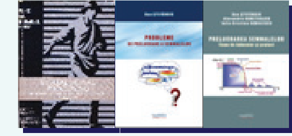
❺ Transformatele lui Joseph Fourier



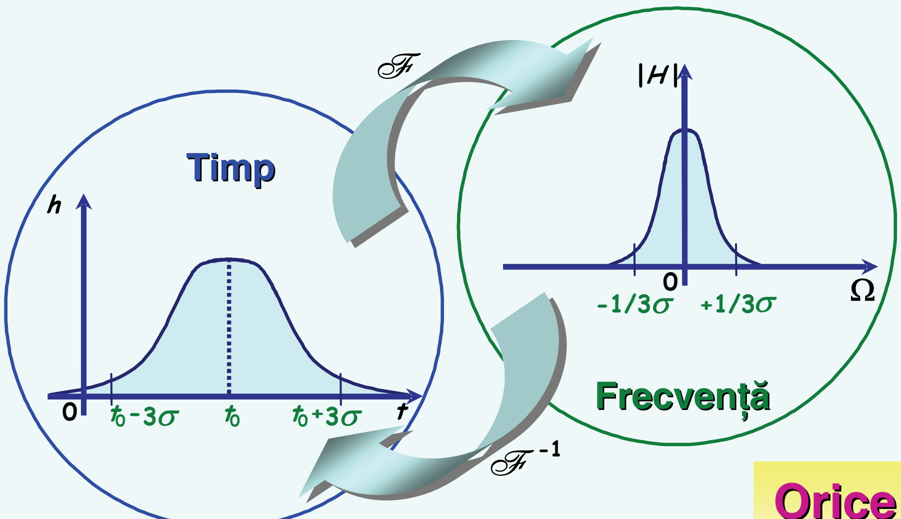
❺.❶ Principalele Transformate Fourier

Semnal → Entitate ce transportă informaţie cu privire la starea sau comportarea unui sistem, atît în **timp** cît şi în **frecvenţă**.

Cum se poate descoperi informaţia din domeniul frecvenţei?

Cu ajutorul **transformatelor armonice**.

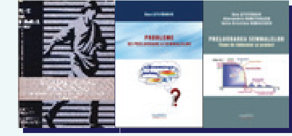
Transformată armonică → Operator inversabil care transformă un **semnal temporal** în altul **frecvenţial**.



- Există mai multe clase de transformate.
- Una dintre cele mai diverse este **clasa Operatorilor Fourier**.
- În acest curs, vor fi descrise şi alte clase.
- În prealabil, vor fi trecute în revistă principalele **Transformate Fourier**.

Ideea lui FOURIER → Orice semnal poate fi considerat ca o suprapunere aditivă de semnale atomice “monofrecvenţiale”, de diferite amplitudini, numite **armonice elementare.**

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



Detalii privind definirea TF se găsesc în Anexa E.

❺.❶ Principalele Transformate Fourier

5 tipuri de transformate fundamentale

- **SFC** ➢ Seria Fourier Continuă pentru semnale periodice $\mathcal{L}^1([-T,+T])$
- **TCFC** ➢ Transformata Continuă a lui Fourier pentru semnale Continuale $\mathcal{L}^1(\mathscr{T})$
- **TCFD** ➢ Transformata Continuă a lui Fourier pentru semnale Digitale $\ell^1(\mathbb{Z})$
- **SFD** ➢ Seria Fourier Discretă pentru semnale discrete şi periodice $\tilde{\mathcal{S}}_{dN}$
- **TFD** ➢ Transformata Fourier Discretă pentru semnale discrete cu suport finit $\mathcal{S}_{dN}$

SFC

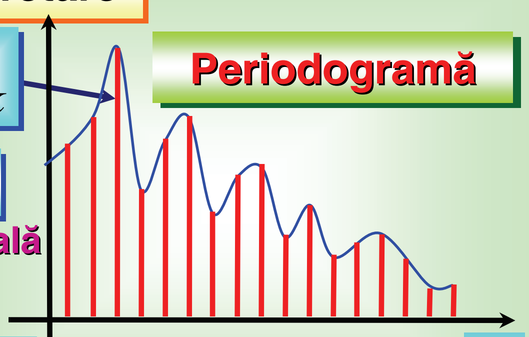
Pentru semnale periodice din $\mathcal{L}^2([-T,+T])$

Baza armonică ortogonală

$$\mathcal{H}_T \overset{def}{=} \left\{ s_{T,k}(t) = \sin\frac{k\pi t}{T} \right\}_{k\geq 1} \cup \left\{ c_{T,k}(t) = \cos\frac{k\pi t}{T} \right\}_{k\geq 0}$$

produsul scalar ➔ $\left\langle \tilde{f},\tilde{g} \right\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_{-T}^{T} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)\,dt$

Interpretare



linie spectrală P_k

$P_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

putere spectrală

$\varphi_k = \operatorname{atan2}\frac{a_k}{b_k}$

fază spectrală

0

index de frecvenţă ➔ k

Exerciţiu

$\left\| c_{T,0} \right\|^2 = 2T$

$\left\langle s_{T,k}, s_{T,p} \right\rangle = T\delta_0[k-p]$

$\left\langle c_{T,0}, s_{T,k} \right\rangle = 0$

$\left\langle c_{T,k}, c_{T,p} \right\rangle = T\delta_0[k-p]$

$\left\langle c_{T,0}, c_{T,k} \right\rangle = 0$

$\left\langle s_{T,k}, c_{T,p} \right\rangle = 0$

$\forall k,p \in \mathbb{N}^*$

☝ Nu şi normată!

Analiză

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2T}\left\langle f, c_{T,0} \right\rangle \\ a_k = \dfrac{1}{T}\left\langle f, c_{T,k} \right\rangle \\ b_k = \dfrac{1}{T}\left\langle f, s_{T,k} \right\rangle \end{cases}$$

$b_0 = 0$

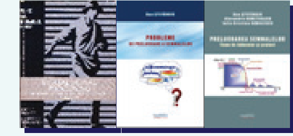
$\forall k \in \mathbb{N}^*$

Sinteză

$$f \overset{\text{PC}}{\equiv} \sum_{k\geq 0} \left(a_k c_{T,k} + b_k s_{T,k} \right)$$

Prima încercare de trecere de la continuu la discret.

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❶ Principalele Transformate Fourier

TCFC

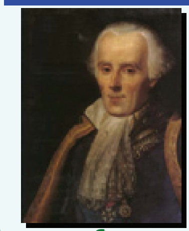
Pentru semnale continuale din $\mathscr{L}^1(\mathscr{T})$

Analiză

$$\mathscr{F}(f)(j\Omega) \overset{def}{=} F(j\Omega) \overset{def}{=} \hat{f}(j\Omega) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\Omega t}\,dt \qquad \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

pulsație absolută (continuală)

notație frecventă în publicații



Transformata Laplace (TL)

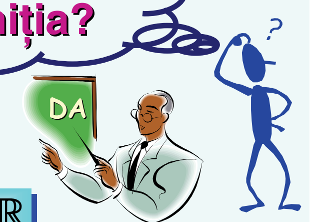
$$F(s)\big|_{s=j\Omega} = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-j\Omega t}\,dt$$

☝ Cu toate acestea, TCFC nu se obține prin utilizarea TL!

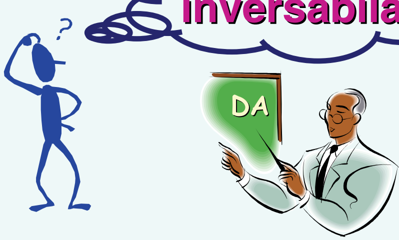
Este corectă definiția?

$f \in \mathscr{L}^1(\mathscr{T})$

$$|F(j\Omega)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\mathrm{e}^{-j\Omega t}\right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty \qquad \forall \Omega \in \mathbb{R}$$



Este TCFC inversabilă?



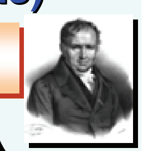
$$f(t) \overset{apt}{=} \tilde{f}(t) = \mathscr{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\Omega)\mathrm{e}^{+j\Omega t}\,d\Omega \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sinteză

aproape peste tot (cu excepția unui set numărabil de momente)

☝ TCFC directă şi inversă folosesc practic aceeaşi expresie integrală.

Relația lui Poisson



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\pm j\Omega t}\,d\Omega = 2\pi\delta_0(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ce fel de semnal este *F*?

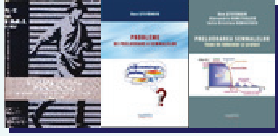
Tot ce se poate spune este că TCFC produce semnale uzuale din semnale uzuale.

Exercițiu

$$f \in \overline{\mathscr{L}^1(\mathscr{T}) \cap \mathscr{L}^2(\mathscr{T})}$$

$$F \in \overline{\mathscr{L}^1(\mathscr{T}) \cap \mathscr{L}^2(\mathscr{T})}$$

• Folosiți



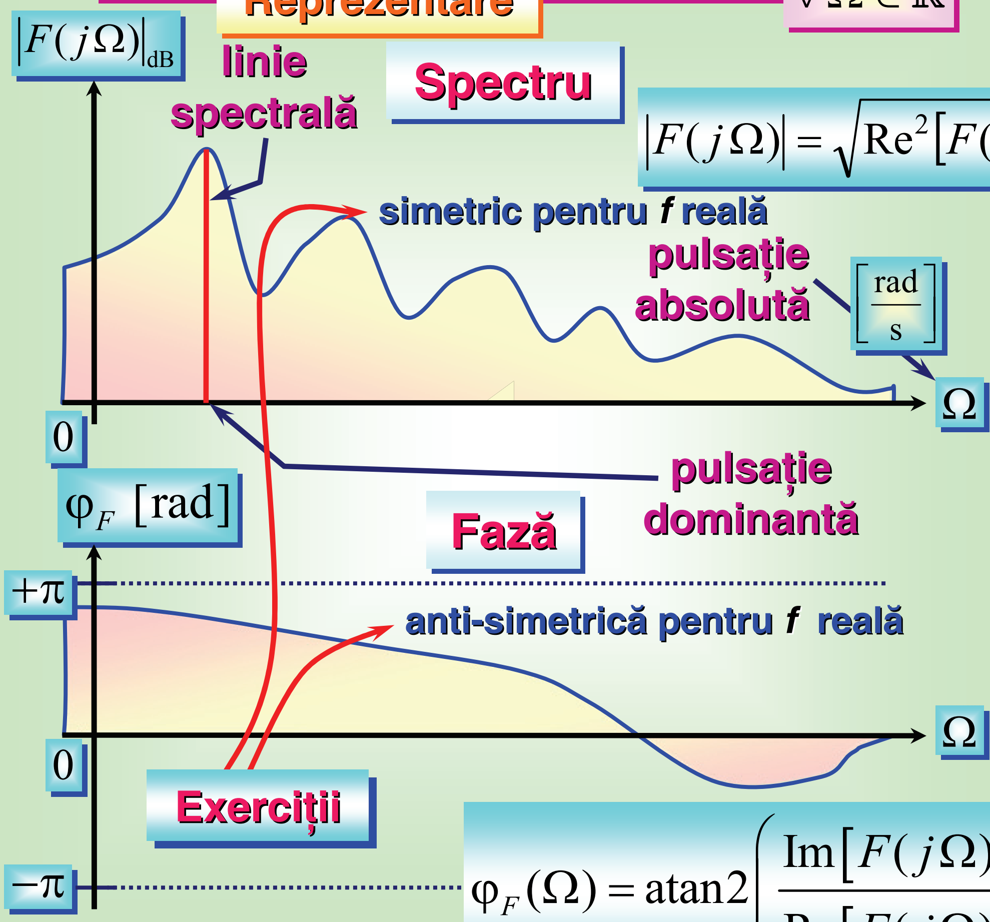
❺.❶ Principalele Transformate Fourier

TCFC

Este un fel de **SFC** pentru semnale **de perioadă infinită**.

$$\mathscr{F}(f)(j\Omega) \overset{def}{=} F(j\Omega) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt \quad \forall\Omega\in\mathbb{R}$$

Reprezentare



$$|F(j\Omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[F(j\Omega)] + \mathrm{Im}^2[F(j\Omega)]}$$

$$\varphi_F(\Omega) = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}[F(j\Omega)]}{\mathrm{Re}[F(j\Omega)]}\right)$$

Proprietăți elementare

- Funcție analitică (indefinit derivabilă).
- Valori complexe, în general.
- Nu neapărat periodică.
- Liniaritate.

$f\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ ⇒ **Energie temporală**

☝ **Finită.**

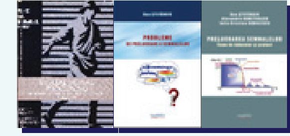
$$\mathcal{E}(f) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$$

$f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ ⇒ **Energie spectrală (frecvențială)**

☝ **Poate fi infinită.**

$$\mathscr{E}(f) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\Omega)|^2\,d\Omega$$

De aceea se lucrează cu **semnale uzuale.**



❺.❶ Principalele Transformate Fourier

TCFD

Pentru semnale digitale din $\ell^1(\mathbb{Z})$

Analiză

$$\mathscr{F}(x)\left(e^{j\omega}\right) \overset{def}{=} X\left(e^{j\omega}\right) \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-j\omega n}$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$

pulsație relativă, normalizată (continuală)

$$\mathscr{Z}(x)(z) \overset{def}{=} X(z) \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]z^{-n}$$

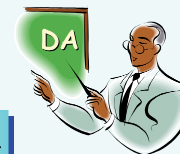
☝ TCFD se obține prin evaluarea TZ pe cercul unitar!

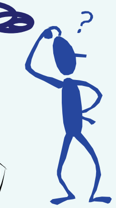
Este corectă definiția?

$x \in \ell^1(\mathbb{Z})$

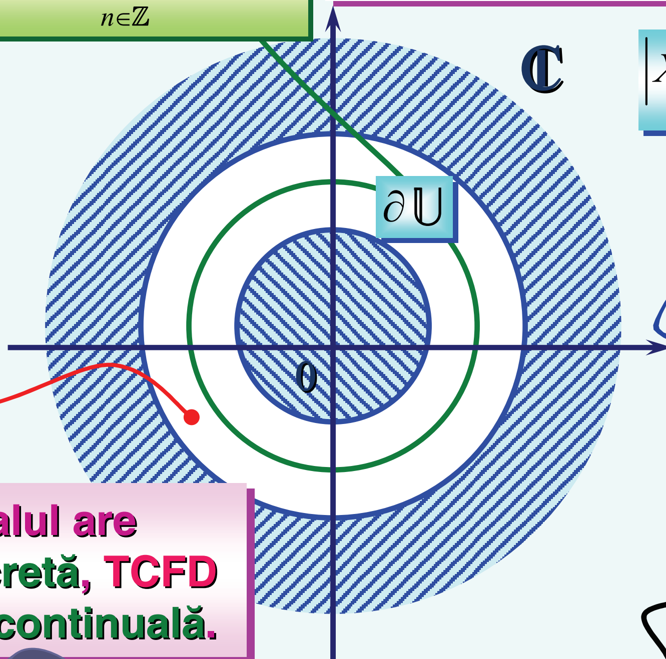
$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|x[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n]| < \infty$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$

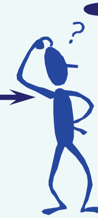


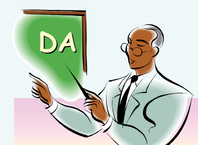


$\mathscr{A}_c(x)$



Este TCFD inversabilă?





Sinteză

$$x[n] = \mathscr{F}^{-1}(X)[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{+j\omega n}\, d\omega$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

☝ Deşi semnalul are natură discretă, TCFD are natură continuală.

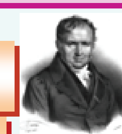
Exercițiu

$x \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$X \in \mathscr{L}^1([-\pi,+\pi])$

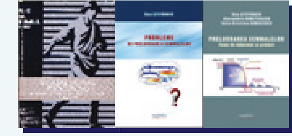
• Folosiți

Relația lui Poisson



$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm j\omega n}\, d\omega = 2\pi\delta_0[n]$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$



❺.❶ Principalele Transformate Fourier

TCFD

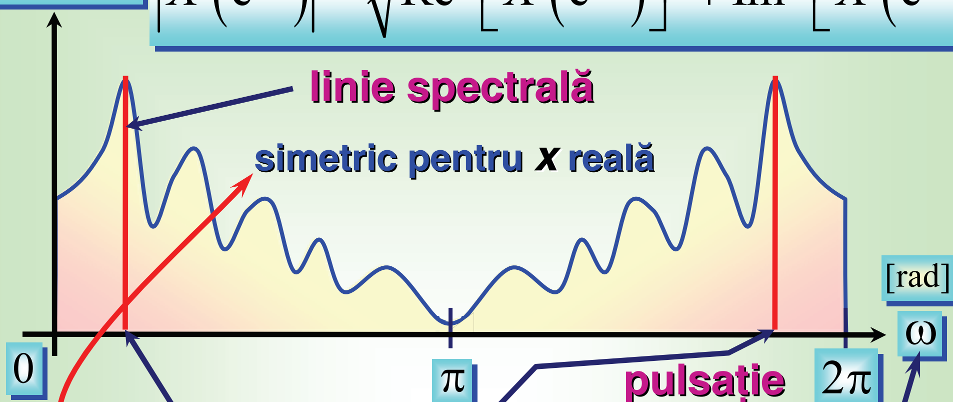
$$\mathscr{F}(x)\left(e^{j\omega}\right) \overset{def}{=} X\left(e^{j\omega}\right) \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-j\omega n} \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$$

Reprezentare

Spectru

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|_{dB}$$

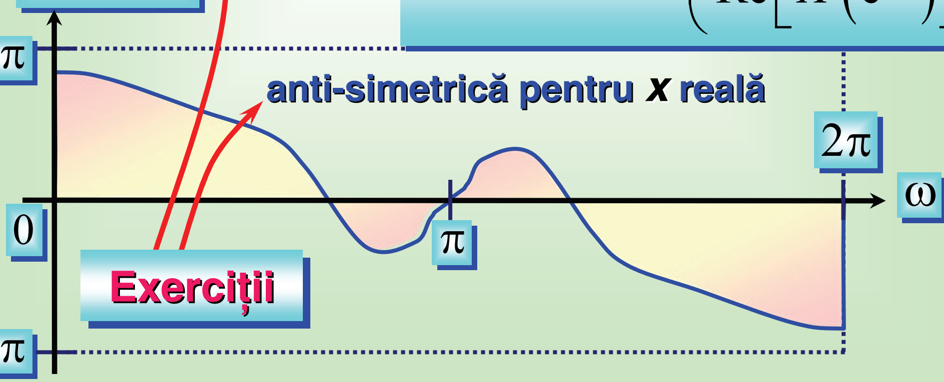
$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] + \mathrm{Im}^2\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]}$$



Fază

$$\varphi_X(\omega) = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]}{\mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]}\right)$$

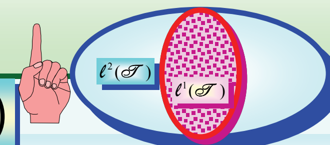
φ_X [rad]



Exerciții

Proprietăți elementare

- **Funcție analitică (indefinit derivabilă).**
- **Periodicitate:** $X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}$
- **Liniaritate.**



$x \in \ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$

Energie temporală

☝ **Finită.** $\mathscr{E}(x) \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n]|^2$

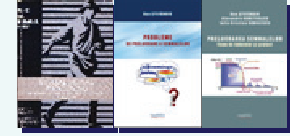
Energie spectrală (frecvențială)

$$\mathscr{E}(x) \overset{def}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

Exercițiu ☝ **Tot finită.**

❺ Transformatele lui Joseph Fourier

❺.❶ Principalele Transformate Fourier



SFD

Pentru semnale digitale periodice din $\tilde{\mathcal{S}}_{dN}$

$\left(\tilde{\mathcal{S}}_{dN},+,\bullet,\cdot\right)$ ← **Algebră comutativă**

← **Spațiu Hilbert**

produsul scalar → $\langle \tilde{x},\tilde{y}\rangle \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\overline{\tilde{y}[n]}$

norma canonică → $\|\tilde{x}\| \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2}$

Parametru remarcabil

Perioada N

O bază?

Se poate construi o bază remarcabilă, de tip armonic.

$$\mathcal{H}_N \overset{def}{=} \left\{ \tilde{e}_k^N \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$\tilde{e}_k^N[n] \overset{def}{=} \overline{w}_N^{nk} = \cos\left(\frac{2nk\pi}{N}\right) + j\sin\left(\frac{2nk\pi}{N}\right) \quad \forall n,k\in\mathbb{N}$$

finită $\mathcal{H}_N \overset{def}{=} \left\{ \tilde{e}_0^N \equiv 1,\ \tilde{e}_1^N,\ \tilde{e}_2^N,\ \ldots,\ \tilde{e}_{N-1}^N \right\}$ **N elemente**

Ortogonale.

Analiză

Coeficienții lui Fourier

$$\tilde{X}[k] \overset{def}{=} \left\langle \tilde{x},\tilde{e}_k^N \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{nk} \quad \forall k\in\overline{0,N-1}$$

$$\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{S}}_{dN}$$

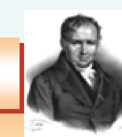
proiecțiile semnalului pe elementele familiei ortogonale

Este SFD inversabilă?

Sinteză

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\tilde{e}_k^N[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\overline{w}_N^{nk} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

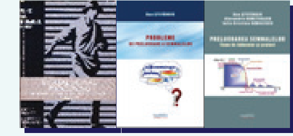
Relația lui Poisson



$$\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w}_N^{kn} = N\delta_{N\mathbb{Z}}[k] \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

• **Folosind**

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❶ Principalele Transformate Fourier

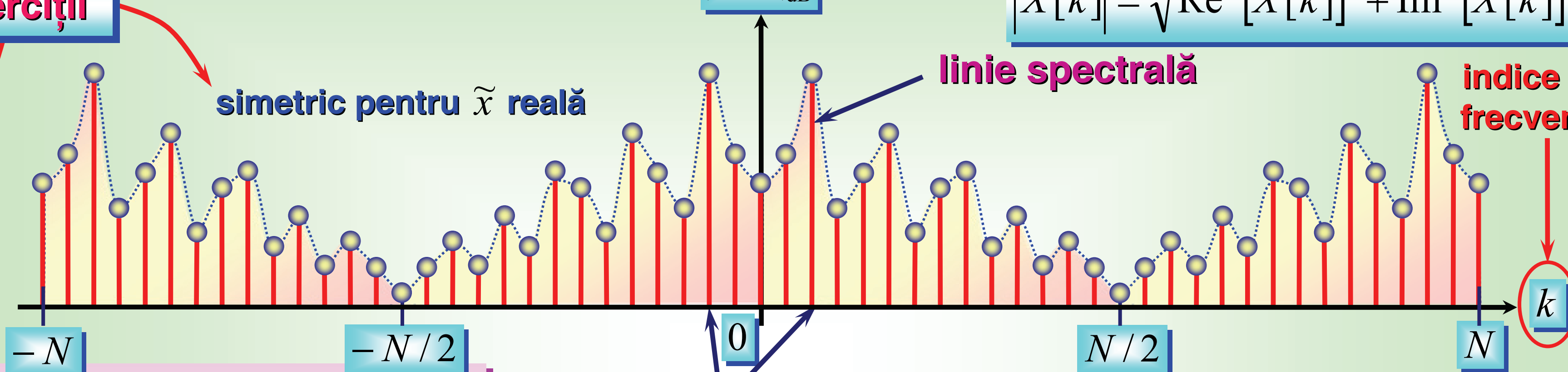
SFD

Reprezentare

Spectru (periodic)

$$\left|\tilde{X}[k]\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left[\tilde{X}[k]\right] + \mathrm{Im}^2\left[\tilde{X}[k]\right]}$$

Exerciții

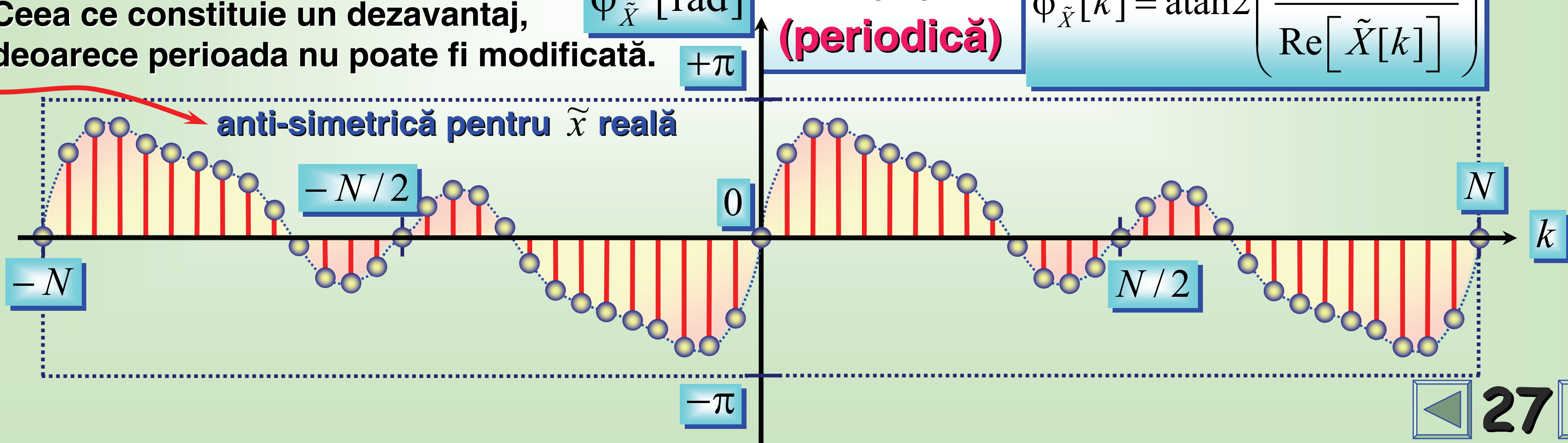


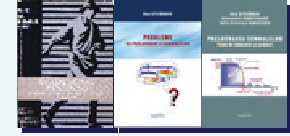
☝ **Rezoluția este controlată de perioadă.**

- **Ceea ce constituie un dezavantaj, deoarece perioada nu poate fi modificată.**

Fază (periodică)

$$\varphi_{\tilde{X}}[k] = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}\left[\tilde{X}[k]\right]}{\mathrm{Re}\left[\tilde{X}[k]\right]}\right)$$





TFD

Pentru semnale digitale de suport finit din $\mathcal{S}_{dN}$

$\left(\mathcal{S}_{dN},+,\bullet,\cdot\right)$ ← **Algebră comutativă**
← **Spațiu Hilbert**

produsul scalar ➔ $\langle x,y\rangle \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\overline{y[n]}$

Parametru remarcabil

norma canonică ➔ $\|x\| \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2}$

Durata N

Pentru construcția ei, este suficient să se observe izomorfismul cu spațiul semnalelor *N*-periodice.

➔ **Orice semnal de suport finit poate genera un semnal periodic folosind operația de prelungire prin periodicitate.**

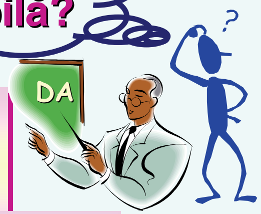
← **Orice semnal periodic poate genera un semnal de suport finit considerînd doar restricția acestuia la perioada principală.**

$$\mathcal{H}_N \overset{def}{=} \left\{ \mathrm{e}_k^N \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$\mathrm{e}_k^N[n] \overset{def}{=} \overline{w}_N^{nk} = \cos\left(\frac{2nk\pi}{N}\right) + j\sin\left(\frac{2nk\pi}{N}\right)$$

$\forall n,k \in \overline{0,N-1}$

Baza armonică ortogonală



Analiză

$$X[k] \overset{def}{=} \left\langle x,\mathrm{e}_k^N \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{nk}$$

$\forall k \in \overline{0,N-1}$

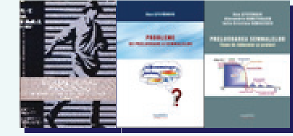
Sinteză

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}_k^N[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\overline{w}_N^{nk}$$

$\forall n \in \overline{0,N-1}$

TFD are o serie de proprietăți teoretice şi (mai ales) practice care o plasează pe primul loc în aplicații (dintre cele 5 TF descrise pînă acum).

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❶ Principalele Transformate Fourier

TFD (continuare)

Reprezentare

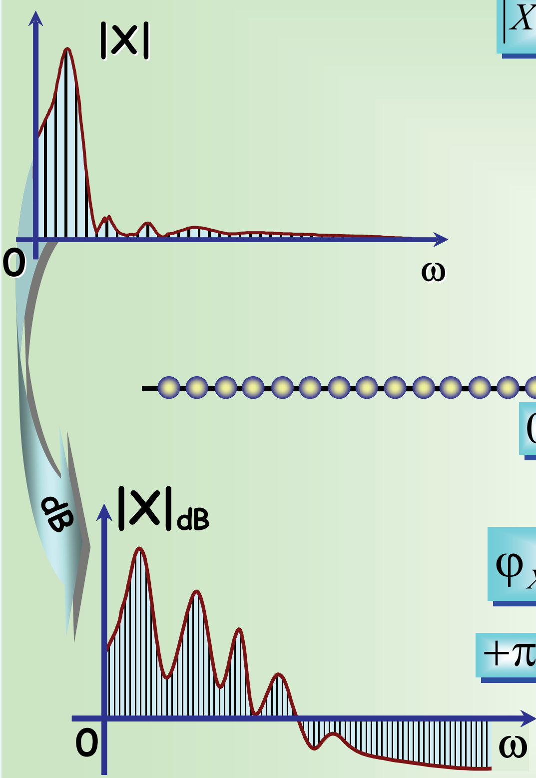
☝ Pentru echilibrarea rezoluției grafice, spectrele se reprezintă în decibeli.

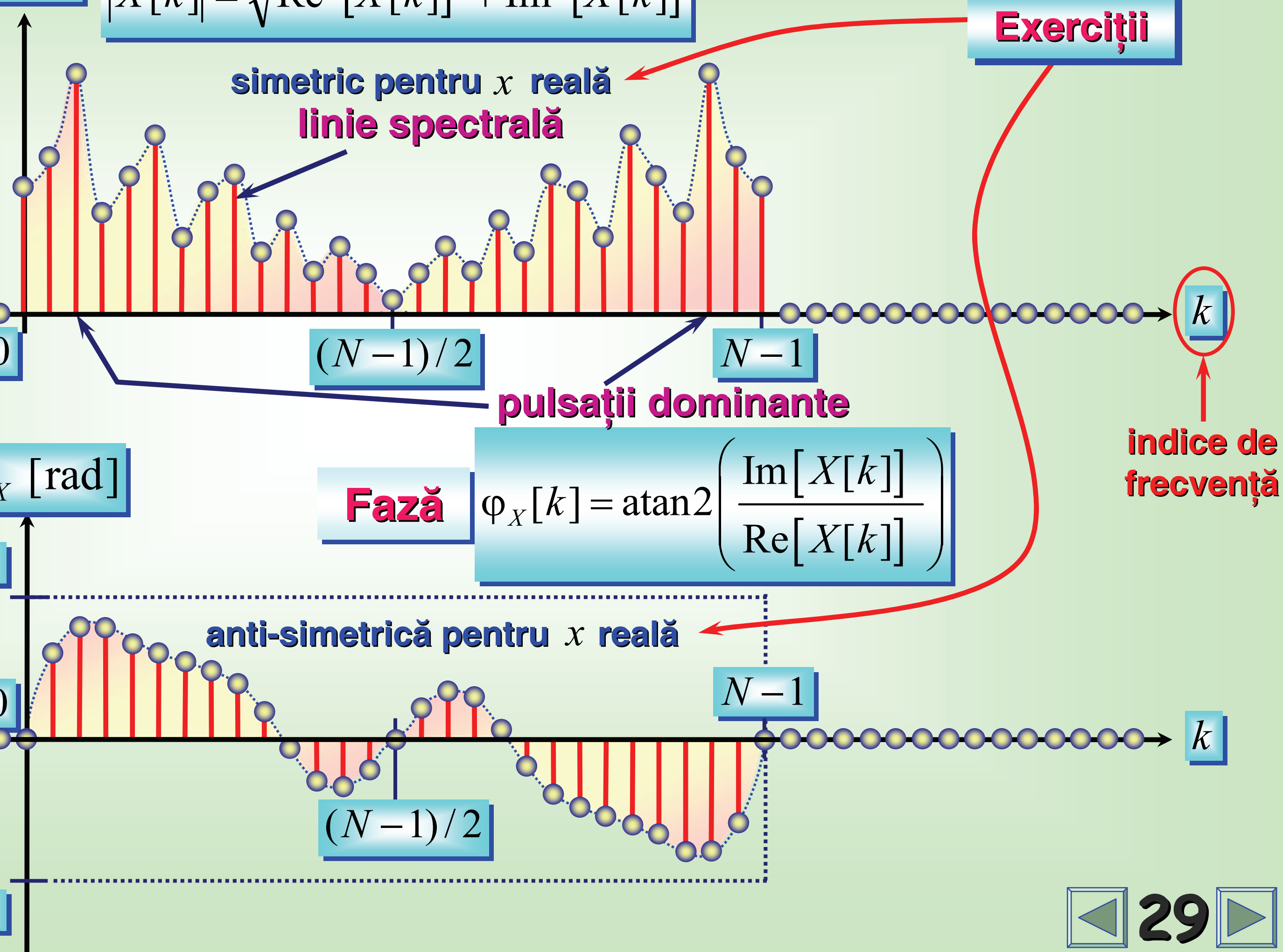
Spectru

☝ Rezoluția este controlată de durată.

$$|X[k]| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left[X[k]\right] + \mathrm{Im}^2\left[X[k]\right]}$$

Exerciții

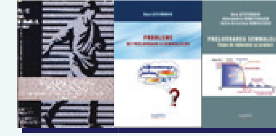




Fază

$$\varphi_X[k] = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}\left[X[k]\right]}{\mathrm{Re}\left[X[k]\right]}\right)$$

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❶ Principalele Transformate Fourier

TFD (final)

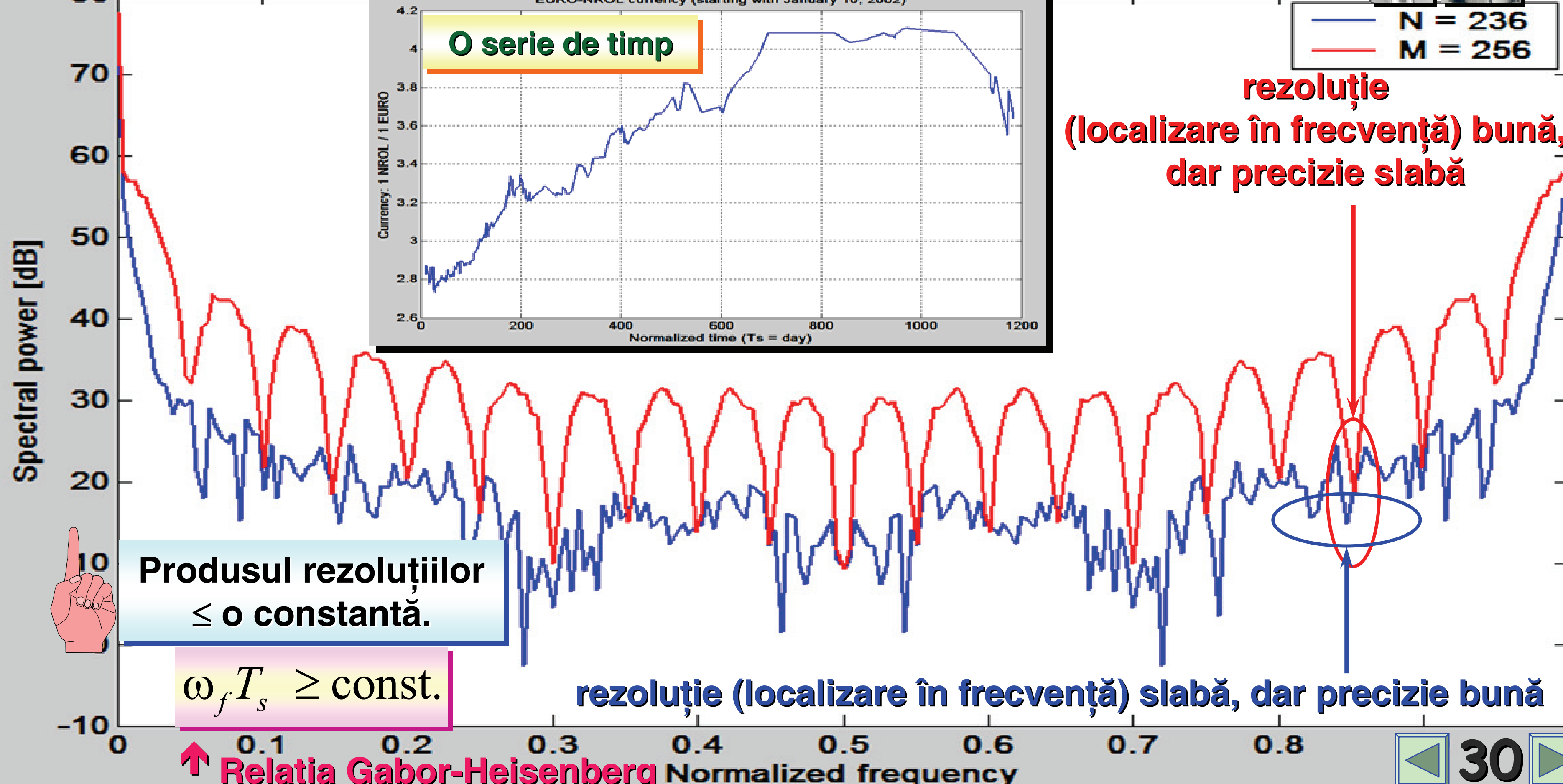
Efectele creşterii duratei semnalului (prin completare cu zerouri)

☺ Mărirea rezoluției de reprezentare în frecvență.

☹ Scăderea preciziei de estimare spectrală.

☝ Consecință a Principului de incertitudine Gabor-Heisenberg.

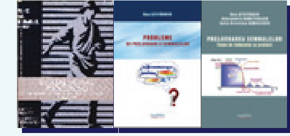
Exemplu



Produsul rezoluțiilor ≤ o constantă.

$$\omega_f T_s \geq \text{const.}$$

↑ Relația Gabor-Heisenberg



❺.❷ Proprietăți ale Transformatelor Fourier

Proprietăți practice

Proprietăți fundamentale — Majoritatea sunt descrise în **Anexa F.**

Proprietăți de convoluție — Majoritatea sunt descrise în **Anexa F.**

Proprietăți de redundanță — Sunt descrise în **curs.**

Exprimarea matricială a SFD

$$\tilde{X}[k] \stackrel{def}{=} \left\langle \tilde{x}, \tilde{e}_k^N \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{nk} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

SFD este periodică

Matricea armonică elementară de ordin *N*

$\mathbf{W}_N$
- simetrică
- independentă de semnal
- inversabilă

☝ Nu este necesară inversarea explicită.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \vdots \\ \tilde{X}[k] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{X}}_N} = \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^1 & \cdots & w_N^k & \cdots & w_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_N^k & \cdots & w_N^{k^2} & \cdots & w_N^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & \cdots & w_N^{k(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}}_{\mathbf{W}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \vdots \\ \tilde{x}[k] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_N}$$

Exercițiu

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{W}}_N$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_N = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{W}}_N \tilde{\mathbf{X}}_N$$

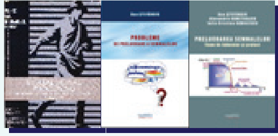
Sinteză

☝ Aceeaşi matrice armonică se poate folosi şi pentru a exprima TFD.

Analiză

$$\tilde{\mathbf{X}}_N = \mathbf{W}_N \tilde{\mathbf{x}}_N$$

☝ Totuşi, elementele matricii depind de dimensiunea ***N***.



Problema convoluției în Prelucrarea Semnalelor

- **Avînd disponibil un instrument de transformare a informației din domeniul timp în domeniul frecvenței, se cere să se precizeze raportul dintre acesta şi operația de convoluție dintre semnale.**

SLID

x — H — y

semnal de intrare

funcție de sistem

semnal de ieşire

$$x \xrightarrow{*h} y \equiv x * h$$

secvență pondere

$$\mathscr{F}(x*h) = \mathscr{F}(y) = ?$$

Soluțiile acestei probleme se numesc **Teoreme de convoluție**

☞ Teorema directă

☜ Teorema inversă

O pereche de **Teoreme de convoluție** provine de la **Transformata Z**

Anexa D

Teorema A1 (convoluție liniară directă)

$$x, y \in \mathcal{S}_{*d} \Rightarrow \mathscr{Z}(x*y) \equiv \mathscr{Z}(x)\mathscr{Z}(y)$$

spațiul semnalelor care se pot convoluta

Teorema A2 (convoluție liniară inversă)

$$\mathcal{R}_0(x)\mathcal{R}_0(y) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)\mathcal{R}_\infty(y)$$

$$\mathscr{Z}(xy)(z) = V(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma\subseteq\mathcal{A}} X(\zeta)Y\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$\ell^1(\mathscr{T}) \subset \mathcal{S}_{*d} \Rightarrow$$

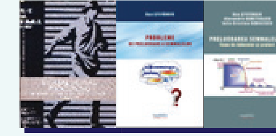
Transformata Z induce **Teoremele de convoluție** pentru **TCFD**

$$\mathscr{F}(x*y) \equiv \mathscr{F}(x)\mathscr{F}(y)$$ ☞ directă

$$\mathscr{F}(xy)\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\varphi}\right)Y\left(e^{j(\omega-\varphi)}\right)d\varphi$$ ☜ inversă

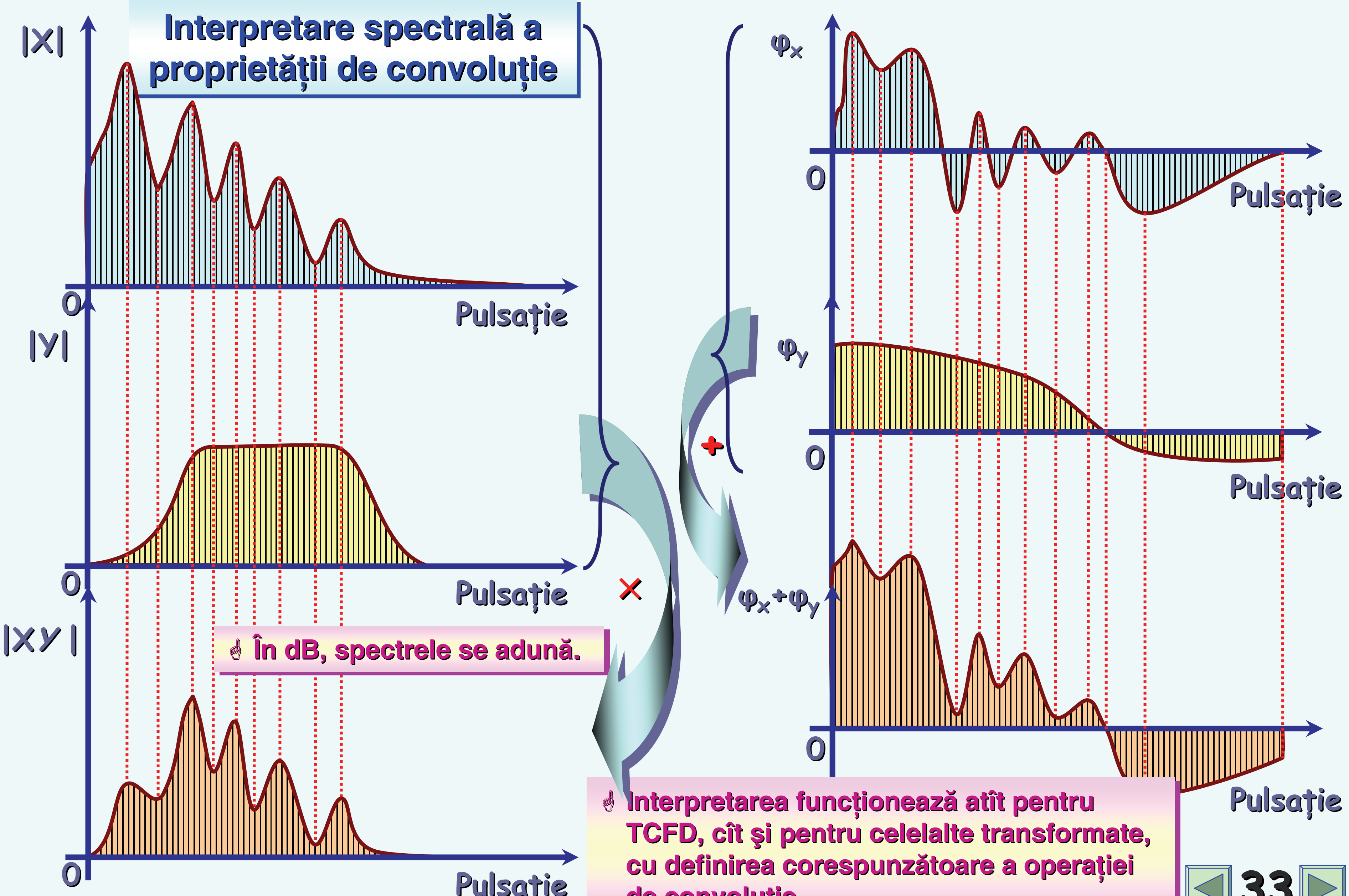
convoluție periodică

❺ Transformatele lui Joseph Fourier



❺.❷ Proprietăţi ale Transformatelor Fourier

Interpretare spectrală a proprietăţii de convoluţie



☝ În dB, spectrele se adună.

☝ Interpretarea funcţionează atît pentru TCFD, cît şi pentru celelalte transformate, cu definirea corespunzătoare a operaţiei de convoluţie.