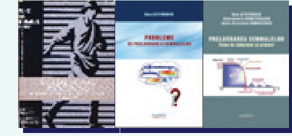
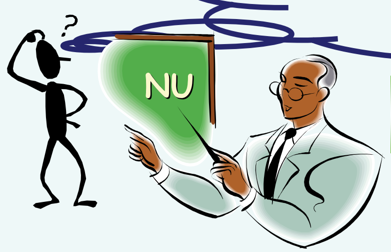
❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❷ Proprietăţi ale Transformatelor Fourier

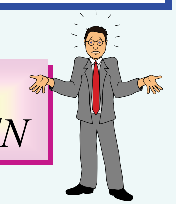


Cum adică? Operaţia de convoluţie liniară nu este bună peste tot?

Trebuie sa ne asigurăm că operaţia **este bine definită**.

Exemplu | **Pentru SFD**

Operaţia **nu este bine definită** în spaţiul semnalelor periodice. $\tilde{S}_{dN}$



Trebuie definită o nouă operaţie de convoluţie între **semnale periodice**.

Care ar fi proprietăţile care să conducă la buna definire a operaţiei?

$\tilde{*}$ convoluţia periodică

(pentru semnale cu perioade diferite, se va considera **perioada comună minimă**)

① Trebuie exploatată **informaţia neredundantă** a semnalelor.

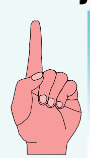
② Ar trebui **verificată** Teorema directă de convoluţie, ca în cazul **TCFD**.

②
$$\mathrm{SFD}_N\left(\tilde{x}\,\tilde{*}\,\tilde{y}\right)\equiv \mathrm{SFD}_N\left(\tilde{x}\right)\cdot \mathrm{SFD}_N\left(\tilde{y}\right)$$

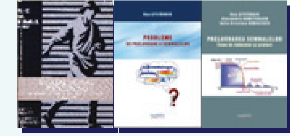
Exerciţii

- Plecînd de la **Teorema directă de convoluţie**, arătaţi cum se poate redefini convoluţia în cazul **SFD**.
- Folosind rezultatul obţinut în exerciţiul precedent, demonstraţi şi **Teorema inversă de convoluţie** de mai jos.

$$\mathrm{SFD}_N\left(\tilde{x}\cdot\tilde{y}\right)\equiv \frac{1}{N}\mathrm{SFD}_N\left(\tilde{x}\right)\tilde{*}\,\mathrm{SFD}_N\left(\tilde{y}\right)$$



Operaţia de convoluţie periodică este implicată în **aplicaţii cu semnale/sisteme aflate la limita de stabilitate** (oscilante).



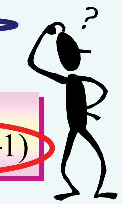
❺.❷ Proprietăți ale Transformatelor Fourier

Dar în cazul TFD?... De ce nu se poate lucra cu operația de convoluție liniară (bine definită pentru semnale de durată finită)?

Se poate lucra cu această operație,
dar nu poate fi rezolvată problema convoluției.

Exercițiu

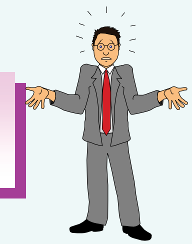
$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{S}_{dN} \\ y \in \mathcal{S}_{dM} \end{array}\right\} \Rightarrow x * y \in \mathcal{S}_{d(M+N-1)}$$



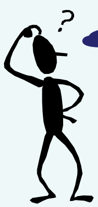
Aşadar

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{S}_{dN} \Rightarrow \mathrm{TFD}_N(x) \\ y \in \mathcal{S}_{dM} \Rightarrow \mathrm{TFD}_M(y) \\ x * y \in \mathcal{S}_{d(M+N-1)} \Rightarrow \mathrm{TFD}_{M+N-1}(x * y) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{TFD}_{M+N-1}(x * y) \cancel{=} \mathrm{TFD}_N(x) \cdot \mathrm{TFD}_M(y)$$

☝ **Din cauza dimensiunilor diferite ale TF.**



Ce se poate face?



Ar trebui definită o **nouă operație de convoluție**, astfel încât să fie **verificată** Teorema directă de convoluție ca în cazul **TCFD** sau **SFD**.

$$\underset{N}{\otimes} \qquad \mathcal{S}_{dN}$$

convoluția circulară

Apoi, noua operație de convoluție, ar trebui exprimată cu ajutorul celei liniare, dacă este posibil.

$$\mathrm{TFD}_N\left(x \underset{N}{\otimes} y\right) \equiv \mathrm{TFD}_N(x) \cdot \mathrm{TFD}_N(y)$$

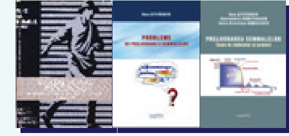
$$\Updownarrow$$

$$x \underset{N}{\otimes} y \overset{def}{\equiv} \mathrm{ITFD}_N\left(\mathrm{TFD}_N(x) \cdot \mathrm{TFD}_N(y)\right)$$

Exerciții

- Arătați cum se poate defini convoluția circulară în cazul **TFD**.
- Folosind noua definiție, demonstrați **Teoremele de convoluție** pentru **TFD**.

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❷ Proprietăţi ale Transformatelor Fourier

TFD şi convoluţia liniară (cazul general)

☞ Teorema directă de convoluţie liniară

$x \in \mathcal{S}_{dN}$, $y \in \mathcal{S}_{dM}$ ⇒

$$\mathrm{TFD}_{M+N-1}(x*y) \equiv \mathrm{TFD}_{M+N-1}(x)\cdot \mathrm{TFD}_{M+N-1}(y) \equiv \mathrm{TFD}_{M+N-1}\left(x \underset{M+N-1}{\otimes} y\right)$$

Demonstraţie ⇒ **Exerciţiu**

Întâi, căutaţi relaţia dintre convoluţia circulară şi cea liniară.

☞ Teorema inversă de convoluţie liniară

$x \in \mathcal{S}_{dN}$, $y \in \mathcal{S}_{dM}$ ⇒

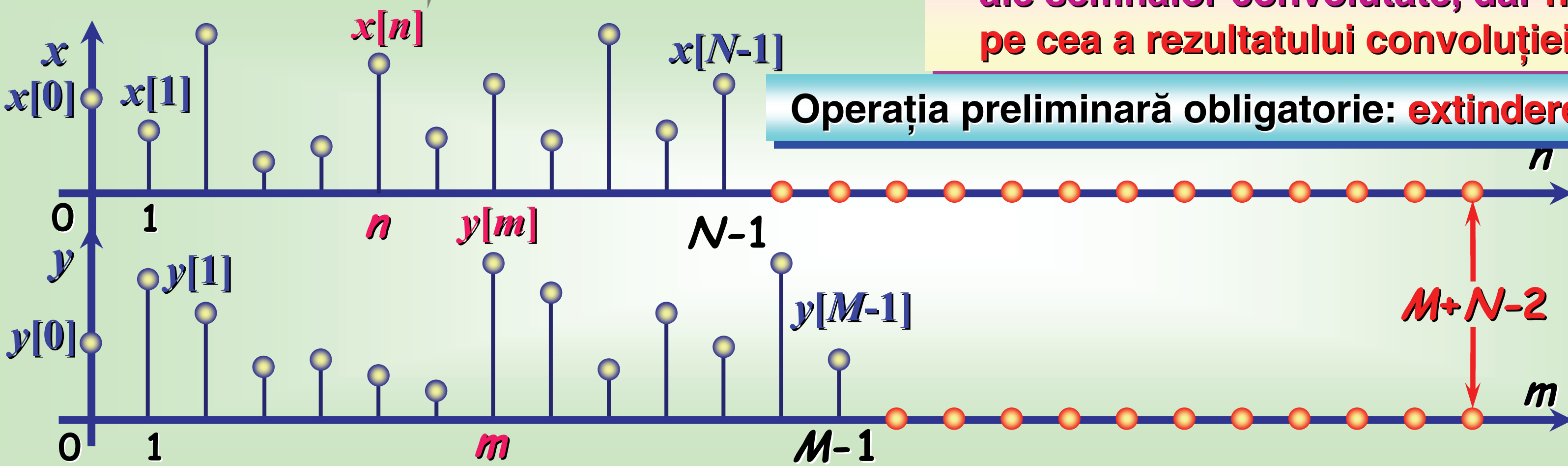
$$\mathrm{TFD}_{M+N-1}(x\cdot y) \equiv \frac{1}{N}\mathrm{TFD}_{M+N-1}(x) * \mathrm{TFD}_{M+N-1}(y) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{N}\mathrm{TFD}_{M+N-1}(x) \underset{M+N-1}{\otimes} \mathrm{TFD}_{M+N-1}(y)$$

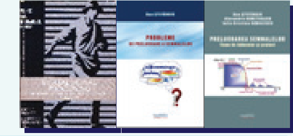
Demonstraţie ⇒ **Exerciţiu**

☝ Extinderea cu zerouri afectează TF ale semnalor convolutate, dar nu şi pe cea a rezultatului convoluţiei.

Operaţia preliminară obligatorie: extinderea cu zerouri.



❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❷ Proprietăți ale Transformatelor Fourier

Consecințe practice ale Teoremei directe de convoluție

☞Teorema directă de convoluție liniară (TFD)

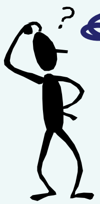
$x \in \mathcal{S}_{dN}$, $y \in \mathcal{S}_{dM}$ ⇒

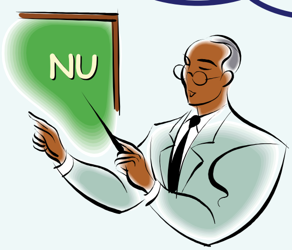
$$\mathrm{TFD}_{M+N-1}(x*y) \equiv \mathrm{TFD}_{M+N-1}(x)\cdot\mathrm{TFD}_{M+N-1}(y) \equiv \mathrm{TFD}_{M+N-1}\left(x \underset{M+N-1}{\otimes} y\right)$$

$$x*y \equiv \mathrm{ITFD}_{M+N-1}\left(\mathrm{TFD}_{M+N-1}(x)\cdot\mathrm{TFD}_{M+N-1}(y)\right)$$

O altă metodă de calcul al rezultatului unei operații de convoluție.

Este aceasta mai eficientă decît metoda directă de calcul?





$$(x*y)[n] \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k] \quad \forall n \in \overline{0, M+N-1}$$

Numărul de operații al definiției.

$$\mathcal{O}_*[M,N] = [4N(M+N-1)]_\bullet + [(3N-1)(M+N-1)]_+$$

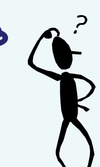
numărul de înmulțiri reale **numărul de adunări reale**

Numărul de operații al relației cu TFD.

$$\mathcal{O}_\otimes[M,N] = \left([6(M+N-1)]_\bullet + [2(M+N-1)]_+\right)\mathcal{O}_{TFD}[M,N]$$

☝ **Efortul de calcul implicat de algoritmii care implementează TFD este superior lui (M+N-1).**

Atunci, care este utilitatea convoluției circulare?

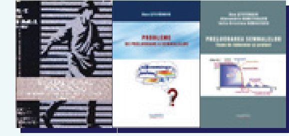


Definiția convoluției liniare nu este implementată hardware, dar evaluarea TFD – DA.

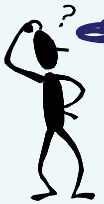
Cipuri DSP, Procesoare de semnal

Texas Instruments, Intel, Motorola

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❷ Proprietăți ale Transformatelor Fourier



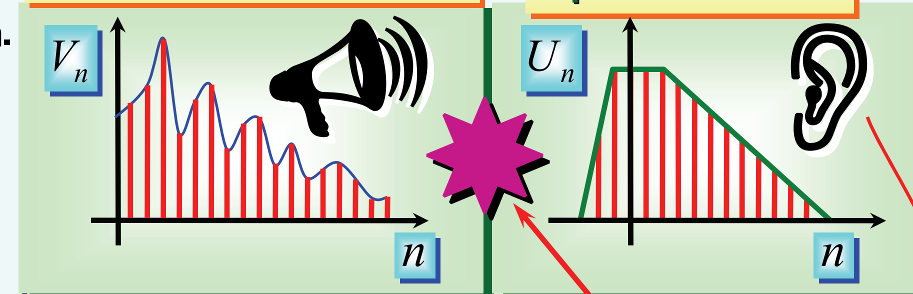
Are convoluția inversă utilitate practică?

• În pofida aparențelor,

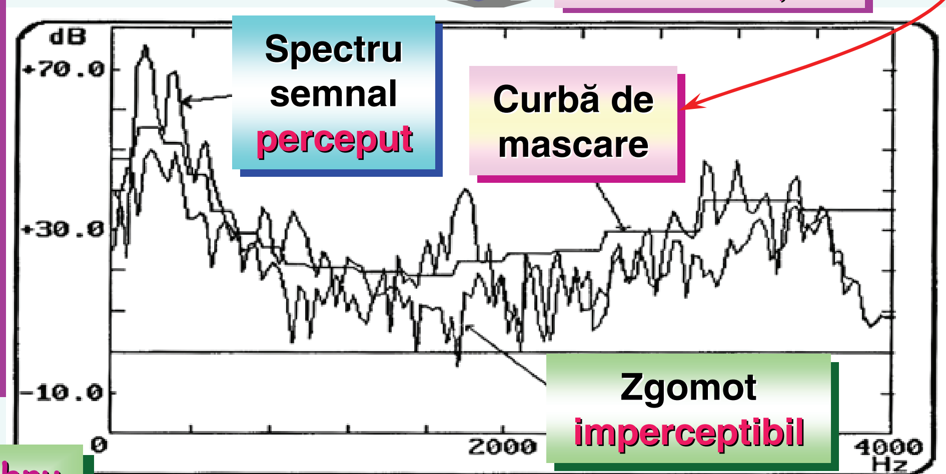
Un exemplu — **Codarea semnalului vocal**

• În tele-comunicațiile moderne, bazate pe limbajul natural ("tele-comunicațiile vorbite"), este integrat **un model al sistemului psiho-acustic uman**.

Spectru semnal vocal — Spectru sistem psiho-acustic



☝ Convoluție.

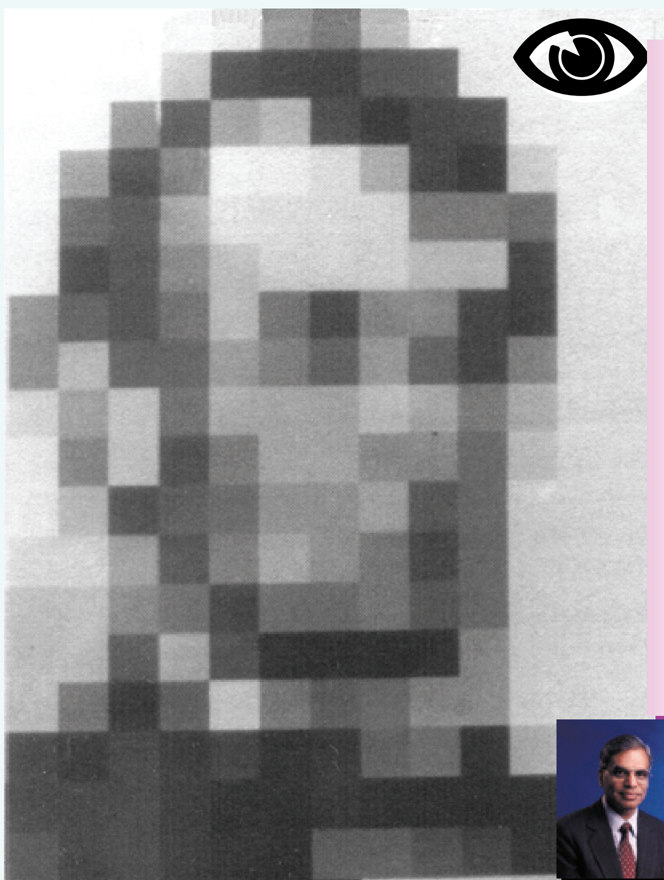


Alt exemplu — **Codarea imaginilor**

• Testați efectul **sistemului psiho-vizual uman**.

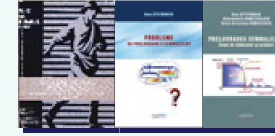
① Priviți cu atenție și spuneți ce reprezintă imaginea.

② Priviți imaginea printre gene, apropiind pleoapele.



☝ Filtrul psiho-vizual acordat pentru atenuarea zgomotului imaginii.

Bishnu ATAL "Speech coding is what you do not hear."



Proprietăţi de redundanţă

Proprietatea alierii în timp (SFD-TFD)

Propoziţia 2 (relaţia de aliere în timp)

Fie $x \in \ell^1(\mathscr{T})$ un semnal discret stabil (nu neapărat de durată finită) şi $N \in \mathbb{N}^*$ un număr natural nenul arbitrar fixat. Transformata Z a semnalului se poate evalua în cele N puncte echidistante ale cercului unitar. Se notează prin $\widetilde{X}$ semnalul astfel obţinut. Atunci $\widetilde{X}$ este periodic şi de perioadă egală cu N. Mai mult, semnalul periodic a cărui SFD este egală cu $\widetilde{X}$ are următoarea exprimare, numită relaţie de aliere în timp:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x[n + pN] \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

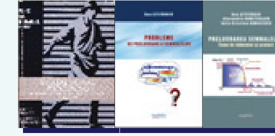
Demonstraţie

Faptul că valorile Transformatei Z se constituie într-un semnal periodic este demonstrat de următoarele egalităţi:

$$\tilde{X}[k] \overset{def}{=} \mathscr{Z}(x)\left(w_N^{-k}\right) \overset{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{-n} \Big|_{z = w_N^{-k}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] w_N^{nk} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] w_N^{n(k+pN)}, \quad \forall\, k, p \in \mathbb{Z}.$$

Pentru a evalua semnalul periodic corespunzător transformatei $\widetilde{X}$, trebuie aplicat operatorul ISFD:

$$\tilde{x}[n] \overset{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \overline{w}_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} x[p] w_N^{pk} \right) \overline{w}_N^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} x[p] w_N^{k(p-n)}, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$



Proprietăți de redundanță (continuare)

Proprietatea alierii în timp (SFD-TFD)

Propoziția 2 (relația de aliere în timp)

Demonstrație (continuare)

Cercul unitar fiind inclus în zona de convergență a semnalului original, suma infinită este absolut convergentă si comută cu suma finită:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{p\in\mathbb{Z}} x[p] \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{k(p-n)}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Acum, intră în scenă relația lui Poisson, cu ajutorul căreia se poate evalua suma finită:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} N \sum_{p\in\mathbb{Z}} x[p]\delta_{N\mathbb{Z}}[p-n] = \sum_{p\in\mathbb{Z}} x[n+pN], \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w}_N^{kn} = N\delta_{N\mathbb{Z}}[k] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

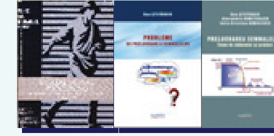
Relație de aliere în timp ⇒ $\tilde{x}[n] = \sum_{p\in\mathbb{Z}} x[n+pN]$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

☝ Asemănătoare relației de aliere în frecvență. ⇒ vezi secțiunea ❶❶

$x \in \mathcal{S}_{dM}$ ⇒ $\tilde{x} \equiv \sum_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{q}^{+pN} x$ ⇒ Suma de aliere conține un singur termen nenul pentru fiecare moment de timp, dacă şi numai dacă ***M* ≤ *N***.

Exercițiu

- Pentru a sesiza utilitatea practică a relației de aliere în timp, analizați maniera în care o serie de ***M*** date poate fi transmisă prin intermediul unei serii de ***N*** date, cu ***N* ≤ *M***. Cît de mic poate fi ***N***?



❺.❷ Proprietăți ale Transformatelor Fourier

Proprietăți de redundanță (continuare)

Redundanța Transformatei Z

- În general, fiecare valoare a **Transformatei Z** codifică o informație unică referitoare la un anumit semnal sau sistem.
- În cazul particular al semnalelor discrete **de durată finită**, întreaga informație este codificată pe **cercul unitar**.

Transformata Z este **redundantă** şi poate fi reconstruită folosind **numai valori ale sale de pe cercul unitar**.

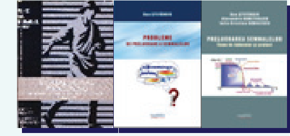
☝ Pentru semnalele practice.

Propoziția 3 (interpolarea Transformatei Z)

Fie $x \in \mathcal{S}_{dN}$ un semnal discret de durată finită şi $\mathcal{W}_N \stackrel{def}{=} \left\{ \overline{w}_N^n \right\}_{n \in \overline{0,N-1}}$ mulțimea rădăcinilor de ordin N ale unității. Atunci Transformata Z a semnalului se poate evalua în orice punct din planul complex (mai puțin originea), folosind numai valorile sale în punctele mulțimii $\mathcal{W}_N$ (adică valorile **TFD** ale semnalului):

$$\boxed{\mathscr{Z}(x)(z) = \frac{z^N - 1}{N z^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mathrm{TFD}_N(x)[k]}{z - \overline{w}_N^k}} \quad , \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* .$$

Relație de interpolare a Transformatei Z



Proprietăți de redundanță (continuare)

Redundanța Transformatei Z

Propoziția 3 (interpolarea Transformatei Z)

Demonstrație

Se pleacă de la definiția Transformatei Z a semnalului de durată finită şi se foloseşte faptul că semnalul poate fi recuperat cu ajutorul operatorului **ITFD**:

$$\mathscr{Z}(x)(z) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{ITFD}_N(X)[n]z^{-n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\overline{w}_N^{kn}\right)z^{-n}, \quad \forall z\in\mathbb{C}^*.$$

Cele două sume finite comută, astfel că:

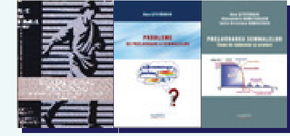
$$\mathscr{Z}(x)(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\sum_{n=0}^{N-1}\overline{w}_N^{kn}z^{-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\overset{\text{rația}}{\overline{w}_N^{k}z^{-1}}\Big)^{n}}_{\text{suma unei serii geometrice}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\frac{1-\overline{w}_N^{kN}z^{-N}}{1-\overline{w}_N^{k}z^{-1}}, \quad \forall z\in\mathbb{C}^*.$$

În consecință:

$$\mathscr{Z}(x)(z) = \frac{z^N-1}{Nz^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X[k]}{z-\overline{w}_N^{k}} = \frac{z^N-1}{Nz^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\mathrm{TFD}_N(x)[k]}{z-\overline{w}_N^{k}}, \quad \forall z\in\mathbb{C}^*.$$

☝ Pentru evaluarea Transformatei Z a unui semnal de durată finită se poate utiliza un **algoritm de calcul al TFD.**

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❷ Proprietăți ale Transformatelor Fourier

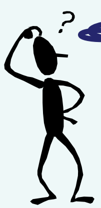
Proprietăți de redundanță (final)

Redundanța Transformatei Z

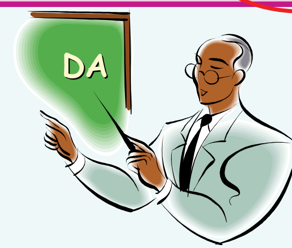
Formula de interpolare a Transformatei Z

$$\mathscr{Z}(x)(z) = \frac{z^N - 1}{N z^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{TFD_N(x)[k]}{z - \overline{w}_N^{k}} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}^*$$

?



Este corect definită în punctele cercului unitar?



• Datorită proprietății:

$$z^N - 1 = (z-1)\left(z-\overline{w}_N^{1}\right)\cdots\left(z-\overline{w}_N^{N-1}\right)$$

se simplifică

$$\frac{z^N - 1}{z-\overline{w}_N^{k}} = (z-1)\left(z-\overline{w}_N^{1}\right)\cdots\left(z-\overline{w}_N^{k-1}\right)\left(z-\overline{w}_N^{k+1}\right)\cdots\left(z-\overline{w}_N^{N-1}\right)$$

Interpolatorul este exact și pe cercul unitar.

$$z = \mathrm{e}^{j\omega},\ \omega\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; \mathscr{Z}(x)(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{j\omega}} = X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)$$

TCFD

factor forțat

aproape sinus

$$X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) = \frac{\mathrm{e}^{j\omega N}-1}{N\,\mathrm{e}^{j\omega(N-1)}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\mathrm{TFD}_N(x)[k]}{\mathrm{e}^{j\omega}-\overline{w}_N^{k}} = \frac{\mathrm{e}^{j\frac{\omega N}{2}}\left(\mathrm{e}^{j\frac{\omega N}{2}}-\mathrm{e}^{-j\frac{\omega N}{2}}\right)}{N\,\mathrm{e}^{j\omega(N-1)}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\mathrm{TFD}_N(x)[k]}{\mathrm{e}^{j\frac{\omega N+2k\pi}{2N}}\left(\mathrm{e}^{j\frac{\omega N-2k\pi}{2N}}-\mathrm{e}^{-j\frac{\omega N-2k\pi}{2N}}\right)}$$

factori forțați

aproape sinus

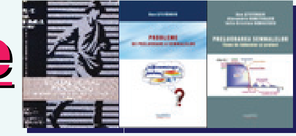
Exercițiu

$$X\left(\mathrm{e}^{j\omega_k^N}\right) = \mathrm{TFD}_N(x)[k] \qquad \forall\, k\in\overline{0,N-1}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{TFD}_N(x)[k]\,\mathrm{e}^{j\frac{\omega N(1-N)-2k\pi}{2N}}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega N-2k\pi}{2N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{TFD}_N(x)[k]\,\phi_k(\omega),\quad \omega\in\mathbb{R}.$$

nucleu de interpolare

❻ Reprezentări de semnale prin ecuații cu diferențe



Ecuație cu diferențe

$$\sum_{p=0}^{na} a_p y[n-p] = \sum_{m=0}^{nb} b_m x[n-m] \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

indicii structurali ai ecuației

semnal de ieşire, necunoscut

coeficienții ecuației
- Cunoscuți în PS.
- Necunoscuți în IS.

semnal de intrare, cunoscut

Modele de identificare din clasa ARMAX.

- Similară ecuației diferențiale din contextul semnalelor continuale:

$$\sum_{p=0}^{na} a_p \frac{d^p}{dt^p} y(t) = \sum_{m=0}^{nb} b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Exprimare echivalentă

$$A(\mathrm{q}^{-1})\, y[n] = B(\mathrm{q}^{-1})\, x[n] \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$A(\mathrm{q}^{-1}) = a_0 + a_1 \mathrm{q}^{-1} + \cdots + a_{na} \mathrm{q}^{-na} \qquad B(\mathrm{q}^{-1}) = b_0 + b_1 \mathrm{q}^{-1} + \cdots + b_{nb} \mathrm{q}^{-nb}$$

Polinoame Laurent

$$\mathrm{q}^{-1} \Longleftrightarrow z^{-1}$$

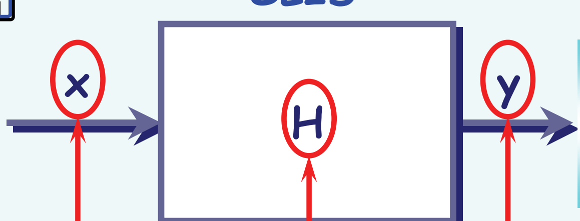
Teorema întîrzierii

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X(z) = H(z) X(z)$$

funcție de transfer

Polinoame în z^{-1}, dar nu în z.

☝ Tot rațională.



Interpretare sistemică

$$y[n] = \frac{B(\mathrm{q}^{-1})}{A(\mathrm{q}^{-1})} x[n] = H(\mathrm{q}^{-1})\, x[n]$$

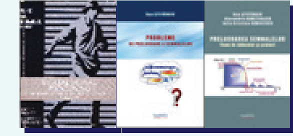
☝ Rațională.

$$\delta_0 \xrightarrow{*h} h$$

← secvență pondere

← obținută prin împărțirea infinită a polinoamelor Laurent

❻ Reprezentări de semnale prin ecuații cu diferențe



Polinoame Laurent?

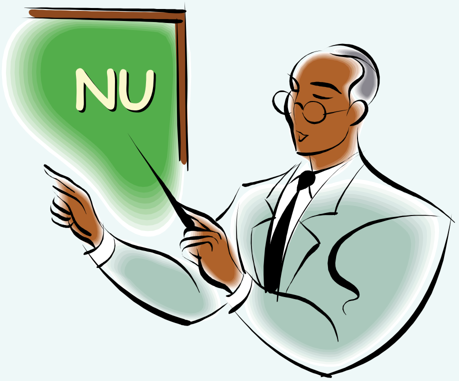
Este unică maniera de împărțire infinită?

$$X(z) = \underbrace{\sum_{n\geq 0} x[n]z^{-n}}_{X_L(z)} + \underbrace{\sum_{n>0} x[-n]z^{n}}_{X_T(z)} \qquad \forall\, z \in \mathcal{A}_c(x)$$

☝ Puteri negative.

componenta Laurent + componenta Taylor

$|z| \geq \mathcal{R}_0(x)$ $\qquad$ $|z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$



- Există 2 posibilități:

Funcția de sistem

1

$$\frac{B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nb} q^{-nb}}{A(q^{-1}) = a_0 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na}} \equiv \sum_{n\geq 0} \alpha_n q^{-n}$$

cauzală

2

$$\frac{B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nb} q^{-nb}}{A(q^{-1}) = a_{na} q^{-na} + \cdots + a_1 q^{-1} + a_0} \equiv q^{na} \sum_{n\geq -nb} \beta_n q^{+n}$$

ne-cauzală (sau anti-cauzală)

☝ Atenție la primul termen al numitorului.

- Cu toate acestea, soluția unei ecuații cu diferențe este **unic determinată de condițiile inițiale.** ➔ La fel și secvența pondere.

De exemplu

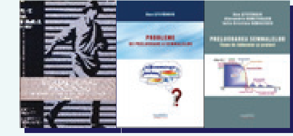
$$\begin{cases} y[0] = y_0 \\ y[\pm 1] = y_{\pm 1} \\ y[\pm 2] = y_{\pm 2} \\ \vdots \end{cases}$$

⇐ *na* condiții

- Ca și în cazul ecuațiilor diferențiale, soluția unei ecuații cu diferențe se exprimă prin **suma dintre soluția ecuației omogene și o soluție particulară.**

- Rezolvarea unei ecuații cu diferențe se efectuează mai simplu decît în cazul unei ecuații diferențiale.

❻ Reprezentări de semnale prin ecuații cu diferențe



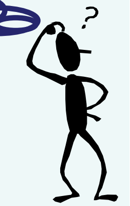
Grafuri de semnale

$$\sum_{p=0}^{na} a_p y[n-p] = \sum_{m=0}^{nb} b_m x[n-m] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y[0] = y_0 \\ y[\pm 1] = y_{\pm 1} \\ y[\pm 2] = y_{\pm 2} \\ \vdots \end{cases}$$

← ***na* condiții inițiale**

Cum poate fi rezolvată ecuația cu un mijloc automat de calcul?



Valorile ieşirii necunoscute se pot determina recursiv.

$$y[n] = -\frac{1}{a_0}\sum_{p=1}^{na} a_p y[n-p] + \frac{1}{a_0}\sum_{m=0}^{nb} b_m x[n-m] \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_0 \neq 0$$

☝ **Componenta cauzală!**

Componenta anti-cauzală ⇒ **Exercițiu**

- **Se renotează coeficienții ecuației:** $a_p \leftarrow \dfrac{a_p}{a_0}$, $\forall p \in \overline{1,na}$; $b_m \leftarrow \dfrac{b_m}{a_0}$, $\forall m \in \overline{1,nb}$

- **Ecuația are 2 componente, care pot fi calculate separat, în paralel:**

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{nb} b_m x[n-m] & \leftarrow \text{bloc de intrare} \\ \displaystyle -\sum_{p=1}^{na} a_p y[n-p] & \leftarrow \text{bloc de ieşire} \end{cases}$$

- **Operațiile cu semnalele implicate în blocurile de calcul se pot reprezenta cu ajutorul unui graf orientat.**

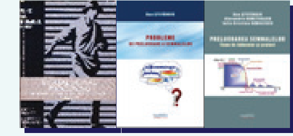
➔ **arce orientate:**

- transfer: $x \bullet\!\!\longrightarrow x$
- multiplicare: $x \bullet\!\!\xrightarrow{a} ax$
- întîrziere: $x \bullet\!\!\xrightarrow{q^{-1}} q^{-1}x$

➔ **noduri:**

- distribuție: $x \bullet\!\!\longrightarrow x,\ x,\ x$
- adunare: $x,\ y,\ \vdots \longrightarrow \circ \longrightarrow x + y + \cdots$

❻ Reprezentări de semnale prin ecuații cu diferențe

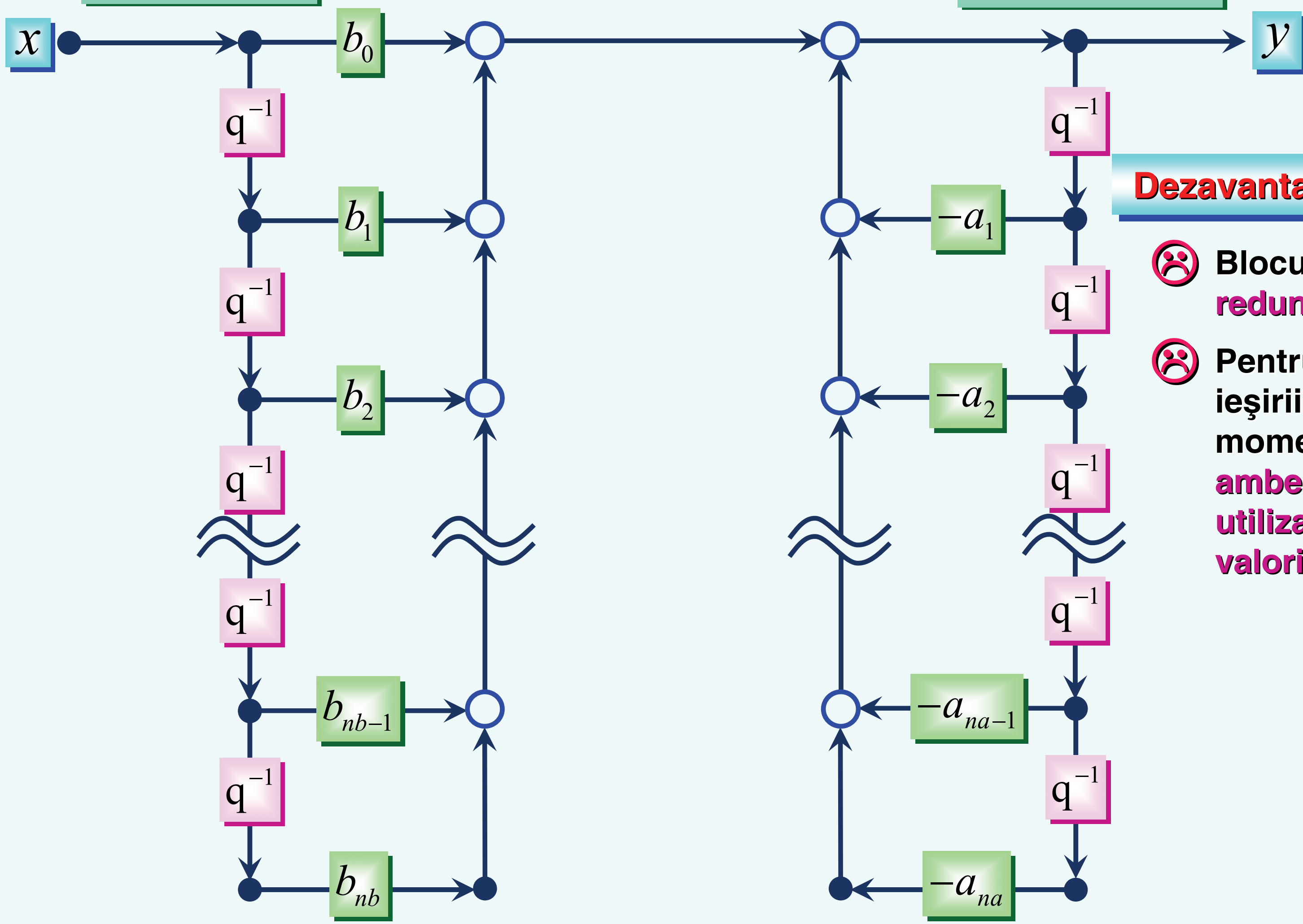


Grafuri de semnale (continuare)

O schemă de calcul recursiv (forma directă I)

$$\sum_{m=0}^{nb} b_m x[n-m]$$ ← bloc de intrare

bloc de ieşire → $$-\sum_{p=1}^{na} a_p y[n-p]$$



Dezavantajele implementării

- Blocuri de întîrziere **redundante**.
- Pentru a calcula valoarea ieşirii la un anumit moment normalizat, **ambele blocuri trebuie utilizate în calculul valorilor anterioare**.