Topologie

Sommaire

Remarque 0.1:
- Prérequis : théorie des ensembles, ensembles usuels, quelques rudiments d'algèbre linéaire.
- J'ai écrit ceci à des moments très espacés dans le temps donc il y a sûrement des incohérences et des points manquants. Le niveau de rigueur n'est pas homogène, mais il est toujours relativement élevé. Par ailleurs je n'ai pas relu le document de façon systématique.
- Pour les exercices, les $\star$ symbolisent la difficulté de l'exercice (de $\star$ à $\star\star\star$) et ♥ signifie que j'aime bien l'exercice.
- Ces notes sont très largement inspirées de ces vidéos de Maths Adultes.

1. Espaces topologiques

1.1. Généralités

Définition 1.1.1: Soit E un ensemble. Une topologie $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ est un ensemble de parties de E vérifiant :
- $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$;
- pour toute famille $(O_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I, \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$;
- $\forall U, V \in \mathcal{T}, U \cap V \in \mathcal{T}$.

On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de E pour la topologie $\mathcal{T}$, et leurs complémentaires sont appelés les fermés de E pour la topologie $\mathcal{T}$.

Remarque 1.1.1: Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une réunion finie de deux fermés est un fermé.

Exemple 1.1.1:
- $\{\emptyset, E\}$ est une topologie sur E, dite topologie grossière.
- $\mathcal{P}(E)$ est une topologie sur E, dite topologie discrète.

- $\{O \in \mathcal{P}(E); E \setminus O \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$ est une topologie sur E, dite topologie cofinie.
- L'ensemble des réunions d'intervalles ouverts est une topologie sur $\mathbb{R}$, dite topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des réunions d'intervalles de la forme $]a, b[$, $[-\infty, b[$ et $]a, \infty]$ est une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$, dite topologie usuelle sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Désormais, $(E, \mathcal{T})$ désigne un espace topologique.

Définition 1.1.2: Soient $x \in E$ et $V \in \mathcal{P}(E)$. On dit que V est un voisinage de x ssi il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O$ et $O \subseteq V$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Remarque 1.1.2:
- Si $U \in \mathcal{V}(x)$ et $U \subseteq V$ alors $V \in \mathcal{V}(x)$.
- $\mathcal{V}(x)$ est stable par intersection finie.

Lemme 1.1.1: $O \in \mathcal{P}(E)$ est un ouvert ssi c'est un voisinage de tous ses points.

Définition 1.1.3: Soit E un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est plus fine que $\mathcal{T}$ ssi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$.

Exemple 1.1.2:
- La topologie grossière est la topologie sur E la moins fine.
- La topologie discrète est la topologie sur E la plus fine.
- La topologie cofinie de $\mathbb{R}$ est moins fine que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.4: Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $E = E_1 \times E_2$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des réunions de produits $O_1 \times O_2$ où $O_1 \in \mathcal{T}_1$ et $O_2 \in \mathcal{T}_2$. Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur E, appelée topologie produit de E.

Remarque 1.1.3: On généralise généralement cette définition au produit de n espaces topologiques.

Définition 1.1.5: On dit que $(E, \mathcal{T})$ est séparé ssi $\forall x, y \in E, x \neq y \Longrightarrow \exists U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(y), U \cap V = \emptyset$.

Exercice 1.1.1 (⋆): Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est séparé ssi $\Delta := \{(x, x); x \in E\}$ est un fermé de $E \times E$.

Solution:

$$\begin{aligned}
(E,\mathcal{T}) \text{ est séparé} &\iff \forall x = (x_1,x_2) \in E \setminus \Delta, \exists U \in \mathcal{V}(x_1), \exists V \in \mathcal{V}(x_2), U \cap V = \emptyset \\
&\iff \forall x \in E \setminus \Delta, \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T}, x \in O_1 \times O_2 \wedge O_1 \cap O_2 = \emptyset \\
&\iff \forall x \in E \setminus \Delta, \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T}, x \in O_1 \times O_2 \subseteq E \setminus \Delta \\
&\iff \forall x \in E \setminus \Delta, \exists O \text{ ouvert de } \ E \times E, x \in O \subseteq E \setminus \Delta \\
&\iff E \setminus \Delta \text{ est un voisinage de tous ses points} \\
&\iff E \setminus \Delta \text{ est ouvert} \\
&\iff \Delta \text{ est fermé}
\end{aligned}$$

Lemme 1.1.2: Si $(E,\mathcal{T})$ est séparé alors pour tout $x \in E$, $\{x\}$ est fermé.

Preuve: Si $|E| \leqslant 1$ c'est clair. Sinon, soit $y \in E \setminus \{x\}$, soit donc $V_y \in \mathcal{V}(y)$ tel que $x \notin V_y$. Soit $O_y \in \mathcal{T}$ tel que $y \in O_y \subseteq V$. On a $y \in O_y \subseteq E \setminus \{x\}$. Ainsi $E \setminus \{x\}$ est un voisinage de tous ses points, donc c'est un ouvert. ■

Remarque 1.1.4: Tous les singletons sont fermés ssi $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie cofinie de E.

Définition 1.1.6: Soit $x \in E$. Une base de voisinages de x est un ensemble $\mathcal{BV}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ de voisinages de x tels que $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists U \in \mathcal{BV}(x), U \subseteq V$.

Définition 1.1.7: On dit que E est localement truc ssi tout point possède une base de voisinages trucs (où truc $\in$ {fermé, compact, connexe, convexe, ...})

Définition 1.1.8: Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. Posons $\mathcal{T}_F = \{O \cap F; O \in \mathcal{T}\}$, alors $\mathcal{T}_F$ est une topologie sur F, appelée topologie induite par la topologie de E.

Exercice 1.1.2 ($\star\star$): Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique, $A, B \subseteq E$ et $C \subseteq A \cap B$. On suppose que C est un ouvert de A et de B (pour les topologies induites). Montrer que C est un ouvert de $A \cap B$ et de $A \cup B$ (pour les topologies induites).

Solution: On écrit $C = A \cap U = B \cap V$ où U et V sont des ouverts de E. Alors $C = C \cap C = (A \cap U) \cap (B \cap V) = (A \cap B) \cap (U \cap V)$. Or $U \cap V$ est un ouvert de E donc C est un ouvert de $A \cap B$.

De plus, $C \subseteq (A \cup B) \cap U$ et $C \subseteq (A \cup B) \cap V$ donc $C \subseteq (A \cup B) \cap U \cap V$. Réciproquement, $(A \cup B) \cap U \cap V = (A \cap U \cap V) \cup (B \cap U \cap V) \subseteq (A \cap U) \cup (B \cap V) = C \cup C = C$. Ainsi $C = (A \cup B) \cap (U \cap V)$. Or $U \cap V$ est un ouvert de E donc C est un ouvert de $A \cup B$.

Définition 1.1.9: Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. On dit que F est discret ssi $\mathcal{T}_F$ est la topologie discrète.

Remarque 1.1.5: F est discret ssi tous les singletons sont des ouverts de F.

Définition 1.1.10: Soient $A \subseteq E$ et $a \in E$. On dit que a est un point adhérent à A ssi $\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et est noté $\overline{A}$.

Remarque 1.1.6:
- $A \subseteq \overline{A}$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Théorème 1.1.1: Soit $A \subseteq E$. Alors A est fermé ssi $A = \overline{A}$.

Preuve: Supposons que A est fermé. On sait déjà que $A \subseteq \overline{A}$. Soit $x \in E \setminus A$. $E \setminus A$ est ouvert donc c'est un voisinage de x. De plus $(E \setminus A) \cap A = \emptyset$, donc $x \notin \overline{A}$. Ainsi $E \setminus A \subseteq E \setminus \overline{A}$ donc $\overline{A} \subseteq A$ puis $A = \overline{A}$. Réciproquement, supposons que $A = \overline{A}$. Soit $x \in E \setminus A$, alors $x \notin \overline{A}$ donc on dispose de $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \emptyset$. On a $V \subseteq E \setminus A$. Ainsi $E \setminus A$ est ouvert donc A est fermé. ■

Théorème 1.1.2: Soit $A \subseteq E$. Alors $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. En particulier, $\overline{A}$ est fermé.

Preuve: On sait déjà que $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$. Soit $x \in \overline{\overline{A}}$. Soit $W \in \mathcal{V}(x)$, soit donc V un ouvert tel que $x \in V \subseteq W$. On a $V \cap \overline{A} \neq \emptyset$, soit donc $y \in V \cap \overline{A}$. Comme V est un ouvert, c'est un voisinage de y, et $y \in \overline{A}$ donc $V \cap A \neq \emptyset$. Finalement $W \cap A \neq \emptyset$ et $x \in \overline{A}$. ■

Théorème 1.1.3: Soit $A \subseteq E$. Alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Preuve: On sait déjà que $\overline{A}$ est un fermé contenant A. Soit F un fermé contenant A, alors $\overline{A} \subseteq \overline{F} = F$. ■

Lemme 1.1.3: Soient $A, B \subseteq E$. Alors $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Preuve:
- On a $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$, donc $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ et $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$ puis $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
- De même, on a $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$, donc $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, puis $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.
- Réciproquement, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

■

Exercice 1.1.3 (⋆): Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq E$. Montrer que A est un ouvert de $\overline{A}$ ssi il existe un ouvert U de E et un fermé F de E tels que $A = U \cap F$.

Solution: Si A est un ouvert de $\overline{A}$ alors il existe un ouvert U de E tel que $A = \overline{A} \cap U$, donc $F = \overline{A}$ fonctionne.

Réciproquement, supposons qu'il existe un ouvert U de E et un fermé F de E tels que $A = U \cap F$. On a $A \subseteq F$ et F est fermé donc $\overline{A} \subseteq F$. Du coup $A = A \cap \overline{A} = U \cap F \cap \overline{A} = U \cap \overline{A}$. donc U est un ouvert de $\overline{A}$.

Définition 1.1.11: Soient $A \subseteq E$ et $x \in A$. On dit que x est un point isolé de A ssi $\exists O \in \mathcal{T}, O \cap A = \{x\}$.

Remarque 1.1.7:
- x est un point isolé de A ssi $\{x\}$ est un ouvert de A.
- A est discret ssi tous les points de A sont isolés.

Définition 1.1.12: Soient $A \subseteq E$ et $x \in E$. On dit que x est un point d'accumulation de A ssi $\forall V \in \mathcal{V}(x), (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Remarque 1.1.8: L'ensemble constitué des points d'accumulation de A et des points isolés de A est égal à $\overline{A}$.

Définition 1.1.13: Soient $A \subseteq E$ et $a \in E$. On dit que a est un point intérieur à A ssi $A \in \mathcal{V}(x)$. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et est noté $\mathring{A}$.

Remarque 1.1.9:
- $\mathring{A} \subseteq A$
- $A \subseteq B \Longrightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$
- A est ouvert ssi c'est un voisinage de tous ses points, ssi $\mathring{A} = A$.

Théorème 1.1.4: Soit $A \subseteq E$. Alors $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$.

Preuve: Soit $x \in \overline{E \setminus A}$, alors $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$. Or $A \cap (E \setminus A) = \emptyset$ donc A n'est pas un voisinage de x et $x \in E \setminus \mathring{A}$.

Réciproquement, soit $x \in E \setminus \mathring{A}$, alors A n'est pas un voisinage de x. Du coup $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \not\subseteq A$ i.e. $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$ i.e. $x \in \overline{E \setminus A}$. ■

Remarque 1.1.10: En remplaçant A par $E \setminus A$ dans la propriété précédente, on obtient $E \setminus \overline{A} = \overbrace{E \setminus A}^{\circ}$.

Théorème 1.1.5: Soit $A \subseteq E$. Alors :
- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A ;
- $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overbrace{A \cup B}^{\circ}$

Preuve: Utiliser le théorème précédent. ■

Exercice 1.1.4 (⋆ ⋆): Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.
1) Soient A et B deux parties disjointes de E telles que $\overline{A} = \overline{B} = E$. Montrer que $\mathring{A} = \mathring{B} = \emptyset$.
2) Soient U et V deux ouverts disjoints de E. Montrer que U et $\overline{V}$ sont disjoints. En déduire que $\mathring{\overline{A}}$ et $\mathring{\overline{B}}$ sont disjoints.

Solution:
1) On a $B \subseteq E \setminus A$, donc $\mathring{B} \subseteq \overbrace{E \setminus A}^{\circ} = E \setminus \overline{A} = E \setminus E = \emptyset$. Ainsi $\mathring{B} = \emptyset$ et symétriquement, $\mathring{A} = \emptyset$.
2) U est un ouvert inclus dans $E \setminus V$ donc $U \subseteq \overbrace{E \setminus V}^{\circ} = E \setminus \overline{V}$. Ainsi $U \cap \overline{V} = \emptyset$.

   On en déduit $U \cap \mathring{\overline{V}} = \emptyset$. Ainsi U et $\mathring{\overline{V}}$ sont deux ouverts disjoints, donc $\overline{U}$ et $\mathring{\overline{V}}$ sont disjoints, et donc $\mathring{\overline{U}}$ et $\mathring{\overline{V}}$ sont disjoints.

Exercice 1.1.5 (⋆ ⋆ ♥):
1) Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq E$. Montrer que $\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ et $\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.
2) Déterminer une partie A de $\mathbb{R}$ tels que les ensembles $A, \mathring{A}, \overline{A}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ soient deux à deux distincts.

Solution:
1)
- Déjà, $\mathring{\overline{A}} \subseteq \overline{\mathring{\overline{A}}}$ donc $\mathring{\overline{A}} = \mathring{\mathring{\overline{A}}} \subseteq \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$. Réciproquement, $\mathring{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$ donc $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$, et donc $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subseteq \mathring{\overline{A}}$. Ainsi $\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$. La deuxième égalité s'obtient simplement en remplaçant A par $E \setminus A$ dans la première égalité.

1) $A = [0, 1[\cup]1, 2[\cup (]3, 4[\cap \mathbb{Q}) \cup \{5\}$ fonctionne.

Exercice 1.1.6 (⋆ ⋆ ⋆): Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.
1) Soient $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
2) Déterminer deux ouverts A et B de $\mathbb{R}$ tels que les ensembles $A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A \cap B}, \overline{A} \cap \overline{B}$ soient deux à deux distincts.
3) Soit $U \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que U est ouvert ssi $\forall B \in \mathcal{P}(E), \overline{U \cap B} = \overline{U \cap \overline{B}}$.

Solution:

1) Soient $x \in A \cap \overline{B}$ et $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors $A \cap V \in \mathcal{V}(x)$ car A est ouvert (en effet si O est un ouvert tel que $x \in O \subseteq V$ alors $x \in A \cap O \subseteq A \cap V$). Du coup $A \cap V \cap B \neq \emptyset$. Ainsi $x \in \overline{A \cap B}$. On a montré que $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
2) $A =]0,2[$ et $B =]-1,0[\cup]1,3[$ fonctionnent.
3) Supposons que U est ouvert. Soit $B \subseteq E$. On sait déjà que $U \cap \overline{B} \subseteq \overline{U \cap B}$, donc $\overline{U \cap \overline{B}} \subseteq \overline{U \cap B}$. De plus, $U \cap B \subseteq U \cap \overline{B}$ donc $\overline{U \cap B} \subseteq \overline{U \cap \overline{B}}$. Ainsi $\forall B \in \mathcal{P}(E), \overline{U \cap B} = \overline{U \cap \overline{B}}$.

   Réciproquement, supposons que $\forall B \in \mathcal{P}(E), \overline{U \cap B} = \overline{U \cap \overline{B}}$. En particulier pour $B = E \setminus U$, on obtient $\emptyset = \overline{U \cap B} = \overline{U \cap \overline{B}} = \overline{U \setminus \mathring{U}}$, donc $U \setminus \mathring{U} = \emptyset$, donc $\mathring{U} = U$ et finalement U est ouvert.

Définition 1.1.14: Soit $A \subseteq E$. On appelle frontière de A et on note $\mathrm{Fr}(A)$ l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Remarque 1.1.11:
- $\mathrm{Fr}\ A = \emptyset$ ssi A est ouvert et fermé.
- $\mathrm{Fr}\ A = A$ ssi A est fermé d'intérieur vide.

Exercice 1.1.7 (⋆): Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq E$.
1) Montrer que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \setminus A)$.
2) Montrer que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$.

Solution:
1) $\mathrm{Fr}(E \setminus A) = \overline{E \setminus A} \setminus \overbrace{E \setminus A}^{\circ} = \left(E \setminus \mathring{A}\right) \setminus \left(E \setminus \overline{A}\right) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathrm{Fr}(A)$
2) $\overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap \left(E \setminus \mathring{A}\right) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathrm{Fr}(A)$

   Remarque : en particulier, $\mathrm{Fr}(A)$ *est fermée.*

Définition 1.1.15: Soit $D \subseteq E$. On dit que D est dense dans E ssi $\overline{D} = E$.

Lemme 1.1.4: Soit $D \subseteq E$. Alors D est dense dans E ssi $\forall O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, D \cap O \neq \emptyset$.

Preuve: Supposons que D est dense dans E. Soit $O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, soit donc $x \in O$. Alors $O \in \mathcal{V}(x)$, donc $x \in O \cap D$ et $O \cap D \neq \emptyset$.

Réciproquement, supposons que $\forall O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, D \cap O \neq \emptyset$. Soient $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}(x)$. Soit donc $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subseteq V$. Alors $D \cap O \neq \emptyset$ donc $V \cap D \neq \emptyset$. Ainsi $\overline{D} = E$. ■

Exercice 1.1.8 (⋆): Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et U et V deux parties denses dans E. On suppose que U est ouvert. Monter que $U \cap V$ est dense dans E.

Solution : Soit $O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, alors $U \cap O \neq \emptyset$ car U est dense dans E. De plus $U \cap O$ est ouvert donc $V \cap U \cap O \neq \emptyset$ car V est dense dans E. Ainsi $\forall O \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}, (U \cap V) \cap O \neq \emptyset$ donc $U \cap V$ est dense dans E.

Exercice 1.1.9 (⋆ ⋆): Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq B$ deux parties de E.
1) Montrer que A est dense dans B (pour la topologie induite) ssi $B \subseteq \overline{A}$.
2) Montrer que si A est dense dans B et B est dense dans E alors A est dense dans E.

Solution :
1)
$$\begin{aligned} A \text{ est dense dans } B &\Longleftrightarrow \forall O \in \mathcal{T}_B \setminus \{\emptyset\}, A \cap O \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \forall O \in \mathcal{T}, B \cap O \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap B \cap O \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \forall O \in \mathcal{T}, B \cap O \neq \emptyset \Longrightarrow A \cap O \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in B, \forall V \in \mathcal{V}(x), A \cap V \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in B, x \in \overline{A} \\ &\Longleftrightarrow B \subseteq \overline{A} \end{aligned}$$
2) Si A est dense dans B et B est dense dans E alors $B \subseteq \overline{A}$ et $\overline{B} = E$, donc $E = \overline{B} \subseteq \overline{A}$ et A est dense dans E.

Remarque 1.1.12: D est dense dans E ssi D intersecte tous les éléments d'une base de voisinages de chaque point de E.

1.2. Limites et continuité

Ici, $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ désignent deux espaces topologiques et $f : E \to F$ est une fonction (donc non nécessairement définie sur E tout entier).

Définition 1.2.1 : Soient $a \in E$ et $l \in F$. On suppose que f est définie sur un voisinage de a. On dit que f tend vers l quand x tend vers a et on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ ssi $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U) \subseteq V$.

Remarque 1.2.1: Soit $A \subseteq F$ telle que $f(E) \subseteq A$. Alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ pour les topologies $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ ssi $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ pour les topologies $(E, \mathcal{T})$ et $(A, \mathcal{U}_A)$.

Lemme 1.2.1 : On suppose que f est définie sur E tout entier. Soient $a \in E$ et $l \in F$. Alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.

Preuve: Supposons que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, soit donc $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subseteq V$. Alors $U \subseteq f^{-1}(V)$ donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.

Réciproquement, supposons que $\forall V \in \mathcal{V}(l), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, alors $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, donc $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. ∎

Définition 1.2.2: Soient $a \in E$ et $l \in F$. On suppose que f est définie sur une partie $A \subseteq E$ telle que $a \in \overline{A}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers a en restant dans A et on note $f(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} l$ ssi $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap A) \subseteq V$.

Remarque 1.2.2: Avec les mêmes notations, si $\mathcal{BV}(l)$ est une base de voisinages de l et $\mathcal{BV}(a)$ est une base de voisinages de a alors $f(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} l$ ssi $\forall V \in \mathcal{BV}(l), \exists U \in \mathcal{BV}(a), f(U \cap A) \subseteq V$.

Théorème 1.2.1: Soient $a \in E$ et $l, k \in F$. On suppose que f est définie sur une partie $A \subseteq E$ telle que $a \in \overline{A}$. Si $(F, \mathcal{U})$ est séparé et que $f(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} k$ alors $l = k$.

Preuve: Supposons par l'absurde que $l \neq k$. Comme $(F, \mathcal{U})$ est séparé, on dispose de $V \in \mathcal{V}(l)$ et $W \in \mathcal{V}(k)$ tels que $V \cap W = \emptyset$. Soient $U, U' \in \mathcal{V}(a)$ tels que $f(U \cap A) \subseteq V$ et $f(U' \cap A) \subseteq W$. Donc $f(U \cap U' \cap A) = \emptyset$. Mais $U \cap U' \cap A \neq \emptyset$ puisque $U \cap U' \in \mathcal{V}(a)$ et $a \in \overline{A}$: absurde. ■

Remarque 1.2.3: Si $(F, \mathcal{U})$ est séparé, on peut donc noter $l = \lim_{x \to a, x \in A} f(x)$

Lemme 1.2.2: On suppose que $(F, \mathcal{U})$ est séparé. Soient $a \in E$ et $l \in F$. On suppose que f est définie sur une partie $A \subseteq E$ telle que $a \in A$. Si $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ existe alors $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a)$.

Preuve: Supposons que $l := \lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ existe. Alors pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$, $f(a) \in V$. Comme $(F, \mathcal{U})$ est séparé, $f(a) = l$. ■

Théorème 1.2.2: Soient $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{U})$ et $(G, \mathcal{S})$ trois espaces topologiques, $f : E - F$ et $g : F \to G$ deux fonctions, $a \in E$, $b \in F$ $l \in G$, A une partie de E telle que $a \in \overline{A}$ et B une partie de E. On suppose que $f(A) \subseteq B$, $f(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} b$ (ce qui implique $b \in \overline{B}$) et $g(y) \underset{y \to b, y \in B}{\longrightarrow} l$. Alors $g \circ f(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} l$.

Preuve: Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, soit donc $U \in \mathcal{V}(b)$ tel que $g(U \cap B) \subseteq V$. Soit $U' \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U' \cap A) \subseteq U$. Alors $f(U' \cap A) \subseteq U \cap B$, donc $g \circ f(U' \cap A) \subseteq V$, CQFD. ■

Définition 1.2.3: On dit qu'une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$ ssi elle converge vers l en tant que fonction ayant comme ensemble de départ $\overline{\mathbb{N}}$ muni de la topologie induite.

Remarque 1.2.4: Autrement dit, u converge vers l ssi $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow u_n \in V$.

Exemple 1.2.1:
- Si $\mathcal{T}$ est la topologie grossière, toute suite converge vers n'importe quelle limite.
- Si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète, alors une suite converge ssi elle est constante APCR.

Remarque 1.2.5: Si $\mathcal{T}$ est moins fine que $\mathcal{U}$ et $u \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$ pour la topologie $\mathcal{U}$, alors u converge vers l pour la topologie $\mathcal{T}$.

Lemme 1.2.3: Soient $(E_1, \mathcal{T}_1), ..., (E_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces topologiques et $E = E_1 \times E_n$ muni de la topologie produit. Soient $X \in E^{\mathbb{N}}$ et $l = (l_1, ..., l_n) \in E$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $X_k = (x_{1,k}, ..., x_{n,k})$. Alors X converge vers l ssi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(x_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l_i.

Preuve:
- Supposons que X converge vers l. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $V_i \in \mathcal{V}(l_i)$. Alors $V = E_1 \times ... \times E_{i-1} \times V_i \times E_{i+1} \times ... \times E_n$ est un voisinage de l. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant N, X_k \in V$. Alors $\forall k \geqslant N, x_{i,k} \in V_i$. Ainsi $(x_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l_i.
- Réciproquement, supposons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(x_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l_i. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, soient donc $(O_1, ..., O_n) \in \mathcal{T}_1 \times ... \times \mathcal{T}_n$ tels que $l \in O_1 \times ... \times O_n \subseteq V$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $N_i \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant N_i, x_{i,k} \in O_i$. Alors $\forall k \geqslant \max(N_1, ..., N_n), X_k \in V$. Ainsi X converge vers l.

■

Remarque 1.2.6: On peut généraliser la notion de topologie produit à des produits infinis d'ensembles. La convergence associée à la topologie produit est la convergence simple.

Lemme 1.2.4: Soient $A \subseteq E$ et $u \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $x \in E$. Alors $x \in \overline{A}$.

Preuve: Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, soit donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in V$. Alors $u_n \in V \cap A$ donc $V \cap A \neq \emptyset$. ■

Définition 1.2.4: Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$. On dit que a est une valeur d'adhérence de u ssi $\forall V \in \mathcal{V}(a), \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant k, u_n \in V$.

Lemme 1.2.5: L'ensemble des valeurs d'adhérence de u est $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n ; n \geqslant k\}}$. En particulier, c'est un fermé.

Définition 1.2.5: Soit $f : E \to F$ une application et $x_0 \in E$.
- On dit que f est continue en x_0 ssi $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$.
- On dit que f est continue ssi pour tout $x_0 \in E$, f est continue en x_0.

Remarque 1.2.7:
- Si $f : E \to F$ est une fonction définie sur $U \in \mathcal{V}(x_0)$, on dit que f est continue en x_0 ssi $f|_U$ est continue en x_0.
- Si $(F, \mathcal{U})$ est séparé alors f est continue en x_0 ssi $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, ssi $\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x) = f(x_0)$.

Théorème 1.2.3: Soit $f : E \to F$ une application. Alors f est continue ssi $\forall V \in \mathcal{U}, f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Preuve: Supposons que f est continue. Soit $O \in \mathcal{U}$, notons $U = f^{-1}(O)$. Su $U = \emptyset$ alors U est ouvert. Sinon, soit $x_0 \in U$. On a $f(x_0) \in O$ donc O est un voisinage de $f(x_0)$. Comme f est continue en x_0, $U = f^{-1}(O)$ est un voisinage de x_0. Ainsi U est un voisinage de tous ses points donc c'est un ouvert.

Réciproquement, supposons que $\forall V \in \mathcal{U}, f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Soient $x_0 \in E$ et V un voisinage de $f(x_0)$. Soit donc $O \subseteq V$ un ouvert qui contient $f(x_0)$. Alors $U := f^{-1}(O)$ est un ouvert qui contient x_0. De plus $f^{-1}(O) \subseteq f^{-1}(V)$ donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0. ■

Remarque 1.2.8:
- f est continue ssi l'image réciproque de tout fermé est un fermé (utiliser $f^{-1}(F \setminus O) = E \setminus f^{-1}(O)$).
- Si $f : (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathcal{U})$ est continue, $\mathcal{T}'$ est une topologie sur E plus fine que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}'$ est une topologie sur F moins fine que $\mathcal{U}$ alors $f : (E, \mathcal{T}') \to (F, \mathcal{U}')$ est continue.
- Si E est discret alors toute application $f : E \to F$ est continue. Si E est muni de la topologie grossière alors les applications continues sont les applications constantes.

Définition 1.2.6: Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est ouverte (resp. fermée) ssi l'image de tout ouvert (resp. fermé) de E est un ouvert (resp. fermé) de F.

Exemple 1.2.2: La partie entière définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ est ouverte et fermée mais pas continue.

Remarque 1.2.9: Si f est bijective alors f est ouverte ssi f^{-1} est continue.

Exercice 1.2.1 (⋆): Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq E$.
1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathbb{1}_A$ soit continue.
2) Soit $x \in E$. Montrer que $\mathbb{1}_A$ est continue en x ssi $x \notin \mathrm{Fr}(A)$.

Solution:
1) $\mathbb{1}_A$ est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert de $\{0, 1\}$ est un ouvert de E, ssi $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T}$ et $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}$, ssi $E \setminus A \in \mathcal{T}$ et $A \in \mathcal{T}$, ssi A est ouvert et fermé.
2) Premier cas : $x \in A$. Alors $f(x) = 1$ et $\mathcal{V}(f(x)) = \{\{1\}, \{0, 1\}\}$. Donc f est continue en x ssi $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{V}(x)$ et $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0, 1\}) \in \mathcal{V}(x)$, ssi $A \in \mathcal{V}(x)$, ssi $x \in \mathring{A}$, ssi $x \notin \mathrm{Fr}(A)$.

   Deuxième cas : $x \notin A$. Alors $f(x) = 0$ et $\mathcal{V}(f(x)) = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$. Donc f est continue en x ssi $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{V}(x)$ et $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0, 1\}) \in \mathcal{V}(x)$, ssi $E \setminus A \in \mathcal{V}(x)$, ssi $x \in \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$, ssi $x \notin \mathrm{Fr}(A)$.

Exercice 1.2.2 (⋆): Soit E un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$. On considère l'application identité id de $(E, \mathcal{T})$ vers $(E, \mathcal{U})$.
1) À quelle condition id est-elle continue ?
2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur id pour que $\mathcal{T} = \mathcal{U}$.
3) Soit $A \subseteq E$ une partie muni d'une topologie $\mathcal{A}$ et $i : (A, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{T})$ l'injection canonique. À quelle condition i est-elle continue ?

Solution:

1) $$\begin{aligned} \text{id est continue} &\iff \forall V \in \mathcal{U}, \mathrm{id}^{-1}(V) \in \mathcal{T} \\ &\iff \forall V \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{T} \\ &\iff \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \\ &\iff \mathcal{T} \text{ est plus fine que } \mathcal{U} \end{aligned}$$

2) On a $\mathcal{T} = \mathcal{U}$ ssi $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ et $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$, ssi id est continue et id^{-1} est continue, ssi id est un homéomorphisme.

3) $$\begin{aligned} i \text{ est continue} &\iff \forall U \in \mathcal{T}, i^{-1}(U) \in \mathcal{A} \\ &\iff \forall U \in \mathcal{T}, U \cap A \in \mathcal{A} \\ &\iff \mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{A} \\ &\iff \mathcal{A} \text{ est plus fine que } \mathcal{T}_A \end{aligned}$$

Exercice 1.2.3 ($\star$): Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $A = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \geqslant 0\}$.

1) Montrer que A est ouvert et que B est fermé.
2) Comparer au sens de l'inclusion A et $\mathring{B}$. Ces deux ensembles sont-ils égaux en général ?
3) Même question pour $\overline{A}$ et B.

Solution:

1) $A = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, or $\mathbb{R}_+^*$ est ouvert et f est continue donc A est ouvert. $B = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, or $\mathbb{R}_+$ est fermé et f est continue donc A est fermé.
2) On a $A \subseteq B$ donc $A = \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$. L'inclusion est stricte si f est la fonction nulle.
3) On a $A \subseteq B$ donc $\overline{A} \subseteq \overline{B} = B$. L'inclusion est stricte si f est la fonction nulle.

Théorème 1.2.4: Soient $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{U})$ et $(G, \mathcal{S})$ trois espaces topologiques et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux application continues. Alors $g \circ f : E \to G$ est continue.

Preuve: Soit $O \in \mathcal{S}$, alors $g^{-1}(O) \in \mathcal{U}$, et $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$. ■

Remarque 1.2.10: Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Lemme 1.2.6: Soient $f : E \to F$ une application continue et $A \subseteq E$. On munit A de la topologie induite par $\mathcal{T}$. Alors $f|_A : A \to F$ est continue.

Preuve: Soit $O \in \mathcal{U}$, alors $f|_A^{-1}(O) = A \cap f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_A$. ■

Lemme 1.2.7: Soit $f : E \to F$ une application. Alors f est continue pour les espaces $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ ssi elle est continue pour les espaces $(E, \mathcal{T})$ et $\left(f(E), \mathcal{U}_{f(E)}\right)$.

Preuve: Trivial car $f^{-1}(O) = f^{-1}(O \cap f(E))$. ■

Lemme 1.2.8: Soient $(E_1, \mathcal{T}_1), ..., (E_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces topologiques et $E = E_1 \times ... \times E_n$ muni de la topologie produit $\mathcal{T}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors la i-ième projection $\pi_i : (E, \mathcal{T}) \to (E_i, \mathcal{T}_i)$ est continue.

Preuve: Soit $O \in \mathcal{T}_i$, alors $\pi_i^{-1}(O) = E_1 \times ... \times E_{i-1} \times O \times E_{i+1} \times ... \times E_n \in \mathcal{T}$. ■

Théorème 1.2.5 : Soient $(E_1, \mathcal{T}_1), ..., (E_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces topologiques et $E = E_1 \times ... \times E_n$ muni de la topologie produit $\mathcal{T}$. Soient $(X, \mathcal{U})$ un espace topologique, $a \in X$ et $f : X \to E$ une application. Pour tout $x \in E$, on note $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. Alors f est continue en a ssi $\forall i \in [\![1, n]\!], f_i : X \to E_i$ est continue en a.

Preuve: Le sens direct est clair car $f_i = \pi_i \circ f$. Réciproquement, supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!], f_i : X \to E_i$ est continue. Soit $V \in \mathcal{V}(f(a))$, soit donc $(O_1, ..., O_n) \in \mathcal{T}_1 \times ... \times \mathcal{T}_n$ tel que $f(a) \in O_1 \times ... \times O_n \subseteq V$. Alors $f^{-1}(V)$ contient l'ouvert $f^{-1}(O_1 \times ... \times O_n) = f_1^{-1}(O_1) \cap ... \cap f_n^{-1}(O_n)$ qui contient a, donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. Ainsi f est continue en a. ∎

Exercice 1.2.4 (⋆ ⋆ ♥):
1) Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ deux espaces topologiques, $f : E \to F$ une application continue et D une partie dense de E. Montrer que $f(D)$ est dense dans $f(E)$.
2) En déduire que $\{\cos(n); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Solution :
1) Il s'agit de montrer que $f(E) \subseteq \overline{f(D)}$. Soit $y \in f(E)$, soit donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Soit $V \in \mathcal{V}(y)$, soit donc $O \in \mathcal{U}$ tel que $y \in O \subseteq V$. Comme f est continue, $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$. De plus $x \in f^{-1}(O)$ donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}(x)$. Comme D est dense dans E, on dispose de $z \in D \cap f^{-1}(O)$. Alors $f(z) \in f(D) \cap O$ donc $f(D) \cap V \neq \emptyset$.
2) On applique le résultat précédent avec $E = F = \mathbb{R}$, $D = \{n + 2k\pi; n, k \in \mathbb{Z}\}$ et $f = \cos$. D est dense dans $\mathbb{R}$ car c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$.

Définition 1.2.7 : Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application. On dit que f est un homéomorphisme ssi f est continue, bijective et f^{-1} est continue.

Dans ce cas, on dit que $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ sont homéomorphes.

Lemme 1.2.9 : Avec les mêmes notations, si f est un homéomorphisme alors pour tout $A \subseteq E$, $g : \begin{cases} A \to f(A) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est un homéomorphisme.

Exemple 1.2.3: Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont deux à deux homéomorphes, et les intervalles fermés sont deux à deux homéomorphes.

Lemme 1.2.10 : La relation d'homéomorphisme est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 1.2.5 (⋆): Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ deux espaces topologiques et $f : E \to F$ un homéomorphisme. Soit $A \subseteq E$.
1) Montrer que $\overset{\circ}{\overbrace{f(A)}} = f\left(\mathring{A}\right)$.
2) Montrer que $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right)$.

Solution :

1) $f\left(\mathring{A}\right)$ est un ouvert inclus dans $f(A)$ donc $f\left(\mathring{A}\right) \subseteq \overbrace{f(A)}^{\circ}$. Le même raisonnement montre que $f^{-1}\left(\overbrace{f(A)}^{\circ}\right) \subseteq \overbrace{f^{-1}(f(A))}^{\circ} = \mathring{A}$ (où $f^{-1}(X)$ désigne l'image directe de C par f^{-1} et non l'image réc100iproque de X par f). On en déduit $\overbrace{f(A)}^{\circ} \subseteq f\left(\mathring{A}\right)$.
2) Comme f est bijective, on a pour tout $X \subseteq E$, $f(E \setminus X) = F \setminus f(X)$. D'après la question précédente, on a $\overbrace{f(E \setminus A)}^{\circ} = f\left(\overbrace{E \setminus A}^{\circ}\right)$, i.e. $E \setminus \overline{f(A)} = E \setminus f\left(\overline{A}\right)$. Ainsi $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right)$.

1.3. Connexité et compacité

Définition 1.3.1: On dit que E est connexe ssi $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T}, (O_1 \cup O_2 = E \land O_1 \cap O_2 = \emptyset) \Longrightarrow (O_1 = \emptyset \lor O_2 = \emptyset)$.

Lemme 1.3.1: Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) E est connexe ;
2) les seules parties de E ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E ;
3) toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante.

Preuve:
- Supposons que E est connexe. Soit $U \subseteq E$ une partie ouverte et fermée. Alors $U \cup (E \setminus U) = E$ avec $U, E \setminus U \in \mathcal{T}$, donc $U = \emptyset$ ou $U = E \setminus U$, i.e. $U = \emptyset$ ou $U = E$.
- Supposons que les seules parties de E ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E. Soient O_1 et O_2 deux ouverts disjoints tels que $O_1 \cup O_2 = E$, alors O_1 est ouvert ou fermé, donc $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.
- Supposons que E est connexe. Soit $f : E \to \{0, 1\}$ une application continue. Alors $O_1 = f^{-1}(\{0\})$ et $O_2 = f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts disjoints de réunion E, donc l'un des deux est vide, i.e. f est constante.
- Supposons que toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante. Soient O_1 et O_2 deux ouverts disjoints de réunion E. Alors $\mathbb{1}_{O_1}$ est continue, donc constante, et donc $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.

■

Définition 1.3.2: Soit $F \subseteq E$. On dit que F est une partie connexe de E ssi $(F, \mathcal{T}_F)$ est connexe.

Remarque 1.3.1:
- F est non connexe ssi il existe deux ouverts U et V de E disjoints, rencontrant F, et tels que $F \subseteq U \cup V$.
- La connexité est intrinsèque : si $A \subseteq F \subseteq E$ alors A une partie connexe de E ssi A est une partie connexe de F.

Exemple 1.3.1: Si $(E, \mathcal{T})$ est séparé et que A est une partie connexe de E possédant un point isolé x alors A est un singleton. En effet, $\{x\}$ est ouvert et fermé.

Théorème 1.3.1: Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Preuve:
- Si $F \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, on dispose de $a, b \in F$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $x \notin F$. Alors $]-\infty, x[$ et $]x, \infty[$ sont deux ouverts disjoints qui rencontrent F et dont la réunion contient F, donc F n'est pas connexe.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient O_1 et O_2 deux ouverts non vides disjoints de I. Soient $a \in O_1$ et $b \in O_2$. On suppose sans perte de généralité $a < b$. Soient $x = \sup O_1 \cap]-\infty, b[$. Alors $a \leqslant x \leqslant b$ donc $x \in I$. Si $x \in O_2$ alors $\exists r > 0,]x-r, x[\subseteq O_2$ puis $\exists y \in O_1, x - r \leqslant y \leqslant x$ et on a alors $y \in O_1 \cap O_2$: absurde. Ainsi $x \notin O_2$. Si $x \in O_1$ alors $\exists r > 0,]x, x+r[\subseteq O_1 \cap]-\infty, b[$ ce qui est absurde. Ainsi $x \notin O_1$. Ceci montre que I est connexe.

■

Théorème 1.3.2: Soient A et B deux parties connexes de E telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Alors $A \cup B$ est connexe.

Preuve: Soit $f : A \cup B \to \{0,1\}$ une fonction continue, alors $f|_A$ et $f|_B$ sont constantes. Si $x \in A \cap B$ alors $f|_A(x) = f|_B(x)$, donc f est constante. ■

Remarque 1.3.2: Plus généralement, si $(A_j)_{j \in J}$ est une famille de parties connexes de E telle que $\exists k \in J, \forall j \in J, A_k \cap A_j \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{j \in J} A_j$ est connexe.

Théorème 1.3.3: Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ deux espaces topologiques, $f : E \to F$ une application continue et $A \subseteq E$ une partie connexe. Alors $f(A)$ est connexe.

Preuve: Soit $\varphi : f(A) \to \{0,1\}$ une application continue. Alors $\varphi \circ f$ est continue, donc constante, et donc φ est constante. ■

Théorème 1.3.4: Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ deux espaces topologiques connexes. Alors $E \times F$ muni de la topologie produit est connexe.

Preuve: $E \times F = \bigcup_{(x,y) \in E \times F} Z_{x,y}$ où $Z_{x,y} = (\{x\} \times F) \cup (E \times \{y\})$. Or $\{x\} \times F$ est connexe car homéomorphe à F et de même, $E \times \{y\}$ est connexe. De plus $(\{x\} \times F) \cap (E \times \{y\}) \neq \emptyset$, donc $Z_{x,y}$ est connexe. Enfin, les $Z_{x,y}$ se rencontrent deux à deux donc $E \times F = \bigcup_{(x,y) \in E \times F} Z_{x,y}$ est connexe. ■

Exercice 1.3.1 (⋆ ♥): Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés de l'équateur qui ont la même température. (On suppose que la température est continue.)

Solution: Soit E l'équateur, qui est connexe. Soit $f : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto T(x) - T(\mathrm{op}(x)) \end{cases}$ où T est la température et $\mathrm{op}(x)$ est le point diamétralement opposé à x. T et op sont continues, donc f aussi. Du coup $f(E)$ est connexe, c'est donc un intervalle. Soit $x_0 \in E$, alors $f(x_0) = -f(\mathrm{op}(x_0))$. Ainsi $f(E)$ contient une valeur positive et une valeur négative, donc contient 0, CQFD.

Exercice 1.3.2 (Passage des douanes $\star$): Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subseteq E$.

1) Soit C une partie connexe de E telle que $C \cap \mathring{A} \neq \emptyset$ et $C \cap \overbrace{E \setminus A}^{\circ} \neq \emptyset$. Montrer que $C \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.
2) En déduire que si $p : [0, 1] \to E$ est une application continue telle que $p(0) \in \mathring{A}$ et $p(1) \in \overbrace{E \setminus A}^{\circ}$ alors $\exists t \in [0, 1], p(t) \in \mathrm{Fr}(A)$.

Solution:
1) $\mathring{A}$ et $\overbrace{E \setminus A}^{\circ}$ sont deux ouverts disjoints rencontrant C. Comme C est connexe, $C \not\subseteq \mathring{A} \cup \overbrace{E \setminus A}^{\circ}$ donc $C \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.
2) $C = p([0, 1])$ vérifie les hypothèses de la questions précédente, d'où le résultat.

Définition 1.3.3: Soient $A \subseteq E$ et $x \in A$. On appelle composante connexe de A qui contient x et on note $C(x)$ la réunion de toutes les parties connexes de A qui contiennent x.

Remarque 1.3.3:
- $C(x)$ est le plus grand connexe de A qui contient x.
- L'adhérence dans A de $C(x)$ est connexe et contient $C(x)$, donc est égale à $C(x)$. Les composantes connexes de A sont donc fermées dans A.

Lemme 1.3.2: Soit $A \subseteq E$. On définit sur $A \times A$ une relation $\sim$ par $x \sim y$ ssi il existe un connexe de A qui contient x et y. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence et pour tout $x \in A$, la classe d'équivalence de x est $C(x)$.

Remarque 1.3.4: En particulier, les composantes connexes de A forment une partition de A.

Théorème 1.3.5: Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(F, \mathcal{U})$ deux espaces topologiques et $f : E \to F$ un homéomorphisme. Alors l'application $f_d : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F) \\ A \mapsto f(A) \end{cases}$ réalise une bijection entre les composantes connexes de E et les composantes connexes de F.

Preuve: Soit $x \in E$, montrons que $f(C(x)) = C(f(x))$. Déjà, $f(C(x))$ est un connexe qui contient $f(x)$, donc $f(C(x)) \subseteq C(f(x))$. De plus, $f^{-1}(C(f(x)))$ est un connexe qui contient x, donc $f^{-1}(C(f(x))) \subseteq C(x)$ puis $C(f(x)) \subseteq f(C(x))$. Ainsi f_d induit une application de l'ensemble des composantes connexes de E vers l'ensemble des composantes connexes de F, et on vérifie facilement que c'est une bijection. ∎

Exemple 1.3.2:

- $[0,1]$ et $[0,1[$ ne sont pas homéomorphes. En effet, supposons que l'on dispose d'un homéomorphisme $\varphi : [0,1] \to [0,1[$. Alors la restriction $\varphi :]0,1] \to [0,1[\setminus \{\varphi(0)\}$ est un homéomorphisme, donc $[0,1[$ est connexe et $\varphi(0) = 0$. De même, $\varphi(1) = 0$, ce qui est absurde.
- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. En effet, supposons que l'on dispose d'un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors la restriction $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{\varphi(0)\}$ est un homéomorphisme. Or $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe donc $\mathbb{R} \setminus \{\varphi(0)\}$ aussi : absurde.

Définition 1.3.4: Soient $x, y \in E$. On appelle chemin de x à y toute application $p : [0,1] \to E$ continue avec $p(0) = x$ et $p(1) = y$.

Définition 1.3.5: Soit $A \subseteq E$. On dit que A est connexe par arcs ssi pour tous $x, y \in A$, il existe un chemin à valeurs dans A reliant x et y.

Théorème 1.3.6: Soit $A \subseteq E$ une partie connexe par arcs. Alors A est connexe.

Preuve: Soit $f : A \to \{0,1\}$ une fonction continue. Soient $x, y \in A$, soit donc $p : [0,1] \to A$ une application continue telle que $p(0) = x$ et $p(1) = y$. Alors $f \circ p : [0,1] \to \{0,1\}$ est continue, or $[0,1]$ est connexe donc $f \circ p$ est constant. En particulier $f(x) = f(p(0)) = f(p(1)) = f(y)$. Ainsi f est constante, donc A est connexe. ∎

Lemme 1.3.3: Soient $A, B \subseteq E$ tels que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Si A est connexe alors B est connexe.

Preuve: Soient $f : B \to \{0,1\}$ une fonction continue, alors $f|_A$ est continue donc constante. Notons c la valeur de f sur A. Soit $b \in B$. Comme $b \in \overline{A}$, on a $f(x) \underset{x \to b, x \in A}{\longrightarrow} c$. Ainsi f est constante. ∎

Exercice 1.3.3 (⋆): Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles connexes ?
1) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$
2) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$
3) $\{(x,0) ; x \in \mathbb{R}_+^*\} \cup \{(x, \frac{1}{x}) ; x \in \mathbb{R}_+^*\}$

Solution:
1) Non car $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sont des ouverts disjoints rencontrant $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ et dont la réunion contient $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$.
2) Oui : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, alors on peut trouver un chemin (composé de deux segments) reliant (a,b) et $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Du coup $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs, donc connexe.
3) Non car la fonction f définie sur la partie considérée par $f(x,0) = 0$ et $f\left(x, \frac{1}{x}\right) = 1$ est continue, à valeurs dans $\{0,1\}$ et non constante.

Définition 1.3.6 :
- Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. On dit que $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert ssi $E = \bigcup_{i\in I} O_i$.
- On dit que E vérifie la propriété de Borel-Lebesgue ssi de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- On dit que E est compact ssi E est séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.
- Soit $K \subseteq E$. On dit que K est une partie compacte de E ssi $(K, \mathcal{T}_K)$ est compact.

Remarque 1.3.5: La compacité est intrinsèque : si $K \subseteq A \subseteq E$ alors K est une partie compacte de A ssi K est une partie compacte de E.

Lemme 1.3.4 :
1) Si E est compact et $F \subseteq K$ est un fermé alors F est compact.
2) Si E est séparé et K est une partie compacte de E alors K est fermée.

Preuve:
1) Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de F. Alors la famille constituée de $E \setminus F$ et des $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E, donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini, ce qui donne un sous-recouvrement fini de F.
2) Si $K = E$ ou $K = \emptyset$ c'est clair. Sinon, on fixe $x \in E \setminus K$. Pour tout $y \in K$, on prend V_y un voisinage ouvert de y et W_y un voisinage ouvert de x tels que $V_y \cap W_y \neq \emptyset$. Alors $\left(V_y \cap K\right)_{y\in K}$ est un recouvrement ouvert de K. Comme K est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\left(V_y \cap K\right)_{y\in J}$. Alors $\bigcap_{j\in J} W_y$ est un ouvert inclus dans $E \setminus K$ et qui contient x. Ainsi $E \setminus K$ est un voisinage de tous ses points, donc c'est un ouvert.

■

Lemme 1.3.5 : On suppose que E est séparé.
1) Une intersection (non vide) de parties compactes de E est compacte.
2) Une réunion finie de parties compactes de E est compacte.

Preuve:
1) Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille de parties compactes de E. Soit $i_0 \in I$, alors $\bigcap_{i\in I} K_i$ est un fermé de K_{i_0}, donc c'est un compact.
2) Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille finie de parties compactes de E. Soit $\left(O_j\right)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de $\bigcup_{i\in I} K_i$. Pour tout $i \in I$, $\left(O_j \cap K_i\right)_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de K_i, donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\left(O_j \cap K_i\right)_{j\in J_i}$. Alors
$$\left(O_j\right)_{j\in \bigcup_{i\in I} J_i}$$
est un sous-recouvrement fini de $\bigcup_{i\in I} K_i$.

■

Théorème 1.3.7 : Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact, $(F, \mathcal{U})$ un espace topologique séparé et $f : E \to F$ une application continue. Alors $f(E)$ est compacte.

Preuve: Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(E)$. Alors $\left(f^{-1}(O_i)\right)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $\left(f^{-1}(O_i)\right)_{i \in J}$. Alors $(O_i)_{i \in J}$ est un sous-recouvrement fini de $f(E)$. ■

Lemme 1.3.6 *(des fermés emboités)*: On suppose que E est compact. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides de E décroissante pour l'inclusion. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Preuve: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $O_n = E \setminus F_n$. Si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ alors $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $(O_n)_{n \in [\![0,M]\!]}$. Comme $(O_n)_{n \in [\![0,M]\!]}$ est croissante pour l'inclusion, on a $O_M = E$, donc $F_M = \emptyset$, ce qui est absurde. ■

Théorème 1.3.8: Soient $(E_1, \mathcal{T}_1), ..., (E_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces topologiques compacts. Alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est compact.

Preuve: Il suffit de montrer le résultat pour $n = 2$, le reste s'en déduit par une récurrence triviale. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $E_1 \times E_2$. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, il existe un voisinage ouvert V_x de x_1, un voisinage ouvert W_x de x_2 et $i_x \in I$ tels que $V_x \times W_x \subseteq O_{i_x}$.

Soit $x_2 \in E_2$, alors $(V_x)_{x \in E_1 \times \{x_2\}}$ est un recouvrement ouvert de E_1, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $(V_x)_{x \in J(x_2)}$. Posons $A_{x_2} = \bigcap_{x \in J(x_2)} W_x$, qui est un ouvert contenant x_2.

Ainsi $\left(A_{x_2}\right)_{x_2 \in E_2}$ est un recouvrement ouvert de E_2, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $\left(A_{x_2}\right)_{x_2 \in K}$. Soit $J = \bigcup_{x_2 \in K} J(x_2)$, alors $(V_x \times W_x)_{x \in J}$ est un sous-recouvrement fini de $E_1 \times E_2$. ■

Exercice 1.3.4 (⋆ ⋆ ⋆ ♥): Dans ce problème, X désigne un espace topologique non vide et x_0 est un élément quelconque de X.

On appelle lacet sur X basé en x_0 toute application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. On note $E(X, x_0)$ l'ensemble des lacets sur X basés en x_0.

Si $\gamma_0, \gamma_1 \in E(X, x_0)$, on appelle homotopie de γ_0 à γ_1 relativement à x_0 toute application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que :
- $\forall t \in [0,1], H(0,t) = H(1,t) = x_0$;
- $\forall x \in [0,1], H(x,0) = \gamma_0(x)$ et $H(x,1) = \gamma_1(x)$.

Ainsi, si H est une homotopie de γ_0 à γ_1 relativement à x_0 alors pour tout $t \in [0,1]$, $H(\cdot,t) \in E(X, x_0)$. On peut imaginer H comme une déformation continue de γ_0 à γ_1.

Si une telle homotopie existe, on dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes relativement à x_0 et on note $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $E(X, x_0)$.

2) Soient $\gamma_0, \gamma_1 \in E(X, x_0)$. On définit la concaténation de γ_0 et γ_1 par

$$\gamma_0 \cdot \gamma_1 : x \mapsto \begin{cases} \gamma_0(2x) & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci définit une loi de composition interne $\cdot$ sur $E(X, x_0)$. Montrer que $\cdot$ est compatible avec la relation $\sim$, i.e. montrer que si $\gamma_0 \sim \gamma_0'$ et $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ alors $\gamma_0 \cdot \gamma_0' \sim \gamma_1 \cdot \gamma_{1'}$.

3) Montrer que la loi $\cdot$ induit une loi de groupe sur l'espace quotient $X/E(X, x_0)$.

Dans la suite, on notera $\pi_1(X, x_0) = X/E(X, x_0)$. $\pi_1(X, x_0)$ s'appelle le groupe fondamental de X relativement à x_0.

4) Soient X et Y deux espaces topologiques non vides et soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$.
   a) Montrer que si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme tel que $f(x_0) = y_0$, alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, y_0)$ sont isomorphes.
   b) Montrer que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

5) Montrer que si X est connexe par arcs et que $x_0, y_0 \in X$ alors les groupes $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, y_0)$ sont isomorphes.

Dans ce cas, on pourra donc noter $\pi_1(X)$ le groupe fondamental de X relativement à n'importe lequel de ses points.

6) On dit que X est contractile si et seulement si il existe $c \in X$ et une application continue $C : X \times [0, 1] \to X$ telle que :
   - $\forall x \in X, C(x, 0) = x$;
   - $\forall x \in X, C(x, 1) = c$;
   - $\forall t \in [0, 1], C(c, t) = c$.

   a) Montrer que les parties convexes non vides d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sont contractiles.
   b) Montrer que si X est contractile et connexe par arcs alors son groupe fondamental est trivial.

7) L'objectif de cette question est de déterminer le groupe fondamental du cercle $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.
   a) Soient $U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$. Montrer que $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \exists i \in \{1, 2\}, \gamma\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq U_i$.
   b) On pose

$$p : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \\ x \mapsto e^{\tau i x} \end{cases}$$

   Soit $\gamma \in E(\mathbb{S}^1, 1)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = 0$, et qu'on a alors $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$. Une telle application est dite relèvement de γ.
   c) Soient $\gamma \in E(\mathbb{S}^1, 1)$ puis $\tilde{\gamma}$ l'unique relèvement de γ. On pose $\deg(\gamma) = \tilde{\gamma}(1)$ le degré de γ. Montrer que si deux lacets sont homotopes alors ils ont le même degré.
   d) Montrer que le degré induit un isomorphisme de groupes de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ vers $\mathbb{Z}$.

8) On note $\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 1\}$. On souhaite montrer le théorème de Brouwer en dimension 2 : toute application continue de $\mathbb{B}^2$ dans $\mathbb{B}^2$ admet un point fixe. On fixe donc $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ une application continue, et on suppose par l'absurde qu'elle n'a pas de point fixe.
   a) On définit une application $r : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$ en posant $r(x)$ l'unique point d'intersection entre $\mathbb{S}^1$ et la demi-droite $[f(x), x)$ (qui est bien définie car f n'a pas de point fixe). Justifier brièvement que r est continue et que $r|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.
   b) Conclure.

9) On suppose qu'il existe deux ouverts A et B de X tels que $X = A \cup B$, $x_0 \in A \cap B$ et tels que A, B et $A \cap B$ sont connexes par arcs.
   a) Soit $\gamma \in E(X, x_0)$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, l'application

$$\gamma_k : \begin{cases} [0,1] \to X \\ x \quad\;\; \mapsto \gamma\left(\frac{t+k}{N}\right) \end{cases}$$

   est soit à valeurs dans A, soit à valeurs dans B.
   b) En déduire que γ est homotope (relativement à x_0) à une concaténation d'au plus N lacets basés en x_0 dont chacun est soit à valeurs dans A, soit à valeurs dans B.
   c) En déduire le groupe fondamental de la sphère $\mathbb{S}^2 := \left\{x \in \mathbb{R}^3, \|x\|_2 = 1\right\}$. La sphère $\mathbb{S}^2$ et le tore $\mathbb{T} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sont-ils homéomorphes ?

Solution:
1)

- Réflexivité : si $\gamma \in E(X, x_0)$ alors $H : (x,t) \mapsto \gamma(x)$ est une homotopie de γ à γ relativement à x_0 donc $\gamma \sim \gamma$.
- Symétrie : soient $\gamma_0, \gamma_1 \in E(X, x_0)$ tels que $\gamma_0 \sim \gamma_1$, soit donc H une homotopie de γ_0 à γ_1 relativement à x_0. Alors $\tilde{H} : (x,t) \mapsto H(x, 1-t)$ est une homotopie de γ_1 à γ_0 relativement à x_0 donc $\gamma_1 \sim \gamma_0$.
- Transitivité : soient $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in E(X, x_0)$ tels que $\gamma_0 \sim \gamma_1$ et $\gamma_1 \sim \gamma_2$, soient donc H une homotopie de γ_0 à γ_1 et K une homotopie de γ_1 à γ_2. Alors

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ K(x, 2t-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

  est une homotopie de γ_0 à γ_2 donc $\gamma_0 \sim \gamma_2$.

1) Soient $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_1, \gamma_{1'} \in E(X, x_0)$ tels que $\gamma_0 \sim \gamma_{0'}$ et $\gamma_1 \sim \gamma_{1'}$ Soient donc H une homotopie de γ_0 à γ_0' et K une homotopie de γ_1 à γ_1'. Alors

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(2x, t) & \text{si } \;x \leqslant \frac{1}{2} \\ K(2x-1, t) & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une homotopie de $\gamma_0 \cdot \gamma_0'$ à $\gamma_1 \cdot \gamma_1'$ donc $\gamma_0 \cdot \gamma_0' \sim \gamma_1 \cdot \gamma_1'$.
2) On note $[\gamma]$ la classe d'équivalence de γ pour la relation $\sim$.
   - Soit c_{x_0} le lacet constant égal à x_0, montrons que $\left[c_{x_0}\right]$ est neutre pour la loi induite sur $\pi_1(X, x_0)$. Soit $\gamma \in E(X, x_0)$, montrons que $\gamma \cdot c_{x_0} \sim \gamma$. L'application

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} \gamma\left(\frac{2x}{t+1}\right) & \text{si } x \leqslant \frac{t+1}{2} \\ x_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

     est une homotopie de $\gamma \cdot c_{x_0}$ à γ. De même, $c_{x_0} \cdot \gamma \sim \gamma$ donc $\left[c_{x_0}\right]$ est neutre.
   - Soit $\gamma \in E(X, x_0)$. On pose $\overline{\gamma} : t \mapsto \gamma(1-t)$, montrons que $\overline{\gamma} \cdot \gamma \sim c_{x_0}$. L'application

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} \gamma(2x-1) & \text{si } x \geqslant \frac{1+t}{2} \\ \gamma(t) & \text{si } \frac{1-t}{2} \leqslant s \leqslant \frac{1+t}{2} \\ \overline{\gamma}(2x) & \text{si } x \leqslant \frac{1-t}{2} \end{cases}$$

est une homotopie de $\overline{\gamma} \cdot \gamma$ à c_{x_0}. De même, $\gamma \cdot \overline{\gamma} \sim x_0$ donc $[\gamma]$ et $[\overline{\gamma}]$ sont inverses l'un de l'autre.

- Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in E(X, x_0)$, montrons que $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \sim \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$. L'application

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{4x}{t+1}\right) & \text{si } x \leqslant \frac{t+1}{4} \\ \gamma_2(4x-(t+1)) & \text{si } \frac{t+1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{t+2}{4} \\ \gamma_3\left(\frac{4x-(t+2)}{2-t}\right) & \text{si } x \geqslant \frac{t+2}{4} \end{cases}$$

est une homotopie de $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ à $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$.

Ceci montre que $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ est un groupe.

3) a) Montrons que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] \quad\quad \mapsto [f \circ \gamma] \end{cases}$$

est un isomorphisme.

- Vérifions d'abord que Φ est bien définie. Si $\gamma \in E(X, x_0)$ alors $f \circ \gamma \in E(Y, y_0)$. Soient $\gamma, \gamma' \in E(X, x_0)$ deux lacets homotopes, soit donc H une homotopie de γ à γ'. Alors $f \circ H$ est une homotopie de $f \circ \gamma$ à $f \circ \gamma'$. Ainsi Φ est bien définie.
- Montrons que Φ est un morphisme de groupes. Soient $\gamma, \gamma' \in E(X, x_0)$, alors $\Phi([\gamma] \cdot [\gamma']) = \Phi([\gamma \cdot \gamma']) = [f \circ (\gamma \cdot \gamma')] = [(f \circ \gamma) \cdot (f \circ \gamma')] = [f \circ \gamma] \cdot [f \circ \gamma'] = \Phi(\gamma) \cdot \Phi(\gamma')$.
- Montrons que Φ est bijectif. Par symétrie des rôles joués par x_0 et y_0, l'application $\Psi : \begin{cases} \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] \quad\quad \mapsto [f^{-1} \circ \gamma] \end{cases}$ est bien définie. De plus pour tout $\gamma \in E(X, x_0)$, $\Psi \circ \Phi([\gamma]) = [f^{-1} \circ f \circ \gamma] = [\gamma]$ donc $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. Symétriquement, $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. Ainsi Φ est un isomorphisme de groupes et les groupes $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, y_0)$ sont isomorphes.

b) Montrons que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0 y_0)) \\ ([\gamma_X], [\gamma_Y]) \quad\quad\quad \mapsto [(\gamma_X, \gamma_Y)] \end{cases}$$

est un isomorphisme. ((γ_X, γ_Y) désigne l'application $(x, y) \mapsto (\gamma_X(x), \gamma_Y(y))$.)

- Vérifions d'abord que Φ est bien définie. Si $\gamma_X \in E(X, x_0)$ et $\gamma_Y \in E(Y, y_0)$ alors $(\gamma_X, \gamma_Y) \in E(X \times Y, (x_0, y_0))$. Soient $\gamma_X, \gamma'_X \in E(X, x_0)$ deux lacets homotopes, soit donc H_X une homotopie de γ_X à γ'_X. Soient $\gamma_Y, \gamma'_Y \in E(Y, y_0)$ deux lacets homotopes, soit donc H_Y une homotopie de γ_Y à γ'_Y. Alors $(x, t) \mapsto (H_X(x, t), H_Y(x, t))$ est une homotopie de (γ_X, γ_Y) à (γ'_X, γ'_Y). Ainsi Φ est bien définie.
- Montrons que Φ est un morphisme de groupes. Soient $\gamma_X, \gamma'_X \in E(X, x_0)$ et $\gamma_Y, \gamma'_Y \in E(Y, y_0)$, alors $\Phi(([\gamma_X], [\gamma_Y]) \cdot ([\gamma'_X], [\gamma'_Y])) = \Phi([\gamma_X \cdot \gamma'_X], [\gamma_Y \cdot \gamma'_Y]) = [(\gamma_X \cdot \gamma'_X, \gamma_Y \cdot \gamma'_Y)] = [(\gamma_X, \gamma_Y) \cdot (\gamma'_X, \gamma'_Y)] = [(\gamma_X, \gamma_Y)] \cdot [(\gamma'_X, \gamma'_Y)] = \Phi([\gamma_X], [\gamma_Y]) \cdot \Phi([\gamma'_X, \gamma'_Y])$.

- Montrons que Φ est surjectif. Soit $\gamma \in E(X \times Y, (x_0, y_0))$. Notons $\pi_X : X \times Y \to X$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ les projections sur X et Y, alors $\gamma = (\pi_X \circ \gamma, \pi_Y \circ \gamma)$ donc $[\gamma] = \Phi([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma])$.
- Montrons que Φ est injectif. Soient $\gamma_X \in E(X, x_0)$ et $\gamma_Y \in E(Y, y_0)$ tels que $\Phi([\gamma_X], [\gamma_Y]) = 0$, alors on dispose d'une homotopie H de (γ_X, γ_Y) au lacet constant, et $\pi_X \circ H$ et $\pi_Y \circ H$ sont des homotopies de γ_X au lacet constant et de γ_y au lacet constant. Ainsi Φ est injectif. Finalement, les groupes $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ et $\pi_1(X \times Y, (x_0 y_0))$ sont isomorphes.

4) On suppose que X est connexe par arcs. Soient $x_0, y_0 \in X$. Soit $\gamma_0 : [0,1] \to X$ un chemin continu de y_0 à x_0. On pose $\overline{\gamma_0} : x \mapsto \gamma_0(1-x)$, qui est un chemin continu de x_0 à y_0. Pour tout $\gamma \in E(X, x_0)$, on pose

$$\gamma_{y_0} : x \mapsto \begin{cases} \gamma_0(3x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ \gamma(3x-1) & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3} \\ \overline{\gamma_0}(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

qui est un lacet basé en y_0. Enfin, pour tout $\gamma \in E(X, x_0)$, on pose $\Phi([\gamma]) = \left[\gamma_{y_0}\right]$. Montrons que Φ est un isomorphisme de $\pi_1(X, x_0)$ vers $\pi_1(X, y_0)$.

- Montrons d'abord que Φ est bien définie. Soient $\gamma, \gamma' \in E(X, x_0)$ tels que $\gamma \sim \gamma'$. Soit donc H une homotopie de γ à γ'. Alors

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} \gamma_0(3x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ H(3x-1, t) & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3} \\ \overline{\gamma_0}(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

est une homotopie de γ_{y_0} à γ'_{y_0}, donc $\left[\gamma_{y_0}\right] = \left[\gamma'_{y_0}\right]$ et Φ est bien définie.
- Montrons que Φ est un morphisme de groupes. Soient $\gamma, \gamma' \in E(X, x_0)$, alors $\Phi([\gamma] \cdot [\gamma']) = \left[\gamma_{y_0}\right] \cdot \left[\gamma'_{y_0}\right] \iff \left[(\gamma \cdot \gamma')_{y_0}\right] = \left[\gamma_{y_0} \cdot \gamma'_{y_0}\right]$. Or l'application

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} \gamma_0\left(\frac{6x}{2-t}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{2-t}{6} \\ \gamma(6x-(2-t)) & \text{si } \frac{2-t}{6} \leqslant x \leqslant \frac{3-t}{6} \\ \overline{\gamma_0}(6x-(3-t)) & \text{si } \frac{3-t}{6} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_0(6x-(2+t)) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3+t}{6} \\ \gamma'(6x-(3+t)) & \text{si } \frac{3+t}{6} \leqslant x \leqslant \frac{4+t}{6} \\ \overline{\gamma_0}\left(\frac{6x}{2-t} - \frac{4+t}{2-t}\right) & \text{si } \frac{4+t}{6} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

est une homotopie de $(\gamma \cdot \gamma')_{y_0}$ à $\gamma_{y_0} \cdot \gamma'_{y_0}$, d'où le résultat.
- Montrons que Φ est bijectif. On peut définir de même $\Psi : \begin{cases} \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] \mapsto \left[\gamma_{x_0}\right] \end{cases}$ qui est également un morphisme de groupes par symétrie des rôles joués par x_0 et y_0. Montrons que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. Soit $\gamma \in E(X, x_0)$, il s'agit de montrer que $\left(\gamma_{y_0}\right)_{x_0} \sim \gamma$. Or l'application

$$(x,t)\mapsto\begin{cases}\overline{\gamma_0}(3x) & \text{si } 0\leqslant x\leqslant \frac{1-t}{3}\\ \gamma_0(9x+4t-3) & \text{si } \frac{1-t}{3}\leqslant x\leqslant \frac{4}{9}(1-t)\\ \gamma\left(\frac{9x-4(1-t)}{1+8t}\right) & \text{si } \frac{4}{9}(1-t)\leqslant x\leqslant \frac{5+4t}{9}\\ \overline{\gamma_0}(9x-(5+4t)) & \text{si } \frac{5+4t}{9}\leqslant x\leqslant \frac{2+t}{3}\\ \gamma_0(3x-2) & \text{si } \frac{2+t}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

est une homotopie de $\left(\gamma_{y_0}\right)_{x_0}$ à γ. Ainsi $\Psi\circ\Phi=\mathrm{id}$ et symétriquement, $\Phi\circ\Psi=\mathrm{id}$.

Finalement, les groupes $\pi_1(X,x_0)$ et $\pi_1(X,y_0)$ sont isomorphes !

5) a) Soit X une partie convexe non vide d'un $\mathbb{K}$-EVN. Soit $c\in X$. On pose $C:(x,t)\mapsto(1-t)x+tc$, alors C vérifie les conditions de l'énoncé donc X est contractile.

b) On suppose que X est contractile et connexe par arcs. Soient donc $c\in X$ et $C:X\times[0,1]\to X$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit $\gamma\in E(X,c)$, alors l'application $(x,t)\mapsto C(\gamma(x),t)$ est une homotopie de γ au lacet constant égal à c donc $\pi_1(X)$ est trivial.

6) a) $(\gamma^{-1}(U_1),\gamma^{-1}(U_2))$ forme un recouvrement ouvert du compact $[0,1]$. Par le lemme de la maille, $\exists r>0,\forall x\in[0,1],\exists i\in\{1,2\},B(x,r)\subseteq\gamma^{-1}(U_i)$, d'où le résultat.

b)
- Unicité : supposons que l'on dispose de deux relèvements $\tilde\gamma$ et $\tilde\gamma'$. Alors pour tout $x\in[0,1]$, $e^{\tau i\tilde\gamma(x)}=p\circ\tilde\gamma(x)=\gamma(x)=p\circ\tilde\gamma'(x)=e^{\tau i\tilde\gamma'(x)}$ donc $\tilde\gamma-\tilde\gamma'$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Or cette application est continue donc elle est constante. De plus $\tilde\gamma(0)=0=\tilde\gamma'(0)$ donc $\tilde\gamma=\tilde\gamma'$.
- Existence : d'après la question précédente, on dispose de $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\exists i\in\{1,2\},\gamma\left(\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right)\subseteq U_i$. On va définir $\tilde\gamma$ par récurrence sur les intervalles $\left[0,\frac{k}{n}\right]$. Pour $k=0$, on pose $\tilde\gamma(0)=0$. Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$, supposons $\tilde\gamma$ définie sur $\left[0,\frac{k}{n}\right]$, de sorte que $p\circ\tilde\gamma|_{[0,\frac{k}{n}]}=\gamma|_{[0,\frac{k}{n}]}$ et $\tilde\gamma|_{[0,\frac{k}{n}]}$ soit continue. Soit $i\in\{1,2\}$ tel que $\gamma\left(\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right)\subseteq U_i$. De plus $p^{-1}(U_i)=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_{i,j}$ où $V_{1,j}=]-\frac12+j,\frac12+j[$ et $V_{2,j}=]j,1+j[$. On a $\tilde\gamma\left(\frac{k}{n}\right)\in p^{-1}(U_i)$, soit donc $j\in\mathbb{Z}$ tel que $\tilde\gamma\left(\frac{k}{n}\right)\in V_{i,j}$. La restriction $p:V_{i,j}\to U_i$ est un homéomorphisme, on note $q_{i,j}:U_i\to V_{i,j}$ sa réciproque et on définit $\tilde\gamma$ sur $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ en posant $\tilde\gamma(x)=q_{i,j}(\gamma(x))$. Ainsi $\tilde\gamma$ est continue sur $\left[0,\frac{k+1}{n}\right]$ et vérifie $p\circ\tilde\gamma|_{[0,\frac{k+1}{n}]}=\gamma|_{[0,\frac{k+1}{n}]}$. Ceci achève la récurrence et la preuve de l'existence.
- Enfin, on a $1=p\circ\tilde\gamma(0)=\gamma(0)=\gamma(1)=p\circ\tilde\gamma(1)=e^{\tau i\tilde\gamma(1)}$ donc $\tilde\gamma(1)\in\mathbb{Z}$.

c) Soient $\gamma,\gamma'\in E(\mathbb{S}^1,1)$ deux lacets homotopes. Soit donc $H:[0,1]^2\to\mathbb{S}^1$ une homotopie de γ à γ'. Pour tout $t\in[0,1]$, $H(\cdot,t)\in E(\mathbb{S}^1,1)$ donc il existe un unique relèvement $\tilde\gamma_t$ de $H(\cdot,t)$.

- Montrons que $\tilde H:(x,t)\mapsto\tilde\gamma_t(x)$ est continue. Comme H est continue, les ensembles $H^{-1}(U_1)$ et $H^{-1}(U_2)$ forment un recouvrement ouvert de $[0,1]^2$. Par le lemme de la maille, on dispose de $n\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k,h\in[\![0,n-1]\!],\exists i\in\{1,2\},C_{k,h}\subseteq H^{-1}(U_i)$ où $C_{k,h}:=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\times\left[\frac{h}{n},\frac{h+1}{n}\right]$. Soit $h\in[\![0,n-1]\!]$, montrons par récurrence que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\tilde H$ est continue sur $C_{k,h}$.

  Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que l'application $\tilde H$ soit continue sur $C_{k',h}$ pour tout $k'\in[\![0,k-1]\!]$. En particulier, $\tilde H$ est continue sur $S_k:=\left\{\frac{k}{n}\right\}\times\left[\frac{h}{n},\frac{h+1}{n}\right]$ (par hypothèse de récurrence si $k\geqslant1$ et car $\tilde H(0,\cdot)=0$ si $k=0$). On sait que $H\left(C_{k,h}\right)$ est inclus dans U_1 ou dans U_2, disons dans U_1. Alors $\tilde H|_{S_k}$ est continue et à valeurs dans $p^{-1}(U_1)=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_{1,j}$. Comme S_k est connexe et $\tilde H$ est continue sur S_k, on dispose de $j\in\mathbb{Z}$ tel que $\tilde{H}(S_k) \subseteq V_{1,j}$. On pose alors pour tout $(x,t) \in C_{k,h}$, $f(s,t) = \left(p|_{V_{1,j}}\right)^{-1} \circ H(s,t)$. Alors f est continue. Il suffit donc de montrer que f et $\tilde{H}$ coïncident sur $C(k,h)$.

Soit $t \in \left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}\right]$. Pour tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a $p \circ \tilde{\gamma}_t(x) = p \circ \tilde{H}(x,t) = H(x,t) = p \circ f(x,t)$. Du coup $x \mapsto \tilde{\gamma}_t(x) - f(x,t)$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc constante. Mais cette application vaut 0 en $x = \frac{k}{n}$, donc elle est nulle et f et $\tilde{H}$ coïncident sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \{t\}$. Ceci vaut pour tout $t \in \left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}\right]$ donc H et f coïncident sur $C_{k,h}$ et en particulier, $\tilde{H}$ est continue sur $C_{k,h}$, ce qui achève la récurrence. Finalement, $\tilde{H}$ est continue !

- Du coup, $t \mapsto \deg(H(\cdot,t)) = \tilde{\gamma}_t(1)$ est continue. Mais cette application est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc elle est constante. Ainsi $\deg(\gamma) = \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) = \deg(\gamma')$.

d)
- Montrons que $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in E(\mathbb{S}^1, 1)$, montrons que $\deg(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \deg(\gamma_1) + \deg(\gamma_2)$. Soient $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ les relèvements de γ_1 et γ_2 respectivement. Soit $\tilde{\gamma} : t \mapsto \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(2t) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}_2(2t-1) + \tilde{\gamma}_1(1) & \text{sinon} \end{cases}$, alors $\tilde{\gamma}$ est continue, $\tilde{\gamma}(0) = 0$ et $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma_1 \cdot \gamma_2$. Ainsi $\tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement de $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, donc $\deg(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \tilde{\gamma}(1) = \deg(\gamma_1) + \deg(\gamma_2)$.
- Montrons que $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est injectif. Soit $\gamma \in E(\mathbb{S}^1, A)$ tel que $\deg(\gamma) = 0$, et soit $\tilde{\gamma}$ son relèvement. Alors l'application $(x,t) \mapsto p(t \cdot \tilde{\gamma}(x))$ est une homotopie, donc γ est homotope au lacet constant.
- Montrons que $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est surjectif. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\gamma : t \mapsto e^{\tau i n t}$. Alors $\gamma \in E(\mathbb{S}^1, 1)$ et l'unique relèvement de γ est $\tilde{\gamma} : t \mapsto nt$ donc $\deg(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) = n$. Ainsi $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme de groupes. Comme $\mathbb{S}^1$ est connexe par arcs, $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

7) a)
- Si $x \in \mathbb{S}^1$ alors x est l'unique point d'intersection entre $\mathbb{S}^1$ et la demi-droite $[f(x), x)$ donc $r(x) = x$. Ainsi $r|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.
- Par définition, on a pour tout $x \in \mathbb{B}^2$, $\|r(x)\| = 1$ et $r(x) = t(x)x + (1 - t(x))f(x)$ où $t(x) \in \mathbb{R}_+$. La difficulté est de montrer que $x \mapsto t(x)$ est continue. On voit que les deux équations ci-dessus mènent à une équation du second degré en $t(x)$ donc les coefficients sont des fonctions continues de x. Comme r est bien définie, cette équation aura une seule solution positive, qui donnera une expression continue de $t(x)$.

b) Soit $\gamma \in E(\mathbb{S}^1, 1)$. Comme $\mathbb{B}^2$ est convexe, son groupe fondamental est trivial et on dispose d'une homotopie H dans $\mathbb{B}^2$ du chemin constant égal à 1 vers γ. Alors $(x,t) \mapsto r(H(x,t))$ est une homotopie dans $\mathbb{S}^1$ du chemin constant égal à 1 vers γ. Ainsi $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ est trivial, ce qui est absurde car on a vu que $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

8) a) Comme $[0,1]$ est compact, par le lemme de la maille, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $B(t, \varepsilon) \subseteq \gamma^{-1}(A)$ ou $B(t, \varepsilon) \subseteq \gamma^{-1}(B)$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2N} < \varepsilon$, alors pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right] \subseteq B\left(\frac{k}{N} + \frac{1}{2N}, \varepsilon\right)$, donc γ_k est à valeurs dans A ou à valeurs dans B.

b) Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on note U_k l'un des deux ouverts A ou B tel que γ_k soit à valeurs dans U_k. Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, on a $\gamma\left(\frac{k}{N}\right) = \gamma_k(0) = \gamma_{k-1}(1) \in U_{k-1} \cap U_k$. Comme A, B et $A \cap B$ sont connexes par arcs, on dispose d'un chemin continu b_k de $\gamma\left(\frac{k}{N}\right)$ à x_0 à valeurs dans $U_{k-1} \cap U_k$. On définit également b_0 et b_N comme le lacet constant égal à x_0. Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on pose, avec des notations évidentes, $g_k = \overline{b_k} \cdot \gamma_k \cdot b_{k+1} \in E(U_k, x_0)$. De plus on voit que γ est homotope à $g_0 \cdot ... \cdot g_{k-1}$.

c) On pose $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2; z \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ et $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2; z \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$. Alors A et B sont ouverts, connexes par arcs, $A \cap B$ est connexe par arcs et $A \cup B = \mathbb{S}^2$. Soit $x_0 \in A \cap B$. Soit $\gamma \in E(\mathbb{S}^2, x_0)$. D'après ce qui précède, γ est homotope à une concaténation de lacets basés en x_0 qui sont soit à valeurs dans A, soit à valeurs dans B. Mais A et B sont visiblement contractiles donc leurs groupes fondamentaux sont triviaux. On en déduit que γ est homotope au lacet constant, et $\pi_1(\mathbb{S}^2)$ est le groupe trivial.

D'autre part, $\pi_1(\mathbb{T})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ donc $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{T}$ ne sont pas homéomorphes.

2. Espaces métriques

2.1. Généralités

Définition 2.1.1: Soit E un ensemble. On dit qu'une application $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ est une distance ssi elle vérifie :
- $\forall x, y \in E, d(x,y) = d(y,x)$;
- $\forall x, y \in E, d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
- $\forall x, y, z \in E, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Dans ce cas, on dit que (E,d) est un espace métrique.

Exemple 2.1.1:
- Si E est un ensemble quelconque, alors l'application

$$d : \begin{cases} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } & x=y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

  est une distance, appelée distance discrète.
- Dans le plan, on fixe une origine O et on pose $d(A,B) = \begin{cases} \|\overrightarrow{OA}\| + \|\overrightarrow{OB}\| & \text{si } A, B \text{ et } O \text{ ne sont pas alignés} \\ \|\overrightarrow{AB}\| & \text{sinon} \end{cases}$. Alors d est une distance, parfois appelée distance SNCF.
- Distance associée à une norme (cf le cours sur les espaces vectoriels normés)
- Distance de Hamming (cf cours sur le codage correcteur d'erreurs)

Désormais, (E,d) désigne un espace métrique.

Lemme 2.1.1: $\forall x, y, z \in E, |d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y)$

Définition 2.1.2: Soient $c \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle :
- boule ouverte de centre c et de rayon r l'ensemble $B(c,r) := \{x \in E; d(x,c) < r\}$;
- boule fermée de centre c et de rayon r l'ensemble $B_f(c,r) := \{x \in E; d(x,c) \leqslant r\}$;
- sphère de centre c et de rayon r l'ensemble $\{x \in E; d(x,c) = r\}$.

Remarque 2.1.1: Si $c \in E$ et $0 \leqslant r < R$ alors $B(x, r) \subseteq B_f(x, r) \subseteq B(x, R)$.

Définition 2.1.3: Soit $A \subseteq E$. On dit que A est bornée ssi il existe $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$ tels que $A \subseteq B(x_0, r)$.

Remarque 2.1.2: Si A est bornée alors $\forall x \in E, \exists r \in \mathbb{R}_+, A \subseteq B(x, r)$.

Définition 2.1.4: Soient Ω un ensemble et $f : \Omega \to E$. On dit que f est bornée ssi $f(\Omega)$ est bornée.

Définition 2.1.5: Soit A une partie non vide de E. On appelle diamètre de A la quantité $\delta(A) := \sup\{d(a, b); (a, b) \in A^2\} \in [0, \infty]$.

Remarque 2.1.3: Si $A \subseteq B$ alors $\delta(A) \leqslant \delta(B)$.

Exercice 2.1.1 ($\star$):
1) Soit A une partie non vide de E. Montrée que A est bornée ssi $\delta(A) < \infty$.
2) Soient $x \in E$ et $r > 0$, que dire de $\delta(B_f(x, r))$?
3) Trouver un exemple avec $\delta(B_f(x, r)) \neq 2r$.

Solution:
1) Supposons que A est bornée, soient donc $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$ tels que $A \subseteq B(x_0, r)$. Soient $a, b \in A$, alors $d(a, b) \leqslant d(a, x_0) + d(x_0, b) < 2r$. Donc $\delta(A) \leqslant 2r < \infty$.

Réciproquement, supposons que $\delta(A) < \infty$. Soit $x \in A$, alors pour tout $a \in A$, $d(a, x) \leqslant \delta(A) < \delta(A) + 1$, donc $A \subseteq B(x, \delta(A) + 1)$ et A est bornée.

1) Pour tous $a, b \in B_f(x, r)$, on a $d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(x, b) \leqslant 2r$. Donc $\delta(B_f(x, r)) \leqslant 2r$.
2) Si d est la distance discrète et x est un élément de E alors $B_f(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ donc $\delta(B_f(x, \frac{1}{2})) = 0 \neq 2 \times \frac{1}{2}$.

Définition 2.1.6:
- Soient A et B deux parties non vides de E. On appelle distance entre A et B la quantité $d(A, B) = \inf\{d(a, b); (a, b) \in A \times B\}$.
- Soient $a \in E$ et B une partie non vide de E. On appelle distance entre a et B la quantité $d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}$.

Remarque 2.1.4: En général, cela ne définit pas une distance sur $\mathcal{P}(E)$, car $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A, B) = 0$.

Théorème 2.1.1: Soit $\mathcal{T} = \{O \subseteq E; \forall x \in O, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq 0\}$. Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur E.

Preuve: Facile ■

Exemple 2.1.2: La topologie associée à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2.1.2:
- Toute boule ouverte est un ouvert.
- Tout ouvert est une réunion de boules ouvertes.
- Toute boule fermée est un fermé.

Preuve:
- Soient $x_0 \in E$ et $r_0 \geqslant 0$, montrons que $B(x_0, r_0)$ est un ouvert. Soit $x \in B(x_0, r_0)$. Notons $r = r_0 - d(x, x_0) > 0$. Soit $y \in B(x, r)$, alors $d(x_0, y) \leqslant d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r = r_0$ donc $y \in B(x_0, r_0)$. Ainsi $B(x, r) \subseteq B(x_0, r_0)$ et $B(x_0, r_0)$ est un ouvert.
- Soit O un ouvert. Pour tout $x \in O$, on dispose de $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subseteq O$. Alors $O = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x)$.
- Soient $x_0 \in E$ et $r_0 \geqslant 0$, montrons que $E \setminus B_f(x_0, r_0)$ est un ouvert. Soit $x \in E \setminus B_f(x_0, r_0)$. Posons $r = d(x, x_0) - r_0 > 0$, et montrons que $B(x, r) \subseteq E \setminus B_f(x_0, r_0)$. Soit $y \in B(x, r)$, alors $d(y, x_0) \geqslant d(x_0, x) - d(y, x) = r + r_0 - d(y, x) > r_0$, CQFD.

■

Lemme 2.1.3: (E, d) est séparé.

Preuve: Soient $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Notons $\delta = d(x, y) > 0$, alors $B\left(x, \frac{\delta}{3}\right) \in \mathcal{V}(x)$, $B\left(y, \frac{\delta}{3}\right) \in \mathcal{V}(y)$ et $B\left(x, \frac{\delta}{3}\right) \cap B\left(y, \frac{\delta}{3}\right) = \emptyset$. ■

Remarque 2.1.5:
- La topologie de la distance discrète est la topologie discrète. On montre aisément qu'il n'y a pas de distance dont la topologie est la topologie grossière (sauf si $|E| \leqslant 1$).
- $V \subseteq E$ est un voisinage de x ssi $\exists r > 0, B(x, r) \subseteq V$.
- $\{B(x, r); r \in \mathbb{R}_+^*\}$ est une base de voisinages de x. On prendra donc comme définition de la limite : u converge vers l ssi $\forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \in B(l, r)$. Ou de manière équivalente, u converge vers l ssi $d(u_n, l) \underset{n}{\longrightarrow} 0$.
- D est dense dans E ssi $\forall x \in E, \forall r > 0, D \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Lemme 2.1.4: Soit $F \subseteq E$. On note d_F la restriction de d à $F \times F$. Alors (F, d_F) est un espace métrique, et sa topologie est la topologie induite par la topologie de E.

Preuve: Il s'agit de montrer que les ouverts de (F, d_F) sont les $O \cap F$ où O est un ouvert de (E, d).
- Soit O' un ouvert de (F, d_F). Alors pour tout $x \in O'$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_F(x, r_x) = B(x, r_x) \cap F \subseteq O'$. Posons $O = \bigcup_{x \in O'} B(x, r_x)$, alors O est un ouvert de E et $O' = O \cap F$.
- Réciproquement, soient O un ouvert de (E, d) puis $O' = O \cap F$. Soit $x \in O'$, soit donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq O$. Alors $B_F(x, r) = B(x, r) \cap F \subseteq O \cap F = O'$. Ainsi O' est un ouvert de (F, d_F).

■

Lemme 2.1.5: Soient $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ des espaces métriques puis $E = E_1 \times ... \times E_n$. Pour tous $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in E$, on pose $d(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i); i \in [\![1, n]\!]\}$. Alors d est une distance sur E, dite distance produit de $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$. De plus la topologie associée à la distance produit est la topologie produit des topologies associées aux d_i.

Preuve:
- La séparation et la symétrie sont claires. Soient $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n), z = (z_1, ..., z_n) \in E$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i(x_i, z_i) \leqslant d_i(x_i, y_i) + d(y_i, z_i) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, donc $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. Ainsi d est une distance sur E.
- Remarquons d'abord que les boules ouvertes de (E, d) sont les produits de boules ouvertes de $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$. Du coup, les ouverts de (E, d) sont les réunions de produits de boules ouvertes de $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$, donc ce sont des ouverts pour la topologie produit. Réciproquement, les ouverts de la topologie produit sont des réunions de produits d'ouverts de $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$, donc des réunions de produits de réunions de boules ouvertes de $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$, donc des réunions de produits de boules ouvertes de $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$, donc des réunions de boules ouvertes de (E, d), donc des ouverts de (E, d).

■

Exercice 2.1.2 (⋆): Soit $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
1) A est-il un ouvert de $\mathbb{R}^*$?
2) A est-il un fermé de $\mathbb{R}^*$?
3) A est-il un ouvert de $\mathbb{Q}$?
4) A est-il un fermé de $\mathbb{Q}$?

Solution:
1) Non car il n'y a aucune boule ouverte de $\mathbb{R}^*$ centrée en 1 contenue dans A.
2) Oui car $\mathbb{R}^* \setminus A =]-\infty, 0\left[\cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\right]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\right) \cup \left]1, \infty\right[$ est un ouvert.
3) Non car il n'y a aucune boule ouverte de $\mathbb{R}^*$ centrée en 1 contenue dans A.
4) Non car la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_n \in A^{\mathbb{N}}$ converge vers $0 \in \mathbb{Q} \setminus A$.

Exercice 2.1.3 (⋆):
1) $\mathbb{Q}$ est il discret (pour la topologie induite de $\mathbb{R}$) ?
2) Montrer que dans l'espace topologique $\mathbb{Q}$ (muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$), 0 admet une base de voisinages à la fois ouverts et fermés.

Solution:
1) Non car $\{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{Q}$.
2) On considère les ensembles $B_r := \mathbb{Q} \cap \left[-r\sqrt{2}, r\sqrt{2}\right]$ où $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Les B_r sont des fermés de $\mathbb{Q}$ (intersection de $\mathbb{Q}$ avec un fermé de $\mathbb{R}$). De plus, $B_r = \mathbb{Q} \cap]-r\sqrt{2}, r\sqrt{2}[$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc les B_r sont des ouverts de $\mathbb{Q}$ (intersection de $\mathbb{Q}$ avec un ouvert de $\mathbb{R}$). On sait que tout voisinage de 0 contient une boule ouverte centrée en 0, et toute boule ouverte centrée en 0 contient un ensemble B_r. Ainsi $\left\{B_r; r \in \mathbb{Q}_+^*\right\}$ est une base de voisinages de 0.

Lemme 2.1.6: Toute suite convergente d'éléments de E est bornée.

Preuve: Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un certain $l \in E$. Soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, x_n \in B(l, 1)$. Soit $r = \max(1, d(l, x_0), ..., d(l, x_{N-1}))$. Alors $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(l, r)$ donc (x_n) est bornée. ■

Théorème 2.1.2: Soient $A \subseteq E$ et $x \in E$. Alors $x \in \overline{A}$ ssi x est la limite d'une suite d'éléments de A.

Preuve: On sait déjà que les limites de suites d'éléments de A sont dans $\overline{A}$. Réciproquement, supposons que $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $u_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Alors $d(x, u_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$. ■

Remarque 2.1.6: Du coup, D est dense dans E ssi tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de D.

Théorème 2.1.3: Soit $F \subseteq E$. Alors F est fermé ssi toute suite convergente d'éléments de F converge vers un élément de F.

Preuve:
- Supposons que F est fermé. Soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l \in E$. Alors $l \in \overline{F} = F$.
- Réciproquement, on raisonne par contraposée et on suppose que F n'est pas fermé. Alors $E \setminus F$ n'est pas ouvert, soit donc $x \in E \setminus F$ tel que $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \nsubseteq E \setminus F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc prendre $u_n \in B(x, 2^{-n}) \cap F$ et on obtient alors une suite d'éléments de F qui converge vers $x \notin F$.

■

Définition 2.1.7: Soit E un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2. On dit que les distances d_1 et d_2 sont équivalentes ssi elles définissent la même topologie.

Remarque 2.1.7:
- d_1 et d_2 sont équivalentes ssi toute boule ouverte non vide pour une distance contient une boule ouverte non vide de même centre pour l'autre.
- d_1 et d_2 sont équivalentes ssi $\mathrm{id} : (E, d_1) \to (E, d_2)$ est un homéomorphisme.

Exemple 2.1.3: On peut munir $\overline{\mathbb{R}}$ d'une distance en posant $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. La topologie associée à d est la topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$. La distance induite par d sur $\mathbb{R}$ est équivalente à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.1.4 (⋆ ♥):
1) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée et soit $a = \sup A$.
   a) Montrer que si A est ouverte alors $a \notin A$
   b) Montrer que si A est fermée alors $a \in A$.
   c) Soit $B \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide, ouverte et fermée.
      i) Montrer que B n'est ni minorée ni majorée.
      ii) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R} \setminus B$. Montrer que $C = B \cap]-\infty, x[$ est ouverte, et fermée. Que peut-on en conclure ?

Solution:
1)
2) Supposons que A est ouverte. Soit $x \in A$, on dispose donc de $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subseteq A$. Ainsi x n'est pas un majorant de A. A n'a donc pas de majorant, donc $a \notin A$.
3) Supposons que A est fermée. a s'écrit comme une limite d'une suite d'éléments de A, donc $a \in A$.
4) a) Supposons par l'absurde que B est majorée, alors on dispose de $b = \sup B$. D'après la question 1, on a à la fois $b \in B$ et $b \notin B$, absurde. Donc B n'est pas majorée et de même, B n'est pas minorée.
   b) C est un ouvert comme intersection finie d'ouverts. Comme $x \notin B$, on a aussi $C = B \cap]-\infty, x]$ donc C est un fermé comme intersection de fermés. D'après la question précédente, si C est non vide alors C n'est pas majorée. Or C est majorée par x, absurde. Donc C est vide, mais dans ce cas B est minorée par x, absurde aussi. On en conclut qu'il n'existe pas de $x \in \mathbb{R} \setminus B$, i.e. $B = \mathbb{R}$.

Exercice 2.1.5 (⋆): Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\inf A$ et $\sup A$ appartiennent à $\overline{A}$.

Solution: Soit $V \in \mathcal{V}(\sup A)$. Il existe $r > 0$ tel que $]\sup(A) - r, \sup(A) + r[\subseteq V$. $\sup(A) - r$ n'est pas un majorant de A, soit donc $a \in A$ tel que $a > \sup(A) - r$. Alors $a \in A \cap V$. Ainsi $\forall V \in \mathcal{V}(\sup A), A \cap V \neq \emptyset$ donc $\sup A \in \overline{A}$. On procède de même pour $\inf A$.

Exercice 2.1.6 (⋆): Soient (E, d) un espace métrique, $F \subseteq E$ et $x \in E$. Montrer que si F est un fermé et si $d(x, F) = 0$ alors $x \in F$.

Solution: On a $\inf\{d(x, f); f \in F\} = 0$. Soit donc $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $d(x, f_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, i.e. $f_n \longrightarrow x$. Comme F est un fermé, $x \in F$.

Exercice 2.1.7 (⋆): Soient (E, d) un espace métrique, $A \subseteq E$ et $x \in E$.
1) Montrer que $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0$.
2) Montrer que $d(x, A) = d\left(x, \overline{A}\right)$.

Solution:
1) Soit $x \in \overline{A}$, soit donc $u \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x. Alors $d(x, u_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ donc $d(x, A) = 0$ et $x \in \bigcap_{r>0} V_r(A)$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{r>0} V_r(A)$. Alors $d(x, A) = 0$, donc x est limite d'une suite d'éléments de A, i.e. $x \in \overline{A}$.
2) Déjà, $d\left(x, \overline{A}\right) \leqslant d(x, A)$ puisque $A \subseteq \overline{A}$. Soit $y \in \overline{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $A \cap B\left(y, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$, soit donc $a_n \in A \cap B\left(y, \frac{1}{n}\right)$. On a $d(x, y) - d(a_n, y) \geqslant d(x, a_n) \geqslant d(x, A)$ donc en faisant tendre n vers ∞, on obtient $d(x, y) \geqslant d(x, A)$. Ceci vaut pour tout $y \in \overline{A}$, donc $d\left(x, \overline{A}\right) \geqslant d(x, A)$. Finalement $d(x, A) = d\left(x, \overline{A}\right)$.

Exercice 2.1.8 (⋆): Soient (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$. Pour tout $r > 0$, on pose $V_r(A) = \{x \in E, d(x, A) < r\}$.

1) Montrer que $V_r(A)$ est ouvert.
2) Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{r>0} V_r(A)$.

Solution:

1) Soit u une suite d'éléments de $E \setminus V_r(A)$ qui converge vers un certain $l \in E$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(u_n, A) \geqslant r$, donc pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a \in A$, $d(u_n, a) \geqslant r$. Du coup, pour tout $a \in A$, $d(l, a) \geqslant r$, donc $d(l, A) \geqslant r$ et $l \in E \setminus V_r(A)$. Ainsi $E \setminus V_r(A)$ est fermé donc $V_r(A)$ est ouvert.
2) Remarquons que $\bigcap_{r>0} V_r(A) = \{x \in E, d(x, A) = 0\}$. Il s'agit donc de la première question de l'exercice précédent. *Remarque : ainsi, tout fermé d'un espace métrique est une intersection d'ouverts.*

*Exercice 2.1.9 (*Ensemble de Cantor $\star\star\star$*)*: On pose $K_0 = [0, 1]$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_{n+1} est l'ensemble obtenu en retirant à chaque intervalle $[a, b]$ de K_n l'intervalle $]a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}[$. On note enfin $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ l'ensemble de Cantor. Montrer que C est fermé, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

Solution: Déjà, on montre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est bien défini et que c'est une réunion disjointe de 2^n segments inclus dans $[0, 1]$ et de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

- D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est fermé comme réunion finie de fermés. Du coup C est fermé.
- On voit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $[a_n, b_n]$ est un des 2^n segments de K_n alors $a_n \in C$ et $b_n \in C$. En particulier, $0 \in C$ donc C est non vide.
- Soient $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, montrons que $]a, b[\nsubseteq C$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{1}{3}\right)^n < b - a$, alors $]a, b[\nsubseteq K_n$ donc $]a, b[\nsubseteq C$.
- Soit $x \in C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x \in K_n$ et on note $[a_n, b_n]$ le segment de K_n qui contient x. Comme vu précédemment, $a_n \in C$ et $b_n \in C$. On pose $u_n = \begin{cases} a_n & \text{si } x \neq a_n \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$, alors (u_n) est une suite d'éléments de $C \setminus \{x\}$ qui converge vers x donc x n'est pas isolé.

Théorème 2.1.4: Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, $A \subseteq E$, $a \in \overline{A}$, $f : E \to F$ une fonction définie sur A. Alors $f(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(a_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.

Preuve: Supposons que $f(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} l$. Soit $(a_n) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n}{\longrightarrow} a$. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, soit donc $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap A) \subseteq V$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, a_n \in U \cap A$. Alors $\forall n \geqslant N, f(a_n) \in V$. Ainsi $f(a_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.

Réciproquement, raisonnons par contraposée et supposons qu'il existe $V \in \mathcal{V}(l)$ tel que $\forall U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap A) \nsubseteq V$. En particulier pour $U_n := B\left(a, \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{V}(a)$, on obtient $f(U_n \cap A) \nsubseteq V$. Soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers a. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \geqslant n$ tel que $a_k \in$

$U_n \cap V$ et on a alors $f(a_k) \notin V$. Ainsi $\exists V \in \mathcal{V}(l), \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant n, a_k \notin V$ donc $(f(a_n))$ ne converge pas vers l. ■

Exercice 2.1.10 (⋆ ♥):
1) Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, $f : E \to F$ une application continue et $G = \{(x, f(x)); x \in E\}$. Montrer que G est un fermé de $E \times F$.
2) Trouver une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non continue dont le graphe est fermé.

Solution:
1) Soit $((x_n, f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G qui converge vers $(a, b) \in E \times F$. Alors $x_n \underset{n}{\longrightarrow} a$ et $f(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} b$. De plus par continuité de f, $f(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} f(a)$. Par unicité de la limite, $f(a) = b$ i.e. $(a, b) \in G$. Par caractérisation séquentielle, G est fermé.
2) $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ fonctionne.

Exercice 2.1.11 (⋆): Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une isométrie (i.e. $\forall x, y \in E, \delta(f(x), f(y)) = d(x, y)$). Montrer que $f : E \to f(E)$ est un homéomorphisme.

Solution: Montrons d'abord que f est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, alors $d(x, y) = \delta(f(x), f(y)) = 0$ donc $x = y$. Ainsi f est injective, donc $f : E \to f(E)$ est bijective. De plus, f est 1-lipschitzienne donc continue. Enfin, soient $a = f(x)$ et $b = f(y)$ des éléments de $f(E)$, alors $\delta(a, b) = d(x, y) = d(f^{-1}(a), f^{-1}(b))$ donc $f^{-1} : f(E) \to E$ est une isométrie, et donc f^{-1} est continue d'après ce qui précède. Ceci montre que $f : E \to f(E)$ est un homéomorphisme.

Théorème 2.1.5: Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$. Alors a est une valeur d'adhérence de u ssi il existe une sous-suite de u qui converge vers a.

Preuve:
- Supposons que a est une valeur d'adhérence de u. On définit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par récurrence. On pose $\varphi(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\varphi(n)$ construit. Alors il existe un entier $k \geqslant \varphi(n)$ tel que $u_k \in B\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$, et on pose $\varphi(n+1) = k$. Alors $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge vers a.
- Supposons qu'il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a. Soit $V \in \mathcal{V}(a)$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, u_{\varphi(n)} \in V$. Soit $k \in \mathbb{N}$, soit donc $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant M, \varphi(n) \geqslant k$. Posons $r = \max(N, M)$, alors $\varphi(r) \geqslant k$ et $u_{\varphi(r)} \in V$.

■

Exercice 2.1.12 (⋆): Soit (E, d) un espace métrique. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) Si A, B, C sont trois parties de E telles que $A \subseteq B \subseteq C$ et A et C sont connexes alors B est connexe.
2) Si (F, δ) est un espace métrique, $f : E \to F$ est une application continue et B est une partie connexe de F alors $f^{-1}(B)$ est connexe.
3) Toute boule ouverte de E est connexe.

4) Si E est connexe alors toute boule ouverte de E est connexe.

Solution:
1) Faux : on a un contre-exemple avec $E = \mathbb{R}$, $A = \{0\}$, $B = \{0\} \cup \{1\}$ et $C = [0, 1]$.
2) Faux : on a un contre-exemple avec $E = F = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$ et $B = \{1\}$.
3) Faux : dans $\mathbb{N}$, $B(1, 2) = \{0, 1, 2\}$ qui n'est pas connexe.
4) Faux : soit E la frontière de $[0, 1] \times [0, 2]$, alors E est connexe mais $B\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right), \frac{3}{4}\right)$ n'est pas connexe.

2.2. Compacité

Définition 2.2.1: On dit que (E, d) vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass ssi toute suite d'éléments de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Lemme 2.2.1: On suppose que E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. Alors E est pré-compact, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_1, \dots, x_n \in E, E = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

Preuve: Si E est vide alors $n = 0$ convient. Sinon, raisonnons par l'absurde et supposons $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in E, E \neq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. On construit une suite u par récurrence en prenant $u_0 \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, en supposant $u_0, \dots, u_n$ construits, $u_{n+1} \in E \setminus \bigcup_{i=1}^n B(u_i, \varepsilon)$. Par construction, on a $\forall p, q \in \mathbb{N}, p \neq q \Longrightarrow d(u_p, u_q) \geqslant \varepsilon$ donc (u_n) n'a pas de valeur d'adhérence. ∎

Lemme 2.2.2 *(de la maille)*: On suppose que E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. Alors $\exists r > 0, \forall x \in E, \exists i \in I, B(x, r) \subseteq O_i$.

Preuve: On raisonne par l'absurde et on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E, \forall i \in I, B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq O_i$. Ceci définit une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui possède une valeur d'adhérence a. Soient $j \in I$ tel que $a \in O_j$, puis $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq O_j$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, soit donc $p \geqslant N$ tel que $x_p \in B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Alors $\forall i \in I, B\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \not\subseteq O_i$. Mais $B\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \subseteq B(a, \varepsilon) \subseteq O_j$: absurde. ∎

Théorème 2.2.1: E est compact ssi E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Preuve:
- Supposons que E est compact. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, montrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k ; k \geqslant n\}} \neq \emptyset$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \overline{\{u_k ; k \geqslant n\}}$. Alors (F_n) est une suite de fermés non vides décroissante pour l'inclusion, donc par le lemme des fermés emboîtés, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ donc E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.
- Réciproquement, supposons que E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. D'après le lemme de la maille, on dispose de $r > 0$ tel que $\forall x \in E, \exists i(x) \in I, B(x, r) \subseteq O_{i(x)}$. De plus E est pré-compact donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $E = \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r) \subseteq \bigcup_{k=1}^n O_{i(x_k)}$. Ainsi $\left(O_{i(x_k)}\right)_{k \in [\![1, n]\!]}$ est un sous-recouvrement fini et E vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

∎

Exemple 2.2.1: D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, les segments de $\mathbb{R}$ sont compacts.

Lemme 2.2.3 : Soit K une partie compacte de E. Alors K est bornée.

Preuve: Si $K = \emptyset$ alors K est bornée. Sinon, supposons par l'absurde que K n'est pas bornée. On va construire par récurrence une suite $u \in K^{\mathbb{N}}$ qui n'admet pas de valeur d'adhérence dans K. Soit $u_0 \in K$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons u_n construit. Comme K n'est pas bornée, on dispose de $u_{n+1} \in K$ tel que $d(u_{n+1}, u_0) > d(u_n, u_0) + 1$. Ceci définit la suite u. On montre aisément par récurrence sur p que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, d(u_{n+p}, u_0) \geqslant d(u_n, u_n) + p$. Du coup $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, d(u_{n+p}, u_n) \geqslant d(u_{n+p}, u_0) - d(u_n, u_0) > p$. Ainsi u n'admet pas de valeur d'adhérence. ∎

Lemme 2.2.4 : On suppose que E est compact. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite qui ne possède qu'une valeur d'adhérence. Alors u converge.

Preuve: Notons l la valeur d'adhérence de u et supposons par l'absurde que u ne converge pas vers l. Soit donc $\varepsilon > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, u_n \notin B(l, \varepsilon)$. On construit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par récurrence en prenant $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(0)} \notin B(l, \varepsilon)$ et, en supposant $\varphi(n)$ construit, on prend $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n+1)} \notin B(l, \varepsilon)$. Alors $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ admet une valeur d'adhérence différente de l, ce qui est absurde. ∎

Exercice 2.2.1 (⋆ ⋆): Soient (E, d) un espace métrique compact non vide et $f : E \to E$ une application vérifiant $\forall x, y \in E, x \neq y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

1) a) Montrer que l'application $x \mapsto d(f(x), x)$ s'annule.
   b) En déduire que f admet un unique point fixe, noté l dans la suite.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que la suite $(d(u_n, l))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence k telle que $d(k, l) = d(f(k), l)$.
   c) En déduire que $u_n \underset{n}{\longrightarrow} l$.

Solution :

1)
2) Comme $\psi : x \mapsto d(f(x), x)$ est continue et E est compact, φ admet un minimum, disons au point $l \in E$. Supposons par l'absurde que $l \neq f(l)$, alors $d(f(l), l) = \varphi(l) \leqslant \varphi(f(l)) = d(f(f(l)), f(l)) < d(f(l), l)$, contradiction.
3) L'existence est assurée par la question précédente. Soient l et l' deux points fixes de f. Supposons par l'absurde que $l \neq l'$, alors $d(l, l') = d(f(l), f(l')) < d(l, l')$, contradiction.
4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(u_{n+1}, l) = d(f(u_n), f(l)) < d(u_n, l)$. Ainsi la suite en question est décroissante et minorée, donc converge, disons vers $\alpha \in E$.
   b) Comme E est compact, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $k \in E$. On a $d\left(f\left(u_{\varphi(n)}\right), l\right) \underset{n}{\longrightarrow} d(f(k), l)$ et $d\left(f\left(u_{\varphi(n)}\right), l\right) = d\left(u_{\varphi(n)+1}, l\right) \underset{n}{\longrightarrow} \alpha$. Par unicité de la limite, $d(f(k), l) = \alpha$. De plus, $d\left(u_{\varphi(n)}, l\right) \underset{n}{\longrightarrow} d(k, l)$ et $d\left(u_{\varphi(n)}, l\right) \underset{n}{\longrightarrow} \alpha$ donc $d(f(k), l) = \alpha = d(k, l)$.
   c) Supposons par l'absurde que $k \neq l$, alors $d(k, l) = d(f(k), f(l)) < d(k, l)$, contradiction. Ainsi $k = l$, donc (u_n) admet une unique valeur d'adhérence. Comme E est compact, (u_n) converge.

2.3. Applications lipschitziennes et uniformément continues

Définition 2.3.1: Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $k \in \mathbb{R}_+^*$. Une application $f : E \to F$ est dite k-lipschitzienne ssi $\forall x, y \in E, \delta(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$.

Définition 2.3.2: Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. On dit que f est uniformément continue ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x_0, x \in E, d(x, x_0) \leqslant \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon$.

Lemme 2.3.1:
1) Si f est k-lipschitzienne (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$) alors f est uniformément continue.
2) Si f est uniformément continue alors f est continue.

Preuve:
1) Supposons que f est k-lipschitzienne. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors $\forall x, x_0 \in E, d(x, x_0) \leqslant \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) \leqslant kd(x, x_0) \leqslant k\alpha = \varepsilon$ donc f est continue.
2) Trivial.

■

Lemme 2.3.2:
1) $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ est 2-lipschitzienne.
2) Soit $x_0 \in E$. Alors l'application $x \mapsto d(x, x_0)$ est 1-lipschitzienne.
3) Soit $A \subseteq E$. Alors l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Preuve:
1) Soient $(x, y), (x', y') \in E^2$, alors $|d(x, y) - d(x', y')| \leqslant d(x, x') + d(y, y') \leqslant 2d((x, y), (x', y'))$.
2) Soient $x, y \in E$, alors $|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leqslant d(x, y)$.
3) Soient $x, y \in E$. Alors pour tout $a \in A$, $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$ donc $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$. Par symétrie, on en déduit $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$.

■

Théorème 2.3.1 (de Heine): Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue. On suppose que E est compact. Alors f est uniformément continue.

Preuve: On suppose par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $x, y \in E^{\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$. Soit $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ une suite extraite qui converge vers $a \in E$, alors $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ converge également vers a. Par continuité, $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)$ et $\left(f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right)$ converge vers $f(a)$, donc $\delta\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right), f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) \underset{n}{\longrightarrow} 0$: absurde. ■

2.4. Complétude

Définition 2.4.1: Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est une suite de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, d(u_p, u_q) < \varepsilon$.

Remarque 2.4.1: La notion de suite de Cauchy est une notion métrique et non topologique : on peut avoir deux distances équivalentes telles qu'une suite est une suite de Cauchy pour l'une des distances mais pas pour l'autre. Par exemple, $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, d)$ où $d : (x, y) \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|$ mais pas pour la distance usuelle.

Lemme 2.4.1: Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors u est une suite de Cauchy.

Preuve: On note l la limite de u. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, d(u_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $\forall p, q \geqslant N, d(u_p, u_q) \leqslant d(u_p, N) + d(u_q, N) < \varepsilon$. Ainsi u est une suite de Cauchy. ■

Lemme 2.4.2: Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors u est bornée.

Preuve: Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N, d(u_p, u_q) < 1$. Alors $\forall n \geqslant N, d(u_n, u_N) < 1$. Soit $R = \max\{d(u_k, u_N), 0 \leqslant k \leqslant N\} + 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, d(u_n, u_N) < R$ donc u est bornée. ■

Lemme 2.4.3: Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence a. Alors u converge vers a.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N, d(u_p, u_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. On a $a \in \overline{\{u_n ; n \geqslant N\}}$ donc il existe $p \geqslant N$ tel que $d(a, u_p) < \frac{\varepsilon}{2}$. Du coup, si $q \geqslant N$ alors $d(a, u_q) \leqslant d(a, u_p) + d(u_p, u_q) < \varepsilon$. Ainsi u converge vers a. ■

Définition 2.4.2: On dit que E est complet ssi toutes les suites de Cauchy de E convergent.

Si $A \subseteq E$, on dit que A est une partie complète de E ssi (A, d_A) est un espace complet.

Remarque 2.4.2: La complétude est intrinsèque.

Lemme 2.4.4: Si (E, d) est compact alors il est complet.

Preuve: Si (E, d) est compact alors toute suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, donc converge. ■

Lemme 2.4.5: Soit $F \subseteq E$ une partie complète de E. Alors F est un fermé de E.

Preuve: Soit $u \in F^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge dans E. Alors u est une suite de Cauchy dans E, donc c'est une suite de Cauchy dans F, donc elle converge dans F. Ainsi F est fermée dans E. ■

Lemme 2.4.6: Soient (E, d) un espace métrique complet et $F \subseteq E$. Alors F est complet ssi F est un fermé de E.

Preuve: Le sens direct est déjà connu. Réciproquement, soit $u \in F^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors u converge dans E, mais F est fermé donc sa limite est dans F. Ainsi F est complet. ■

Lemme 2.4.7:

1) Une intersection (non vide) de parties complètes de E est une partie complète de E.
2) Une union finie de parties complètes de E est une partie complète de E.

Preuve:
1) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties complètes de E, qui sont fermées d'après ce qui précède. Soit $j \in I$, alors $\bigcap_{i\in I} C_i$ est un fermé de C_j et C_j est complet donc $\bigcap_{i\in I} C_i$ est complet.
2) Soient $C_1, ..., C_n$ des parties complètes de E et $C = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$. Soit u une suite de Cauchy d'éléments de C. Il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que C_i contient une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette sous-suite est de Cauchy, donc converge. Ainsi u admet une valeur d'adhérence, donc converge.

■

Exercice 2.4.1 (⋆ ♥): Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, et $f : E \to F$ un homéomorphisme uniformément continu. Montrer que si F est complet alors E est complet.

Solution : Supposons que F est complet. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in E, d(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N$, $d(u_p, u_q) < \alpha$. Alors $\forall p, q \geqslant N, \delta(f(u_p), f(u_q)) < \varepsilon$. Ainsi $f \circ u$ est une suite de Cauchy, donc converge vers $L \in F$. Comme f est surjective, il existe $l \in E$ tel que $L = f(l)$.

Montrons que u converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $\alpha > 0$ tel que $\forall y \in F, \delta(y, L) < \alpha \Longrightarrow d(f^{-1}(y), l) < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \delta(f(u_n), L) < \alpha$. Alors $\forall n \geqslant N, d(u_n, l) < \varepsilon$ donc u converge vers l. Ainsi E est complet.

Théorème 2.4.1 (des fermés emboités) : On suppose que (E, d) est complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de E dont les diamètres tendent vers 0. Alors $\exists x \in E, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Preuve: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $u_n \in F_n$. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(F_N) < \varepsilon$. Comme les fermés sont emboîtés, on a pour tous $p, q \geqslant N$, $u_p \in F_N$ et $u_q \in F_N$, donc $d(u_p, u_q) < \varepsilon$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc converge vers $x \in E$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le fermé F_p à partir d'un certain rang, donc $x \in F_p$. Ainsi $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p$. Soit $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_p$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, d(x, y) \leqslant \delta(F_p)$ donc $x = y$. Ainsi $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p = \{x\}$. ■

Exercice 2.4.2 (⋆ ⋆): Soit (E, d) un espace métrique. On suppose que pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides de E dont les diamètres tendent vers 0, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Montrer que (E, d) est complet.

Solution : Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \overline{U_n}$ où $U_n := \{u_k ; k \geqslant n\}$. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E.

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que $\delta(F_n) = \delta(U_n)$. Déjà, $\delta(F_n) \geqslant \delta(U_n)$. Soient $a, b \in F_n$, $\varepsilon > 0$, puis $a', b' \in U_n$ tels que $d(a, a') \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b, b') \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $d(a, b) \leqslant \varepsilon + d(a', b') \leqslant \varepsilon + \delta(U_n)$. Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$ donc $d(a, b) \leqslant \delta(U_n)$, puis $\delta(F_n) \leqslant \delta(U_n)$.

Ainsi $\delta(F_n) = \delta(U_n)$. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N, d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$. Alors $\delta(U_n) \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\delta(F_n) = \delta(U_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Par hypothèse, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ i.e. u admet une valeur d'adhérence, donc converge.

Lemme 2.4.8: Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, D une partie dense de E et $f : D \to F$ une application uniformément continue. On suppose que (F, δ) est complet. Alors il existe un unique prolongement continu de f sur E.

Preuve: Soit $x \in E$, soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n}{\longrightarrow} x$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $\alpha > 0$ tel que $\forall y, y' \in D, d(y, y') < \alpha \Longrightarrow \delta(f(y), f(y')) < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N, d(u_p, u_q) < \alpha$. Alors $\forall p, q \geqslant N, \delta(f(u_p), f(u_q)) < \varepsilon$. Ainsi $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Mais F est complet donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, disons vers $l(x) \in F$. De plus pour tout $x \in D$, $l(x) = f(x)$. On a donc construit $l : E \to F$ qui prolonge f.

Montrons que l est continue. Soit $x \in E$. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $\alpha > 0$ tel que $\forall y, y' \in D, d(y, y') < \alpha \Longrightarrow \delta(f(y), f(y')) < \varepsilon$. Soit $y \in E$ tel que $d(x, y) < \alpha$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de D qui convergent vers x et y respectivement. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, d(x_n, x) \leqslant \frac{\alpha}{4} \land d(y_n, y) \leqslant \frac{\alpha}{4}$. Alors $\forall n \geqslant N, d(x_n, y_n) \leqslant \frac{\alpha}{2} + d(x, y) < \alpha$. Du coup $\forall n \geqslant N, \delta(f(x_n), f(y_n)) \leqslant \varepsilon$ donc en passant à la limite, $\delta(l(x), l(y)) \leqslant \varepsilon$. Finalement l est continue.

Montrons que l est unique. Supposons que l'on dispose de deux prolongements continus l et l' de f sur E. Soient $x \in E$, puis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x. Alors $l(x) = \lim_{n\to\infty} l(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} l'(x_n) = l'(x)$. ■

Théorème 2.4.2 (Critère de Cauchy): Soient (E, d) un espace métrique, (F, δ) un espace métrique complet, $A \subseteq E$, $a \in \overline{A}$ et $f : E \to F$ une fonction définie sur A. Alors f admet une limite en a en restant dans A ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, (d(x, a) < \alpha \land d(y, a) < \alpha) \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Preuve:
- Supposons que f converge vers l en a en restant dans A. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in A, d(x, a) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $\forall x, y \in A, (d(x, a) < \alpha \land d(y, a) < \alpha) \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) \leqslant \delta(f(x), l) + \delta(f(y), l) < \varepsilon$.
- Réciproquement, supposons $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, (d(x, a) < \alpha \land d(y, a) < \alpha) \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers a. Alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc converge, d'où le résultat par caractérisation séquentielle.

■

Théorème 2.4.3 (du point fixe): On suppose que (E, d) est complet. Soit $f : E \to E$ une application contractante, i.e. k-lipschitzienne où $k < 1$. Alors f admet un unique point fixe $a \in E$.

De plus, si $u \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ alors u converge vers a.

Preuve:
- Unicité : si a et b sont deux points fixes de f alors $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leqslant kd(a, b)$ donc $d(a, b) = 0$ i.e. $a = b$.
- Existence : soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, d(u_{n+1}, u_n) \leqslant k^n d(u_1, u_0)$. Du coup $\forall n, m \in \mathbb{N}, d(u_{n+m}, u_n) \leqslant \sum_{i=1}^{m} d(u_{n+i}, u_{n+i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} k^{n+i-1} d(u_1, u_0) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u_0)$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un certain $l \in E$. Mais f est lipschitzienne donc continue, et donc $f(l) = l$ i.e. $l = a$. Ceci achève la preuve.

■

Théorème 2.4.4 (de Baire): On suppose que (E, d) est complet. Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Preuve: Soient $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses de E et V un ouvert de E. Montrons que $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$. On construit par récurrence une suite de boules $(B_f(x_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}}$.
- $O_0 \cap V$ est un ouvert non vide de E donc il existe une boule fermée $B_0 := B_f(x_0, r_0) \subseteq O_0 \cap V$. On suppose sans perte de généralité $r_0 < 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe une boule fermée $B_k = B_f(x_k, r_k) \subseteq \bigcap_{i=0}^{k} O_i \cap V$ avec $r_k < \frac{1}{k+1}$, avec de plus $\forall k \in [\![0, n-1]\!], B_{k+1} \subseteq B_k$. Alors $B(x_n, r_n) \cap V \cap O_{n-1}$ est un ouvert non vide, donc il contient une boule $B_{n+1} = B_f(x_{n+1}, r_{n+1})$ avec $r_{n+1} < \frac{1}{n+2}$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0, donc $\exists x \in E, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x\}$. Par construction, $x \in V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, CQFD. ■

Remarque 2.4.3: En passant au complémentaire, on en déduit que si (E, d) est complet alors toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Exercice 2.4.3 (⋆ ⋆ ♥): Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, et $f : E \to F$.
1) Pour tout $x \in E$, on note $\omega(x) = \inf\{\operatorname{diam}(f(U)) ; U \in \mathcal{V}(x)\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ (où diam désigne le diamètre). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \left\{x \in E, \omega(x) < \frac{1}{n}\right\}$. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n est un ouvert de E.
2) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est une réunion dénombrable de fermés de E.
3) Montrer à l'aide du théorème de Baire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution:

1) Soit $x \in V_n$, soit donc $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n}$. On peut supposer que U est ouvert et on a alors $\forall y \in U, U \in \mathcal{V}(y)$. Du coup, $\operatorname{diam}(f(U)) \in \{\operatorname{diam}(f(V)) ; V \in \mathcal{V}(y)\}$ donc $\omega(y) \leqslant \operatorname{diam}\ (f(U)) < \frac{1}{n}$ et donc $y \in V_n$. Ainsi $U \subseteq V_n$ donc $V_n \in \mathcal{V}(x)$. Du coup V_n est un voisinage de tous ses points, donc c'est un ouvert.
2) On remarque que f est continue en x ssi $\omega(x) = 0$. Du coup, l'ensemble des points de discontinuité de f est égal à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E \setminus V_n)$: c'est une réunion dénombrable de fermés de E.
3) Supposons par l'absurde qu'une telle fonction existe. D'après la question précédente, on peut écrire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ où les F_n sont des fermés de $\mathbb{R}$. Les F_n sont inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc d'intérieur vide. Mais alors $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)$ est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Comme $\mathbb{R}$ est complet, on a par le théorème de Baire, on en déduit que $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide : absurde.

Lemme 2.4.9: Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, et $f : E \to F$ une isométrie. Soit A une partie complète de E. Montrer que $f(A)$ est complet.

Preuve: Soit $u \in f(A)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend $v_n \in A$ tel que $u_n = f(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N, \delta(u_p, u_q) < \varepsilon$. Alors $\forall p, q \geqslant N, d(v_p, v_q) = \delta(u_p, u_q) < \varepsilon$ donc v est une suite de Cauchy. Du coup, elle converge vers $l \in A$.

Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, d(v_n, l) < \varepsilon$. Alors $\forall n \geqslant N, \delta(u_n, f(l)) < \varepsilon$ donc u converge vers $f(l) \in f(A)$ et $f(A)$ est complet. ∎

Définition 2.4.3: Soit (E, d) un espace métrique. On appelle complété de (E, d) tout espace métrique complet (F, δ) tel qu'il existe une isométrie $i : E \to F$ telle que $i(E)$ est dense dans F.

Théorème 2.4.5: Soient (E, d) un espace métrique, et (F, δ) et (G, ∂) deux complétés de E. Soient donc $i : E \to F$ et $i' : E \to G$ deux isométries telles que $i(E)$ est dense dans F et $i'(E)$ est dense dans G. Alors il existe une isométrie bijective $\varphi : (F, \delta) \to (G, \partial)$ telle que $i' = \varphi \circ i$.

Preuve: Comme i est injective, on peut définir

$$f : \begin{cases} i(E) \to G \\ y \quad\ \ \mapsto i'(i^{-1}(y)) \end{cases}$$

Alors f est une isométrie, donc f est uniformément continue. De plus $i(E)$ est dense dans F et G est complet donc on peut prolonger f par une application $\varphi : F \to G$ continue. On a $\forall x \in E, \varphi \circ i(x) = i'(i^{-1}(i(x))) = i'(x)$.

Montrons que φ est une isométrie. Soient $a, b \in F$. Comme $i(E)$ est dense dans F, on dispose de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telles que $i(a_n) \underset{n}{\longrightarrow} a$ et $i(b_n) \underset{n}{\longrightarrow} b$. Comme φ est continue, $i'(a_n) = \varphi(i(a_n)) \underset{n}{\longrightarrow} \varphi(a)$ et $i'(b_n) = \varphi(i(b_n)) \underset{n}{\longrightarrow} \varphi(b)$. Comme i et i' sont des isométries, $\partial(i'(a_n), i'(b_n)) = d(a_n, b_n) = \delta(i(a_n), i(b_n))$ donc en passant à la limite, on obtient $\partial(\varphi(a), \varphi(b)) = \delta(a, b)$.

Ainsi φ est une isométrie, donc elle est injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Par un lemme précédent, $\varphi(F)$ est complet, donc c'est un fermé de G. De plus, $i'(E) = \varphi(i(E)) \subseteq \varphi(F)$, donc $G = \overline{i'(E)} \subseteq \varphi(F)$. Finalement φ est surjective. ■

Théorème 2.4.6: Tout espace métrique (E, d) admet un complété.

Preuve: Pour toutes suites de Cauchy $u, v \in E^{\mathbb{N}}$, on note $u \sim v$ ssi $d(u_n, v_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$. On vérifie facilement que $\sim$ est une relation d'équivalence. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation. On définit une injection $i : E \to \mathcal{C}$ en notant $i(x)$ la classe d'équivalence de la suite constante égale à x (qui est bien une suite de Cauchy).

Soient $u, v \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = d(u_n, v_n) \in \mathbb{R}_+$. Alors $\forall p, q \in \mathbb{N}, |w_p - w_q| = |d(u_p, v_p) - d(u_q, v_q)| \leqslant |d(u_p, v_p) - d(u_p, v_q)| + |d(u_p, v_q) - d(u_q, v_q)| \leqslant d(v_p, v_q) + d(u_p, u_q)$. On en déduit facilement que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge dans $\mathbb{R}$. De plus, si $u \sim s$ et $v \sim t$ alors $|d(u_n, v_n) - d(s_n, t_n)| \leqslant d(u_n, s_n) + d(v_n, t_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Tout ceci permet de définir $\delta : \mathcal{C}^2 \to \mathbb{R}_+$ par $\forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathcal{C}, \delta(\overline{u}, \overline{v}) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n)$. On vérifie facilement que $(\mathcal{C}, \delta)$ est un espace métrique et $i : E \to \mathcal{C}$ est une isométrie.

Montrons que $i(E)$ est dense dans $\mathcal{C}$. Soit $\overline{u} \in \mathcal{C}$. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, d(u_N, u_n) \leqslant \varepsilon$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_N)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suite de Cauchy, $(d(u_N, u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite inférieure à ε. Ainsi $\delta(i(u_N), \overline{u}) \leqslant \varepsilon$ donc $\overline{u} \in \overline{i(E)}$.

Montrons que $\mathcal{C}$ est complet. Soit $(\overline{u}_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Comme $i(E)$ est dense dans $\mathcal{C}$, on a $\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists x_p \in E, \delta(i(x_p), \overline{u}_p) \leqslant \frac{1}{p}$. Mais alors $\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \delta(i(x_p), i(x_q)) \leqslant \delta(i(x_p), \overline{u}_p) + \delta(\overline{u}_p, \overline{u}_q) + \delta(i(x_q), \overline{u}_q) \leqslant \frac{1}{p} + \delta(\overline{u}_p, \overline{u}_q) + \frac{1}{q}$. De plus $\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \delta(i(x_p), i(x_q)) = d(x_p, x_q)$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc E. Notons $\overline{x}$ sa classe dans $\mathcal{C}$. On a $\forall p \in \mathbb{N}^*, \delta(\overline{u}_p, \overline{x}) \leqslant \delta(i(x_p), \overline{u}_p) + \delta(i(x_p), \overline{x}) \leqslant \frac{1}{p} + \delta(i(x_p), \overline{x})$. Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant p, d(x_p, x_n) \leqslant \varepsilon$. En passant à la limite, on obtient $\lim_{n\to\infty} d(x_p, x_n) \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\delta(i(x_p), \overline{x}) \leqslant \varepsilon$ et donc $(\overline{u}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{x}$. Finalement $\mathcal{C}$ est complet. ■

3. Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1. Généralités

Définition 3.1.1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme ssi elle vérifie :
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|$;
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$;
- $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Dans ce cas, on dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Exemple 3.1.1:
- Sur $\mathbb{K}^n$, on dispose des normes $\|\cdot\|_p$ pour $p \in [1, \infty]$ (cf espaces L^p).
- En identifiant $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{mn}$, on dispose aussi des normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. En particulier, $\|A\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $p, q \in [1, \infty]$, on peut définir $\|A\|_{p,q} = \|(\|C_1\|_p, ..., \|C_n\|_p)\|_q$ où $C_1, ..., C_n$ sont les colonnes de A.
- On dispose aussi des normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{K}[X]$.
- Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E alors $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur E.

Désormais, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Remarque 3.1.1: $\|0\| = 0$

Lemme 3.1.1 : $\forall x, y \in E, |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Lemme 3.1.2 : Soient $(E_1, \|\cdot\|_1), ..., (E_n, \|\cdot\|_n)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On note $E = E_1 \times ... \times E_n$ et pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, on pose $\|x\| = \max(\|x_1\|, ..., \|x_n\|)$. Alors l'application $\|\cdot\|$ ainsi définie est une norme sur E, dont la distance associée est la distance produit des distances associées aux normes $\|\cdot\|_i$.

Lemme 3.1.3 : On pose pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = \|x - y\|$. Alors (E, d) est un espace métrique.

Définition 3.1.2 : Soit $A \subseteq E$. On dit que A est étoilée ssi $\exists x \in A, \forall y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda) y \in A$.

Lemme 3.1.4 : Si A est étoilée alors A est connexe par arcs.

Définition 3.1.3 : Soit $A \subseteq E$. On dit que A est convexe ssi $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda) y \in A$.

Remarque 3.1.2:
- Si A est convexe alors A est étoilée, donc connexe par arcs, donc connexe.
- E est convexe donc connexe. En particulier, les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

Exemple 3.1.2: L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas convexe (considérer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) mais étoilée car si A est diagonalisable alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, tA est diagonalisable.

Lemme 3.1.5: Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|\ N(x)$;
- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Alors N est une norme ssi $\{x \in E, N(x) \leqslant 1\}$ est convexe.

Preuve:

- Supposons que N est une norme. Soient $x, y \in \{x \in E, N(x) \leqslant 1\}$ et $t \in [0, 1]$. Alors $N((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)N(x) + tN(y) \leqslant 1$. Ainsi $\{x \in E, N(x) \leqslant 1\}$ est convexe.
- Réciproquement, supposons que $\{x \in E, N(x) \leqslant 1\}$ est convexe. Soient $x, y \in E$, montrons que $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, c'est évident. Sinon, on note $u = \frac{x}{N(x)}$, $v = \frac{y}{N(y)}$. et $t = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)} \in]0, 1[$. Par hypothèse $N(tu + (1-t)v) \leqslant 1$. Mais $N(tu + (1-t)v) = \frac{N(x+y)}{N(x)+N(y)}$, d'où le résultat.

■

Théorème 3.1.1: Soit $p \in [1, \infty]$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty \\ \max(|x_1|, ..., |x_n|) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Preuve: La séparation et l'homogénéité sont claires. Soient $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$.

- Si $p = \infty$ alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$ donc $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.
- Sinon, on va montrer que $\left\{x \in E, \|x\|_p \leqslant 1\right\}$ est convexe, ce qui permettra de conclure par le lemme précédent. On suppose que $\|x\|_p \leqslant 1$ et $\|y\|_p \leqslant 1$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a par convexité de $z \mapsto z^p$ sur $\mathbb{R}_+$, $|\lambda x_i + (1-\lambda)y_i|^p \leqslant (\lambda\ |x_i| + (1-\lambda)|y_i|)^p \leqslant \lambda\ |x_i|^p + (1-\lambda)\ |y_i|^p$. En sommant ces inégalités, on obtient $\|\lambda x_i + (1-\lambda)y_i\ \|_p^p \leqslant \lambda\ \|x\|_p^p + (1-\lambda)\ \|y\|_p^p \leqslant 1$, CQFD.

■

Exercice 3.1.1 (⋆):

1) Dire si les applications suivantes sont des normes.
   a) $$N_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto |x + 3y| \end{cases}$$
   b) $$N_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \max(|x + 3y|, |x - y|) \end{cases}$$
   c) $$N_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R} \\ P & \mapsto |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| \end{cases}$$

d) $$N_4 : \begin{cases} \mathcal{C}_{pm}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \qquad\qquad\qquad \mapsto \int |f| \end{cases}$$

e) i) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que F est muni d'une norme $\|\cdot\|$. On pose pour tout $x \in E$, $N(x) = \|u(x)\|$. À quelle condition sur u l'application N est-elle une norme ?

ii) En utilisant la question précédente, montrer d'une autre manière que les normes que vous avez identifiées à la question 1 sont bien des normes.

Solution:
1)
2) Non car $N_1(-3,1) = 0$.
3) Oui, vérification aisée.
4) Oui, vérification aisée.
5) Non car si f est nulle sauf en un nombre fini de points alors $N_4(f) = 0$.
6) a) On voit aisément que N est une norme ssi u est injectif.
   b) La question précédente s'applique aux normes N_2, N_3 et N_5 avec :
   - pour la norme N_2, $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2$, $u : (x,y) \mapsto (x+3y, x-y)$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$;
   - pour la norme N_3, $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}^3$, $u : P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

Exercice 3.1.2 (⋆): Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $N(x,y) = \max\left\{\left|\frac{2y}{\sqrt{3}}\right|, \left|x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right|, \left|x - \frac{y}{\sqrt{3}}\right|\right\}$.
1) Montrer que N est une norme.
2) Déterminer sa boule unité.
3) Trouver une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont la boule unité est un octogone.

Solution:
1) Aisé.
2) Il s'agit de l'hexagone régulier de côtés de longueur 1 et centré sur l'origine.
3) On peut prendre $N(x,y) = \max\left\{|x|, |y|, \frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\right\}$.

Exercice 3.1.3 (⋆): Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Pour tout $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $N(X) = a_1\ |x_1| + ... + a_n |x_n|$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $a_1, ..., a_n$ pour que N soit une norme sur E.

Solution:
- Supposons que N est une norme. Alors pour tout k, $a_k > 0$, car sinon $N(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \leqslant 0$.
- Réciproquement, si pour tout k, $a_k > 0$ alors on vérifie aisément que N est une norme.

Remarque 3.1.3: Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il admet une base $(e_i)_{i \in I}$. Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\| = \|(\alpha_1, ..., \alpha_n)\|_p$ pour $p \in [1, \infty]$, où $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont les uniques éléments de $\mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{k_i}$. Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

Exercice 3.1.4 (⋆ ⋆): Montrer que

$$N:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto \sqrt{ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2}\end{cases}$$

est une norme ssi $a>0$ et $b^2-4ac<0$.

Solution: On vérifie d'abord que N est bien définie ssi ($a>0$ et $b^2-4ac\leqslant 0$) ou ($a=b=0$ et $c\geqslant 0$). Si $a=b=0$ et $c\geqslant 0$, on voit aisément que N n'est pas une norme. De même si $a>0$ et $b^2-4ac=0$ alors N n'est pas une norme. Si $a>0$ et $b^2-4ac<0$ alors N est la norme associée au produit scalaire $((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto ax_1y_1+\frac{b}{2}(x_1y_2+x_2y_1)+cx_2y_2$.

Lemme 3.1.6: Soient $c\in E$ et $r>0$. Alors $\overline{B(c,r)}=B_f(c,r)$ et $\overset{\circ}{\overbrace{B_f(c,r)}}=B(c,r)$.

Preuve:

- Comme $B_f(c,r)$ est un fermé contenant $B(c,r)$, on a immédiatement $\overline{B(c,r)}\subseteq B_f(c,r)$. Soit $x\in B_f(c,r)\setminus B(c,r)$, alors $\|x-c\|=r$. Soit $R>0$, montrons que $B(x,R)\cap B(c,r)\neq\emptyset$. Notons pour tout $t\in]0,1[$, $y(t)=(1-t)x+tc$. Alors $\|y(t)-c\|=(1-t)\ \|x-c\|=(1-t)r<r$ donc $y(t)\in B(c,r)$. De plus $\|x-y(t)\|=t\|x-c\|=tr$ donc pour $t=\min\left(\frac{1}{2},\frac{R}{2r}\right)$, on a $y(t)\in B(x,R)$. Ainsi $B(x,R)\cap B(c,r)\neq\emptyset$.
- Comme $B(c,r)$ est un ouvert inclus dans $B_f(c,r)$, on a immédiatement $B(c,r)\subseteq\overset{\circ}{\overbrace{B_f(c,r)}}$. Soit $x\in\overset{\circ}{\overbrace{B_f(c,r)}}$, soit donc $\varepsilon>0$ tel que $B(x,\varepsilon)\subseteq B_f(c,r)$. Soit $y=c+\left(1+\frac{\varepsilon}{2r}\right)(x-c)$, alors $\|y-x\|=\frac{\varepsilon}{2r}\ \|x-c\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, donc $y\in B(x,\varepsilon)$. Du coup $y\in B_f(c,r)$ i.e. $\|y-c\|\leqslant r$. Or $\|y-c\|=\left(1+\frac{\varepsilon}{2r}\right)\|x-c\|$ donc $\|x-c\|<r$. Ainsi $x\in B(c,r)$.

■

Remarque 3.1.4: Le résultat est faux en général dans les espaces métriques. Par exemple, dans $\mathbb{Z}$ muni de la distance induite par la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, $\overline{B(0,1)}=\overline{\{0\}}=\{0\}\neq\{-1,0,1\}=B_f(0,1)$.

Exercice 3.1.5 (⋆ ⋆ ⋆): Soit $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1) Soient $c\in E$ et $\lambda,r\in\mathbb{R}_+^*$. Alors $\lambda B(c,r)=B(c,\lambda r)$.
2) Soient $x,y\in E$ tels que $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Alors x et y sont colinéaires.
3) Soient $x,y\in E$. Alors $\|x+y\|+\|x-y\|\geqslant\|x\|+\|y\|$.
4) Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\forall P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\|P^{-1}AP\|=\|A\|$.

Solution:

1) Faux : si $E=\mathbb{R}$, $\lambda=2$ et $c=r=1$ alors $\lambda B(c,r)=\lambda]0,2[=]0,4[$ et $B(c,\lambda r)=]-1,3[$.
2) Faux : si $(E,\|\cdot\|)=(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$, $x=(1,0)$ et $y=(1,1)$ alors $\|x+y\|=2=\|x\|+\|y\|$ mais x et y ne sont pas colinéaires.
3) Vrai : $\|x\|+\|y\|=\frac{1}{2}(\|(x+y)+(x-y)\|+\|(x+y)+(y-x)\|)\leqslant\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|+\|x+y\|+\|y-x\|)=\|x+y\|+\|x-y\|$.
4) Faux : soient $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit $e=(e_1,e_2)$ la base $\left(\left(\frac{1}{2},0\right),(0,1)\right)$. Alors $u(e_1)=(0,0)$ et $u(e_2)=2e_1$. La matrice de u

dans la base e est donc $2A$. Ainsi A est semblable à $2A$. Si une telle norme existait on aurait $\|2A\| = \|A\|$, absurde.

Exercice 3.1.6 (⋆ ⋆): Soit E l'ensemble des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Les parties suivantes de E sont-elles ouvertes ? fermées ?
1) A, l'ensemble des suites convergeant vers 0.
2) B, l'ensemble des suites à termes strictement positifs.
3) C, l'ensemble des suites constantes.

Solution:
1) Soit $u \in E \setminus A$, soit donc $\varepsilon > 0$ tel que $|u_n| > \varepsilon$ pour une infinité d'entiers n. Soit $v \in B(u, \frac{\varepsilon}{2})$, alors pour une infinité d'entiers n, $|v_n| \geqslant |u_n| - |v_n - u_n| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$, donc $v \in E \setminus A$. Ainsi $B(u, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq E \setminus A$. On a montré que $E \setminus A$ est ouvert, donc A est fermé et non ouvert.
2) • Montrons que B n'est pas ouvert. Soit $u = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in B$. Soit $r > 0$, montrons que $B(u,r) \not\subseteq B$. On pose $v_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leqslant \frac{1}{r}+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors la suite v ainsi définie est dans $B(u,r)$, car $\|u - v\|_\infty = \frac{1}{\lfloor\frac{1}{r}\rfloor+2} < r$, mais v n'est pas dans B.
   • Montrons que B n'est pas fermé, i.e. que $E \setminus B$ n'est pas ouvert. Soit u la suite nulle, qui est dans $E \setminus B$. Soit $r > 0$, montrons que $B(u,r) \not\subseteq E \setminus B$. Soit v la suite constante égale à $\frac{r}{2}$, alors $v \in B(u,r)$ mais $v \notin E \setminus B$.
3) Montrons que C est fermé, i.e. que $E \setminus C$ est ouvert. Soit $u \in E \setminus C$, soient donc $n < m$ tels que $u_n \neq u_m$. Soit $r = \frac{|u_n - u_m|}{2} > 0$, montrons que $B(u,r) \subseteq E \setminus C$. Soit $v \in B(u,r)$, alors $|v_n - v_m| \geqslant |u_n - u_m| - |u_n - v_n| - |u_m - v_m| \geqslant 2r - 2\|u - v\|_\infty > 0$ donc $v_n \neq v_m$ et $v \in E \setminus C$. Ainsi C est fermé et non ouvert.

Exercice 3.1.7 (⋆): Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.
1) Montrer que F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2) Montrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Solution:
1) Soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $f \in E$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(0)| = |f(0) - f_n(0)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$, or $\|f - f_n\|_\infty \underset{n}{\longrightarrow} 0$ donc $f(0) = 0$ i.e. $f \in F$. Ainsi F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2) Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} nf(\frac{1}{n})x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

   Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in F$ et $\|f_n - f\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f(x) - nf(\frac{1}{n})x| \, dx \leqslant \frac{1}{n} \, \|f\|_\infty + n \, \|f\|_\infty \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{1}{n} \, \|f\|_\infty \times \frac{3}{2} \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Ceci montre que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Lemme 3.1.7: On munit E^2 de la norme produit. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors les applications $s : \begin{cases} E^2 & \to E \\ (x,y) & \mapsto x+y \end{cases}$ et $m_\lambda : \begin{cases} E & \to E \\ x & \mapsto \lambda x \end{cases}$ sont continues.

Preuve:
- Soient $(x,y),(x',y') \in E^2$, alors $\|(x+y)-(x'+y')\| \leqslant \|x-x'\| + \|y-y'\| \leqslant 2\mathcal{N}((x,y)-(x',y'))$. Ainsi s est 2-lipschitzienne donc continue.
- Soient $x,y \in E$, alors $\|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \cdot \|x-y\|$. Ainsi m_λ est $|\lambda|$-lipschitzienne donc continue.

■

Théorème 3.1.2: Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et $(F,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-EVN. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications continues et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f+g$ est continue et λf est continue.

Preuve: $f+g = s \circ \varphi$ où $\varphi : x \mapsto (f(x), g(x))$ et $s : (x,y) \mapsto x+y$, or s et φ sont continues donc $f+g$ est continue. $\lambda f = m_\lambda \circ f$, or m_λ et f sont continues donc f est continue. ■

Preuve: Les applications $p : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \to \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto xy \end{cases}$ et $d : \begin{cases} \mathbb{K}\times\mathbb{K}^* & \to \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto \frac{x}{y} \end{cases}$ sont continues. ■

Preuve:
- Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{K}^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha < 1$ et $\alpha < \frac{\varepsilon}{1+|y_0|+|x_0|}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ tel que $|x-x_0| < \alpha$ et $|y-y_0| < \alpha$. Alors $|p(x,y)-p(x_0,y_0)| = |xy - x_0y_0| = |xy - x_0y + x_0y - x_0y_0| \leqslant |y| \times |x-x_0| + |x_0| \times |y-y_0| \leqslant (\alpha+|y_0|)\alpha + |x_0|\ \alpha < \varepsilon$.
- Il suffit de montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue. Soit $x_0 \in \mathbb{K}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $0 < \alpha < \min\left(\frac{|x_0|}{2}, \frac{(|x_0|^2)}{2}\varepsilon\right)$. Soit $x \in \mathbb{K}^*$ tel que $|x-x_0| < \alpha$. Alors $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = |\frac{x_0-x}{xx_0}| \leqslant \frac{|x-x_0|}{(|x_0|-|x_0-x|)|x_0|} \leqslant \frac{\alpha}{(|x_0|-\alpha)|x_0|} < \varepsilon$.

■

Exemple 3.1.3:
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $x \mapsto P(x)$ est continue.
- Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ est continue (là où elle est définie).
- La trace et le déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont continus.

Remarque 3.1.5: Si E est une algèbre normée (i.e. E est une algèbre et $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative) alors le même raisonnement montre que $p : \begin{cases} E^2 & \to E \\ (x,y) & \mapsto xy \end{cases}$ est continue.

Lemme 3.1.8: Soit F un SEV de E. Alors :
- $\overline{F}$ est un SEV de E ;
- $\mathring{F} = \emptyset$ ou $\mathring{F} = E$.

Preuve:
- Déjà, $F \subseteq \overline{F}$ donc $\overline{F} \neq \emptyset$. Soient $x,y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $(x_n),(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ des suites qui convergent vers x et y respectivement. Alors $\lambda x_n + y_n \underset{n}{\longrightarrow} \lambda x + y$ donc $\lambda x + y \in \overline{F}$.
- Supposons que $\mathring{F} \neq \emptyset$ et montrons que $\mathring{F} = F$. Soit $x \in \mathring{F}$, soit donc $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq F$. Soit $y \in B(0,r)$, alors $x+y \in B(x,r) \subseteq F$, donc $y \in F$. Ainsi $B(0,r) \subseteq F$. Soit $u \in E$, alors $\frac{r}{\|u\|+1} u \in B(0,r) \subseteq F$ donc $u \in F$. Ainsi $F = E$ puis $\mathring{F} = E$.

■

Exercice 3.1.8 (⋆): Soit E l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $X = \{f \in E ; f(A) = \{0\}\}$. Montrer que $\mathrm{Fr}(X) = X$.

Solution: Déjà, X est un SEV strict de E donc $\mathring{X} = \emptyset$. Il suffit donc de montrer que X est fermé. Soit (f_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $f \in E$. Soit $a \in A$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(a)| = |f(a) - f_n(a)| \leqslant \|f - f_n\|$. En faisant tendre n vers ∞, on obtient $f(a) = 0$. Ainsi $f \in X$ et X est fermé.

Exercice 3.1.9 (⋆): Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
1) Soit H un hyperplan de E, montrer que H est fermé ou dense dans E.
2) Soit A une partie de E. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{\mathrm{Vect}(A)}$.

Solution:
1) Comme $\overline{H}$ est un SEV et que H est un SEV strict maximal pour l'inclusion, on a $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$, i.e. H est fermé ou dense dans E.
2) On a $A \subseteq \mathrm{Vect}(A)$ donc $\overline{A} \subseteq \overline{\mathrm{Vect}(A)}$ puis $\mathrm{Vect}\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{\mathrm{Vect}(A)}$ car $\overline{\mathrm{Vect}(A)}$ est un SEV.

3.2. Dimension finie

Définition 3.2.1: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé muni de deux normes N_1 et N_2. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes ssi $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$.

Remarque 3.2.1:
- Il s'agit bien d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.
- Deux normes sont équivalentes ssi leurs distances associées sont équivalentes. En particulier, deux normes équivalentes définissent la même topologie : les ouverts, fermés, compacts, connexes, etc. sont les mêmes pour les deux normes.

Exercice 3.2.1 (⋆): Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Solution: On va montrer que ce n'est pas le cas. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose f_n : $\begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \quad \mapsto \max(1-nx, 0) \end{cases}$. Alors les f_n sont continues, $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ étaient équivalentes alors on aurait $\|\cdot\|_\infty \leqslant \alpha \|\cdot\|_1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant \frac{\alpha}{n}$ ce qui est absurde.

Exercice 3.2.2 (⋆):
1) Sur $\mathbb{K}[X]$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ? Et les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$?
2) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(0)|$.
   a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.
   b) Calculer $N(X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) N est-elle équivalente à $\|\cdot\|_1$? à $\|\cdot\|_\infty$?
   d) L'application définie par $N(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(1)|$ est-elle encore une norme ?

Solution :
1) Non, considérer les polynômes $P_n = 1 + X + ... + X^n$.
2) a) Aisé.
   b) $N(X^n) = n!$
   c) Non car $\|X^n\|_1 = \|X^n\|_\infty = 1$.
   d) Oui, utiliser la formule de Taylor pour la séparation.

Lemme 3.2.1 : Soient $E = \mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et N une norme quelconque sur E. Alors N est continue.

Preuve : Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors $\forall x \in E, N(x) \leqslant C\ \|x\|_\infty$ où $C = \sum_{i=1}^n N(e_i)$. Du coup pour tous $x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) \leqslant C\|x - y\|_\infty$. ■

Lemme 3.2.2 : Toute partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.

Preuve : Il suffit de montrer que toute suite bornée d'éléments de E possède au moins une valeur d'adhérence dans E. On montre le résultat par récurrence sur p. Le cas $p = 1$ est connu (théorème de Bolzano-Weierstrass). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat au rang p. Soit $u \in \left(\mathbb{K}^{p+1}\right)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $u_n = (x_n, y_n)$ où $x_n \in \mathbb{K}^p$ et $y_n \in \mathbb{K}$. La suite (x_n) est bornée donc par hypothèse, il existe une extractrice φ telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge. La suite $y_{\varphi(n)}$ est bornée donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice ψ telle que $\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$ converge. Ainsi u possède une valeur d'adhérence, ce qui conclut la récurrence. ■

Théorème 3.2.1 : Si E est de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On définit une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ sur E en posant $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \|x\|_{\mathcal{B}} = \max\{|x_i| ; i \in [\![1, n]\!]\}$. Soit N une norme sur E, montrons que N et $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ sont équivalentes. Déjà, $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, N(x) \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\ N(e_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^n N(e_i)\right)\ \|x\|_{\mathcal{B}}$.
Soit

$$\varphi : \begin{cases} (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_{\mathcal{B}}) \\ (x_1, ..., x_n)\ \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{cases}$$

alors l'image de la boule unité fermée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ par φ est la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$. Or la boule unité fermée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est fermée et bornée, donc compacte par un lemme précédent. Comme φ est une isométrie, la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ est également compacte. Soit S la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$, alors S est un fermé de la boule unité, donc un compact. D'après un lemme précédent, $N : (E, \|\cdot\|_{\mathcal{B}}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue, donc elle atteint un minimum sur S : soit $\alpha \in S$ tel que $\forall x \in S, N(x) \geqslant N(\alpha) > 0$.

Ainsi $\forall x \in E \setminus \{0\}, N\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{B}}}\right) \geqslant N(\alpha)$, donc $N(x) \geqslant \alpha\ \|x\|_{\mathcal{B}}$. Ceci montre que N et $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ sont équivalentes. ■

Théorème 3.2.2 : On suppose que E est de dimension finie. Soit $K \subseteq E$, alors K est compact ssi K est fermé et borné.

Preuve: Déjà connu si $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, le reste découle de l'équivalence des normes en dimension finie et de l'isométrie entre E et $\mathbb{K}^n$. ■

Théorème 3.2.3 : Soit F un SEV de E de dimension finie. Alors F est fermé.

Preuve: Soit $u \in F^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l \in E$. Alors u est bornée, soit donc B une boule fermée de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B \cap F$. Or $B \cap F$ est fermé et borné dans F, qui est de dimension finie, donc c'est un compact. Ainsi la suite u possède une valeur d'adhérence dans F. Il s'agit de l donc $l \in F$. ■

Exercice 3.2.3 (⋆ ⋆): Les parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont-elles ouvertes ? fermées ?
1) L'ensemble des matrices symétriques.
2) L'ensemble des matrices diagonales.
3) L'ensemble des matrices de trace nulle.
4) L'ensemble des matrices nilpotentes.
5) L'ensemble des matrices diagonalisables.

Solution :
1) L'ensemble est fermé car c'est un SEV de dimension finie. Il n'est donc pas ouvert.
2) L'ensemble est fermé car c'est un SEV de dimension finie. Il n'est donc pas ouvert.
3) L'ensemble est fermé car c'est un SEV de dimension finie $(\ker(\operatorname{tr}))$. Il n'est donc pas ouvert.
4) Soit (A_k) une suite de matrices nilpotentes qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a pour tout k, $A_k^n = 0$ (la seule valeur propre de A_k est 0, donc $\chi_{A_k} = X^n$, donc $(A_k)^n = 0$ par Cayley-Hamilton). Du coup, $A^n = 0$, donc A est nilpotente. Ainsi l'ensemble des matrices nilpotentes est fermé, donc non ouvert.
5) On a $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix} \underset{k}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, or les matrices $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix}$ sont diagonalisables et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas, donc l'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas fermé. On a $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{k}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, or les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas diagonalisables et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l'est, donc l'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas ouvert.

   Remarque : retenir que pour $b \neq 0$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et pour $a \neq c$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 3.2.4 (⋆):
1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $A - \frac{1}{p} I_n$ n'est pas inversible est fini.
2) En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3) Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En calculant $A^{-1}(XI_n - AB)A$, montrer que $\chi_{AB} = \chi(BA)$.
4) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déduire des deux questions précédentes que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Solution:
1) Si $A - \frac{1}{p} I_n$ n'est pas inversible alors $\frac{1}{p}$ est racine de χ_A. Or χ_A n'a qu'un nombre fini de racines, d'où le résultat.
2) Aisé.
3) Les matrices $A^{-1}(XI_n - AB)A = XI_n - BA$ et $XI_n - AB$ sont semblables donc elles ont le même déterminant, i.e. $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
4) Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dispose d'une suite (A_n) de matrices inversibles qui converge vers A. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_n B} = \chi_{BA_n}$ d'après la question précédente. Or $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues donc par unicité de la limite, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 3.2.5 ($\star\star\star$): Montrer que les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A est trigonalisable, soient donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PTP^{-1}$. Notons $\lambda_1, ..., \lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_k$ les éléments diagonaux de T, où les λ_i sont distincts.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, posons $T_j = T + \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{j}, \frac{1}{2j}, ..., \frac{1}{nj}\right)$. Alors pour j suffisamment grand, les éléments diagonaux de T_j sont tous distincts. En effet, si $k = 1$ c'est clair et sinon, supposons que $\lambda_p + \frac{1}{rj} = \lambda_q + \frac{1}{sj}$ où $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant k$ et $1 \leqslant r < s \leqslant n$. Alors $p < q$ et

$$j = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}{\lambda_p - \lambda_q} \leqslant \frac{1 - \frac{1}{n}}{\min_{p \neq q} |\lambda_p - \lambda_q|} := j_0$$

Ainsi pour $j > j_0$, les T_j ont des valeurs propres distinctes, donc sont diagonalisables.
Finalement $\left(PT_jP^{-1}\right)_{j>j_0}$ est une suite de matrices diagonalisables qui tend vers A.

Exercice 3.2.6 ($\star\star$): Pour chaque ensemble X, dire si c'est une partie connexe de E.
1) $X = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2) X l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
3) $X = O_n(\mathbb{R})$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
4) $X = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
5) $X = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Solution:
1) Oui car on vérifie facilement que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.
2) Oui car cet ensemble est étoilé : si A est nilpotente alors pour tout $t \in [0,1]$, tA est nilpotente, donc le segment reliant 0 à A est inclus dans l'ensemble des matrices nilpotentes.
3) Non car $\det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $\det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ sont deux ouverts disjoints recouvrant $O_n(\mathbb{R})$.
4) Non car $\det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $\det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ sont deux ouverts disjoints recouvrant $O_n(\mathbb{R})$.
5) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrons qu'il existe un chemin de A à I_n. On trigonalise A : $A = PTP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T est triangulaire supérieure. Comme C^* est connexe par arcs

et que $T_{k,k} \in \mathbb{C}^*$, il existe un chemin continu dans $\mathbb{C}^*$ $p_{k,k} : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ reliant $T_{k,k}$ à 1. Pour $k \neq j$, on définit $p_{k,j} : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ par $p_{k,j}(t) = (1-t)T_{k,j}$. Alors $t \mapsto P\big(p_{k,j}(t)\big)_{1 \leqslant k,j \leqslant n} P^{-1}$ est un chemin continu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ reliant A à I_n. Ainsi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs donc connexe.

3.3. Applications linéaires continues

Théorème 3.3.1: Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-EVN et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propositions sont équivalentes :
1) u est continue ;
2) u est continue en 0 ;
3) $\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant C\ \|x\|$;
4) u est bornée sur la boule unité fermée ;
5) u est bornée sur la sphère unité ;
6) u est lipschitzienne.

Preuve:
- (1) $\Longrightarrow$ (2) : c'est clair.
- (2) $\Longrightarrow$ (3) : supposons que u est continue en 0. Soit donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\|_F \leqslant 1$. Posons $C = \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in E$, montrons que $\|u(x)\|_F \leqslant C\ \|x\|_E$. Si $x = 0$ c'est clair, et sinon on pose $x' = \frac{\alpha}{\|x\|_E} x$. Alors $\|x'\|_E \leqslant \alpha$ donc $\|u(x')\|_F \leqslant 1$. Or $\|u(x')\|_F = \frac{\alpha}{\|x\|_E}\ \|u(x)\|_E$, d'où le résultat.
- (3) $\Longrightarrow$ (4) : c'est clair.
- (4) $\Longrightarrow$ (5) : c'est clair.
- (5) $\Longrightarrow$ (6) : supposons que u est bornée sur la sphère unité. Soit C un majorant de $\|u\|_F$ sur la sphère unité. Soient $x, y \in E$, montrons que $\|u(x) - u(y)\|_F \leqslant C\|x-y\|_E$. Si $x = y$ c'est clair, et sinon on pose $x' = \frac{x}{\|x-y\|_E}$ et $y' = \frac{y}{\|x-y\|_E}$. Alors $x' - y'$ est sur la sphère unité, donc $\|u(x'-y')\|_F \leqslant C$. Or $\|u(x'-y')\|_F = \frac{\|u(x)-u(y)\|_F}{\|x-y\|_E}$, d'où le résultat.
- (6) $\Longrightarrow$ (1) : c'est déjà connu.

■

Définition 3.3.1: On note $\mathcal{L}_C(E,F)$ l'ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F. Pour tout $f \in \mathcal{L}_C(E,F)$, on pose $|||\ f\ ||| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} ; x \in E \setminus \{0\}\right\}$. Alors $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_C(E,F)$, dite norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

Remarque 3.3.1: On peut définir une norme subordonnée sur les matrices en posant $|||\ A\ ||| = \sup\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|} ; X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\}$.

Lemme 3.3.1: Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des $\mathbb{K}$-EVN. Alors $\forall f \in \mathcal{L}_C(E,F), \forall g \in \mathcal{L}_C(F,G), |||\ g \circ f\ ||| \leqslant |||\ f\ ||| \times |||\ g\ |||$.

Preuve: Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Si $f(x) = 0$ alors $\frac{\|g \circ f(x)\|_G}{\|x\|_E} = 0$ et sinon,

$$\frac{\|g \circ f(x)\|_G}{\|x\|_E} = \frac{\|g \circ f(x)\|_G}{\|f(x)\|_F} \times \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant ||| \ g \ ||| \times ||| \ f \ |||$$

d'où le résultat. ■

Exercice 3.3.1 (⋆ ⋆): Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $n \geqslant 2$) muni des normes N_1 et N_∞ définies par $N_1(A) = \max\left\{\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|; j \in [\![1, n]\!]\right\}$ et $N_\infty(A) = \max\left\{|A_{i,j}|; i, j \in [\![1, n]\!]\right\}$.

1) Montrer que N_1 est la norme subordonnée à $\|\cdot\|_1$.
2) Montrer que N_∞ n'est pas une norme subordonnée.

Solution:

1) Soient $A \in E$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} X_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|\right) |X_j| \leqslant N_1(A) \ \|X\|_1$. Ainsi $||| \ A \ ||| \leqslant N_1(A)$.

De plus, soient j tel que $N_1(A) = \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$ puis X le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| = N_1(A) \ \|X\|_1$ donc $||| \ A \ ||| \geqslant N_1(A)$. Finalement N_1 est bien la norme subordonnée à $\|\cdot\|_1$.

1) Supposons par l'absurde que N_∞ soit la norme subordonnée d'une certaine norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors N_∞ est sous-multiplicative. En particulier, si A est la matrice ne contenant que des 1 alors $N_\infty(A^2) \leqslant N_\infty(A)^2$, i.e. $n \leqslant 1$, ce qui est absurde.

Théorème 3.3.2: Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-EVN de dimension finie et $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$-EVN. Alors $\mathcal{L}_C(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Preuve: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, montrons que f est continue. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On définit une norme $\|\cdot\|_\mathcal{B}$ sur E en posant $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \|x\|_\mathcal{B} = \max\{|x_i|; i \in [\![1, n]\!]\}$. Comme $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\mathcal{B}$ sont équivalentes, on dispose de $C > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_\mathcal{B} \leqslant C \ \|x\|$. Alors $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)\|_F \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F\right) \|x\|_\mathcal{B} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F\right) \ \|x\|_\mathcal{B}$. Ainsi f est continue. ■

3.4. Compacité

Exercice 3.4.1 (⋆ ⋆):

1) Soient (E, d) un espace métrique et A, B deux parties compactes non vides de E. Montrer que $\exists (a, b) \in A \times B, d(a, b) = d(A, B)$.
2) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-EVN de dimension finie, A une partie compacte non vide de E et F une partie fermée non vide de E. Montrer que la même conclusion s'applique.
3) Trouver deux fermés non vides A et B de $\mathbb{R}^2$ telle que la conclusion ne s'applique pas.

Solution:

1) $A \times B$ est un compact non vide et $d|_{A \times B}$ est continue donc elle admet un minimum.
2) $a \mapsto d(a, B)$ est continue sur le compact non vide A donc elle admet un minimum, disons en $a_0 \in A$. Soit $b \in B$, notons $K = B \cap B_f(b, \|a_0 - b\|)$. Alors K est fermé et borné donc compact, et $d(A, B) = d(A, K)$ donc on a le résultat par la question précédente.
3) $A = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right); x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$ fonctionnent.

Théorème 3.4.1 (de Riesz): E est de dimension finie ssi $B_f(0,1)$ est compacte.

Preuve: Le sens direct est déjà connu. On suppose que $B := B_f(0,1)$ est compacte. Alors B est pré-compacte, soient donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_p \in B$ tels que $B = \bigcup_{k=1}^{p} B\left(x_k, \frac{1}{2}\right)$. Soit $F = \mathrm{Vect}\{x_1, ..., x_p\}$, alors F est un SEV de dimension finie de E, donc c'est un fermé. Nous allons montrer que B est inclus dans F, ce qui entraîne $F = E$ (si $x \in E$ alors $\frac{x}{\|x\|} \in B \subseteq F$ donc $x \in F$).

Soit $x \in B$, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists f_n \in F, \|x - f_n\| < \frac{1}{2^n}$. Pour $n = 1$, on prend $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\|x - x_k\| < \frac{1}{2}$. Alors $f_1 = x_k \in F$ convient. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang n. Alors $2^n(x - f_n) \in B$, soit donc $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\|2^n(x - f_n) - x_i\| < \frac{1}{2}$. Alors $f_{n+1} = f_n + \frac{1}{2^n} x_i \in F$ convient.

Ainsi on dispose d'une suite $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Or F est fermé donc $x \in F$. Ainsi $B \subseteq F$, donc $F = E$ et E est de dimension finie. ■

Exercice 3.4.2 (⋆ ⋆ ⋆ ♥): Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-EVN de dimension **infinie**.
1) Montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte.
2) Soit K une partie compacte de E. Montrer que $E \setminus K$ est connexe.

Solution:
1) Soient S et B la sphère unité et la boule unité fermé de E respectivement. Supposons que S est compacte et montrons que B est compacte, ce qui permettra de conclure grâce au théorème de Riesz. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$. Si une infinité de termes de la suite (u_n) sont nuls alors 0 est une valeur d'adhérence de u dans B. On peut donc supposer sans perte de généralité que (u_n) ne s'annule jamais. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}, \|u_n\|\right) \in S \times [0,1]$. Comme $S \times [0,1]$ est compact, (v_n) admet une valeur d'adhérence, donc (u_n) aussi.
2) Supposons que $E \setminus K$ possède une composante connexe bornée C. Quitte à translater K, on peut supposer $0 \in C$. Soit $r > 0$ tel que $K \subseteq B(0, r)$. Soit

$$\varphi : \begin{cases} B(0,r) \setminus \{0\} \to S(0,r) \\ x \qquad\qquad\quad \mapsto \frac{r}{\|x\|} x \end{cases}$$

   φ est continue donc $\varphi(K)$ est un compact. D'après la question précédente, $S(0,r)$ n'est pas compact, donc on dispose de $x \in S(0,r) \setminus K$. Ainsi $\mathbb{K}x \subseteq C$ donc C n'est pas bornée : absurde.

   Ainsi toutes les composantes connexes de $E \setminus K$ sont non bornées. Or K est borné, donc il est inclus dans une boule $B(0,R)$. De plus $E \setminus B(0,R)$ est connexe : c'est l'image du connexe $S \times [R, \infty[$ l'application continue $(x,r) \mapsto rx$. Soient $x, y \in E \setminus K$. Comme les composantes connexes de $E \setminus K$ sont non bornées, x est dans la composante connexe d'un certain $x' \in E \setminus B(0,R)$ et y est dans la composante connexe d'un certain $y' \in E \setminus B(0,R)$. Comme $E \setminus B(0,R)$ est connexe, x' et y' sont dans la même composante connexe, donc x et y aussi. Ainsi $E \setminus K$ est connexe !

3.5. Complétude

Définition 3.5.1: On dit que E est un espace de Banach ssi E est un EVN complet.

Lemme 3.5.1: Si E est de dimension finie alors E est un espace de Banach.

Preuve: Toute suite de Cauchy est bornée, donc admet une valeur d'adhérence, donc converge.
■

Théorème 3.5.1: Soient (E, d) un espace métrique et $(F, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On note $\mathcal{B}(E, F)$ l'ensemble des applications bornées de E dans F, et pour tout $f \in \mathcal{B}(E, F)$, $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_\infty ; x \in E\}$. Alors $(\mathcal{B}(E, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve: On vérifie facilement que $(\mathcal{B}(E, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(E, F)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$ donc les suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy de F. Du coup on peut définir $f : x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \|f_n - f_r\|_\infty < 1$. Alors $\forall n \geqslant N, \|f_n\|_\infty \leqslant \|f_n - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty < 1 + \|f_N\|_\infty$ donc $\forall x \in E, \|f_n(x)\| < 1 + \|f_N\|_\infty$. En passant à la limite, on obtient $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant 1 + \|f_N\|_\infty$ donc $f \in \mathcal{B}(E, F)$.

Soit $\varepsilon > 0$, soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant N, \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$. Alors $\forall p, q \geqslant N, \|f_p(x) - f_q(x)\|_\infty < \varepsilon$ et en faisant tendre q vers ∞, on obtient $\forall x \in E, \forall p \geqslant N, \|f_p(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$ donc $\forall p \geqslant N, \|f_p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ donc $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers f. ■

Lemme 3.5.2: Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach et D un SEV dense de E et $f \in \mathcal{L}_C(D, F)$ Alors f se prolonge en une application linéaire continue de E dans F.

Preuve: f est lipschitzienne donc uniformément continue donc d'après un lemme précédent, f se prolonge en une application continue $\tilde{f}$ de E dans F. On voit facilement que $\tilde{f}$ est linéaire par linéarité de f et densité de D. ■

Définition 3.5.2: Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u et on note $\sum u$ la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.5.3: Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u$ est absolument convergente ssi la série $\sum \|u\|$ converge.

Théorème 3.5.2: $(E, \|\cdot\|)$ est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

Preuve:

- Supposons que $(E, \|\cdot\|)$ est complet. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum u$ est absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|$. Par hypothèse, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc c'est une suite de Cauchy. Pour tous $p > q \in \mathbb{N}$, $\|S_p - S_q\| = \| \sum_{k=q+1}^{p} u_k \| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \|u_k\| = |T_p - T_q|$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Mais E est complet donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente est convergente. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors on peut construire une suite $(\varphi(r))_{r\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\forall r \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant \varphi(r), \|u_p - u_q\| < \frac{1}{2^r}$. Alors $\sum \left(\|u_{\varphi(r+1)} - u_{\varphi(r)}\|\right)_{r\in\mathbb{N}}$ converge donc par hypothèse, $\sum \left(u_{\varphi(r+1)} - u_{\varphi(r)}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ converge, i.e. $\left(u_{\varphi(r)}\right)_{r\in\mathbb{N}}$ converge. Ainsi u possède une valeur d'adhérence donc converge.

■

Lemme 3.5.3 : Si E admet une base dénombrable alors il n'est pas complet.

Preuve: Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, ..., e_n)$. Alors F_n est un sous-espace strict de E donc il est d'intérieur vide, et il est de dimension finie donc il est fermé. Mais $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$ n'est pas d'intérieur vide, donc E n'est pas complet. ■

Exercice 3.5.1 (⋆ ♥): Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_C(E)$ telle que $\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}, u^n(x) = 0$. Montrer que u est nilpotente. *Indication : on pourra poser $F_p = \ker u^p$ et appliquer le théorème de Baire.*

Solution : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_p := \ker u^p = (u^p)^{-1}(\{0\})$ est fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue). On suppose par l'absurde que u n'est pas nilpotente, alors F_p est un SEV strict de E donc est d'intérieur vide. Comme $(E, \|\cdot\|)$ est complet, on a par le théorème de Baire que $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$ est d'intérieur vide, absurde.