Mines-Ponts - Mathématiques 1 - MP/MPI - 2024

Corrigé

1. • Déjà, f est bien définie : t^{x-1} est bien défini pour tout $t > 0$, et $1 + te^{i\theta}$ ne s'annule pas pour $t > 0$. En effet, si $1 + te^{i\theta} = 0$ alors $t = |te^{i\theta}| = |-1| = 1$ puis $e^{i\theta} = -1$, ce qui est impossible car $\theta \in]-\pi; \pi[$.
   - f est clairement continue comme quotient d'une fonction continue par une fonction continue ne s'annulant pas.
   - On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable et positive sur $]0; 1]$ car $x - 1 > -1$. f est donc intégrable sur $]0; 1]$.
   - On a $|f(t)| \underset{t\to +\infty}{\sim} t^{x-2}$, et $t \mapsto t^{x-2}$ est intégrable et positive sur $[1; +\infty[$ car $x - 2 < -1$. f est donc intégrable sur $[1; +\infty[$.

   Ainsi f est définie et intégrable sur $]0; +\infty[$.

2. On note

$$\begin{aligned}\rho :]-\pi; \pi[\times]0; +\infty[&\to \mathbf{C}\\ (\theta, t) &\mapsto \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}}\end{aligned}$$

   qui est bien définie d'après la question précédente.
   - Pour tout $t \in]0; +\infty[$, $\rho(\cdot, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta}(\cdot, t) : \theta \mapsto -\frac{it^x e^{i\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2}$$

   - Pour tout $\theta \in]-\pi; \pi[$, $\rho(\theta, \cdot)$ est intégrable d'après la question précédente.
   - Pour tout $\theta \in]-\pi; \pi[$, $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}(\theta, \cdot)$ est continue.
   - Soient $\beta \in]0, \pi[$, $\theta \in [-\beta; \beta]$ et $t \in [0; +\infty[$. On calcule :

$$\begin{aligned}|1 + te^{i\theta}|^2 &= (1 + t\cos(\theta))^2 + (t\sin(\theta))^2 = 1 + 2t\cos(\theta) + t^2((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2)\\ &= 1 + 2t\cos(\theta) + t^2\\ &\geq 1 + 2t\cos(\beta) + t^2 \text{ car } \cos \text{ est croissante sur } [-\beta; 0] \text{ et décroissante sur } [0; \beta]\\ &= (\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2 + 2t\cos(\beta) + t^2 = (\cos(\beta) + t)^2 + (\sin(\beta))^2\end{aligned}$$

     On en déduit

$$\left|\frac{\partial \rho}{\partial \theta}(\theta, t)\right| = \frac{t^x}{|1 + te^{i\theta}|^2} \leq \frac{t^x}{(\cos(\beta) + t)^2 + (\sin(\beta))^2}$$

     Or $\varphi : t \mapsto \frac{t^x}{(\cos(\beta)+t)^2+(\sin(\beta))^2}$ tend vers 0 en 0 et est équivalente à t^{x-2} en $+\infty$, donc est intégrable sur $]0; +\infty[$.

   Par théorème, on en déduit que r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\beta, \beta]$ et que

$$\forall \theta \in [-\beta, \beta], r'(\theta) = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} \,\mathrm{d}t$$

   Comme ceci vaut pour tout $\beta \in]-\pi; \pi[$ et que la dérivabilité est une propriété locale, on en déduit le résultat.

3. On a pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$, $g(\theta) = e^{ix\theta} r(\theta)$. D'après la question précédente, r est de classe $\mathscr{C}^1$, donc par les règles de dérivation des produits, g est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$:

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= ixe^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \,\mathrm{d}t - ie^{ix\theta} e^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{\left(1+te^{i\theta}\right)^2} \,\mathrm{d}t \\ &= ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{xt^{x-1}}{1+te^{i\theta}} - \frac{e^{i\theta} t^x}{\left(1+te^{i\theta}\right)^2} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'autre part, h est bien définie pour les mêmes raisons qu'à la question 1, est dérivable et pour tout $t \in]0;+\infty[$,

$$h(t) = \frac{xt^{x-1}\left(1+te^{i\theta}\right) - t^x e^{i\theta}}{\left(1+te^{i\theta}\right)^2}$$

donc

$$\forall \theta \in]-\pi;\pi[, g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) \,\mathrm{d}t$$

Or $\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$ donc $\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty} h(t) - \lim_{t\to 0} h(t) = 0$. On en déduit que g est constante.

4. Soit $\theta \in]0;\pi[$.

$$\begin{aligned} g(\theta)\sin(x\theta) &= g(\theta)\frac{e^{ix\theta} - e^{-ix\theta}}{2i} \text{ par la formule d'Euler} \\ &= \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}\right) \text{ car } g \text{ est constante d'après la question 3} \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{-i\theta}} - \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} t^x \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{1+t(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

5. On effectue le changement de variable $t = u\sin(\theta) - \cos(\theta)$ (i.e. $u = \frac{t+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$) dans l'égalité obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} g(\theta)\sin(x\theta) &= \sin(\theta)\int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+\frac{t^2+(\cos(\theta))^2+2t\cos(\theta)}{(\sin(\theta))^2}} \sin(\theta)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{(\sin(\theta))^2+t^2+(\cos(\theta))^2+2t\cos(\theta)} \,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1} \,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

6. Pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$, on pose

$$\begin{aligned} \gamma_\theta : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ u &\mapsto \frac{(u\sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1+u^2} \mathbb{1}_{]\mathrm{cotan}(\theta);+\infty[}(u) \end{aligned}$$

On voit que pour tout $u \in \mathbf{R}$, $\gamma_\theta \underset{\theta\to\pi^-}{\longrightarrow} \frac{1}{1+u^2}$ et pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$,

$$|\gamma_\theta(u)| \leq \frac{(|u\sin(\theta)| + |\cos(\theta)|)^x}{1+u^2} \leq \frac{(u+1)^x}{1+u^2}$$

Or $\frac{(u+1)^x}{1+u^2}$ est équivalent à u^{x-2} quand $u \to \pm\infty$, et $u \mapsto u^{x-2}$ est positif et intégrable sur $\mathbf{R}$. Ainsi $u \mapsto \frac{(u+1)^x}{1+u^2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \lim_{\theta\to\pi^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\theta(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\theta\to\pi^-} \gamma_\theta(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

7. D'après la question 3, g est constante, donc $\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta) = g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. De plus $\lim_{\theta\to\pi^-} \sin(x\theta) = \sin(\pi)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$. On en déduit le résultat grâce à la question précédente.

8. Par la relation de Chasles (on sait déjà que l'intégrale de gauche converge) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

On applique le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ à l'intégrale de droite :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 -\frac{u^{1-x}}{1+1/u}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{u+1}\,\mathrm{d}u$$

d'où le résultat.

9. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a déjà vu que $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge. On écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^{x-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k\,\mathrm{d}t \text{ car } |t| < 1 \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k+x-1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k} + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(toutes les intégrales convergent car on a toujours $k + x - 1 > -1$).

Pour tout $t \in]0;1[$, la suite $\left(t^{k+x-1}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le théorème des séries alternées, $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+x-1}| \leq t^{k+x-1}$ donc

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{k+x-1}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{n+x}\right| \mathrm{d}t \text{ par inégalité triangulaire}$$
$$\leq \int_0^1 t^{n+x}\,\mathrm{d}t \text{ par croissance de l'intégrale}$$
$$= \frac{1}{n+x+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$.

10. On applique la question précédente en remplaçant x par $1-x \in]0,1[$:

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-x}$$

On en déduit le résultat à l'aide des questions 8 et 9.

11. D'après les questions 7 et 10 :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$$
$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}$$

12. Soit $y \in]0,\pi[$. On applique la question précédente à $x = \frac{y}{\pi} \in]0,1[$:

$$\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\pi}{n^2\pi^2 - y^2}$$

d'où le résultat en multipliant par $\frac{\sin(y)}{\pi}$.

13. • Pour t au voisinage de 0^+,

$$\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2} = \frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^{2p+1}}{t^2} = \frac{\frac{2p+1}{2}t^2+o(t^2)}{t^2} = \frac{2p+1}{2} + o(1)$$

donc l'intégrale est faussement impropre en 0. De plus pour t au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positif et intégrable sur $[1;+\infty[$. On en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge.

• Par intégration par parties (formellement, la justification est ci-dessous) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\left(1-(\cos(t))^{2p+1}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(2p+1)\sin(t)(\cos(t))^{2p}\,\mathrm{d}t$$

Or $-\frac{1}{t}\left(1-(\cos(t))^{2p+1}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $-\frac{1}{t}\left(1-(\cos(t))^{2p+1}\right) = \frac{2p+1}{2}t + o_{t\to 0}(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui justifie que l'intégration par parties est licite et montre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}(\cos(t))^{2p}\,\mathrm{d}t$$

14. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = t - n\pi$:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u+n\pi))^{2p}\frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n(\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-1)^n(\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n(\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $t = -u$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-1)^n(\cos(u))^{2p}\frac{\sin(u)}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n(\cos(-t))^{2p}\frac{\sin(-t)}{-t+n\pi}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{-t+n\pi}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n(\cos(t))^{2p}\sin(t)\left(\frac{1}{n\pi+t} - \frac{1}{n\pi-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

15. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
f_n : \left[0;\frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbf{R} \\
t &\mapsto (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f_n est bien définie et continue. De plus pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{\pi}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{\pi}{n^2}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur son intervalle de définition. Par théorème, $\sum \int f_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t$$

D'après la question précédente et par la relation de Chasles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

ce qui permet de conclure.

16. D'après la question 12,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(1-\frac{\sin(t)}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(on a déjà vu que l'intégrale de droite converge à la question 13). On en déduit le résultat par la question 15 et le relation de Chasles.

17. Par les formules d'Euler, du binôme de Newton et de Moivre :

$$\begin{aligned}(\cos(t))^{2p} = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p} &= \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}e^{ikt}e^{-i(2p-k)t} = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}e^{2it(k-p)} \\ &= \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}e^{2it(k-p)}+\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}e^{2it(k-p)}\right)\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on effectue le changement de variable $j = 2p-k$:

$$\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}e^{2it(k-p)} = \sum_{j=0}^{p-1}\binom{2p}{2p-j}e^{2it(p-j)} = \sum_{j=0}^{p-1}\binom{2p}{j}e^{2it(p-j)}$$

ce qui permet de conclure.

18.
$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= (2p+1)\int_0^{+\infty}(\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t && \text{d'après la question 13} \\ &= (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^{2p}\,\mathrm{d}t && \text{d'après la question 16} \\ &= \frac{2p+1}{2^{2p}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\binom{2p}{p}+2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right)\mathrm{d}t && \text{d'après la question 17} \\ &= \frac{2p+1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2}+2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(p-k)t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(p-k)t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2(p-k)t)}{2(p-k)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. Du coup

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2p+1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

19. Déjà, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $E(X_k) = -1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2} = 0$ et $V(X_k) = E(X_k^2)-E(X_k)^2 = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = 0$. Comme de plus les $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ sont indépendantes, on a $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n$.

20. On a $\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T)-\sin(S)\sin(T)$. Comme S et T sont indépendantes, $\cos(S)$ et $\cos(T)$ le sont aussi, tout comme $\sin(S)$ et $\sin(T)$. On en déduit $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))-E(\sin(S))E(\sin(T))$.

De plus comme T et $-T$ suivent la même loi, il en est de même pour $\sin(T)$ et $\sin(-T)$ donc $E(\sin(T)) = E(\sin(-T)) = E(-\sin(T)) = -E(\sin(T))$ donc $E(\sin(T)) = 0$. On en déduit $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

21. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}$. On sait que les $(tX_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ sont indépendantes et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, tX_k et $-tX_k$ suivent la même loi. En appliquant une récurrence triviale à la question précédente, on en déduit

$$\begin{aligned} E(\cos(tS_n)) &= E\left(\cos\left(\sum_{k=1}^{n} tX_k\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} E(\cos(tX_k)) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(-t)\right) = (\cos(t))^n \end{aligned}$$

22. On fait une disjonction de cas :
    - si a et b sont positifs alors $|a+b| = a+b = |a| + \text{signe}(a)b$;
    - si a et b sont négatifs alors $|a+b| = -a-b = |a| + \text{signe}(a)b$;
    - si a est positif et b est négatif alors comme $|b| \le |a|$, $|a+b| = a+b = |a| + \text{signe}(a)b$;
    - si a est négatif et b est positif alors comme $|b| \le |a|$, $|a+b| = -a-b = |a| + \text{signe}(a)b$.

    Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a toujours $S_{2n-1} \neq 0$: une somme d'un nombre impair de -1 et de 1 ne fait jamais 0. De plus, $|X_{2n}| \le |S_{2n-1}|$ car $|X_{2n}| \in \{0,1\}$ et $|S_{2n-1}| \ge 1$. D'après ce qui précède, $|S_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})X_{2n}$. On en déduit par indépendance de S_{2n-1} et X_{2n} :

$$E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|) + E(\text{signe}(S_{2n-1}))E(|X_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|)$$

23. D'après la question 18 avec $p = 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

    Soit $s \in \mathbf{R}$. Si $s > 0$, on applique le changement de variable $t \leftarrow st$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{(st)^2} s\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}s = \frac{\pi}{2}\,|s|$$

    Le résultat reste valable quand $s < 0$ par parité de cos et il est trivialement vrai quand $s = 0$.

24. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après la question précédente,

$$|S_n| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(S_n t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

    donc par linéarité de l'espérance (il n'y a pas de problème car $|S_n|$ est à valeurs dans un ensemble fini) :

$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-E(\cos(S_n t))}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

    où la dernière égalité provient de la question 21.

25. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après les questions 24 et 18 avec $p = n-1$:

$$E(|S_{2n-1}|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2n-1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$

et la question 22 permet de conclure.