subjacente a escolha, por parte do Governo de um país em desenvolvimento, da melhor alocação possível dos 15000000 hectares de terrenos agrícolas que tem disponível no seu território.

Este país especializou-se em 3 culturas agrícolas (designadas por 1, 2 e 3) e o seu Governo procura alcançar alguns objetivos específicos, em termos de políticas públicas, em resultado de uma adequada distribuição dessas 3 culturas pelo terreno agrícola disponível.

Os objetivos que o Governo se propõe atingir passam: i) por aumentar as exportações de produtos agrícolas (e com isso beneficiar as suas receitas externas em euros); ii) por reduzir a dependência alimentar do país (garantindo o acesso da população a estes produtos alimentares); e iii) por criar emprego no sector agrícola (aumentando a percentagem de população ativa neste sector).

A combinação ótima destas três dimensões de política traduz o objetivo que o Governo deste país se propõe alcançar, tendo presente que os principais fatores a considerar na afetação das terras às 3 culturas são:

a) a quantidade de capital estrangeiro gerado;

b) o número de cidadãos alimentados;

c) o número de cidadãos contratados para laboração destas culturas.

De acordo com os dados do problema, a contribuição de cada 1000 hectares/por cultura para cada um daqueles fatores é dada pela tabela seguinte:

Fator	**Contribuição por 1000 hectares**		
	Cultura		
	1	2	3
Capital estrangeiro	€3000	€5000	€4000
Alimentação da população local	150	75	100
Emprego local	10	15	12

Sabe-se, ainda, que o Governo definiu que deverão ser alocados, no mínimo, 1000000 de hectares à cultura 3.

Neste quadro, o objetivo global do Governo passa por determinar os hectares de terreno a afetar a cada um dos tipos de cultura que maximizam os três fatores estabelecidos.

2 - Resolução

Notas prévias:

- A unidade de medida a considerar na resolução deste problema é, para as variáveis de decisão, o milhar de hectare;

- Disponibiliza-se, em anexo, o ficheiro Trabalho_1_Sebastiao_Rosalino.ipynb que contém o código em *python* utilizado para a resolução das questões colocadas.

a) Formulação do problema em Programação Linear

Identificação das variáveis de decisão:

X1 - Milhares de hectares a utilizar para a cultura 1 no próximo ano

X2 - Milhares de hectares a utilizar para a cultura 2 no próximo ano

X3 - Milhares de hectares a utilizar para a cultura 3 no próximo ano

Pretende-se determinar os hectares a alocar a cada uma destas variáveis.

Funções objetivo:

- Maximizar a quantidade de capital estrangeiro gerado

Max Qt. Cap. Est. = 3000 * X1 + 5000 * X2 + 4000 * X3

Maximiza-se a quantidade de capital estrangeiro pela função que considera que para cada milhar de hectare da cultura 1 se obtém 3000 euros de capital estrangeiro, e assim sucessivamente para as restantes culturas.

- Maximizar o número de cidadãos alimentados

Max N.º Cid. Alim. = 150 * X1 + 75 * X2 + 100 * X3

Maximiza-se a quantidade de cidadãos alimentados pela função que considera que para cada milhar de hectare da cultura 1 se alimentam 150 pessoas, e assim sucessivamente para as restantes culturas.

- Maximizar o número de cidadãos contratados para laboração nestas culturas

Max Trabalhadores = 10 * X1 + 15 * X2 + 12 * X3

Maximiza-se a quantidade de trabalhadores pela função que considera que para cada milhar de hectare da cultura 1 se criam 10 empregos, e assim sucessivamente para as restantes culturas.

Sujeito às restrições:

s.a.

- X1 + X2 + X3 <= 15000 (Milhares de hectares totais disponíveis)

  A totalidade do terreno a afetar às 3 culturas não pode exceder os 15000 milhares de hectares.

- X3 >= 1000 (Mínimo de milhares de hectares a cultivar na cultura 3)

  O Governo definiu que deverão ser alocados, no mínimo, 1 milhão de hectares à cultura 3.

- X1, X2, X3 >= 0

  Todas as variáveis de decisão devem ser não negativas.

b) Aplicação de níveis (metas) aceitáveis para cada um dos fatores

É indicado no enunciado que, ao avaliar a possibilidade de não conseguir alcançar a maximização dos três fatores, o Governo definiu níveis aceitáveis para cada um dos fatores, a saber:

- Capital estrangeiro gerado não inferior a 70 milhões de euros;
- Número de cidadãos alimentados não inferior a 1.75 milhões;
- Aproximadamente 200 mil cidadãos contratados para laboração nas culturas.

A área disponível a cultivar continua a ser os 15000 milhares de hectares de terrenos agrícolas.

b1) Programação por Metas não Preemptivas - duas propostas de distribuição

A resolução do problema consiste na definição de metas não preemptivas, o que significa que são metas sem prioridade entre si (ou seja, igualmente prioritárias). As metas são as seguintes:

- Meta 1: Capital estrangeiro gerado não muito menos que 70 milhões de euros;
- Meta 2: Número de cidadãos alimentados não muito menos que 1.75 milhões;
- Meta 3: Aproximadamente 200 mil cidadãos contratados para laboração nas culturas.

Explicitando as metas, temos:

Meta 1: Não muito menos de 70000000 de euros de capital estrangeiro gerado.

Com referência a esta meta, o Governo admite gerar menos de 70000000 de euros de capital estrangeiro, mas pretende ficar tão próximo desse objetivo quanto possível.

Define-se uma variável adicional que vai medir o desvio, por defeito, face ao valor alvo que se pretende atingir:

dm1: Quanto falta para alcançar o valor alvo da Meta 1, ou seja, os 70000000 de euros.

Definida esta variável, é possível escrever a seguinte restrição adicional:

s.a.

3000 * X1 + 5000 * X2 + 4000 * X3 >= 70000000 – dm1; com dm1 >= 0

Aceita-se que a maximização da quantidade de capital estrangeiro pela função que considera que para cada milhar de hectare da cultura 1 se obtém 3000 euros de capital estrangeiro e assim sucessivamente para as restantes culturas, tenha um desvio que se quer o mais baixo possível.

Meta 2: Não muito menos de 1750000 milhões de cidadãos alimentados.

Com referência a esta meta, o governo admite alimentar menos de 1750000 milhões de cidadãos, mas pretende ficar tão próximo desse objetivo quanto possível.

Define-se uma variável adicional, que vai medir o desvio, por defeito, face ao valor alvo que se pretende atingir:

dm2: Quanto falta para alcançar o valor alvo da Meta 2, ou seja, 1750000 milhões de cidadãos.

Definida esta variável, é possível escrever a seguinte restrição adicional:

s.a.

150 * X1 + 75 * X2 + 100 * X3 >= 1750000 – dm2, com dm2 >= 0

Aceita-se que a maximização da quantidade de cidadãos alimentados pela função que considera que para cada milhar de hectare da cultura 1 se alimentam 150 pessoas e assim sucessivamente para as restantes culturas, tenha um desvio que se quer o mais baixo possível.

Meta 3: Aproximadamente 200000 cidadãos contratados para laboração nas culturas.

Com referência a esta meta, o governo pretende um valor aproximado dos 200000 cidadãos a trabalhar nas culturas, podendo o mesmo ser próximo por defeito ou por excesso.
Para tal criam-se duas variáveis de desvio:

dm3: Quanto falta para alcançar (por defeito) o valor alvo da Meta 3, ou seja, os 200000 cidadãos.
dM3: Quanto excede o valor alvo da Meta 3, ou seja, os 200000 cidadãos.

Aceita-se que a maximização da quantidade de trabalhadores pela função que considera que para cada milhar de hectare da cultura 1 se criam 10 empregos e assim sucessivamente para as restantes culturas, pode ter um desvio por defeito ou por excesso, que se quer o mais baixo possível.

Definidas estas novas variáveis, é possível escrever a seguinte restrição adicional:

s.a.

10 * X1 + 15 * X2 + 12 * X3 = 200000 + dM3 - dm3, com dm3 e dM3 >= 0

Formulado o problema, proceder-se de seguida à sua resolução pelo método da soma ponderada dos desvios e pelo método MiniMax.

Resolução do problema pelo método da soma ponderada dos desvios:

Atendendo que se pretende obter soluções que se aproximem do valor alvo de cada meta, deverá construir-se uma função objetivo com desvios percentuais:

Função objetivo:

Min ***Z*** (soma ponderada dos desvios) = (dm1/70000000) + (dm2/1750000) + (dm3/200000) + (dM3/200000)

s.a.

X1 + X2 + X3 <= 15000
X3 >= 1000
X1, X2, X3 >= 0
3000 * X1 + 5000 * X2 + 4000 * X3 >= 70000000 - dm1
150 * X1 + 75 * X2 + 100 * X3 >= 1750000 - dm2
10 * X1 + 15 * X2 + 12 * X3 = 200000 + dM3 - dm3
dm1, dm2, dm3, dM3 >= 0

a) Criação do Modelo Matemático

```
model = LpProblem(name="Trabalho_1_parte_1_desvios", sense=LpMinimize)

x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name="dm1", lowBound=0)
dm2 = LpVariable(name="dm2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name="dM3", lowBound=0)
dm3 = LpVariable(name="dm3", lowBound=0)

model += (3000 * x[1] + 5000 * x[2] + 4000 * x[3] >= 70000000 - dm1, "capital estrangeiro")
model += (150 * x[1] + 75 * x[2] + 100 * x[3] >= 1750000 - dm2, "cidadaos alimentados")
model += (10 * x[1] + 15 * x[2] + 12 * x[3] == 200000 + dM3 - dm3, "cidadaos contratados")
model += (x[1] + x[2] + x[3] <= 15000, "hectares disponiveis")
model += (x[3] >= 1000, 'minimo da cultura 3')

vam = np.array([70000000, 1750000, 200000])

obj_func = (1/vam[0]) * dm1 + (1/vam[1]) * dm2 + (1/vam[2]) * dM3 + (1/vam[2]) * dm3
model += obj_func

model
```

b) Output: Modelo Matemático Criado

```
Trabalho_1_parte_1_desvios:
MINIMIZE
5e-06*dM3 + 1.4285714285714286e-08*dm1 + 5.714285714285714e-07*dm2 + 5e-06*dm3 + 0.0
SUBJECT TO
capital_estrangeiro: dm1 + 3000 x1 + 5000 x2 + 4000 x3 >= 70000000

cidadaos_alimentados: dm2 + 150 x1 + 75 x2 + 100 x3 >= 1750000

cidadaos_contratados: - dM3 + dm3 + 10 x1 + 15 x2 + 12 x3 = 200000

hectares_disponiveis: x1 + x2 + x3 <= 15000

minimo_da_cultura_3: x3 >= 1000

VARIABLES
dM3 Continuous
dm1 Continuous
dm2 Continuous
dm3 Continuous
x1 Continuous
x2 Continuous
x3 Continuous
```

c) Resolução do Problema e Resultados

```python
# Resolução do modelo

status = model.solve()

print(f"objective: {model.objective.value()}")

for var in x.values():
    print(f"{var.name}: {var.value()}")
print(f"{dm1}: {dm1.value()}")
print(f"{dm2}: {dm2.value()}")
print(f"{dM3}: {dM3.value()}")
print(f"{dm3}: {dm3.value()}")


for name, constraint in model.constraints.items():
    print (f"{name}: {constraint.value()}")
```

d) Output: Solução Ótima e Valor Ótimo do Problema

```
objective: 0.22285714285714286
x1: 4400.0
x2: 9600.0
x3: 1000.0
dm1: 4800000.0
dm2: 270000.0
dM3: 0.0
dm3: 0.0
capital_estrangeiro: 0.0
cidadaos_alimentados: 0.0
cidadaos_contratados: 0.0
hectares_disponiveis: 0.0
minimo_da_cultura_3: 0.0
```

e) Interpretação dos resultados:

Podemos verificar que, aplicando o método da soma ponderada dos desvios, os resultados das variáveis de decisão são os seguintes (alocação ótima):

X1 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 1 = 4400

X2 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 2 = 9600

X3 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 3 = 1000

A totalidade do terreno disponível (15000 milhares de hectares) está a ser utilizada.

Em termos dos objetivos propostos (metas), os resultados obtidos indicam-nos que:

- Relativamente à Meta 1, o desvio é de 4800000 euros de capital estrangeiro gerado, ou seja, menos 6,86% face ao objetivo dos 70000000 de euros.

- Relativamente à Meta 2, o desvio é de 270000 cidadãos alimentados, ou seja, menos 15,43% face ao objetivo dos 1750000 milhões de cidadãos;

- A Meta 3, aproximadamente 200000 cidadãos contratados para laboração nas culturas, é integralmente cumprida, na medida em que é exatamente esse o número de cidadão a laborar nas 3 culturas. Ou seja, os desvios (dM3 e dm3) são zero.

O valor ótimo (objetive) situa-se em 0.22286, o que à partida, por estar relativamente afastado de zero, deixa algumas dúvidas sobre a qualidade e validade deste indicador. Por isso, o mais importante é interpretar a solução ótima.

Em termos gerais, podemos concluir que a solução é equilibrada, desde logo porque se consegue utilizar todo o terreno disponível. Mas também porque as metas são relativamente cumpridas, no sentido em que os desvios verificados não são excessivos.

Para a meta 1, o desvio é ligeiramente superior a 5%, o que pode ser considerado bastante positivo. Para a meta 2 o desvio é de cerca de 15%, que pode ser considerado um pouco excessivo, mas não em demasia num contexto geral. A meta 3 é integralmente cumprida, sem qualquer desvio.

Perante estes desvios, a solução parece globalmente boa, resultando na obtenção de:

- 65200000 de capital estrangeiro gerado;

- 1480000 cidadãos alimentados;

- 200000 cidadãos contratados.

Resolução do problema pelo método do MiniMax:

O método do MiniMax é utilizado quando se pretende minimizar o desvio máximo de qualquer meta.

Para a resolução pelo método do MiniMax terão de ser criadas restrições adicionais, obtendo-se a seguinte formulação do problema:

Função objetivo:

Min **Z** = Q (em que Q é a variável MiniMax)

s.a.

X1 + X2 + X3 <= 15000
X3 >= 1000
X1, X2, X3 >= 0
3000 * X1 + 5000 * X2 + 4000 * X3 >= 70000000 – dm1
150 * X1 + 75 * X2 + 100 * X3 >= 1750000 – dm2
10 * X1 + 15 * X2 + 12 * X3 = 200000 + dM3 - dm3

Restrições adicionais:
dm1/70000000 <= Q
dm2/1750000 <= Q
dm3/200000 <= Q
dM3/200000 <= Q
dm1, dm2, dm3, dM3 >= 0
Q >= 0

A variável Q traduz o desvio ponderado face ao valor que se pretende atingir para cada meta.

a) Criação do Modelo Matemático

```
model = LpProblem(name="Trabalho_1_parte_1_minimax", sense=LpMinimize)
peso = [1, 1, 1, 1,]
vam = [70000000, 1750000, 200000]

x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm1 = LpVariable(name="dm1", lowBound=0)
dm2 = LpVariable(name="dm2", lowBound=0)
dM3 = LpVariable(name="dM3", lowBound=0)
dm3 = LpVariable(name="dm3", lowBound=0)
Q = LpVariable(name="Q", lowBound=0)

model += (3000 * x[1] + 5000 * x[2] + 4000 * x[3] >= 70000000 - dm1, "capital estrangeiro")
model += (150 * x[1] + 75 * x[2] + 100 * x[3] >= 1750000 - dm2, "cidadaos alimentados")
model += (10 * x[1] + 15 * x[2] + 12 * x[3] == 200000 + dM3 - dm3, "cidadaos contratados")
model += (x[1] + x[2] + x[3] <= 15000, "hectares disponiveis")
model += (x[3] >= 1000, 'minimo da cultura 3')
model += ((peso[0]/vam[0]) * dm1 - Q <= 0, "desvio_inf_capital_estrangeiro")
model += ((peso[1]/vam[1]) * dm2 - Q <= 0, "desvio_inf_cidadaos_alimentados")
model += ((peso[2]/vam[2]) * dM3 - Q <= 0, "desvio_sup_cidadaos_contratados")
model += ((peso[3]/vam[2]) * dm3 - Q <= 0, "desvio_inf_cidadaos_contratados")

obj_func = Q
model += obj_func

model
```

b) Output: Modelo Matemático Criado

```
Trabalho_1_parte_1_minimax:
MINIMIZE
1*Q + 0
SUBJECT TO
capital_estrangeiro: dm1 + 3000 x1 + 5000 x2 + 4000 x3 >= 70000000

cidadaos_alimentados: dm2 + 150 x1 + 75 x2 + 100 x3 >= 1750000

cidadaos_contratados: - dM3 + dm3 + 10 x1 + 15 x2 + 12 x3 = 200000

hectares_disponiveis: x1 + x2 + x3 <= 15000

minimo_da_cultura_3: x3 >= 1000

desvio_inf_capital_estrangeiro: - Q + 1.42857142857e-08 dm1 <= 0

desvio_inf_cidadaos_alimentados: - Q + 5.71428571429e-07 dm2 <= 0

desvio_sup_cidadaos_contratados: - Q + 5e-06 dM3 <= 0

desvio_inf_cidadaos_contratados: - Q + 5e-06 dm3 <= 0

VARIABLES
Q Continuous
dM3 Continuous
dm1 Continuous
dm2 Continuous
dm3 Continuous
x1 Continuous
x2 Continuous
x3 Continuous
```

c) Resolução do Problema e Resultados

```python
# Resolução do modelo

status = model.solve()

print(f"objective: {model.objective.value()}")

for var in x.values():
    print(f"{var.name}: {var.value()}")
print(f"{dm1}: {dm1.value()}")
print(f"{dm2}: {dm2.value()}")
print(f"{dM3}: {dM3.value()}")
print(f"{dm3}: {dm3.value()}")


for name, constraint in model.constraints.items():
    print (f"{name}: {constraint.value()}")
```

d) Output: Solução Ótima e Valor Ótimo do Problema

```
objective: 0.10285714
x1: 5600.0
x2: 8400.0
x3: 1000.0
dm1: 7200000.0
dm2: 180000.0
dM3: 0.0
dm3: 6000.0
capital_estrangeiro: 0.0
cidadaos_alimentados: 0.0
cidadaos_contratados: 0.0
hectares_disponiveis: 0.0
minimo_da_cultura_3: 0.0
desvio_inf_capital_estrangeiro: 2.8571428556389833e-09
desvio_inf_cidadaos_alimentados: 2.8571428556389833e-09
desvio_sup_cidadaos_contratados: -0.10285714
desvio_inf_cidadaos_contratados: -0.07285714
```

e) Interpretação dos resultados:

Podemos verificar que, aplicando o método do MiniMax, os resultados das variáveis de decisão são os seguintes (alocação ótima):

X1 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 1 = 5600

X2 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 2 = 8400

X3 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 3 = 1000

A totalidade do terreno disponível (15000 milhares de hectares) está a ser utilizada.

Em termos dos objetivos propostos (metas), os resultados obtidos indicam-nos que:

- Relativamente à Meta 1, o desvio é de 7200000 euros de capital estrangeiro gerado, ou seja, cerca de 10.28% face ao objetivo dos 70000000 de euros;

- Relativamente à Meta 2, o desvio é de 180000 cidadãos alimentados, ou seja, cerca de 10,28% face ao objetivo dos 1750000 milhões de cidadãos;

- Relativamente à Meta 3, o desvio é 6000 cidadãos contratados, por defeito, o que representa um *gap* de cerca de cerca de 3% face ao objetivo de 200000 cidadãos contratados para laboração nas culturas.

O valor ótimo (objective) foi 0.102857, correspondendo ao desvio máximo ocorrido. Atendendo aos valores dos desvios das restrições dm1 e dm2, conclui-se que este desvio ocorreu nas Metas 1 e 2.

Em termos gerais, podemos concluir que a solução é equilibrada, desde logo porque se consegue utilizar todo o terreno disponível. Mas também porque as metas são cumpridas com desvios máximos na ordem dos 10%.

Para a meta 1, o desvio é 10,3%, o que pode ser considerado aceitável. Para a meta 2 o desvio é igualmente de 10,3%. Por seu lado, a meta 3 apresenta um desvio de apenas 3%.

Perante estes desvios, a solução parece globalmente boa, resultando na obtenção de:

- 62800000 de capital estrangeiro gerado;
- 1570000 cidadãos alimentados;
- 194000 cidadãos contratados.

As duas propostas obtidas podem ser resumidas da forma seguinte:

Tabela Comparativa entre os dois modelos

	Objetivo	Método Soma Pond.				Método MinMax			
		Desvio	Desv. %	Culturas		Desvio	Desv. %	Culturas	
Meta 1 (capital €)	70 000 000	4 800 000	6,86%	1	4 400 000	7 200 000	10,3%	1	5 600 000
Meta 2 (cidad. Alim.)	1 750 000	270 000	15,43%	2	9 600 000	180 000	10,3%	2	8 400 000
Meta 3 (cidad. Emp.)	200 000	-	0,00%	3	1 000 000	6 000	3,0%	3	1 000 000
Terreno a utilizar (he)	15 000 000				15 000 000				15 000 000
Objective					*0.22286*				*0.102857*

Ambas as soluções parecem ser equilibradas, porque esgotam a totalidade do terreno agrícola e não apresentam desvios muito significativos. Ainda assim, a solução proposta pelo método do MiniMax parece globalmente mais adequada porque minimiza os desvios para um nível não superior a 10%, sendo que pela aplicação do método da soma ponderada há um desvio (meta 2) que excede os 15%.

b2) Programação por Metas Preemptivas

Com o objetivo de gerar soluções alternativas, o Governo decidiu que a primeira prioridade deve ser dada ao número de cidadãos alimentados, a segunda prioridade ao capital estrangeiro e a terceira prioridade ao emprego local.

Neste quadro, é solicitada a apresentação de uma solução que respeite as prioridades definidas.

Resolvendo o problema recorrendo à Programação por Metas Preemptiva, tem-se que:

- Meta Primária (Nível prioritário 1):
  Número de cidadãos alimentados não inferior a 1750000 milhões;

- Meta Secundária (Nível prioritário 2)
  Capital estrangeiro gerado não inferior a 70000000 milhões de euros;

- Meta Terciária (Nível prioritário 3)
  Aproximadamente 200000 cidadãos contratados.

1 - Função objetivo, considerando a meta primária:

Número de cidadãos alimentados não inferior a 1750000 milhões

Min **Z =** dm2 (minimizar o desvio da meta primária)

s.a.

X1 + X2 + X3 <= 15000
X3 >= 1000
X1, X2, X3 >= 0

3000 * X1 + 5000 * X2 + 4000 * X3 >= 70000000 – dm1
10 * X1 + 15 * X2 + 12 * X3 = 200000 + dM3 – dm3
dm1, dM3, dm3 >= 0

restrições associadas à meta primária
150 * X1 + 75 * X2 + 100 * X3 >= 1750000 – dm2
dm2 >= 0

a) Criação do Modelo Matemático

```
model = LpProblem(name="Trabalho_1_parte_1_primeira_prioridade", sense=LpMinimize)

x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}
dm2 = LpVariable(name="dm2", lowBound=0)

model += (3000 * x[1] + 5000 * x[2] + 4000 * x[3] >= 70000000 - dm1, "capital estrangeiro")
model += (150 * x[1] + 75 * x[2] + 100 * x[3] >= 1750000 - dm2, "cidadaos alimentados")
model += (10 * x[1] + 15 * x[2] + 12 * x[3] == 200000 + dM3 - dm3, "cidadaos contratados")
model += (x[1] + x[2] + x[3] <= 15000, "hectares disponiveis")
model += (x[3] >= 1000, 'minimo da cultura 3')

obj_func = dm2
model += obj_func

model
```

b) Output: Modelo Matemático Criado

```
Trabalho_1_parte_1_primeira_prioridade:
MINIMIZE
1*dm2 + 0
SUBJECT TO
capital_estrangeiro: dm1 + 3000 x1 + 5000 x2 + 4000 x3 >= 70000000

cidadaos_alimentados: dm2 + 150 x1 + 75 x2 + 100 x3 >= 1750000

cidadaos_contratados: - dM3 + dm3 + 10 x1 + 15 x2 + 12 x3 = 200000

hectares_disponiveis: x1 + x2 + x3 <= 15000

minimo_da_cultura_3: x3 >= 1000

VARIABLES
dM3 Continuous
dm1 Continuous
dm2 Continuous
dm3 Continuous
x1 Continuous
x2 Continuous
x3 Continuous
```

c) Resolução do Problema e Resultados

```
# Resolução do modelo

status = model.solve()

print(f"objective: {model.objective.value()}")

for var in x.values():
    print(f"{var.name}: {var.value()}")
print(f"{dm1}: {dm1.value()}")
print(f"{dm2}: {dm2.value()}")
print(f"{dM3}: {dM3.value()}")
print(f"{dm3}: {dm3.value()}")


for name, constraint in model.constraints.items():
    print (f"{name}: {constraint.value()}")
```

d) Output: Solução Ótima e Valor Ótimo do Problema

```
objective: 0.0
x1: 14000.0
x2: 0.0
x3: 1000.0
dm1: 24000000.0
dm2: 0.0
dM3: 0.0
dm3: 48000.0
capital_estrangeiro: 0.0
cidadaos_alimentados: 450000.0
cidadaos_contratados: 0.0
hectares_disponiveis: 0.0
minimo_da_cultura_3: 0.0
```

e) Interpretação dos resultados:

Após construção e resolução do modelo em que se considera apenas a função objetivo de minimizar o desvio da **Meta Primária** e as restrições hard obteve-se a seguinte solução:

X1 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 1 = 14000

X2 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 2 = 0

X3 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 3 = 1000

O valor ótimo (objective) foi 0, conclui-se assim que a primeira prioridade (número de cidadãos alimentados) foi atingida. É de salientar que nesta solução foram utilizados os 15000 milhares de hectares disponíveis.

Sabendo que é possível satisfazer a prioridade de nível 1, construiu-se e resolveu-se um novo modelo, cuja função objetivo é minimizar o desvio da **Meta Secundária**, obrigando a que se cumpra as restrições hard, a restrição do nível 1 e a restrição do nível 2.

2 - Função objetivo, considerando agora a Meta Secundária:

Capital estrangeiro gerado não inferior a 70000000 milhões de euros

Min $\mathbf{Z} = \mathrm{dm1}$ (minimizar o desvio da meta secundária)

s.a.

X1 + X2 + X3 <= 15000
X3 >= 1000
X1, X2, X3 >= 0
150 * X1 + 75 * X2 + 100 * X3 >= 1750000

10 * X1 + 15 * X2 + 12 *X3 = 200000 + dM3 – dm3
dM3, dm3 >= 0

restrições associadas à meta secundária
3000 * X1 + 5000 * X2 + 4000 * X3 >= 70000000 – dm1
dm1>=0

Por economia de texto, coloca-se diretamente o output obtido, estando o modelo no ficheiro ipynb.

Output: Solução Ótima e Valor Ótimo do Problema (para a Meta Secundária)

```
objective: 12000000.0
x1: 8000.0
x2: 6000.0
x3: 1000.0
dm1: 12000000.0
dM3: 0.0
dm3: 18000.0
capital_estrangeiro: 0.0
cidadaos_alimentados: 0.0
cidadaos_contratados: 0.0
hectares_disponiveis: 0.0
minimo_da_cultura_3: 0.0
```

Interpretação dos resultados:

Após construção e resolução do modelo em que se considera apenas a função objetivo de minimizar o desvio da **Meta Secundária** e as restrições hard obteve-se a seguinte solução:

X1 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 1 = 8000

X2 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 2 = 6000

X3 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 3 = 1000

A totalidade do terreno disponível (15000 milhares de hectares) está a ser utilizada.

O valor ótimo (objective) foi 12000000, ou seja, não foi possível cumprir a segunda prioridade (capital estrangeiro gerado não inferior a 70000000 de euros). A solução obtida gera 58000000 de euros de capital estrangeiro, falhando assim a prioridade secundária por 12000000 de euros.

Dada a impossibilidade de cumprir a **Meta Secundária** no valor inicialmente definido, procedeu-se à redefinição desta meta para o melhor valor gerado (58000000 de euros).

Assumida a nova Meta Secundária, procedeu-se à formulação do problema de modo a que se procure cumprir a **Meta Terciária** (emprego local).

3 - Função objetivo, considerando agora a Meta Terciária:

Aproximadamente 200000 cidadãos contratados para laboração nas culturas

Min $\mathbf{Z} = \mathrm{dm3} + \mathrm{dM3}$ (minimizar os desvios da meta terciária)

s.a.

X1 + X2 + X3 <= 15000
X3 >= 1000
X1, X2, X3 >= 0
150 * X1 + 75 * X2 + 100 * X3 >= 1750000
3000 * X1 + 5000 * X2 + 4000 * X3 >= 58000000

restrições associadas à meta terciária
10 * X1 + 15 * X2 + 12 *X3 = 200000 + dM3 – dm3
dm3, dM3 >=0

Por economia de texto, coloca-se diretamente o output obtido, estando o modelo no ficheiro ipynb.

Output: Solução Ótima Final

```
objective: 18000.0
x1: 8000.0
x2: 6000.0
x3: 1000.0
dM3: 0.0
dm3: 18000.0
capital_estrangeiro: 0.0
cidadaos_alimentados: 0.0
cidadaos_contratados: 0.0
hectares_disponiveis: 0.0
minimo_da_cultura_3: 0.0
```

Os resultados das variáveis de decisão são os seguintes (alocação ótima):

X1 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 1 = 8000

X2 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 2 = 6000

X3 - Milhares de hectares a cultivar com a cultura 3 = 1000

A totalidade do terreno disponível (15000 milhares de hectares) está a ser utilizada.

Em termos dos objetivos propostos (metas), os resultados obtidos indicam-nos que:

- A meta prioritária foi cumprida: são alimentados 1750000 cidadãos;

- A meta secundária não foi integralmente cumprida na sua formulação inicial, tendo sido gerado 58000000 de capital estrangeiro;

- A meta terciária também não foi cumprida, tendo sido contratados 182000 cidadãos.

Parte 2

1 - Enquadramento

O caso em apreciação tem subjacente a escolha, por parte da Administração de Segurança dos Transportes de um país, do tipo de tecnologia de segurança a adquirir para utilização nos pontos de controlo dos aeroportos, tendo em vista maximizar a eficácia com que os passageiros podem ser rastreados, naturalmente, dentro de critérios de segurança adequados.

Para o efeito foi contratada uma consultora líder na indústria aeronáutica (AJ), cuja tarefa consiste em investigar que tecnologia de segurança deve ser adquirida, cumprindo as restrições orçamentais definidas pela Administração.

Existem 2 tipos básicos de sistemas de segurança:

- Sistema 1: Portal que permite detetar armas ocultas à medida que o passageiro caminha.
- Sistema 2: Sistema de rastreio que digitaliza a bagagem de mão do passageiro.

A empresa consultora deverá recomendar, para cada um destes tipos de sistemas, a evolução tecnológica que deverá ser adotada, considerando que:

Para o sistema 1, a versão mais básica que satisfaz os requisitos funcionais tem uma estimativa de custo de aquisição de 90000 euros e, em média, incorre num custo de manutenção anual de 15000 euros. Porém, esta verão gera falsos alarmes para aproximadamente 10% dos passageiros, o poderá ser considerado excessivo.

Para reduzir este problema, podem ser adquiridas versões mais avançadas do sistema, sendo que para cada 15000 euros adicionais no custo de aquisição do sistema há uma redução de 1% na taxa de falsos alarmes e, também, aumenta o custo anual de manutenção em 1500 euros.

A versão mais avançada tem um custo de aquisição de 210000 euros e de manutenção de 27000 euros, para uma taxa de falsos alarmes de apenas 2% dos passageiros.

Para o sistema 2, a versão mais básica que satisfaz os requisitos funcionais tem uma estimativa de custo de aquisição de 60000 euros e, em média, incorre num custo anual de manutenção de 9000 euros. Porém, esta verão gera falsos alarmes para aproximadamente 6% dos passageiros, o poderá ser considerado excessivo.

Para reduzir este problema, podem ser adquiridas versões mais avançadas do sistema, sendo que para cada 30000 euros adicionais no custo de aquisição do sistema há uma redução de 1% na taxa de falsos alarmes e, também, aumenta o custo anual de manutenção em 1200 euros.

A versão mais avançada tem um custo de aquisição de 150000 euros e de manutenção de 12600 euros, para uma taxa de falsos alarmes de apenas 3% dos passageiros.

As restrições orçamentais globais:

1) Despesa total de aquisição, para os dois sistemas, não superior a 250000 euros;
2) Despesa de manutenção anual, para os dois sistemas, não superior a 30000 euros.

2 - Resolução

a) Número de versões por sistema

Sistema 1 (portal)

Considerou-se que a combinação entre “custo de aquisição”, “custo de manutenção” e “taxa de falsos alarmes” corresponde a uma versão do sistema de portal, pelo que se conclui que existem as 9 versões, conforme descrito abaixo:

Sistema de Portal	Versões								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Custo Aquisição	90 000	105 000	120 000	135 000	150 000	165 000	180 000	195 000	210 000
Custo Anual Manutenção	15 000	16 500	18 000	19 500	21 000	22 500	24 000	25 500	27 000
Percentagem falso alarme	10%	9%	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%

Sistema 2 (rastreio)

Considerou-se que a combinação entre “custo de aquisição”, “custo de manutenção” e “taxa de falsos alarmes” corresponde a uma versão do sistema de rastreio, pelo que se conclui que existem 4 versões, conforme descrito abaixo:

Sistema de Rastreio	Versões			
	1	2	3	4
Custo Aquisição	60 000	90 000	120 000	150 000
Custo Anual Manutenção	9 000	10 200	11 400	12 600
Percentagem falso alarme	6%	5%	4%	3%

b) Formulação do problema no âmbito da Otimização Multiobjectivo

A otimização multiobjectivo consiste, genericamente, na resolução problemas em que se pretende alcançar de forma ótima um conjunto de objetivos que, geralmente, são conflituantes. Ou seja, a resolução de um problema multiobjectivo consiste na determinação de soluções de compromisso entre os objetivos em presença.

Para o presente caso, a formulação do problema no âmbito da Otimização Multiobjectivo obedeceria ao seguinte:

Identificação das variáveis de decisão:

X1 - Versão do sistema a 1 utilizar

X2 - Versão do sistema a 2 utilizar

Funções objetivo:

Objetivo 1: Minimizar a taxa de falsos alarmes do sistema 1

Min Falsos Alarmes = 10 - (X1 - 1)

Partindo de uma taxa de 10% de falsos alarmes para a versão mais básica do sistema 1, minimizam-se os falsos alarmes reduzindo 1% por cada versão mais evoluída que se vai introduzindo até à versão 9 em que a taxa de falsos alarmes será de 2%.

Objetivo 2: Minimizar a taxa de falsos alarmes do sistema 2

Min Falsos Alarmes = 6 - (X2 - 1)

Partindo de uma taxa de 6% de falsos alarmes para a versão mais básica do sistema 2, minimizam-se os falsos alarmes reduzindo 1% por cada versão mais evoluída que se vai introduzindo até à versão 4 em que a taxa de falsos alarmes será de 3%.

Sujeito às restrições:

s.a.

X1, X2 são variáveis inteiras

1 <= X1 <= 9 (Versão do sistema 1 a escolher tendo em conta que existem apenas 9)

1 <= X2 <= 4 (Versão do sistema 2 a escolher tendo em conta que existem apenas 4)

90000 + 15000 * (X1 - 1) + 60000 + 30000 * (X2 - 1) <= 250000

Restrição orçamental 1: Despesa total de aquisição, para os dois sistemas, não superior a 250000 euros

15000 + (1500 * (X1 - 1)) + 9000 + (1200 * (X2 - 1)) <= 30000

Restrição orçamental 2: Despesa de manutenção anual, para os dois sistemas, não superior a 30000 euros

Forma alternativa de apresentação do problema (juntando as duas funções objetivo):

Identificação das variáveis de decisão:

X1 - Versão do sistema a 1 utilizar

X2 - Versão do sistema a 2 utilizar

Função objetivo:

Objetivo: Minimizar a taxa de falsos alarmes dos sistemas 1 e 2

Min Falsos Alarmes = 10 - (X1 - 1) + 6 - (X2 - 1)

s.a.

X1, X2 são variáveis inteiras

1 <= X1 <= 9 (Versão do sistema 1 a escolher tendo em conta que existem apenas 9)

1 <= X2 <= 4 (Versão do sistema 2 a escolher tendo em conta que existem apenas 4)

90000 + 15000 * (X1 - 1) + 60000 + 30000 * (X2 - 1) <= 250000

Restrição orçamental 1: Despesa total de aquisição, para os dois sistemas, não superior a 250000 euros

15000 + 1500 * (X1 - 1) + 9000 + 1200 * (X2 - 1) <= 30000

Restrição orçamental 2: Despesa de manutenção anual, para os dois sistemas, não superior a 30000 euros

Referências bibliográficas

- Documentos de apoio à UC de Otimização Heurística 2021/2022 – Licenciatura em Ciência de Dados – ISCTE, Anabela Costa e Maria João Cortinhal.

- Burke, E. K.; Kendall, G. (Eds.) (2014). Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support, 2nd edition, Springer.

- Siarry, P. (Ed.) (2016). Metaheuristics, Springer.

- Ehrgott, M. (2005). Multicriteria Optimization, 2nd edition, Springer.

- Ragsdale, C.T. (2017). Spreadsheet Modeling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Business Analytics. 8th Ed. Cemgage Learning.