Prelucrarea semnalelor

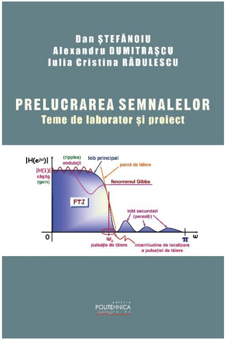
Laborator 1 - Semnale discrete

http://acs.curs.pub.ro

Profesor Dan ŞTEFĂNOIU
dan.stefanoiu@acse.pub.ro

Conferenţiar Alexandru DUMITRAŞCU
alexandru.dumitrascu@acse.pub.ro

As.drd. Iulia-Cristina RĂDULESCU
iulia.radulescu@acse.pub.ro



Semnale utilizate

→ Generate cu ajutorul funcțiilor MATLAB prezentate în acest laborator

→ Semnale vocale sau audio care pot fi descărcate de pe platforma Moodle de la adresa https ://acs.curs.pub.ro . Acestea sunt enumerate în Tabelul 1.1.

Tabelul 1.1. Fișiere utilizate în cadrul Laboratorului 1

Nume fișier	Conținut	Frecvența de eșantionare
sunet_a	semnal vocal, sunet /a/	8 kHz
sunet_i	semnal vocal, sunet /i/	8 kHz
sunet_s	semnal vocal, sunet /s/	8 kHz
xilo	semnal audio, xilofon	44,1 kHz

Obiective

Însușirea modului de lucru cu semnale în mediul de programare MATLAB. Studiul operațiilor cu semnale și al proprietăților semnalelor deterministe și aleatoare.

Suport teoretic

Semnal continual (analogic)

Un semnal continual (analogic) f este o funcție definită pe mulțimea numerelor reale, cu valori reale sau complexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Semnal discret (digital)

Un semnal discret (digital) x este o funcție definită pe mulțimea numerelor întregi cu valori reale sau complexe, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

Eșantionare

Fie $x_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un semnal continual (analogic). Prin eșantionare (uniformă) cu perioada T_s se obține semnalul discret (digital) :

$$x[n] = x_a(nT_s), \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Periodicitate

Un semnal discret x este *periodic* de perioadă M (sau M-periodic), dacă $x[n] = x[n + kM]$, pentru orice $n, k \in \mathbb{Z}$

Suportul unui semnal

Semnalul discret x are suportul $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$ dacă $x[n] = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{T}$. În mediul de programare MATLAB, se pot utiliza semnale cu suport $\mathcal{T} = \overline{0, N-1}$, $N \in \mathbb{Z}^*$.

Semnale deterministe

Impulsul unitar (centrat în origine)

$$\delta_0[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \in \mathbb{Z}^* \end{cases} . \quad (1.2)$$

Treapta unitate (în origine)

$$u_0[n] = \begin{cases} 1, n = \mathbb{N} \\ 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases} . \quad (1.3)$$

Semnalul exponențial cauzal

$$x[n] = \alpha^n \cdot u_0[n], \forall n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{C}, \quad (1.4)$$

Semnalul este și stabil (absolut sumabil) dacă și numai dacă $|\alpha| < 1$

Semnalul sinusoidal real

$$x[n] = A \cdot sin(\omega n + \varphi), \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.5)$$

Semnalul sinusoidal complex

$$x[n] = A \cdot exp(j(\omega n + \varphi)) = \\ = A[cos(\omega n + \varphi) + j \cdot sin(\omega n + \varphi)], \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1.6)$$

- $\rightarrow$ $A > 0$ este amplitudinea
- $\rightarrow$ $\omega \in \mathbb{R}$ este pulsația (numită adesea și frecvență)
- $\rightarrow$ $\varphi \in (-\pi, +\pi]$ este defazajul

Două sinusoide de forma (1.5) sau (1.6), având frecvențele ω și $\omega + 2k\pi$ (unde $k \in \mathbb{Z}$ este arbitrar) sunt identice.

Cele două semnale sinusoidale sunt periodice numai dacă pulsația caracteristică este un multiplu rațional al lui π. În caz contrar, semnalele sunt aperiodice. O exprimare uzuală a pulsațiilor semnalelor (1.5) sau (1.6) este următoarea :

$$\omega = \frac{2k\pi}{N}, \tag{1.7}$$

unde $k \in \mathbb{Z}$, iar $N \in \mathbb{N}^*$. În acest caz, semnalul sinusoidal discret (real sau complex) este periodic.

Operații cu semnale discrete

Convoluția

$$(x * y)[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]y[n-k], \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1.8}$$

Modulația în timp

$$(x \cdot y)[n] = x[n]y[n], \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1.9}$$

Semnale aleatoare (stocastice)

Funcția de densitate de probabilitate

O variabilă aleatoare ζ este caracterizată de *funcția de densitate de probabilitate* $p : \mathbb{R} \to [0,1]$, cu proprietatea :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta)d\zeta = 1. \tag{1.10}$$

Probabilitatea ca valoarea variabilei aleatoare să se afle într-un interval precizat $[\zeta_1, \zeta_2]$ este :

$$\mathcal{P}\{\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2\} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p(\zeta)d\zeta. \tag{1.11}$$

Speranța matematică (valoarea cea mai așteptată sau expectația)

Fie ζ și η două variabile aleatoare legate prin relația $\eta = f(\zeta)$, unde f este o funcție precizată. Atunci *speranța matematică* a variabilei η este :

$$E\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)p(\zeta)d\zeta. \tag{1.12}$$

Operatorul E se mai numește și (operator) de mediere (l.engleza : expected operator).

Media (statistică)

Media (*statistică*) μ a variabilei aleatoare ζ se obține alegând $\eta = \zeta$ în (1.12) :

$$\mu = E\{\zeta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta p(\zeta) d\zeta. \qquad (1.13)$$

Ipoteza ergodică :

$$E\{x[n]\} \cong \hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]. \qquad (1.14)$$

Creșterea preciziei de estimare se realizează pe baza creșterii numărului de date N.

Varianța

Varianța σ^2 a variabilei aleatoare ζ este definită prin :

$$\sigma^2 = E\{(\zeta - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta - \mu)^2 p(\zeta) d\zeta. \qquad (1.15)$$

Dispersia

Dacă se elimină media statistică din (1.15) se obține dispersia variabilei aleatoare :

$$\lambda^2 = E\{\zeta^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 p(\zeta) d\zeta. \qquad (1.16)$$

Deviația standard

Radicalul varianței, σ, se numește *deviație standard*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \qquad (1.17)$$

Distribuții

- uniformă în intervalul $[0, 1]$

$$p(\zeta) = \begin{cases} 1, \zeta \in [0,1] \\ 0, \zeta \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases} . \tag{1.18}$$

- gaussiană de medie μ și varianță σ^2 :

$$p(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{1.19}$$

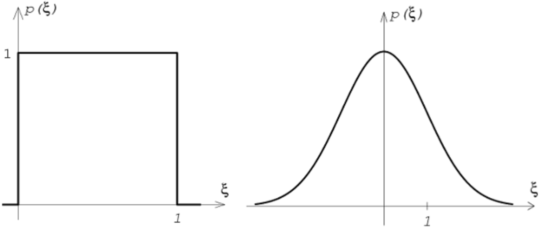


Figura 1.1. Densități de probabilitate uniformă (stânga) și gaussiană (dreapta).

Proces aleator discret

Un *proces aleator discret* este un șir de variabile aleatoare, de exemplu $\{x_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$. Un semnal aleator (stocastic) discret, notat prin x, este o realizare a procesului aleator, în sensul că, la fiecare moment de timp normalizat n, se consideră o singură valoare a unei singure variabile aleatoare din procesul aleator.

$$x[n] = x_{p_n}[n], \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.20}$$

Proces aleator staționar (în sens larg)

Un proces aleator este staționar (în sens larg) dacă :

a. orice realizare are medie constantă

$$E\{x[n]\} = \mu, \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1.21}$$

b. autocovarianța oricărei realizări este de forma :

$$E\{x[n-p]x[n-q]\} = r_x[q-p], \forall n, p, q \in \mathbb{Z}, \tag{1.22}$$

adică depinde doar de diferența pivoților p și q

Auto-covarianța

$$\begin{array}{l} E\{x[n]x[n\pm k]\} = r_x[k] = r_x[-k], \forall n, k \in \mathbb{Z} \\ \left|r_x[k]\right| \leq r_x[0] = \lambda^2, \forall k \in \mathbb{Z} \end{array}. \tag{1.23}$$

Auto-corelația

$$\rho[k] = \frac{E\{x[n]x[n \pm k]\}}{r_x[0]} = \frac{E\{x[n]x[n \pm k]\}}{\lambda^2}, \forall n, k \in \mathbb{Z}. \tag{1.24}$$

Ipoteza ergodică :

→ estimație nedeviată :

$$r_x[k] \cong \hat{r}_x[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} x[n]x[n-k], \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.25}$$

→ estimație deviată :

$$r_x[k] \cong \hat{r}_x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x[n]x[n-k], \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.26}$$

Creșterea preciziei de estimare se realizează pe baza creșterii numărului de date N.

Zgomot alb de medie nulă și dispersie λ^2

Un zgomot alb de medie nulă și dispersie λ^2 este un proces aleator e, pentru care :

$$E\{e[n]\} = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1.27}$$

$$E\{e[n]e[n-k]\} = \lambda^2 \delta_0[k], \forall k \in \mathbb{Z} \tag{1.28}$$

Semnale deterministe

Generare semnale

Se consideră un semnal cu suportul :

$\gg$ **n=0 :N-1 ;**
de lungime N.

Semnalele definite mai sus, cum ar fi impulsul unitar (1.2), treapta unitate (1.3), exponențiala (1.4) sau sinusoidele (1.5) și (1.6) se generează simplu astfel :

- $\rightarrow$ impulsul unitar : $\gg$ **imp_unit=eye(1,N) ; % impuls unitate**
- $\rightarrow$ treapta unitate : $\gg$ **tr_unit=ones(1,N) ; % treapta unitate**
- $\rightarrow$ exponențiala : $\gg$ $e = alfa\hat{.}n$ **; % semnal exponential**
- $\rightarrow$ semnal sinusoidal real : $\gg$ **sin_real =** $sin(w * n + phi)$ **% sinusoida reala**
- $\rightarrow$ $\gg j = sqrt(-1)$
- $\rightarrow$ semnal sinusoidal complex : $\gg$ **sin_compl=**$exp(j * (w * n + phi))$ **; % sinusoida complexa**

Variabilele **w**, **phi** și **alfa** primesc valori numerice adecvate.

Grafice semnale

Semnal real :$\gg$ **plot(t,semnal)**.
Semnal discret : $\gg$ **stem(n, sin_real) ;**

Operații cu semnale

Se consideră două semnale cu același suport **x1** și **x2**. Exemple de operații :

- → Suma : $\gg$ **xs=x1+x2 ;**
- → Modulația în timp (produsul la nivel de element) :$\gg$ **xm=x1 .* x2 ;**
- → Convoluția : $\gg$ **xc=conv(x1,x2) ;**
  Atenție ! Semnalul **xc**, obținut prin convoluție, are alt suport decât **x1** și **x2**. De exemplu, dacă **x1** și **x2** au suportul $\overline{0, N-1}$, atunci **xc** are suportul mai larg, $\overline{0, 2N-2}$.

Semnale nedeterministe

Mediul de programare MATLAB posedă generatoare de numere *pseudo-aleatoare* (aproape aleatoare).

Generare semnale

Se consideră un semnal aleator de lungime N.

- → cu distribuție uniformă în intervalul $[0, 1]$: $\gg$ **x=rand(1,N) ;**
- → cu distribuție gaussiană de medie nulă și dispersie unitară : $\gg$ **x=randn(1,N) ;**

Media unui semnal aleator

Media (1.14) a unui semnal aleator se calculează cu : $\gg$ **mean(x) ;**

Auto-corelația

- $\rightarrow$ nedeviată (de lungime 2*N-1) :$\gg$ **r=xcorr(x,'unbiased') ;**
- $\rightarrow$ deviată (de lungime 2*N-1) :$\gg$ **rx=xcorr(x,'biased') ;**

Daca tipul de estimație nu este specificat (nedeviat sau deviat), nu se mai efectuează împărțirea la **N-k**, respectiv **N** și se obține *auto–corelația brută*.

Auto-covarianța

- $\rightarrow$ nedeviată (de lungime 2*N-1) :$\gg$ **r=xcov(x,'unbiased') ;**
- $\rightarrow$ deviată (de lungime 2*N-1) :$\gg$ **rx=xcov(x,'biased') ;**

Semnale audio

- $\rightarrow$ **x=auread(aufile)**
- $\rightarrow$ **auwrite(x,aufile)**
- $\rightarrow$ **x=wavread('filename')**
- $\rightarrow$ **wavwrite(x,'filename')**

auread

Read NeXT/SUN (`.au`) sound file

Syntax

```
y = auread(aufile)
[y,Fs,bits] = auread(aufile)
[...] = auread(aufile,N)
[...] = auread(aufile,[N1,N2])
siz = auread(aufile,'size')
```

Description

Supports multi-channel data in the following formats:

- 8-bit mu-law
- 8-, 16-, and 32-bit linear
- floating-point

`y = auread(aufile)` loads a sound file specified by the string *aufile*, returning the sampled data in `y`. The `.au` extension is appended if no extension is given. Amplitude values are in the range `[-1,+1]`.

`[y,Fs,bits] = auread(aufile)` returns the sample rate (`Fs`) in Hertz and the number of bits per sample (`bits`) used to encode the data in the file.

`[...] = auread(aufile,N)` returns only the first `N` samples from each channel in the file.

`[...] = auread(aufile,[N1 N2])` returns only samples `N1` through `N2` from each channel in the file.

`siz = auread(aufile,'size')` returns the size of the audio data contained in the file in place of the actual audio data, returning the vector `siz = [samples channels]`.

auwrite

Write NeXT/SUN (`.au`) sound file

Syntax

```
auwrite(y,aufile)
auwrite(y,Fs,aufile)
auwrite(y,Fs,N,aufile)
auwrite(y,Fs,N,method,aufile)
```

Description

`auwrite` supports multi-channel data for 8-bit mu-law, and 8- and 16-bit linear formats.

`auwrite(y,aufile)` writes a sound file specified by the string *aufile*. The data should be arranged with one channel per column. Amplitude values outside the range `[-1,+1]` are clipped prior to writing.

`auwrite(y,Fs,aufile)` specifies the sample rate of the data in Hertz.

`auwrite(y,Fs,N,aufile)` selects the number of bits in the encoder. Allowable settings are `N = 8` and `N = 16`.

`auwrite(y,Fs,N,method,aufile)` allows selection of the encoding method, which can be either `'mu'` or `'linear'`. Note that mu-law files must be 8-bit. By default, `method='mu'`.

wavread

Read Microsoft WAVE (`.wav`) sound file

Syntax

```
y = wavread('filename')
[y,Fs,bits] = wavread('filename')
[...] = wavread('filename',N)
[...] = wavread('filename',[N1 N2])
[...] = wavread('filename','size')
```

Description

`wavread` supports multichannel data, with up to 16 bits per sample.

`y = wavread('filename')` loads a WAVE file specified by the string *filename*, returning the sampled data in `y`. The `.wav` extension is appended if no extension is given. Amplitude values are in the range `[-1,+1]`.

`[y,Fs,bits] = wavread('filename')` returns the sample rate (`Fs`) in Hertz and the number of bits per sample (`bits`) used to encode the data in the file.

`[...] = wavread('filename',N)` returns only the first `N` samples from each channel in the file.

`[...] = wavread('filename',[N1 N2])` returns only samples `N1` through `N2` from each channel in the file.

`siz = wavread('filename','size')` returns the size of the audio data contained in the file in place of the actual audio data, returning the vector `siz = [samples channels]`.

wavwrite

Write Microsoft WAVE (`.wav`) sound file

Syntax

```
wavwrite(y,'filename')
wavwrite(y,Fs,'filename')
wavwrite(y,Fs,N,'filename')
```

Description

`wavwrite` supports multi-channel 8- or 16-bit WAVE data.

`wavwrite(y,'filename')` writes a WAVE file specified by the string *filename*. The data should be arranged with one channel per column. Amplitude values outside the range `[-1,+1]` are clipped prior to writing.

`wavwrite(y,Fs,'filename')` specifies the sample rate `Fs`, in Hertz, of the data.

`wavwrite(y,Fs,N,'filename')` forces an `N`-bit file format to be written, where `N <= 16`.

Teme de laborator

Tema 1 (Acomodare)

Executați comenzile MATLAB descrise în secțiunea "Ghid MATLAB" și trasați graficele semnalelor prezentate în partea teoretică a lucrării.

Tema 2 (Eșantionare)

a. Încărcați fișierele audio utilizate pentru test (din Tabelul 1), cu ajutorul comenzii load. Care este durata reală a fiecărui semnal ? (Țineți cont de frecvența de eșantionare cu care au fost obținute semnalele și de faptul că durata este un multiplu întreg al perioadei de eșantionare.)

b. Scrieți o funcție MATLAB care calculează semnalul obținut prin eșantionarea cu relația (1.1) a sinusoidei continue $x_a(t) = sin(\Omega t)$. Argumentele de intrare sunt pulsația Ω a sinusoidei continue (frecvența fiind $\frac{\Omega}{2\pi}$), perioada de eșantionare T_s (sau frecvența de eșantionare $F_s = 1/T_s$) și lungimea M a suportului semnalului discretizat. Argumentul de ieșire este un vector **x** de lungime M conținând eșantioanele sinusoidei discrete pe suportul $\overline{0, M-1}$.

c. Scrieți o funcție MATLAB care trasează pe același grafic sinusoida continuă $x_a(t) = sin(\Omega t)$ și sinusoida discretizată $x[n] = sin(n\Omega T_s)$, pentru un suport precizat (de exemplu $\overline{0, M-1}$). Un exemplu de grafic este prezentat în Figura 1.2, unde $\Omega = \pi/3$, $T_s = 1$, iar suportul este $\overline{0, 12}$.

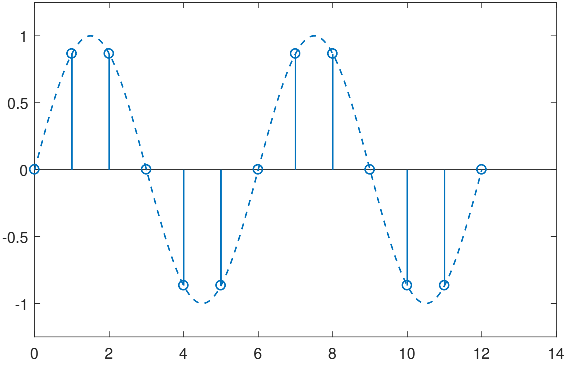


Figura 1.2. Semnalul discret $sin\left(n\pi/3\right)$ (de perioadă 6) și sinusoida continuă $sin\left(\pi t/3\right)$.

Tema 3 (Sinusoide discrete)

Folosind funcțiile realizate, trasați graficele sinusoidelor discrete precizate mai jos, împreună cu sinusoidele continue din care sunt obținute. Alegeți $T_s = 1$ pentru comoditate, caz în care Ω se poate renota prin ω.

a. Sinusoida discretă periodică având frecvența $\omega = \pi/15$. Care este perioada acesteia ? Observați că, în (1.7) avem $k = 1$.

b. Sinusoida discretă periodică având frecvența $\omega = 3\pi/15$. Care este perioada acesteia ? Observați că, în (1.7) avem $k = 3$. Deduceți că numărul k reprezintă numărul de perioade ale semnalului sinusoidal continuu $x(t) = sin(\omega t)$, care corespund unei perioade a semnalului discret $x[n] = sin(\omega n)$. Alegeți frecvențe ω astfel încât să obțineți și alte valori ale lui k.

c. O sinusoidă discretă aperiodică, de exemplu alegând $\omega = 1$.

d. Două sinusoide discrete identice, dar care provin din eșantionarea unor sinusoide continue diferite. Alegeți, de exemplu, $\omega_1 = \pi/3$ și $\omega_2 = 2\pi + \pi/3$. Observați diferența dintre sinusoidele continue.

Tema 4 (Ce relevă auto-corelațiile)

a. Verificați că generatorul de numere aleatoare **randn** produce un semnal apropiat de zgomotul alb cu media nulă și dispersia unitară. Pentru aceasta, generați cu **randn** un semnal pseudo-aleator x de lungime N. Cu ajutorul funcției **mean**, calculați media semnalului. Cu ajutorul funcției **xcorr**, estimați primele $L < N$ valori ale auto-corelației r_x. Apelul :

$\gg$ **rx=xcorr(x,L,'biased') ;**

produce secvența $\{\hat{r}_x[k]\}_{k\in\overline{-L,L}}$. Așadar, $\hat{r}_x[0]$ se găsește la poziția $L+1$ în vectorul **rx**. Trasați graficul secvenței de auto-corelație și interpretați rezultatul. Păstrând numărul L fix, măriți numărul N și constatați că mai multe eșantioane ale unui semnal aleator conduc la o imagine mai bună a caracteristicilor procesului aleator care generează semnalul.

b. Generați un semnal sinusoidal cu suportul $\overline{0, N-1}$, astfel încât acesta să conțină cel puțin 5 perioade ale sinusoidei. Estimați auto-corelația r_x a acestui semnal. Observați care sunt valorile k pentru care $\hat{r}_x[k]$ este un maxim sau un minim local. Care este legătura cu perioada sinusoidei ? Oferiți toate explicațiile necesare.

c. Semnalul **xilo** este aproape periodic în partea lui finală. Extrageți eșantioanele de la 8.000 la 10.000 și estimați auto-corelațiile acestui fragment de semnal. Observați din nou legătura dintre (pseudo-)perioada semnalului și maximele secvenței de auto-corelație.

d. Reluați punctul anterior pentru semnalele vocale **sunet_a**, **sunet_i** și **sunet_s**. Observați forma cvasi-periodică a vocalelor și cea de zgomot alb aparent a sunetului $/s/$. Credeți, totuși, că semnalul asociat sunetului $/s/$ are caracteristici apropiate de cele ale unui zgomot alb ? Oferiți o explicație riguroasă, cu referire la definiția (1.27)-(1.28) a zgomotului alb.

Tema 5 (Produce randn un semnal gaussian ?)

Considerând că valorile furnizate de funcția **randn** sunt realizări ale unei variabile aleatoare cu distribuție gaussiană, se ridică problema dacă distribuția "experimentală" (numită ad hoc *histograma*) asociată coincide într-adevăr cu (1.19). Pentru aceasta, generați un vector suficient de lung cu **randn** și trasați histograma sa cu **hist**. Suprapuneți peste histogramă graficul densității de probabilitate (1.19). (Atenție, aceasta va trebui înmulțită cu numărul de valori din vectorul generat, pentru a avea aceeași scară). Repetați experimentul pentru secvențe pseudo-aleatoare din ce în ce mai mari și observați cum se îmbunătățeste apropierea dintre cele două grafice.