Prelucrarea semnalelor

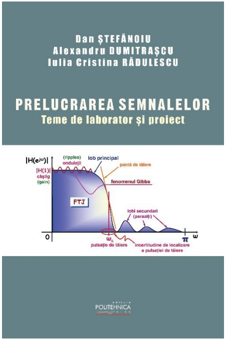
Laborator 2 - Transformata Fourier

http://acs.curs.pub.ro

Profesor Dan ŞTEFĂNOIU
dan.stefanoiu@acse.pub.ro

Conferenţiar Alexandru DUMITRAŞCU
alexandru.dumitrascu@acse.pub.ro

As.drd. Iulia-Cristina RĂDULESCU
iulia.radulescu@acse.pub.ro



Semnale utilizate

În afară de semnalele precizate în Laboratorul 1, vor fi utilizate şi semnale de pe platforma Moodle https ://acs.curs.pub.ro, enumerate în Tabelul 2.1.

Tabelul 2.1 Fişiere suplimentare utilizate în cadrul Laboratorului 2

Nume fişier	Conţinut	Frecvenţa de eşantionare
lynx.m	Număr de râşi vânaţi	1 an
sunspot.dat	Număr de pete solare	1 an

Obiective

Utilizarea Transformatei Fourier (TF) a semnalelor discrete. Studiul spectrelor unor semnale naturale sau generate artificial şi extragerea unor informaţii referitoare la proprietăţile semnalelor respective.

Suport teoretic

Definiţii şi proprietăţi de bază

Definiţie Transformata Fourier

Transformata Fourier (TF) a unui semnal discret x este funcţia $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$X(\omega) = \mathcal{F}(x)(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j\omega n}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

unde $\omega \in \mathbb{R}$ se numeşte pulsaţie normalizată, măsurată în radiani

Amplitudine şi fază

TF X este o funcţie complexă şi se poate exprima prin amplitudinea $|X|$ şi faza $arg(X)$

- $\rightarrow$ semnale deterministe : $|X|^2$ se mai numeşte si spectru al semnalului x
- $\rightarrow$ semnale nedeterministe : TF se aplică secvenţei de auto-corelaţie şi nu semnalului în sine (pentru a împiedica zgomotul alb aditiv să se transfere spectrului). În acest caz, TF coincide cu spectrul semnalului (faza este nulă) şi se mai numeşte densitate spectrală de energie

Perioada

TF are perioada egală cu $2\pi \Rightarrow$ reprezentarea se poate restrânge la banda $[-\pi, +\pi]$
Dacă semnalul x este stabil (absolut sumabil), atunci TF are valori definite pentru orice pulsaţie normalizată $\omega \in \mathbb{R}$. Seria va converge uniform către o funcţie continuă în ω.

Definire

Unele semnale de energie finită (dar nu toate) admit TF aproape peste tot (apt).

Energia unui semnal discret :

$$\mathcal{E}(x) = \| x \|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| x[n] \right|^2 . \tag{2.2}$$

Dacă x este un semnal de energie finită, atunci TF este definită aproape peste tot. Mai precis, fie următorul semnal frecvenţial parţial :

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-j\omega n}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

unde N este un număr natural arbitrar fixat.

Atunci :

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|X(\omega) - X_N(\omega)\right|^2 d\omega = 0, \tag{2.4}$$

ceea ce înseamnă că energia erorii de aproximare a lui X prin X_N tinde la zero, chiar dacă eroarea nu se anulează neapărat peste tot. În acest caz :

$$\lim_{N\to\infty} X_N \overset{\mathrm{apt}}{\equiv} X. \tag{2.5}$$

Inversabilitatea TF

TF inversă, care asociază unui semnal frecvenţial X semnalul (temporal) x (având-o ca TF chiar pe X) are următoarea expresie :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega) e^{+j\omega n} d\omega, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Simetrii ale TF pentru semnale reale

Proprietăţi de simetrie ale TF pentru semnale reale :

$$\left[\begin{array}{l} X(-\omega) = \overline{X(\omega)} \\ \left|X(-\omega)\right| = \left|X(\omega)\right| \\ arg(X)(-\omega) = -arg(X)(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R} \; . \\ Re(X)(-\omega) = Re(X)(\omega) \\ Im(X)(-\omega) = -Im(X)(\omega) \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Conservarea energiei (M.A. Parseval)

TF conservă energia până la o constantă multiplicativă independentă de semnale (Conservarea energiei - Parseval) :

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| x[n] \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| X(\omega) \right|^2 d\omega. \tag{2.8}$$

TF pentru semnale armonice elementare complexe

Semnalul armonic elementar complex $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n \in \mathbb{Z}$, cu $\omega_0 \in [-\pi, +\pi]$ nu este nici stabil şi nici de energie finită, dar i se poate totuşi asocia o TF (Teoria distribuţiilor-Laurent Schwartz) :

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_0(\omega - \omega_0 + 2k\pi), \forall \omega \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

unde $\delta_0(\cdot)$ este impulsul Dirac centrat în origine.

Semnalul armonic elementar complex are un spectru nenul într-o singură frecvenţă (în care se concentrează toată energia sa). Un spectru de acest tip se numeşte şi *spectru de linii* (una singură în cazul de faţă).

Densitatea spectrală de putere, periodograma

Densitatea spectrală de putere, periodograma se poate defini în două moduri ((2.10) şi (2.11)) :

$$\Phi_x(\omega) = \mathcal{F}(r_x)(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_x[k]e^{-j\omega k}, \forall\omega \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

$$\Phi_x(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j\omega n} \right|^2, \forall\omega \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Estimarea cu ajutorul operaţiei de trunchiere :

$$\hat{\Phi}_x(\omega) = \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j\omega n} \right|^2, \forall\omega \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Teorema *Wiener-Kintchine* demonstrează că cele două definiţii sunt echivalente.

Pentru semnale cu suport finit, de exemplu $\overline{0, N-1}$, densitatea spectrală de putere se mai numeşte şi periodogramă :

$$\hat{\Phi}_x(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} \left|X(\omega)\right|^2, \forall\omega \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Ghid MATLAB

Transformata Fourier

Transformata Fourier a unui semnal **x** de suport $\gg$ **n=0 :M-1 ;** se poate calcula prin :

$\gg$ **X=x*exp(-j*n'*w) ;**

$\gg$ **X=freqz(x,1,w) ;**

$\gg$ **X = fft(x) ;**

unde $\gg w = 0 : pas : \pi$ este grila de frecvenţe, de exemplu cu pas=0.01.

Amplitudine şi fază

Amplitudinea (spectrul) :
$\gg$ **plot(w, abs(X)) ;**

Energia spectrală este concentrată într-o vecinătate îngustă în jurul originii. Pentru ca liniile spectrale de putere mai mică ce corespund frecvenţelor medii şi înalte să poată fi vizualizate, spectrul se reprezintă în dB :

$$\left|X(\omega)\right|_{dB} = 20lg\left|X(\omega)\right| = 10lg\left|X(\omega)\right|^2, \forall\omega \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Faza :
$\gg$ **plot(w,angle(X)) ;**

Tema 1 (TF a unei sinusoide complexe cu suport finit)

Fie $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n \in \overline{0, N-1}$ o sinusoidă complexă de frecvenţă precizată, având suport finit. (Pentru teste, alegeţi, de exemplu, $\omega_0 = \pi/8$ şi N suficient de mare pentru ca suportul să conţină cel puţin 5 perioade ale sinusoidei.)

a. Arătaţi că TF a sinusoidei are următoarea expresie :

$$X(\omega) = \frac{e^{-j(\omega-\omega_0)N/2}}{e^{-j(\omega-\omega_0)/2}} \frac{sin\frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}}, \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Observând că spectrul are următoarea expresie (derivată din (2.15)) :

$$\left|X(\omega)\right| = \left|\frac{sin\frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}}\right|, \forall \omega \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

determinaţi punctul de maxim al acestuia şi indicaţi valoarea maximă. Interpretaţi rezultatul obţinut.

b. Trasaţi graficul spectrului (2.16) cu ajutorul funcţiei **freqz**, pe o grilă de frecvenţe ce acoperă intervalul $[-\pi, +\pi]$. Observaţi că deşi graficul are un vârf pronunţat, spectrul nu conţine doar o linie, conform relaţiei (2.9). Care credeţi că este explicaţia pentru acest fenomen ?

c. Se verifică grafic egalitatea $\left|X(\omega_0)\right| = N$? Dacă da, vi se pare o proprietate normală ? Dacă nu, care credeţi că este cauza ?

Tema 2 (TF a unei sinusoide reale cu suport finit)

Consideraţi acum semnalul $x[n] = cos(\omega_0 n + \varphi), \forall n \in \overline{0, N-1}$, cu ω_0 ales ca mai sus şi $\varphi \in [0, 2\pi]$.

a. Trasaţi graficul spectrului semnalului pe o grilă de frecvenţe ce acoperă intervalul $[-\pi, +\pi]$. Observaţi că graficul acestuia este simetric faţă de axa verticală, aşa cum sugerează relaţiile (2.7).

b. Justificaţi forma graficului ţinând seama de formula lui Euler :

$$cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}. \tag{2.17}$$

c. Alegeţi mai multe valori ale lui φ şi observaţi ce se schimbă în graficul spectrului. Oferiţi toate explicaţiile pe care le consideraţi plauzibile pentru acest fenomen.

Tema 3 (TF a două sinusoide reale cu suport finit, însumate)

Considerați suma a două sinusoide reale :

$$x[n] = cos(\omega_1 n) + cos(\omega_2 n), \forall n \in \overline{0, N-1}, \tag{2.18}$$

cu ω_1, $\omega_2 \in [0, \pi]$ şi N suficient de mare, astfel încât suportul să includă cel puţin 5 perioade ale semnalului. Alegeţi ω_1 suficient de departe de ω_2, de exemplu $\omega_1 = \pi/8$ şi $\omega_2 = \pi/3$.

a. Trasaţi graficul semnalului x pe suportul desemnat. Care este perioada acestuia ?
b. Trasaţi graficul spectrului semnalului, pe o grilă de frecvenţe ce acoperă intervalul $[-\pi, +\pi]$. Aţi obţinut desenul pe care îl aşteptaţi ? Justificaţi răspunsul.
c. Alegeţi un semnal exprimat ca o sumă de două sinusoide cu amplitudini diferite şi repetaţi operaţiile de mai sus.
d. Alegeţi frecvenţele sinusoidelor foarte aproape una de alta, de exemplu, astfel încât diferenţa lor să fie : $\omega_1 - \omega_2 = 0.01$. Repetaţi operaţiile de mai sus şi explicaţi fenomenele.

Tema 4 (TF şi detectarea periodicităţii unui semnal)

Din exemplele de mai sus aţi observat că TF are valori mari în frecvenţele corespunzătoare componentelor sinusoidale ale unui semnal. Aşadar, TF poate fi utilizată pentru analiza semnalelor (cvasi-periodice).

a. Fişierul **sunspot.dat** conţine numărul de pete solare înregistrate anual, timp de aproape 300 de ani. Cercetările din domeniu par a acredita ipoteza că activitatea solară are un ciclu de aproximativ 11 ani. Încărcaţi datele cu ajutorul funcţiei **load**, trasaţi graficul numărului de pete solare, apoi calculaţi TF a acestuia şi găsiţi frecvenţa corespunzătoare celui mai înalt vârf al ei (excluzând $\omega = 0$, care dă componenta continuă). Calculaţi perioada corespunzătoare acestei frecvenţe ($T = 2\pi/\omega$) şi verificaţi dacă are valoarea 11. Repetaţi aceste operaţii pentru durate mai scurte, de 50-100 de ani. Ce efect observabil are scăderea duratei semnalului ?

b. Repetaţi aceleaşi operaţii pentru datele din fişierul **lynx.m** (care trebuie rulat pentru încărcarea acestor date în MATLAB). Relaţia pradă-prădător este caracterizată de periodicitate (aici râsul joacă rol de pradă în raport cu omul, deşi, prin natura sa, el este un prădător). (În pescuitul oceanic se petrec fenomene asemănătoare). Perioada oscilaţiilor este însă specifică fiecărui ecosistem.

c. Semnalul **xilo** este aproape periodic în partea lui finală. Extrageţi eşantioanele de la 8.000 la 10.000 şi repetaţi operaţiile de mai sus. (Cei care sunt dotaţi cu ureche fină pot confirma rezultatul). Observaţi armonicele.

Tema 5 (Zgomot alb)

Zgomotul alb a fost definit în Laboratorul 1. Dispersia λ^2 din relaţia (1.28) este asociată cu puterea zgomotului. Din definiţia (2.10) rezultă că, teoretic, densitatea spectrală de putere a zgomotului alb este constantă şi egală chiar cu λ^2. Folosind funcţia **randn**, generaţi un pseudo-zgomot alb e de lungime N (de ordinul sutelor) şi estimaţi Φ_e cu relaţia (2.13). Observaţi că graficul densităţii spectrale de putere are un aspect tipic, care nu se modifică mărind N în cadrul aceleiaşi realizări. Totuşi, dacă se repetă operaţia pentru alte realizări ale zgomotului, se poate constata că nicio frecvenţă nu e favorizată (Comentariu : cele de mai sus nu pun în discuţie nici corectitudinea formulei $\Phi_e(\omega) = \lambda^2$, nici calitatea generatorului **randn** ; explicaţia fundamentală rezidă în slaba calitate a periodogramei (2.13), ca estimator al densităţii spectrale de putere. Estimarea spectrală este un subcapitol al PS, care propune metode mult mai precise decât cea din spatele relaţiei (2.13).

Tema 6 (Sinusoidă scufundată în zgomot alb)

Consideraţi procesul :

$$x[n] = cos(\omega_0 n) + e[n], \forall n \in \overline{0, N-1}, \tag{2.19}$$

unde e desemnează un zgomot alb direct generat cu funcţia **randn**. Ne propunem să determinăm pulsaţia ω_0 a sinusoidei, cu o anumită eroare. (Evident, se presupune că, în acest semnal, sinusoida este purtătoarea de informaţie, iar zgomotul o alterează).

a. Generaţi o realizare a semnalului pentru N de ordinul sutelor. Trasaţi graficul semnalului şi observaţi că este greu de estimat vizual o periodicitate a semnalului. Aşadar, acest grafic oferă puţină informaţie referitoare la ω_0.

b. Calculaţi densitatea de putere spectrală ca în (2.13) şi trasaţi graficul acesteia. Observaţi maximul din ω_0. (Deoarece TF este o transformare liniară, în cazul semnalului (2.19), ea rezultă din suma TF ale celor două semnale componente. Deşi spectrul nu mai verifică această proprietate, termenul încrucişat care se adaugă sumei celor două spectre este proporţional cu partea reală a TF aferente sinusoidei. Aşadar, trebuie într-adevăr să existe un maxim în ω_0).

c. Modificaţi semnalul adăugând zgomotului alb o amplitudine variabilă nenulă ($a \in \mathbb{R}^*$) :

$$x[n] = cos(\omega_0 n) + a \cdot e[n], \forall n \in \overline{0, N-1}. \tag{2.20}$$

Alegeţi mai multe valori pentru *a* şi repetaţi operaţile de mai sus. Care ar fi valoarea maximă a amplitudinii *a* pentru care puteţi determina ω_0 cu precizie suficientă ? (Această valoare maximă poate fi justificată cu mijloace de statistică matematică de nivel superior cunoştinţelor predate la cursul de PS).

d. Punctele anterioare (în special c.) au pus în evidenţă faptul că anumite caracteristici ale semnalelor nu pot fi determinate dacă puterea zgomotului care le corupe depăşeşte o anumită valoare. În PS, există preocuparea de a determina raportul dintre puterea semnalului util distorsionat şi cea a zgomotului care îl distorsionează, chiar dacă nu se cunoaşte maniera de combinare a acestuia cu semnalul util. Acesta se numeşte *raport semnal-zgomot* SNR (*signal-to-noise ratio*) şi poate fi definit astfel :

$$SNR \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{r_x[0]}{r_v[0]} \right|_{dB}, \tag{2.21}$$

unde v este zgomotul (nu neapărat alb), de regulă necunoscut. Observaţi că SNR se exprimă în dB. În cazul semnalului (2.20), partea utilă pură este reprezentată de sinusoidă. Folosind semnalul de la punctul c., trasaţi graficul SNR al acestuia pentru valori ale amplitudinii *a* între 0.01 şi valoarea maximă găsită la punctul precedent (adică valoarea pentru care se mai poate determina ω_0 cu precizie suficientă din graficul densităţii spectrale). Comentaţi variaţia acestui grafic.