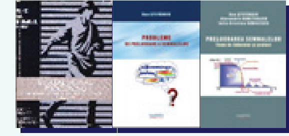
❷ Problematica Prelucrării Semnalelor



❷.❶ Problema matematică

☞ Problema directă

- Fie un semnal $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ şi o bază numărabilă $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$.
  Se cere să se descompună semnalul în "componentele" sale, determinate de bază:
  $$f \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n .$$

☞ **Adică să se determine valorile coeficienţilor din descompunere.**

☜ Problema inversă

- Fie un semnal necunoscut $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ şi o bază numărabilă $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$.
  Dacă se cunosc valorile coeficienţilor descompunerii semnalului în baza dată, se cere să se reconstruiască semnalul iniţial cu ajutorul componentelor sale.

Observaţii

☞ **Problema directă: dificilă; problema inversă: banală.**

☞ **Dificultatea majoră: selectarea unei baze adecvate.**

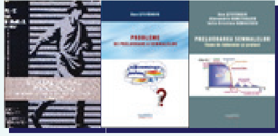
☞ **Dacă spaţiul de semnale e Hilbert şi se poate specifica o bază *ortonormată*, problema se simplifică.**

$$\langle e_m, e_n \rangle = \delta_0[m-n] , \ \forall m,n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$c_n = \langle f, e_n \rangle , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

❷ Problematica Prelucrării Semnalelor



❷.❷ Problema inginerească

☞ Problema analizei de semnal (a descompunerii)

• Fie un semnal $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ și o bază numărabilă $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$.
Se cere să se construiască un nou semnal $\phi \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$, cu următoarele proprietăți:

1. ϕ se poate exprima în forma: $\phi \equiv \sum_{n=0}^{N} c_n e_n$, unde: $N \in \mathbb{N}$ este fixat și finit, iar coeficienții $\{c_n\}_{n\in\overline{0,N}} \subset \mathbb{C}$ se pot determina numai cu ajutorul semnalului și al bazei specificate.
2. ϕ aproximează semnalul original cu precizie controlată: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\phi \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ (depinzînd de ε), astfel încît: $\|f - \phi\| < \varepsilon$.

☜ Problema sintezei de semnal (a reconstrucției)

• Fie un semnal necunoscut $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ și o bază numărabilă $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$.
Dacă s-a construit un model matematic $\phi \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ al semnalului, se cere să se indice valoarea $f(t_0)$ (unde $t_0 \in \mathcal{T}$), cu un grad de precizie determinat de ϕ.

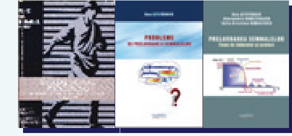
☞ Dacă baza este *ortonormată*

Analiză ⇒ $c_n = \langle f, e_n \rangle, \quad \forall n \in \overline{0,N}$

Sinteză ⇒ $f \cong \phi \equiv \sum_{n=0}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n$

☝ Eliminarea / diminuarea redundanței.

❷ Problematica Prelucrării Semnalelor



❷.❸ O soluție clasică (Joseph FOURIER)

Ideea lui FOURIER ⇒ Orice semnal poate fi considerat ca o suprapunere aditivă de semnale atomice "**monofrecvențiale**", cu diferite amplitudini.


Teorema de aproximare punctuală a lui DIRICHLET-FOURIER

(vezi Anexa E)

Combinație liniară de "armonice elementare".

☞ **Introducerea conceptelor de "serie Fourier" și "analiză armonică".**

Soluția lui FOURIER pentru semnale continuale $f \in \mathcal{L}^2([-\pi,+\pi])$

Baza armonică a lui $\mathcal{L}^2([-\pi,+\pi])$ ⇒

$$\mathcal{B}_a \overset{def}{=} \left\{ \underbrace{1}_{e_0}, \underbrace{\sin t}_{e_{s1}}, \underbrace{\cos t}_{e_{c1}}, \ldots, \underbrace{\sin nt}_{e_{sn}}, \underbrace{\cos nt}_{e_{cn}}, \ldots \right\}$$

☞ **Ortogonalitatea bazei armonice** ⇒

$$\langle f, g\rangle \overset{def}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Exercițiu

$$\|e_0\|^2 = 2\pi \qquad \langle e_{sn}, e_{sm}\rangle = \pi\delta_0[n-m]$$

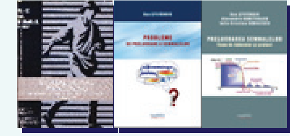
$$\langle e_0, e_{sn}\rangle = 0 \qquad \langle e_{cn}, e_{cm}\rangle = \pi\delta_0[n-m]$$

$$\langle e_0, e_{cn}\rangle = 0 \qquad \langle e_{sn}, e_{cm}\rangle = 0$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$$

Nu și normată!

❷ Problematica Prelucrării Semnalelor



❷.❸ O soluție clasică (Joseph FOURIER)

Formulele lui FOURIER

Coeficienții (lui) FOURIER

Seria (lui) FOURIER

Analiză

$$\begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi}\langle f, e_0\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt \\[2ex] \alpha_n = \dfrac{1}{\pi}\langle f, e_{cn}\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt \\[2ex] \beta_n = \dfrac{1}{\pi}\langle f, e_{sn}\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt \end{cases}$$

$\beta_0 = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Sinteză

$$f(t) \overset{\text{PC}}{=} \alpha_0 + \sum_{n\geq 1}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

$\forall t \in [-\pi, +\pi]$

☝ **Convergență punctuală (slabă) și nu uniformă!**

Armonică elementară de frecvență n/2π

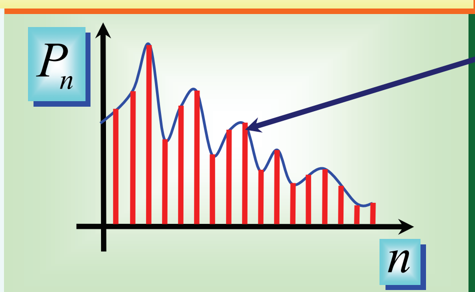
$$\mathcal{A}_n(t) = \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall t \in [-\pi, +\pi]$

$$\mathcal{A}_n(t) = P_n \sin(nt + \varphi_n)$$

Interpretarea lui Fourier



linie spectrală

putere spectrală ⟵ $P_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$

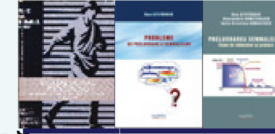
$\varphi_n = \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$

fază spectrală

PARSEVAL ⟹ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$ **bandă finită** ⟹

$$\phi(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

❸ Semnale şi sisteme discrete



- La disciplina **Semnale şi Sisteme**, au fost subliniate o serie de conexiuni care există între conceptul de **sistem liniar invariant la deplasări** (**SLID**) şi cel de **semnal discret**.
- În **Anexa C**, sunt rezumate principalele proprietăţi ale **SLID**, transpuse în "limbajul" semnalelor.

Prelucrarea Numerică a Semnalelor (DSP - Digital Signal Processing) ⇒ **Ramură importantă a Prelucrării Semnalelor**

- Permite reprezentarea semnalelor cu ajutorul unui mijloc automat de calcul.

Semnal discret (digital) ⇒ **Secvenţă discretă de numere (reale sau complexe)**

$$x \stackrel{def}{=} \{x[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

eşantion

- Generate
  - **direct**, prin intermediul unui sistem discret
  - prin **eşantionarea** semnalelor continuale

☝ **Pot avea proprietăţi diferite de ale semnalelor continuale originale.**

Mulţimea semnalelor discrete $\mathcal{S}_d$

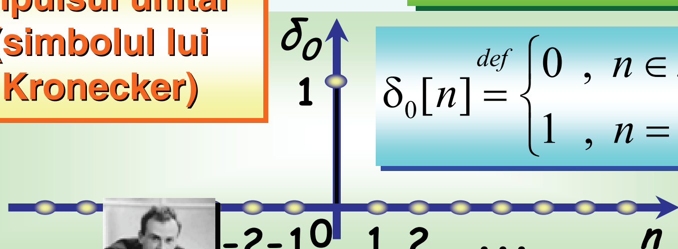
$(\mathcal{S}_d,+,\cdot)$ ← **Spaţiu vectorial**

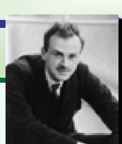
- Include, printre alte clase de semnale, spaţiile lui Lebesgue $\ell^p(\mathcal{T})$

Exemple simple de semnale discrete

Impulsul unitar (simbolul lui Kronecker)

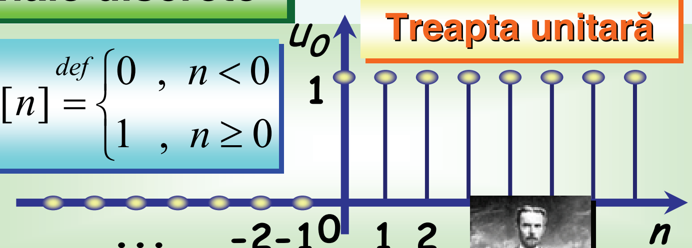
$$\delta_0[n] \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 &, n\in\mathbb{Z}^* \\ 1 &, n=0 \end{cases}$$





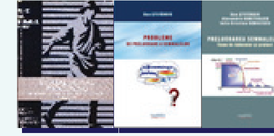
Treapta unitară

$$u_0[n] \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 &, n<0 \\ 1 &, n\geq 0 \end{cases}$$



Impulsul Dirac ← ☝ **În timp continuu** → **Treapta Heaviside**

❸ Semnale şi sisteme discrete



Caracteristici ale SLID

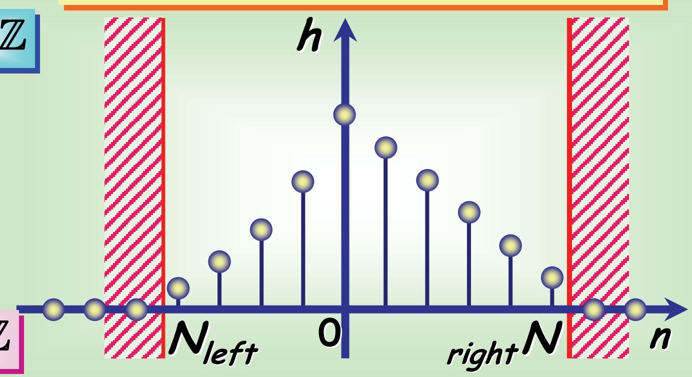
operatorul de deplsare temporală cu *k* paşi (vezi Anexa C)

☝ Nu neapărat cauzal.

- Sunt caracterizate doar de secvența pondere: $h \overset{def}{=} H\delta_0$ ← răspunsul la impuls al sistemului
- Ieşirea unui SLID se exprimă astfel:

$$y[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]h_k[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\left(\mathrm{q}^{-k}h\right)[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]h[n-k] \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

FIR – cu răspuns finit la impuls



Introducerea unei noi operații între semnale cu valori reale: convoluția (liniară).

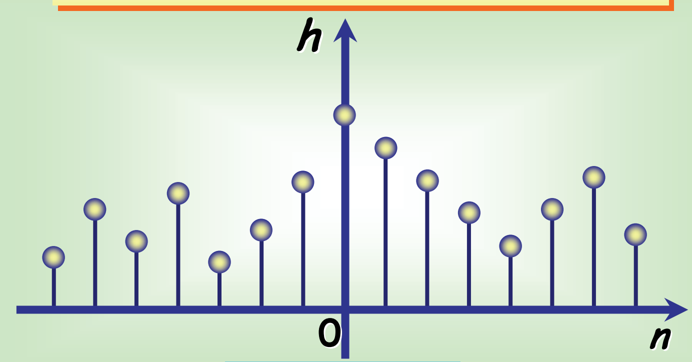
$$x*y \overset{def}{\equiv} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k](\mathrm{q}^{-k}y) \;\Leftrightarrow\; (x*y)[n] \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]y[n-k] \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

☝ Cu condiția ca suma din definiție să fie convergentă.

- Definiție similară în mulțimea semnalelor continuale:

$$(f*g)(t) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

IIR – cu răspuns infinit la impuls



- Generalizare în cazul semnalelor cu valori complexe:

$$x*y \overset{def}{\equiv} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\overline{(\mathrm{q}^{-k}y)} \;\Leftrightarrow\; (x*y)[n] \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\overline{y[n-k]} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

- Mulțimea semnalelor care pot fi "convolutate": $\mathcal{S}_{*d} \subset \mathcal{S}_d$

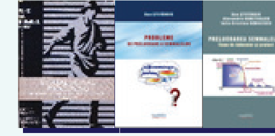
☝ Nevidă

Exercițiu

$\ell^1(\mathscr{T}) \subset \mathcal{S}_{*d}$

$(\mathcal{S}_{*d},+,*,\cdot)$

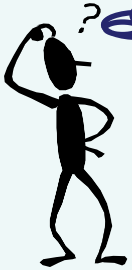
Algebră unitară comutativă



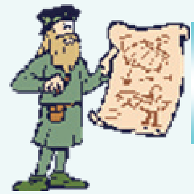
SLID discrete se mai numesc şi filtre (liniare) numerice.

- Un filtru numeric este **realizabil fizic** dacă secvența pondere a sa este **cauzală**.

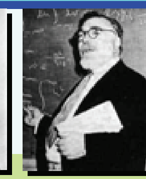
☝ Nu se poate implementa conceptul de moment anti-cauzal.



În ce condiții se poate proiecta un filtru numeric realizabil fizic?



Răspunsul este dat de un vechi rezultat din 1934: **Teorema Paley-Wiener**.



Teorema 1 (Paley-Wiener)

a. Fie o secvență discretă cauzală şi stabilă, *h*. Atunci are loc următoarea proprietate remarcabilă:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\ln\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\right|d\omega<\infty ,$$

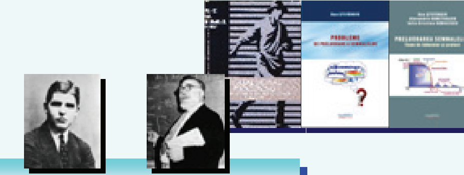
unde $H\left(e^{j\omega}\right)$ este Transformata Fourier a secvenței discrete definită prin:

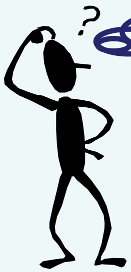
$$H\left(e^{j\omega}\right)\overset{def}{=}\sum_{n\geq 0}h[n]e^{-j\omega n}\quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}.$$

b. Reciproc, dacă spectrul $\left|H(e^{j\omega})\right|$ al unei secvențe discrete stabile *h* are proprietatea de la punctul a., atunci acestuia i se poate asocia o fază $\varphi(\omega)$ astfel încît secvența obținută prin evaluarea Transformatei Fourier inverse să fie cauzală.

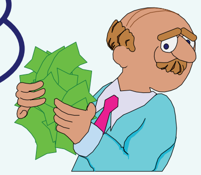
$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H\left(e^{j\omega}\right)e^{+j\omega n}\,d\omega\quad \forall\,n\in\mathbb{Z}$$

❸ Semnale şi sisteme discrete





În ce condiții se poate proiecta un filtru numeric realizabil fizic?



Interpretarea Teoremei Paley-Wiener

- Secvența discretă din cadrul Teoremei poate fi asimilată cu secvența pondere a unui filtru numeric.

- Pentru ca integrala din aserțiunea directă să fie finită este necesar ca spectrul filtrului să aibă o mulțime cel mult numărabilă de zerouri .

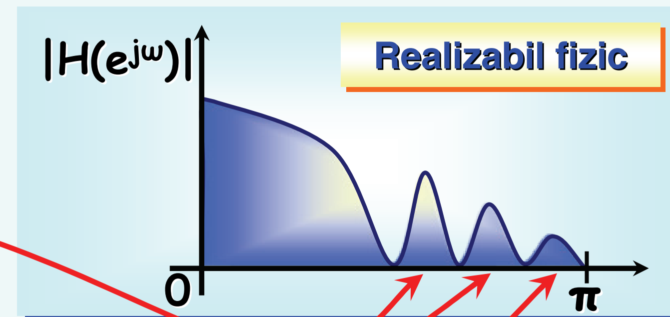
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \ln \left| H\left(e^{j\omega}\right) \right| \right| d\omega$$

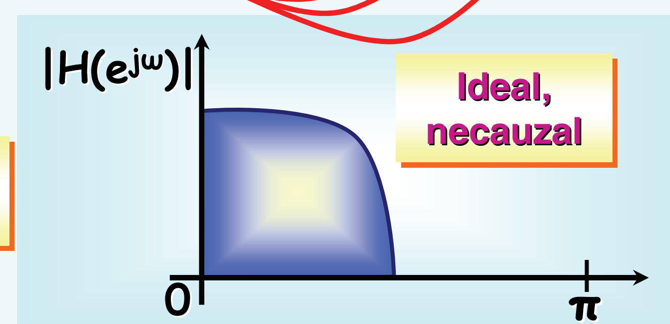
din cauza logaritmului

☝ Spectrul unui filtru realizabil fizic nu se poate anula pe o întreagă bandă de frecvențe.

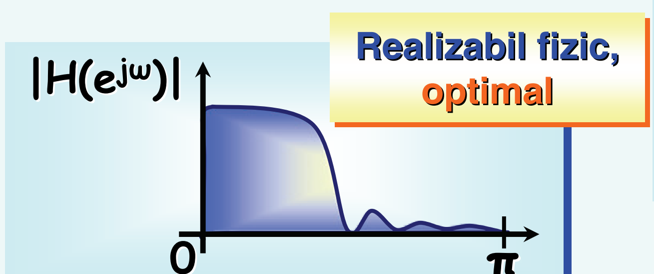
☝ Pe lîngă lobul principal, spectrul posedă o serie de lobi paraziți.

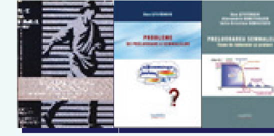
- Acesta este prețul plătit pentru realizabilitatea filtrelor numerice.
- Singura posibilitate este de a folosi tehnici de proiectare a filtrelor care să conducă la diminuarea amplitudinii lobilor paraziți.





- Aserțiunea reciprocă din cadrul Teoremei demonstrează existența unor astfel de tehnici.





❸ Semnale şi sisteme discrete

Caracterizări ale dinamicii SLID

Teorema 2 (convoluție liniară directă)

Demonstrație ⇒ Exercițiu

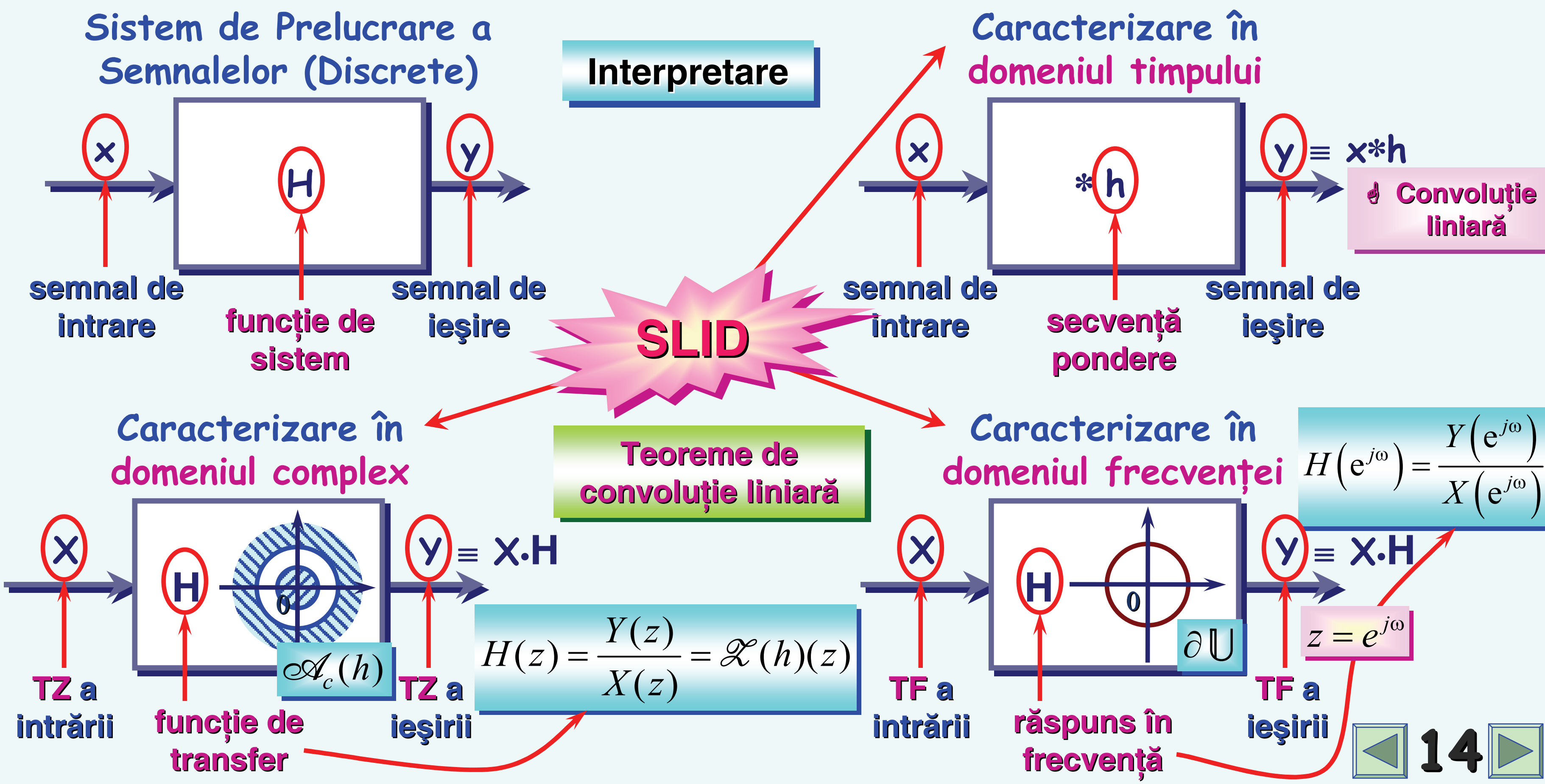
Fie două secvențe discrete *x* şi *y* pentru care suma de convoluție liniară este convergentă. Atunci are loc următoarea proprietate:

Transformata Z (vezi Anexa D)

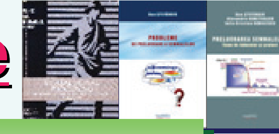
$$\mathcal{Z}(x*y) \equiv \mathcal{Z}(x)\mathcal{Z}(y) .$$

$$x, y \in \mathcal{S}_{*d} \subset \mathcal{S}_d$$

Interpretare

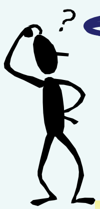


❹ Reprezentarea în frecvenţă a sistemelor discrete



Semnal ⇒ Entitate ce transportă informaţie cu privire la starea sau comportamentul unui sistem, atît în **timp** cît şi în **frecvenţă**.

Timp şi frecvenţă?
Nu sunt concepte independente?

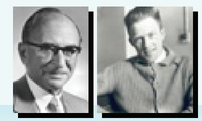


- Aparent, **DA**.
- În esenţă, **NU**.

Domeniul **"Timp"** şi domeniul **"Frecvenţă"** sunt **duale**.

- Există mai multe manifestări ale dualităţii dintre ele.

Exemplu

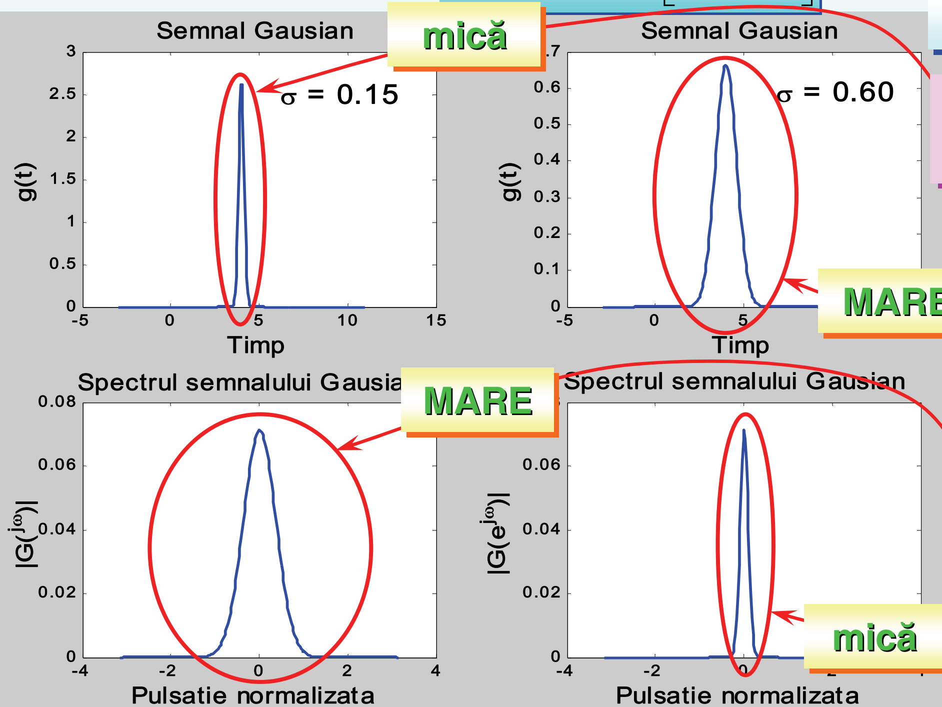


Principiul de incertitudine GABOR-HEISENBERG ⇒ **Semnalul şi spectrul său nu pot avea simultan suporturi compacte / finite.**

☞ **Ambele pot avea, însă, suporturi infinite.**

O "Gaussiană"

$$g(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$



Rezoluţie în **"Timp"**

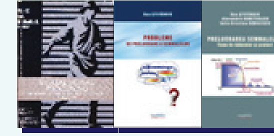
Produsul rezoluţiilor ≤ o constantă.

Rezoluţie în **"Frecvenţă"**

Informaţie temporală **episodică** (energie concentrată pe o durată scurtă).

Informaţie frecvenţială **persistentă** (energie disipată pe o bandă largă).

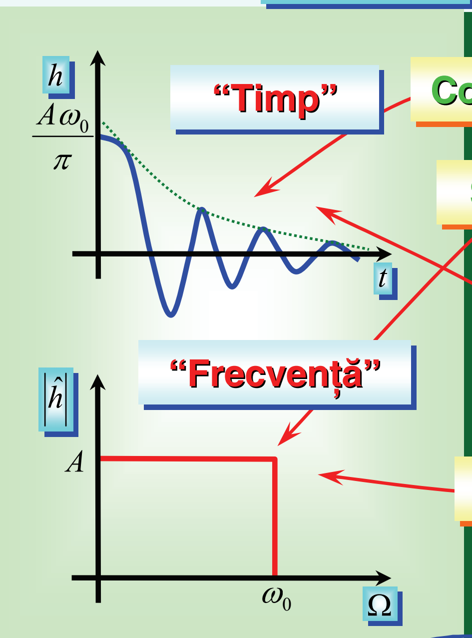
❹ Reprezentarea în frecvență a sistemelor discrete



- Informația transportată de semnal poate fi mai uşor de **interpretat** într-un domeniu decît în altul.
- **Compresia** semnalului poate fi mai uşor de realizat într-un domeniu decît în altul.

Exemplu

Un FTJ ideal $h(t) \stackrel{def}{=} \dfrac{A \sin \omega_0 t}{\pi t}$



Complicată

Simplă

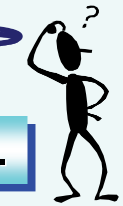
Interpretare

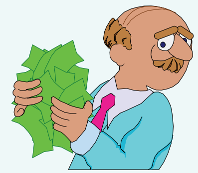
mică

MARE

Rată de compresie

Cum poate fi transferată informația între domeniile Timp şi Frecvență?

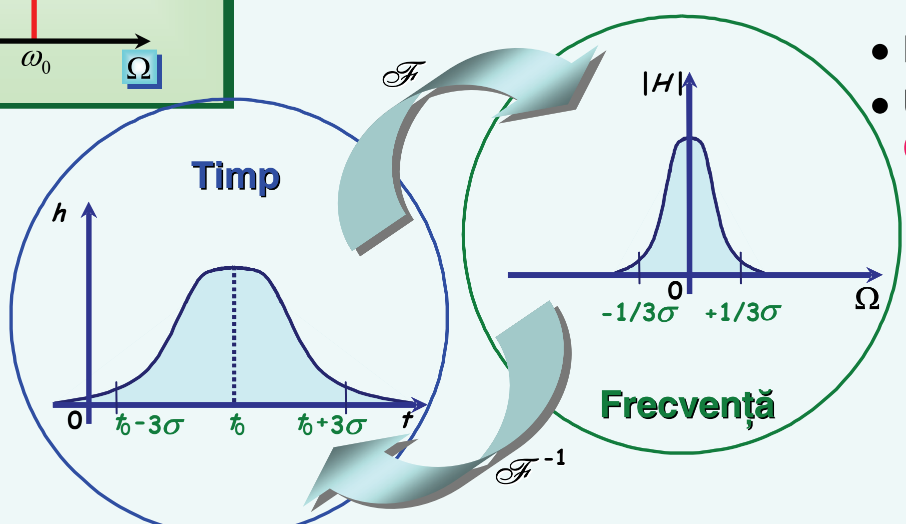




Cu ajutorul **transformatelor**.

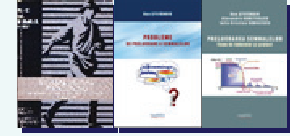
Transformată

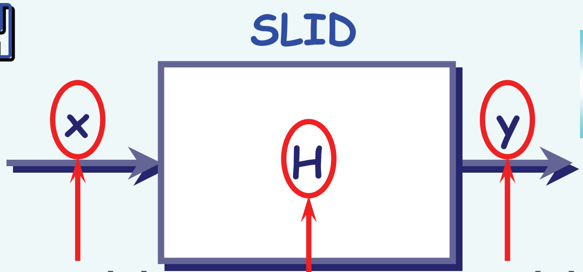
Operator inversabil care transformă un semnal temporal în unul frecvențial.



- Există mai multe clase de transformate.
- Una dintre cele mai diverse este **Clasa Operatorilor Fourier**.
  - Discuția va fi focalizată asupra acestei clase.
  - Pentru a ajunge la operatorii Fourier se va apela din nou la conceptul de **sistem**.

❹ Reprezentarea în frecvență a sistemelor discrete





semnal de intrare

funcție de sistem

semnal de ieşire

$$y[n]=(x*h)[n]=(h*x)[n]=\sum_{k\in\mathbb{Z}}h[k]x[n-k]=\sum_{k\in\mathbb{Z}}h[k]\mathrm{e}^{j\omega(n-k)}\quad\forall n\in\mathbb{Z}$$

$$y[n]=\mathrm{e}^{j\omega n}\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}}h[k]\mathrm{e}^{-j\omega k}}\quad\forall n\in\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{e}^{j\omega n}\xrightarrow{*h}y[n]=\mathrm{e}^{j\omega n}H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)$$

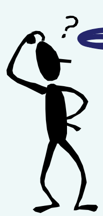
$$H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\overset{def}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h[k]\mathrm{e}^{-j\omega k}\quad\forall\omega\in\mathbb{R}$$

secvență pondere

armonică de pulsație

$\omega\in\mathbb{R}$

Răspuns în frecvență al SLID



Este răspunsul în frecvență corect definit?

- **DA**, în cazul **sistemelor stabile**.

$$h\in\ell^1(\mathscr{T})\Rightarrow\left|H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right|\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|h[k]\mathrm{e}^{-j\omega k}\right|=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|h[k]\right|<\infty$$

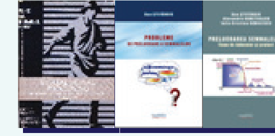
- În acest caz, operația de convoluție este de asemenea corect definită.

- Răspunsul în frecvență este o funcție cu **valori complexe**.

$$H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)=\mathrm{Re}\left[H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right]+j\,\mathrm{Im}\left[H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right]=\underbrace{\left|H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right|}_{\text{Spectru}}\mathrm{e}^{j\overbrace{\varphi_H(\omega)}^{\text{Fază}}}\quad\forall\omega\in\mathbb{R}$$

☝ Caracterizarea în frecvență a unui SLID este explicitată de răspunsul în frecvență al acestuia, care conduce, de fapt, la diagrama Bode.

❹ Reprezentarea în frecvență a sistemelor discrete



Caracterizarea în frecvență a SLID

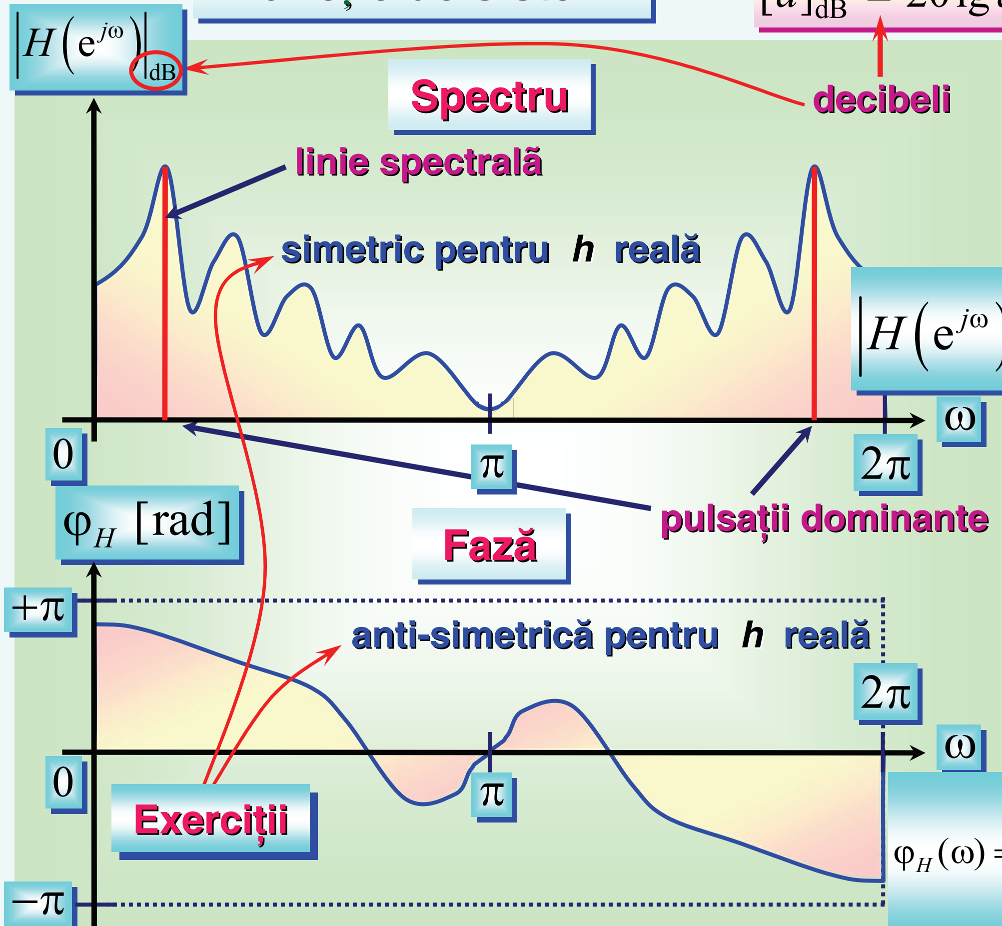
$$\mathrm{q}^{-1} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-j\omega}$$

Semnal frecvențial continual.

$$H\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]\,\mathrm{q}^{-k} \Longleftrightarrow H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]\,\mathrm{e}^{-j\omega k} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

Funcție de sistem — **Răspuns în frecvență**

$$[a]_{\mathrm{dB}} \overset{def}{=} 20\lg a$$



Proprietăți elementare

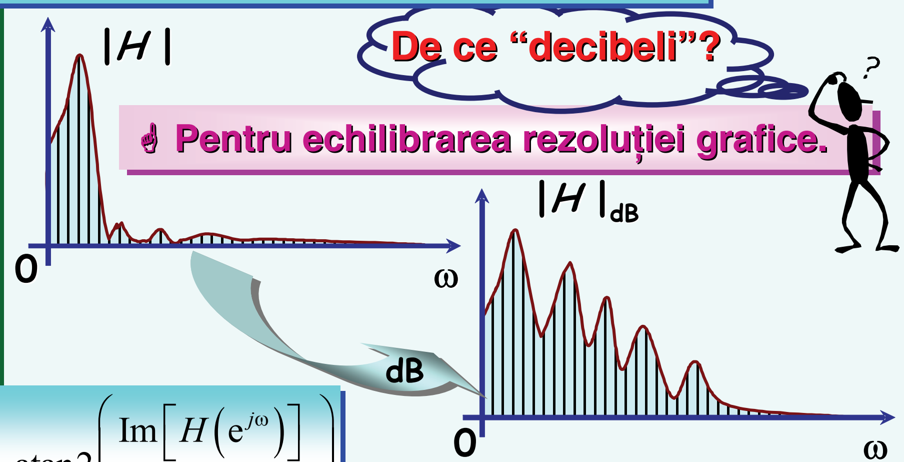
- **Funcție analitică (indefinit derivabilă).**
- **Periodicitate:** $H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) = H\left(\mathrm{e}^{j(\omega+2\pi)}\right) \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$

$$\left|H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left[H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right] + \mathrm{Im}^2\left[H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right]}$$

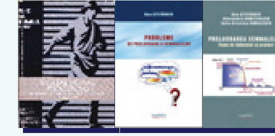
$$\varphi_H(\omega) = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}\left[H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right]}{\mathrm{Re}\left[H\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right]}\right)$$

De ce "decibeli"?

Pentru echilibrarea rezoluției grafice.

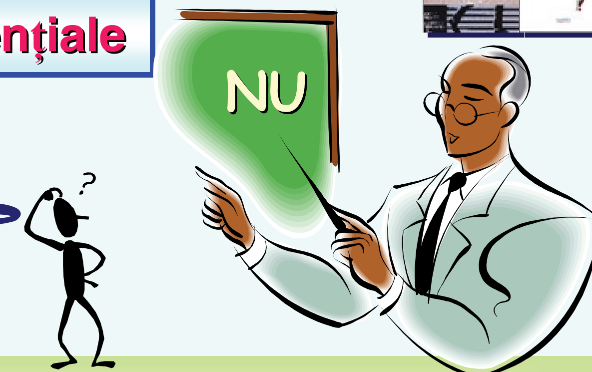


❹ Reprezentarea în frecvență a sistemelor discrete



Invarianța la deplasări frecvențiale

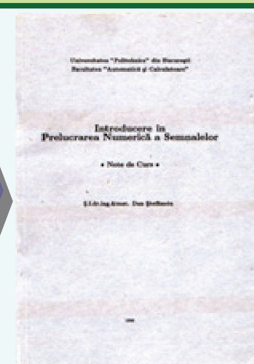
Modifică un SLID pulsația armonicei de intrare?



Propoziția 1 (invarianța la deplasări în frecvență)

Răspunsul unui SLID cu funcție pondere reală şi stabilă la o armonică de pulsație constantă este o armonică de aceeaşi pulsație, dar de amplitudine şi fază eventual diferite.

Demonstrație



Introducere în
Prelucrarea Numerică a Semnalelor

• Note de Curs •

- **Liniaritatea şi invarianța la deplasări temporale** ale sistemului induc automat **invarianța la deplasări frecvențiale**.

$$e^{j(\omega\pm\Delta\omega)n} \xrightarrow{*h} y[n] = e^{j(\omega\pm\Delta\omega)n}\, H\left(e^{j(\omega\pm\Delta\omega)}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

☝ **Spectrele intrării şi ieşirii, ca şi răspunsul în frecvență al sistemului pot fi reprezentate pe aceeaşi bandă de frecvențe.**