08.10.2020.

# Prelucrarea Semnalelor

dan.stefanoiu@upb.ro

I Stabilire reguli

II Începere curs → La final o să avem un quiz de prezență până diseară la ora 12:00

Răspunsul corect = prezența

Încercați să redirectați mesajele de pe contul de email upb către altă adresă

La lab avem quiz după prezentările temelor

!* O să fie prezentate 12 cursuri din 14!*

## EXAMEN PS

### BASIC

0(absent) → 7(maxim)

Prag examen: 5%

- L: max: 20%
- P: max: 25%
- PLP: max: 10%
- PC: max: 10%
- E: max: 10%
  - ↳ grila 5% (trebuie justificate)
  - probleme: 5%

Punctaj minim intrare în examen: 40%.

măcar 15p lab
15p proiect

### PROFESIONAL

note 7(minim) – 10

- L: 20p
- P: 25p
- PLP: 10p
- PC: 10p

} minim 55p

- E: 40p
  - → grilă: 15p
  - → probleme ↗ 10p (dificultate medie) ↘ 15p (↳ dificultate mare)

Punctajul limită:

~~maxim~~ minim laborator (20p)

~~maxim~~ minim proiect (20p)

!* CINE ARE 90p are nota 10!*

Minim 10p în EXAMEN!*

Prima dată dă examen grupul BASIC: 60 min
După grupul PROFESIONAL: 120 min.

Prezența la curs = quiz

Prezența lab/proiect: avem un quiz + prezentare proiect

Punctele de la Lab (de pe parcurs) se păstrează și în restanță

PS = curs de matematică aplicată

Cursul de IS îl facem tot cu domnu' Ștefanoiu

Mărirea notelor:

I. Cerere la decanat pentru redarea examenului
(PS: se păstrează nota cea mai mare)

II. Temă de cercetare care să se prezinte la sesiunea de comunicări științifice:
Premiul: I: 3p
Premiul: II: 2p
Premiul: III sau mențiune: 1p

III Înscrierea la școala de vară francofonă în Automatică și Informatică, prezență completă ⇒ 3p bonus

Opțiunile II și III se pot combina

Exemplu grila:

BASIC
- Enunț grilă
- 5 Afirmații (pe care le notăm cu A F)

| a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|
| A | F | A | F | F |

- Fără justificare primim 0,25P / 1P

La grupul PRO, grilele implică și calcule

Până pe 5 noiembrie trebuie încărcat codul de onoare

Examen câte 2 grupe odată

„Subiectele le vom trage cu zarul"

## Cursul I

Prelucrarea numerică de semnale

Direcții: 1. Hardware
2. Software ← noi asta facem

„Digital Signal Processing"

Cuprins:

1) Conceptul de semnal
2) Problematica PS
   a) Problematica mat
   b) — " — inginerească
   c) sol. clasică (Joseph Fourier)
3) Semnale și sisteme discrete
4) Repres. semnalelor discrete în frecvență
5) Transformatele lui Joseph Fourier
   a) Principalele transformate Fourier
   b) Proprietăți
6) Reprezentări de semnale prin ecuații cu diferențe

7) Algoritmi fundamentali de tip FFT

a) alternativ

b) Goertzel

⋮

8) Alg evoluati de tip FFT

a) FFT cu struct internă variabilă

b) FFT de tip RC Singleton

c) FFT compozite, de tip Cooley-Tukey

d) Impl. RADIX ale alg FFT compoziti

9) Notiuni de esantionare

10) Probl. de proiectare a filtrelor numerice

11) Proiectarea filtrelor numerice

12) Alte filtre de interes

1) Proiectarea filtrelor FIR prin metoda ferestrei

↳ Finite impulse response

2) Proiectarea filtrelor FIR optimale

3) Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare

---

Semnal = entitate ce transportă informație cu privire la starea sau comportamentul unui sistem, atât în timp cât și în frecvență

↳ funcție de forma: $f: \mathcal{T} \to \mathcal{M}$ ← codomeniu, nevid

↳ mulț. momentelor (cuprinde o relație de ordine)

↳ nu neapărat momente de timp

Uzual: $\begin{cases} \to \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R} \text{ sau } \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \to \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R} \text{ sau } \mathcal{M} \subseteq \mathbb{C} \end{cases}$

Convenție: Fie $x \notin \mathcal{T} \Rightarrow f(x) = 0$

Cadru matematic : $\begin{cases} \to \text{Analiză funcțională} \\ \to \text{Teoria Distribuțiilor (L. Schwarz)} \\ \to \text{Teoria ec. diferențiale cu diferențe} \end{cases}$

⇓

$f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{T})$ sau $x \in \ell^p(\mathcal{T})$, $p \in \mathbb{N}^*$

continuale → discrete

Spațiile lui Lebesgue

> Spațiu închis = limita ∀ șir din spațiu ∈ acelui spațiu

- $\mathcal{L}^p(\mathcal{T})$ ⇒ Spațiul fct p-integrabile $\to \int_{\mathcal{T}} |f(t)|^p dt < \infty$ $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{T})$ — semnale continuale
(de tip Banach)
→ norma aferentă ⇒ $\|f\| = \sqrt[p]{\int_{\mathcal{T}} |f(t)|^p dt}$

- $\ell^p(\mathcal{T})$ ⇒ Spațiul fct p-sumabile $\to \sum_{n \in \mathcal{T}} |x[n]|^p < \infty$
(de tip Banach)
→ norma aferentă $\sqrt[p]{\sum_{n \in \mathcal{T}} |x[n]|^p}$

$\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ ⇒ Spațiul separabil : posedă cel puțin o bază numărabilă

! Separabilitate = ∀ o bază de semnale numărabilă !

⇒ Semnalele pot fi repres cu ajutorul unei baze numărabile

Cazul $p = 2$

$\mathcal{S}^2(\mathcal{T})$ ⇒ Spațiul Hilbert — cuprinde produsul scalar ⇒ $\begin{cases} \langle f, g \rangle = \int f \cdot \bar{g} \, dt \\ \langle x, y \rangle = \sum x[n] \, \overline{y[n]} \end{cases}$

↳ spațiu închis

<u>Norma</u>

↳ Energia semnalului $\mathcal{E}(f) \stackrel{def}{=} \|f\|^2$

$\mathcal{E}(x) \stackrel{def}{=} \|x\|^2$

**Clasa semnalelor continuale**

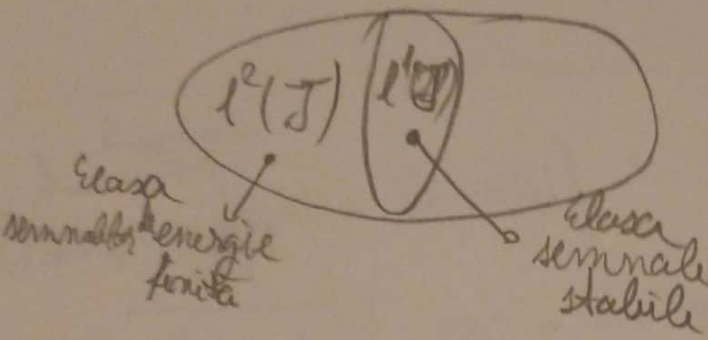
- $\mathcal{T}$ să fie <u>conexă</u>
ex: $\mathbb{R}$ ↳ între 2 momente ∃ cel puțin un alt moment
- $f(t)$ → nu neapărat continue
Dacă și continue ⇒ data analogice
- În practică ⇒ semnale interpolate

**Clasa semnalelor discrete**

- $\mathcal{T}$ este discretă
ex: o submulțime din $\mathbb{Z}$
- $x[n]$ → nu se def continuitatea (nu se poate)
⇔ semnale „digitale"
- În practică ⇒ semnale eșantionate (discretizare)

* Între cele 2 $\mathcal{F}$ o dualitate imperfectă
° Dacă eșantionăm și interpolăm putem să nu regăsim semnalul inițial în urma acestui proces

Incluziuni (semnale discrete)

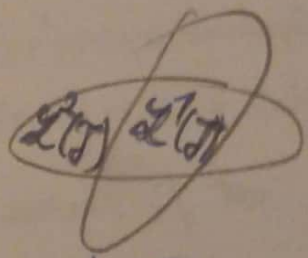



$l^1$ este inclus în $l^2$

$\Rightarrow$ Se poate defini corect transf. Fourier

$x[n] = \frac{\sin \omega_0 n}{n}$ nu admite $\mathcal{F}$ dacă $\omega_0 \in \mathbb{Q}\frac{\pi}{2}$
↳ multiplu rațional de $\frac{\pi}{2}$

Exercițiu:




→ Semnalele naturale admit Transformata Fourier

Suportul unui semnal $\begin{cases} Supp(f) \overset{def}{=} \overline{\{f \in \mathbb{R} \mid f(t) \neq 0\}} \\ Supp(x) \overset{def}{=} \overline{n_{min}, n_{max}} \end{cases}$ < putem avea un punct în care să fie 0 ....

~~$\mathcal{F}$ și semnale stabile și, de energie finită~~

Quiz



Scanned with CamScanner

 15.10.2020.

exercițiu: să demonstrăm

! * Pentru semnalele discrete $l^2(\mathbb{Z}) \subset l^1(\mathbb{Z})$

$x[n] = \frac{\sin \omega_0 n}{n}$ → nu admite transformată Fourier

! * În timp continuu nu avem această proprietate.
Testarea practică a proprietății de energie finită se realizează cu ajutorul conceptului de suport.

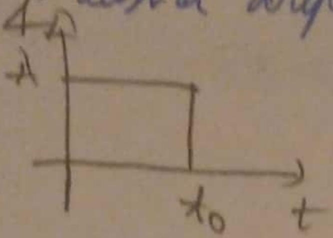
! * Semnalele cu suport compact / finit sunt stabile. (de energie finită) ↳ cele din practică

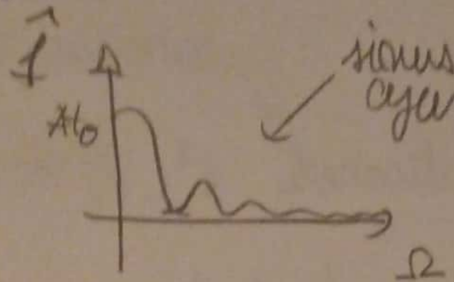
! * ∃ și semnale cu suport infinit cu energie finită și stabile
↳ Principiul de incertitudine GABOR-HEISENBERG

Enunț „populară": Semnalul său spectrul său nu pot avea simultan suporturi compacte / finite (ambele pot avea suporturi infinite)

În practică:
- a) de suport finit, cu spectru cu suport infinit
- b) de suport infinit, cu spectru finit
- c) semnale esențial localizate simultan în timp și frecvență → semnal și spectru cu val neglij. în afara unor suporturi compacte / finite

a) Fereastra dreptunghiulară

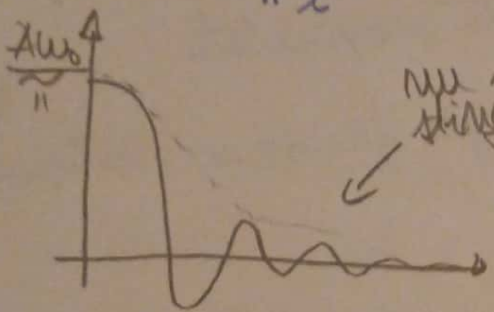



sinus atenuat ce nu ajunge la 0

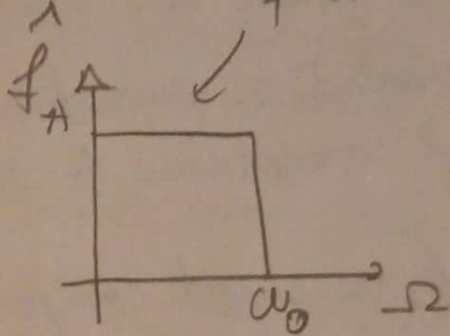
b) Filtru trece-jos

$$h(t) = \frac{A \sin \omega_0 t}{\pi t}$$




nu se stinge

filtru ideal




c) Semnalul lui Gauss

centrată în $t_0$

$$g(t) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$, $\sigma \sim$ deschiderea clopotului

↳ în frecvență este tot o gaussiană

! Rezoluție în timp $\sim$ $\frac{1}{\text{Rezoluția în frecvență}}$

Tot din principiul de incertitudine

$\sigma \to$ trece în frecvență la numărător

# I. Problematica PS

## → Problema matematică

$\overset{P}{S}(J)$ $\cup\!\!\!\!\!\shortmid$

**Directă**: Fie $f \in \overset{P}{S}(J)$ și o bază numărabilă $B = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow f \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \cdot e_n$$

↳ dificil de calculat dacă baza nu este ortonormată

**Inversă**: cunoaștem $B$ și $c_n$. Se cere $f \in \overset{P}{S}(J)$

→ impedimentul este că suma este infinită

↳ imposibil cu un calculator

→ mai ușor de rezolvat pe <u>hârtie</u>

$\boxed{\text{Spații separabile} \Rightarrow \text{Baze numărabile}}$

<u>Obs</u>: Dificultatea constă în alegerea unei baze adecvate. Dacă sp. este Hilbert se poate specifica o bază ortonormată $\Rightarrow$ problema se simplifică

$\Downarrow$

→ simbolul lui Kronecker

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_0[n-m], \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$c_n = \langle f, e_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$$

! Atenție la indicii de sumare !

## Problema inginerească

$\swarrow$ directă

→ Problema analizei de semnal (descompunerii)

Fie $f \in S^p(J)$ și o bază numărabilă $B$

Se cere: construirea unui nou semnal $\phi \in S^p(J)$

1. $\phi \equiv \sum_{n=0}^{N} c_n e_n$, $N$ - finit și fixat

$c_n$ se calculează cu ajutorul lui $f$ și al bazei

2. $\phi$ aproximează cu precizie pe $f$: $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \phi \in S^p(J)$ a.î. $\|f - \phi\| < \varepsilon$.

$c_n$ mare ⇒ elem. imp. din bază

determină nr. elementelor ce contribuie la compunerea lui $\phi$

$\swarrow$ inversă

→ Problema sintezei de semnal (a reconstrucției)

$f \in S^p(J)$ necunoscut, $B$ cunoscut, $\phi$ cunoscut

Se cere valoarea lui $f(t_0)$, cu un grad de precizie $\phi$.

↪ putem să-l folosim și la interpolare + extrapolare

val. între 2 momente

val. în afara domeniului de def a lui $f$



Scanned with CamScanner

Dacă baza este ortonormată $\begin{cases} \text{Analiză } c_n = \langle f, e_n \rangle, \forall n \in \overline{0,N} \\ \text{Sinteză } f \simeq \phi = \sum_{n=0}^{N} \langle f, e_n \rangle \cdot e_n \end{cases}$

alegem baza pentru a elimina / diminua redundanța

Soluția clasică (Joseph Fourier) → contemporan cu Gauss → formulele lui au fost confirmate

→ studia schimbul de căldură dintre planete

Ideea lui Fourier → Orice semnal poate fi considerat ca o suprapunere aditivă de semnale atomice „monofrecvențiale", cu diferite amplitudini.

demonstrația lui conține câteva erori (partea cu orice semnal)

→ dacă o fct. are asimptote verticale ⇒ nu putem descompune semnalul

Teorema de aproximare punctuală Dirichlet-Fourier (vezi anexa E)

⇓

Introduce conceptele de „serie Fourier" și „analiza armonică"

combinație liniară de „armonice elementare"

→ semnalele din $\mathcal{L}^1$ și $\ell^1$ au șanse mari să poată fi descompuse în serie Fourier

→ aproximează punctual funcția, nu uniform!

dacă creștem nr. elem. bazei ⇒ creștem precizia

Fie $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, +\pi]) \Rightarrow$ Baza armonică, $\mathcal{B}_a \overset{def}{=} \{\underbrace{1}_{e_0}, \overset{e_{s1}}{\sin t}, \overset{e_{c1}}{\cos t}, \dots, \overset{e_{sn}}{\sin nt}, \overset{e_{cn}}{\cos nt}\}$

cuantifică depărtarea semnalului de axa orizontală

au un nr. întreg de perioade incluse în $[-\pi, +\pi]$

perioadele sunt de forma $\frac{2\pi}{n}$

Dacă o familie de vectori este ortogonală $\Rightarrow$ este liniar independentă (familia)

Ortogonalitatea: $\langle f, g \rangle \overset{def}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cdot \overline{g(t)}\,dt$

$\Rightarrow \|e_0\|^2 = 2\cdot\pi$, $\langle e_0, e_{sn} \rangle = 0$, $\langle e_0, e_{cn} \rangle = 0$

$\langle e_{sn}, e_{sm} \rangle = \pi\,\delta_0[n-m]$, $\langle e_{cn}, e_{cm} \rangle = \pi\,\delta_0[n-m]$

$\langle e_{sn}, e_{cm} \rangle = 0$

nu este normată

$\mathcal{B}_a \to$ sistem de generatori (dem. lui Fourier)

Formulele lui Fourier

ANALIZA

$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\langle f, e_0 \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt$ ($e_0 = \cos 0t$)

$\alpha_0$ ne indică deplasamentul față de axa orizontală

$\beta_0 = 0 = \sin 0t$ (pentru simetrie)

$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\langle f, e_{cn} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos nt\,dt$

$\beta_n = \frac{1}{\pi}\langle f, e_{sn} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt$ $\quad\forall n \in \mathbb{N}^*$

punctual convergență

$f(t) \overset{PC}{=} \alpha_0 + \sum_{n\geq 1}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$, $\forall t \in [-\pi, +\pi]$

SINTEZĂ

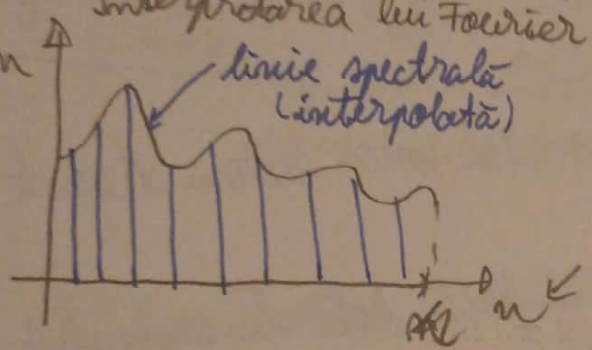
Frecvența unei armonice elementare este $\frac{n}{2\pi}$

$$\underbrace{f_n(t)}_{} = \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\forall t \in [-\pi, +\pi]$$

↓
armonica elementară

$$f_n(t) = P_n \sin(nt + \varphi_n), \quad P_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$$

↳ putere spectrală




indicele de pulsație (pulsație)

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \rightarrow \text{faza spectrală}$$

PARSEVAL: $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$ ($\alpha_n, \beta_n$ sunt evanescenți)
↓
Pentru $f \in \mathcal{L}^2$

PARSEVAL: Pe măsură ce avem armonice de pulsație înaltă ⇒ $\alpha_n$ și $\beta_n$ încep să scadă. (e și o consecință a faptului că discutăm de semnale din $\mathcal{L}^2$)
→ semnalul conține informații utile la frecvențe mici și medii
⇓
Putem „trunchia" baza

⇒ În baza lui Fourier elementele sunt ordonate după importanță

# Semnale și sisteme discrete

SLID = sistem liniar invariant la deplasări

Prelucrarea numerică de semnal => Ramură importantă a Prelucrării Semnalelor
DSP = Digital Signal Processing

$x \overset{def}{=} \{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$

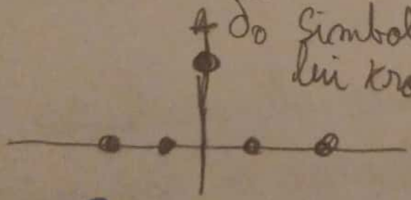
Generate $\begin{cases} \to \text{direct, prin intermediul unui sistem discret} \\ \to \text{prin eșantionare} \end{cases}$

* Pot să aibă prop. diferite față de semnalele continue

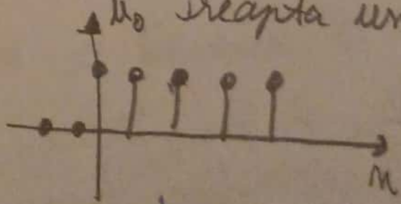
Sd -> Mulțimea semnalelor discrete

(Sd, +, ·) -> spațiu vectorial

↳ include și spațiile lui Lebesgue




în timp continuu avem impulsul lui Dirac



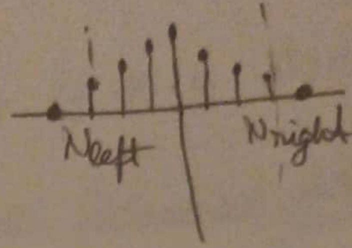

↳ în continuu avem treapta lui Heaviside

## Caracteristici ale SLID

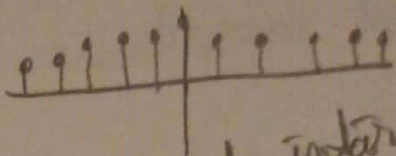
- sunt carac doar de fct pondere (secvența): $h \overset{def}{=} H \cdot \delta_0$
  răsp. la impuls (nu neapărat causal)

* Dacă nu e causal => nu este implementabil

FIR = finite impulse response




IIR = infinite time response



operator de întârziere temporală

• ieșirea se exprimă:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\cdot h_k[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\,(g^{-k}h)[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\cdot h[n-k]}$$

convoluția (liniară)

să fie bine definită

$$x*y = \sum x[k]\cdot(g^{-k}y)[n] \Leftrightarrow x*y = \sum x[k]\cdot y[n-k]$$

• în timp continuu: $f*g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \;, \forall t\in\mathbb{R}$

• generalizare în cazul semnalelor complexe

→ $x*y = \sum x[k]\cdot\overline{y[n-k]}$

! Nu toate semnalele discrete se pot „convoluta"

$(S_{*d}, +, *, \cdot)$ → este o algebră unitară comutativă

convoluția

SLID discrete s.a și filtre (liniare) numerice

! Un filtru numeric este realizabil fizic doar dacă secvența sa pondere este cauzală.

Când putem proiecta un filtru numeric realizabil fizic?
Teorema Paley-Wiener (1934)

<u>Teorema 1</u> (Paley-Wiener)

$h[n]=0$ pt $n<0$ $\quad \|h\|_1<\infty$

a. Fie $h$ o secvență cauzală și stabilă $\Rightarrow$ are loc:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \ln |H(e^{j\omega})| \right| d\omega < \infty ,$$

unde $H(e^{j\omega})$ este Transformata Fourier a secvenței $h$, definită prin:

$$\underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{este } 2\pi \text{ periodic}} = \sum_{n \geq 0} \underbrace{h[n] \cdot e^{-j\omega n}}_{\text{produs scalar}} , \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

produs scalar $\Rightarrow$ Baza $e^{j\omega n}$, $n \in \mathbb{N}$

b. Reciproc, dacă spectrul $|H(e^{j\omega})|$ are proprietatea de la punctul a., atunci i se poate asocia o fază $\varphi(\omega)$ a.î.

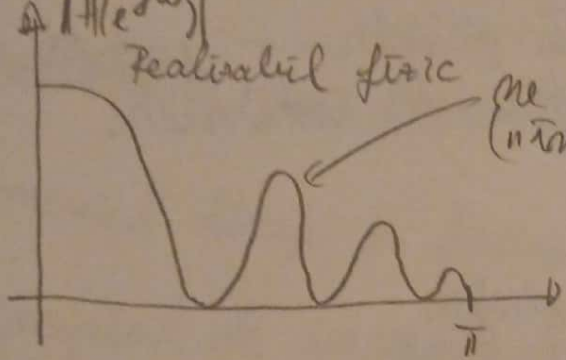
$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{+j\omega n} d\omega$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ să fie cauzală

## Interpretarea teoremei

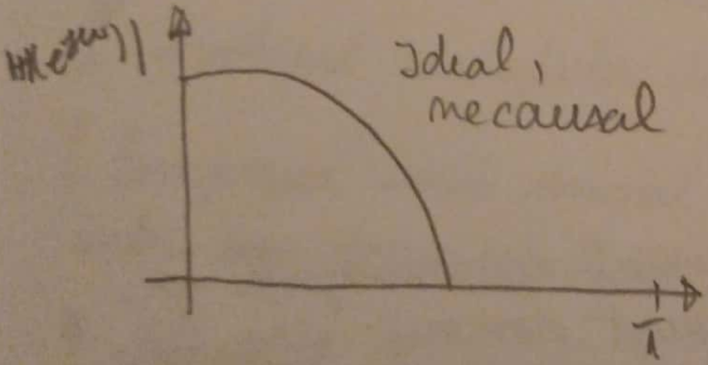
• secv. discretă din cadrul teoremei poate fi asimilată cu secvența pondere a unui filtru numeric

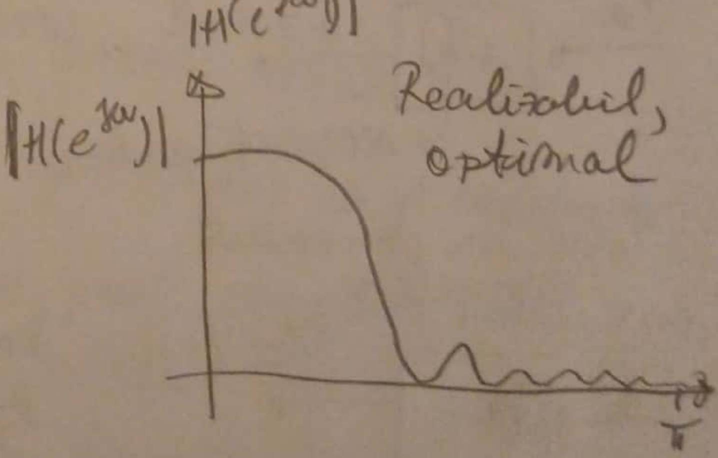
! * H nu se poate anula pe o întreagă bandă de frecvențe ⇐ din integrala

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\ln|H(e^{j\omega})|\right| d\omega < \infty \Rightarrow$$ o mulțime cel mult numărabilă de zerouri




ne dorim să minimizăm ("înălțimea") amplitudinea lobilor paraziți




## Caracterizări ale dinamicii SLID

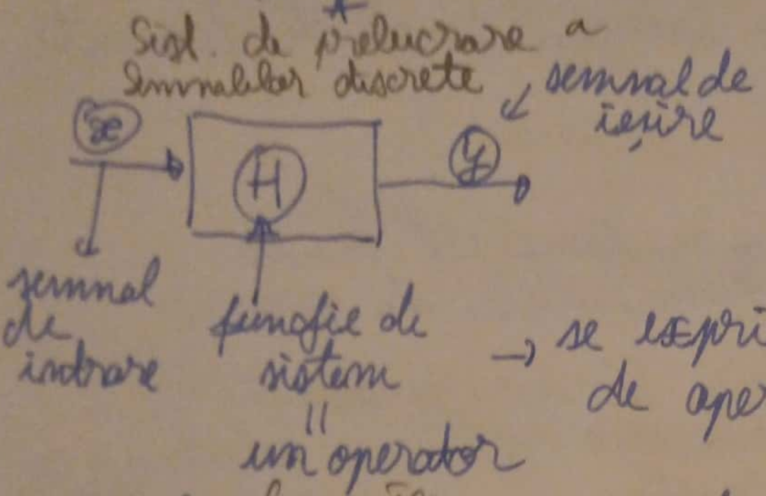
**Teorema 2** (convoluție liniară directă)

• Fie $x$, $y$ discrete pt care ~~suma de convoluție~~ liniară este convergentă $\Rightarrow \mathcal{Z}(x * y) = \mathcal{Z}(x) \cdot \mathcal{Z}(y)$

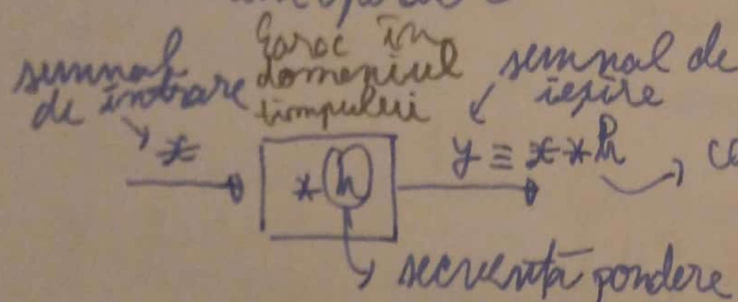
↳ $x, y \in S_d^* \subset S_d$

! Citiți cu atenție ANEXA D

! Recomand să vă uitați în cartea cu probleme rezolvate !

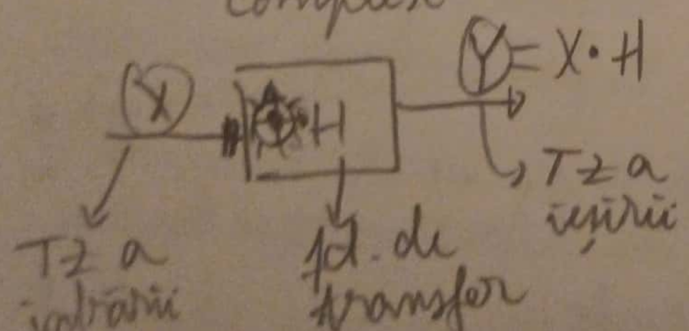



→ se exprimă printr-o colecție de operatori de întârziere



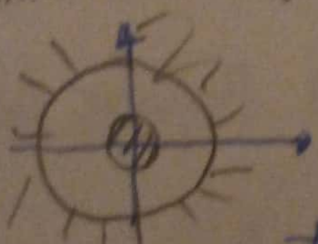

→ convoluția liniară

Lucrăm în domeniul complex




Domeniul de convergență în Z sunt domenii <u>circulare</u>

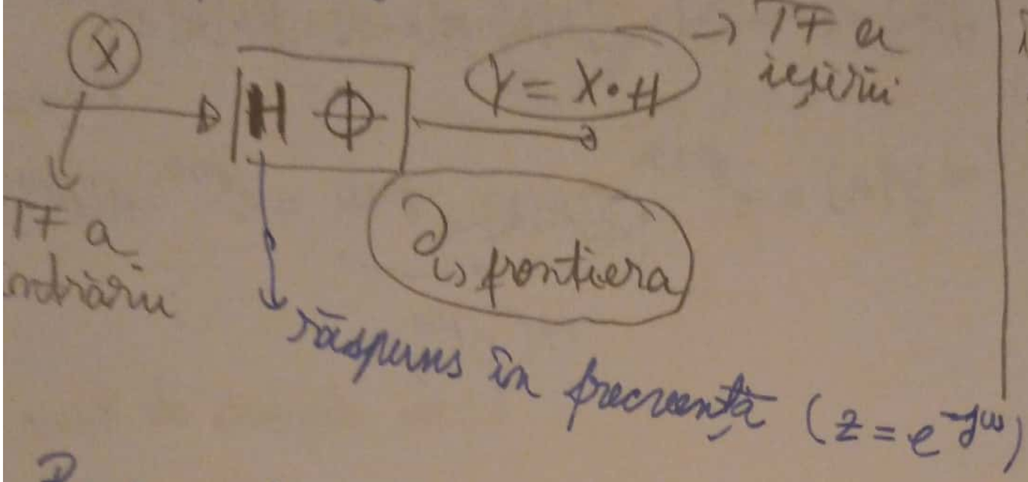
! ∀ linie din DC al Laplace în z se curbează.



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z(h)(z)$$

→ Toate <u>sistemele stabile</u> discrete includ cercul unitar în aria de convergență dacă sistemul este stabil

Carac. în domeniul frecvenți




Q: Pot calcula TF înlocuind în TL s cu jω? (știam că nu merge)

Reprezentarea în frecvență a sistemelor discrete

! Domeniul timp și frecvență sunt duale.

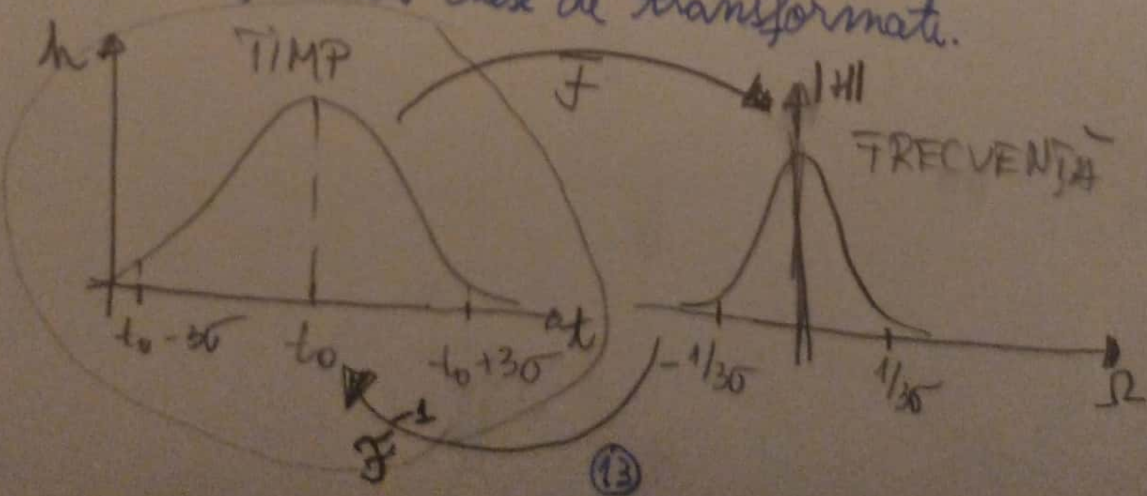
Principiul de incertitudine GABOR-HEISENBERG

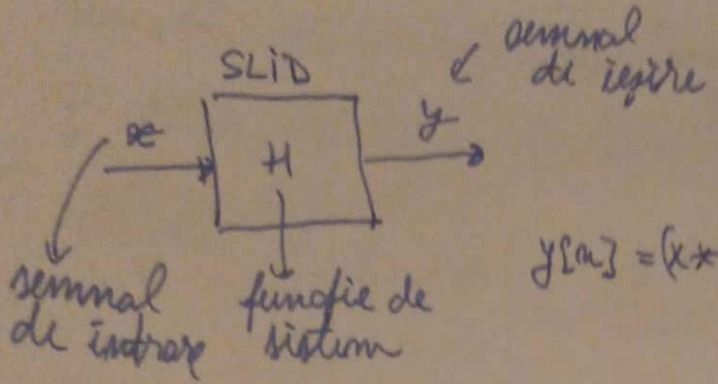
! Produsul rezoluțiilor de reprezentare ≤ o constantă

! Compresia unui semnal se poate compresa mai ușor într-un domeniu decât în altul.

! Semnalul este un șir de date, dar în spatele acestora se ascund informații utile în frecvență

! Există mai multe clase de transformate.






$$y[n] = (x * h)[n] = \sum h[k]\cdot x[n-k] = \sum h[k]\, e^{+j\omega(n-k)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$x = e^{j\omega n}$ $\xrightarrow{*h}$

$\omega \in \mathbb{R}$

secvența pondere

$$\Rightarrow y[n] = e^{j\omega n} \cdot \underbrace{\sum h[k]\cdot e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})} = e^{j\omega n}\cdot H(e^{j\omega})$$

↳ nu depinde de timp

! Răspunsul este bine definit $\Leftrightarrow h \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| \le \sum |e^{-j\omega k}\cdot h[k]| = \sum |h[k]| < \infty$$

PS_C3 22.10.2020

## Reprezentarea în frecvență a sistemelor discrete

$z^{-1} \Leftrightarrow e^{-j\omega}$

Semnal frecvențial continual

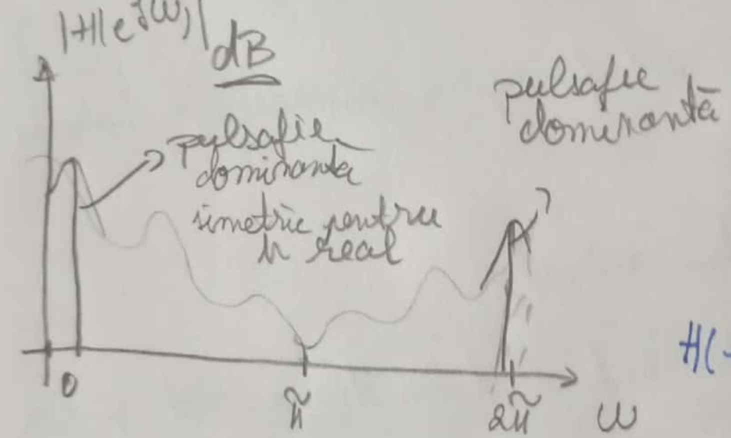
$H(z^{-1}) \stackrel{def}{=} \sum_{k\in \mathbb{Z}} h[k]\cdot z^{-k} \longrightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k\in \mathbb{Z}} h[k]\cdot e^{-j\omega k}$

operator

Funcție de sistem

Răspuns în frecvență

❗ De adus la forma $H(z^{-1})$ $(z^{-1} \to e^{-j\omega})$




Proprietăți:
- Funcție analitică (indef. deriv.)
- Periodicitate: $H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})\ \forall \omega \in$

$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{Re^2[H(e^{j\omega})] + Im^2[H(e^{j\omega})]}$

Reprezentarea în dB: $20 \lg A$

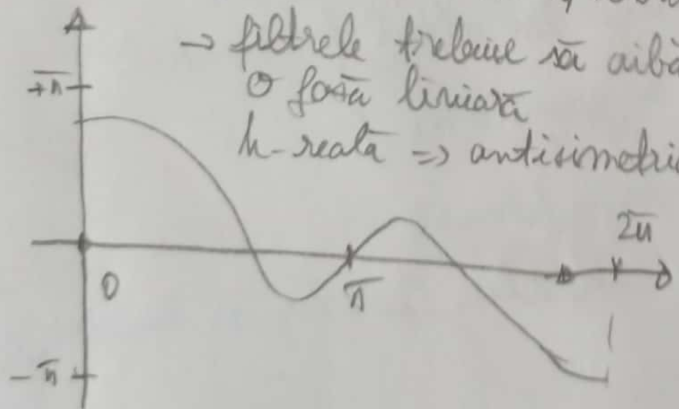
↳ De ce? (Ca să vedem spectrul mai bine)

"Echilibrează rezoluțiile"

→ filtrele trebuie să aibă o fază liniară

h-reală => antisimetrică

→ exerciții



# Invarianța la deplasări frecvențiale

Prop.: Răsp. unui SLID cu fct pondere reală și stabilă la o armonică de pulsație constantă este o armonică de aceiași pulsație, dar de amplit. și fază eventual diferite

$e^{j(\omega \pm \Delta\omega)n}$

$$* h \rightarrow y[n] = e^{j(\omega+\Delta\omega)n} \cdot H(e^{j(\omega \pm \Delta\omega)}), \forall n \in \mathbb{Z}$$

! ∃ sisteme ce modifică pulsația (sunt neliniare)

=> Spectrul ieșirii și intrării pot fi repres. pe aceiași bandă de frecvențe.

## Transformatele lui Joseph Fourier

Semnal = entitate ce transportă inf atât în timp cât și în frecvență

Transformata armonică => Operator inversabil ce transformă un semnal temporal în altul frecvențial

! TF a unei gaussiene este ~~tot~~ o gaussiană !

- Există mai multe clase de transformate
- Una dintre cele mai diverse este clasa Operatorilor Fourier

Detalii în ANEXA E

SFC : Seria Fourier continuă pt semnale periodice $L^1([-T,T])$

TCFC : Transformata continuă a lui Fourier pt semnale continuale $L^1(\mathbb{R})$

TCFD: Transf. Continuă a lui Fourier pt semnale digitale $l^1(\mathbb{Z})$

SFD : Seria Fourier Discretă pt semnale discrete și periodice $\tilde{S}_{dN}$

TFD: Transf. Fourier Discretă pt semnale discrete cu suport finit $S_{dN}$

SFC : $L^2([-T,+T])$

⇒ produsul scalar $\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \int_{-T}^{T} \tilde{f}(t) \cdot \tilde{g}(t)\, dt$

$f, g$ – reale

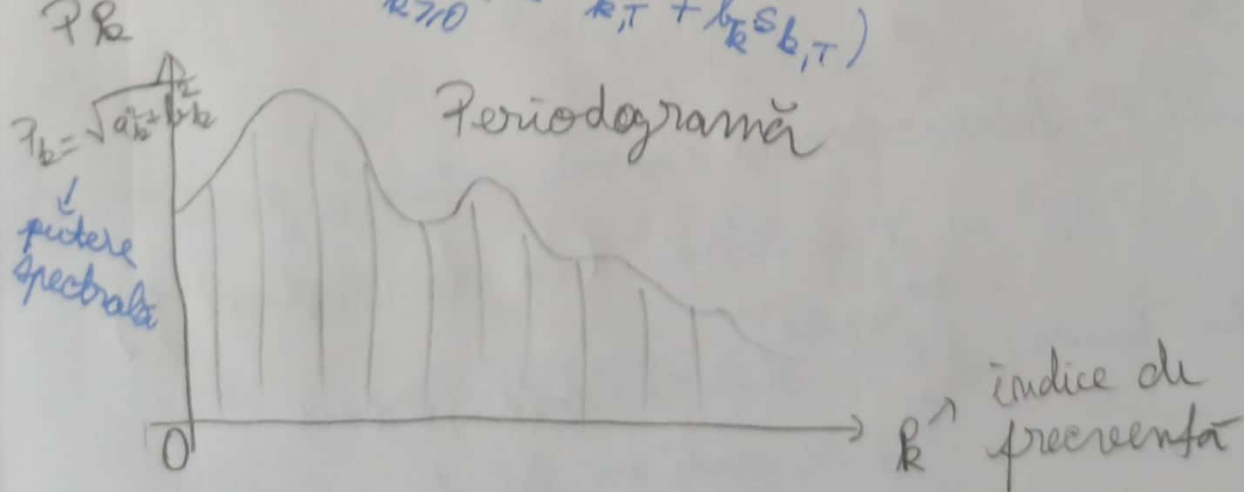
! Când un semnal e periodic ne interesează inf. transmisă într-o perioadă

$$\Rightarrow \mathcal{H}_T \overset{def}{=} \left\{ s_{T,k}(t) = \sin \frac{k\pi t}{T} \right\}_{k \geq 1} \cup \left\{ c_{T,k}(t) = \cos \frac{k\pi t}{T} \right\}_{k \geq 0}$$

↳ de perioada $\frac{2T}{k}$ ↳ îndeplinește formulele bine cunoscute

$a_0 = \frac{1}{2T} \langle f, c_{T,0} \rangle$ , $a_k = \frac{1}{T} \langle f, c_{T,k} \rangle$ , $b_k = \frac{1}{T} \langle f, s_{T,k} \rangle$

Sinteza: $f \equiv \sum_{k \geq 0} (a_k \cdot c_{k,T} + b_k s_{k,T})$



(continuală)
$\Omega \to$ pulsație absolută (rad/s)

TCFC $(\mathcal{L}^1(\mathbb{J}))$

$$\mathcal{F}(f)(j\Omega) = F(j\Omega) = \hat{f}(j\Omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\Omega t}}\,dt \ ,\ \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

$F = \langle f, e^{j\Omega t} \rangle$

o putem privi ca un produs scalar

TL:
$$F(s)\Big|_{s=j\Omega} = \int_{0}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\Omega t}\,dt$$

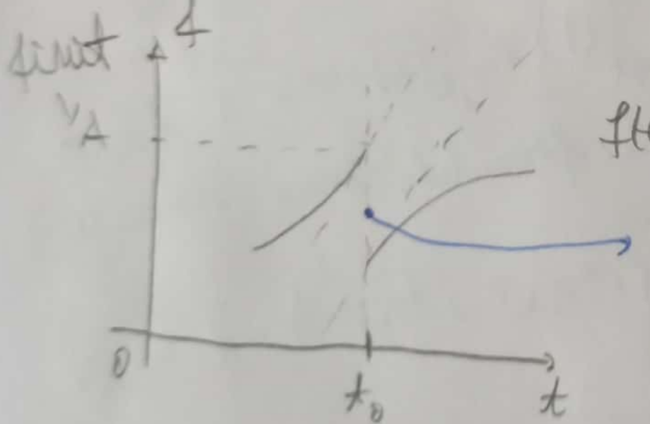
→ diferența: $f(t)$ este cauzală (la Laplace)

$TCFC = TL\big|_{s=j\omega}$ pt semnalele stabile și cauzale

$$|F(j\Omega)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\cdot e^{-j\omega t}|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty \ \ \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

Inversabilă: nu vine de la periodicitate $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{J})$

$$f(t) \overset{a.p.t}{=} \tilde{f}(t) = \mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\Omega)\cdot e^{+j\Omega t}\,d\Omega,\ \forall t \in \mathbb{R}$$




$f(t_0) = ?$

$$\frac{f(t_0-) + f(t_0+)}{2}$$

→ limita laterală

! Practic TCFC folosesc aceiași expresie integrală !

Dacă $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 \Rightarrow F \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ (De demonstrat !)

Relația lui Poisson: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j\Omega t}\,d\Omega = 2\pi\,\delta_0(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$

↳ ne arată un fel de ortogonalitate

TCFC → un SFC pt semnale cu perioada infinită

Proprietăți:

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt, \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

- Funcție analitică
- Valori complexe în general
- Liniară
- Nu este neapărat periodică

Teorema lui Fubini

$f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ Energia temporală

$$\mathcal{E}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad \text{(finită)}$$

$$\mathcal{E}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\Omega)|^2 d\Omega$$

poate fi văzută ca un produs scalar

TCFD: $l^1(\mathbb{Z})$

coef. Fourier

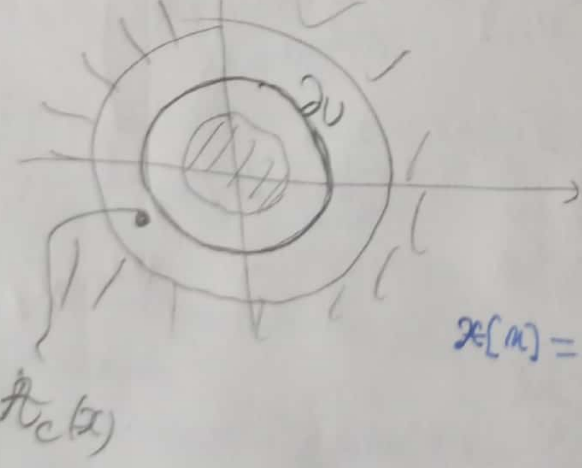
transf Z pe cercul unitate

$$\mathcal{F}(x)(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

pulsație relativă normalizată

$, \forall \omega \in \mathbb{R}$

↳ se măsoară în radiani





$$\mathcal{Z}(x)(z) = \sum x[n] \cdot z^{-n}$$

deoarece familia de armonice nu este normată

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}(X)[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{+j\omega n} d\omega, \forall n \in \mathbb{Z}$$

→ Baza este infinită!

$x \in l^1(\mathbb{Z})$

$X \in \mathcal{L}^1([-\pi, +\pi])$

Rel lui Poisson

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm j\omega n} = 2\pi \delta_0[n], \forall n \in \mathbb{Z}$$

↳ de calculat!

Absolut convergența ⇒ putem inversa suma cu integrala, sau integrale între ele!

<u>SFD</u> pentru semnale digitale periodice din $\tilde{S}_{dN}$

$(\tilde{S}_{dN}, +, \cdot)$ ← algebră comutativă
← spațiu Hilbert

→ produsul scalar $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot \overline{\tilde{y}[n]}$

→ norma canonică $\|\tilde{x}\| = \sqrt{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle}$

Parametru remarcabil: N

$$\tilde{e}_k^N = \overline{w}_N^{nk} = \cos\left(\frac{2nk\pi}{N}\right) + j\sin\left(\frac{2nk\pi}{N}\right), \forall n, N \in \mathbb{N}$$

n → este timpul
k → pentru frecvență $\quad w = \frac{2k\pi}{N}$

notație „inteligentă"

nu sunt normate

$$\Rightarrow \mathcal{H}_N \stackrel{def}{=} \{\tilde{e}_0^N \equiv 1, \tilde{e}_1^N, \tilde{e}_2^N, \dots \tilde{e}_{N-1}^N\} \leftarrow N \text{ elemente ortogonale}$$

Coeficienții lui Fourier $\Rightarrow \tilde{X}[k] = \langle \tilde{x}, \tilde{e}_k^N \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot w_N^{nk}$

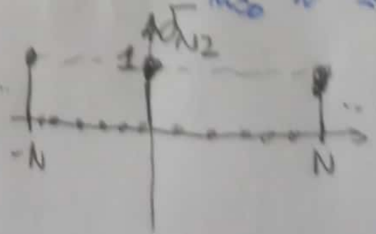
periodic din același spațiu → $\tilde{X} \in \tilde{S}_{dN}$ $\qquad \forall k \in \overline{0, N-1}$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \cdot \tilde{e}_k^N[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, \overline{w}_N^{nk}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

↳ ne folosim de relația lui Poisson: $\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w}_N^{kn} = N\delta_{N\mathbb{Z}}[k]$

$\delta_{N\mathbb{Z}}$

↳ simbolul lui Kronecker prelungit prin periodicitate



$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r}}$$ ← util pentru demonstrarea relației lui Poisson de mai devreme

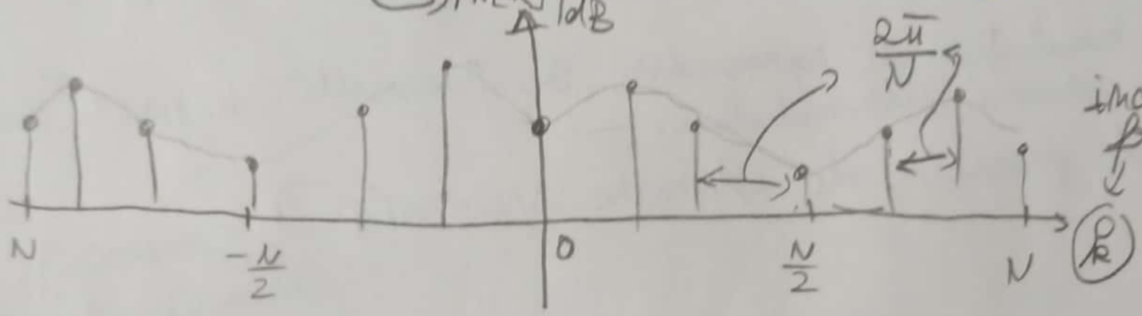
$$\boxed{\begin{aligned}&N \to \infty\\ &|r| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}\end{aligned}}$$

$\boxed{r = w_N^k}$ ← La Poisson

$$\boxed{w_N^{kN} = w_1^k = 1, \forall k}$$

! Dem inversabilitatea
↳ sume finite ⇒ le putem interschimba

x real ⇒ simetric → $|\tilde{X}[k]|_{dB}$




Rezoluția de reprezentare este dată de distanța dintre 2 linii spectrale

TFD pentru semnale digitale de suport finit din $S_{dN}$

$(S_{dN}, +, \cdot, \cdot)$ ~~a~~ Algebră comutativă (izomorf cu $(\tilde{S}_{dN}, +, \cdot, \cdot)$)
~~a~~ Spațiu Hilbert
→ Produsul scalar $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \overline{y[n]}$

↳ durata
N → Parametru remarcabil

! Orice semnal din $S_{dN}$ poate genera un semnal periodic prin prelungire prin periodicitate.

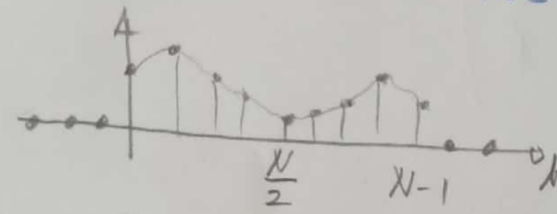
! ∀ semnal din $\tilde{S}_{dN}$ poate genera un semnal din $S_{dN}$ prin restricția la ~~a~~ perioada principală

$\mathcal{H}_N = \{ e_k^N \}_{k \in \mathbb{Z}}$

→ putem extrage restricția înmulțind cu o fereastră dreptunghiulară

$X[k] = \langle x, e_k^N \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e_N^{nk}, \forall k \in \overline{0, N-1}$

Reprezentare:




→ Rezoluția este controlată de durată $\left(\frac{2\pi}{N}\right)$

Mărirea rezoluției de reprezentare în frecvență se poate face adăugând zerouri semnalului.
↳ scade precizia de estimare spectrală } consecința a principiului de incertitudine

$freqz$ → reprezintă frecvența logaritmic

Produsul rezoluțiilor ≤ o constantă

$w_f \cdot T_s \geq const$ (relația Gabor Heisenberg)
$\leq 2\pi$ pentru majoritatea semnalelor

$\frac{1}{T_s}$ = rezoluția în timp

$\frac{1}{w_f}$ = rezoluția în frecvență

Proprietăți practice → Exprimarea matriceală a SFD

Proprietăți fundamentale
de convoluție } în ANEXA F

$W_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{W_N}$

↳ matricea coef $w_N^{nk}$