

Proiect 1 - Proiectarea filtrelor FIR prin Metoda ferestrei

Profesor Dan ȘTEFĂNOIU
dan.stefanoiu@acse.pub.ro

Conferențiar Alexandru DUMITRAȘCU
alexandru.dumitrascu@acse.pub.ro

As.drd. Iulia-Cristina RĂDULESCU
iulia.radulescu@acse.pub.ro



Obiective

Înțelegerea Metodei ferestrei pentru proiectarea filtrelor FIR. Rezolvarea unor probleme de proiectare de tip *răspuns cu toleranțe fixate* pe baza Metodei ferestrei. Studiul caracteristicilor în frecvență ale mai multor tipuri de ferestre.

Suport teoretic

Principiul Metodei ferestrei

Metoda ferestrei este una dintre cele mai simple proceduri de proiectare a filtrelor FIR. Ea se bazează pe modularea în timp a unui răspuns ideal cu un semnal de tip *fereastră*, adică un semnal cu suport finit, care permite extragerea de segmente dintr-un alt semnal. Funcția de transfer a filtrului are forma generală (ordinul M este fixat în prealabil) :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n}. \quad (4.1)$$

Algoritm de proiectare al filtrelor FIR

→ Date de proiectare

Ordinul M al filtrului și amplitudinea răspunsului ideal în frecvență care trebuie aproximat. De exemplu, pentru filtrul trece-jos (FTJ) din Figura 4.1, se precizează pulsația ω_c , numită „de tăiere”, care delimitează banda de trecere $[0, \omega_c]$ de cea de stopare (oprire) $[\omega_c, \pi]$.

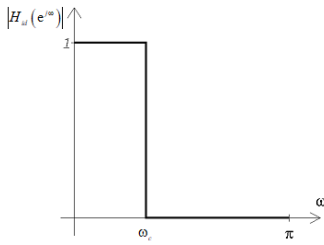


Figura 4.1. Caracteristica de frecvență a unui FTJ ideal.

→ Pas 1 (Preliminarii)

Se calculează răspunsul la impuls al filtrului ideal, considerând că faza filtrului este liniară și proporțională cu $n_0 = (M - 1)/2$. De exemplu, pentru un FTJ, răspunsul ideal în frecvență este :

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\omega n_0} & , |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} , \forall \omega \in [-\pi, +\pi] , \quad (4.2)$$

Amplitudinea acestui răspuns arată ca în Figura 4.1 și e considerată *ideală*. De notat este că filtrele ideale sunt nerealizabile fizic.

Răspunsul la impuls asociat celui în frecvență (4.2) este un sinus atenuat, centrat în punctul n_0 :

$$h_{id}[n] = \frac{\sin \omega_c (n - n_0)}{\pi (n - n_0)}, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

→ Pas 2

Se alege o fereastră f cu suportul $\overline{0, M-1}$.

→ Pas 3

Se calculează coeficienții filtrului FIR, modulând în timp răspunsul ideal h_{id} cu fereastra f , i.e. prin relația :

$$h[n] = h_{id}[n]f[n] = \frac{\sin \omega_c (n - n_0)}{\pi (n - n_0)} f[n], \forall n \in \overline{0, M-1}. \quad (4.4)$$

După aceea, eventual, se înmulțesc toți coeficienții $\{h[n]\}_{n \in \overline{0, M-1}}$ cu o constantă potrivit aleasă. De exemplu, se poate urmări îndeplinirea condiției

$$H(1) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] = 1.$$

Comentarii :

- a. Scopul normalizării din finalul pasului 3 este de a nu permite filtrului să distorsioneze amplificarea TF a semnalului de intrare în drumul lui către ieșire. Din $Y(0) = H(1)X(0)$ (convoluția directă, pentru $\omega = 0$) reiese că ieșirea are șansa de a conserva componenta continuă a intrării. Algoritmul propune așadar proiectarea de FTJ ce au câștigul $H(1)$ unitar.

- b. Conform principiului de incertitudine Gabor-Heisenberg, răspunsul ideal (4.3) are suportul infinit, iar caracteristica în frecvență (4.2) are suport compact. Prin definiția (4.4) nu se alege decât un set finit de coeficienți ai secvenței pondere ideale (eventual distorsionați de valorile ferestrei și/sau operația de normalizare). Aceasta are ca efect distorsionarea caracteristicii în frecvență a filtrului ideal. Ea va arăta, de exemplu, ca în Figura 4.2 (pot apărea undulații vizibile în banda de trecere și apar întotdeauna lobi secundari în banda de stopare).

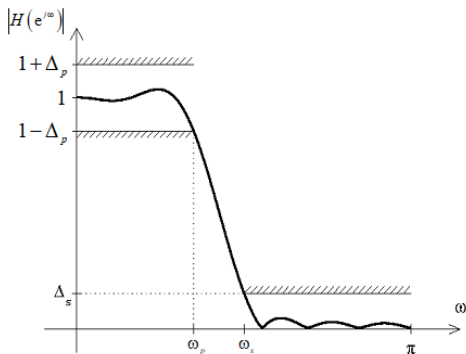


Figura 4.2. Caracteristică de frecvență (amplitudine) cu toleranțe impuse și exemplu de răspuns care satisface specificațiile.

- c. După aplicarea algoritmului, se recomandă trasarea răspunsului în frecvență al filtrului FIR obținut. Dacă graficul obținut nu este convenabil, se poate mări ordinul M sau se poate alege o altă fereastră f .
- d. Alegerea ferestrei
Răspunsul în frecvență al filtrului H , exprimat în funcție de răspunsurile în frecvență ale filtrului ideal și ferestrei, are forma :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(e^{j\theta}) F(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta, \quad (4.5)$$

Fereastra trebuie aleasă în așa fel încât TF a sa $F(e^{j\omega})$ să se apropie cât mai mult de impulsul Dirac.

Caracteristici de frecvență cu toleranțe fixate

Performanțe dorite pentru un filtru FIR :

- Răspunsul în frecvență este precizat cu toleranțe (impuse), în sensul că se permite o abatere maximă a amplitudinii de la valorile ideale 1 în banda de trecere și 0 în banda de stopare (Figura 4.2). Toleranțele sunt Δ_p în banda de trecere $[0, \omega_p]$ și Δ_s în banda de stopare $[\omega_s, \pi]$. Valorile acestor toleranțe constituie date de proiectare.
- În afară de benzile de trecere și de stopare, răspunsul în frecvență conține și o bandă de tranziție $[\omega_p, \omega_s]$, în care amplitudinea trebuie să aibă o tendință descrescătoare. Totuși, în această zonă, nu se impun restricții suplimentare.

Ferestre de semnal uzuale

Fereastra dreptunghiulară

$$f_d[n] = 1, n \in \overline{0, M-1}. \quad (4.6)$$

Fereastra Bartlett (triunghiulară)

$$f_t[n] = 1 - \frac{2 \left| n - \frac{M-1}{2} \right|}{M-1}, n \in \overline{0, M-1}. \quad (4.7)$$

Fereastra Blackman

$$f_{Bk}[n] = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2n\pi}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4n\pi}{M-1}, n \in \overline{0, M-1}. \quad (4.8)$$

Fereastra Cebîșev

Definiția acestei ferestre se realizează cu ajutorul unui algoritm recursiv (a se vedea funcția MATLAB chebwin).

Fereastra Hamming

$$f_{Hm}[n] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2n\pi}{M-1}, n \in \overline{0, M-1}. \quad (4.9)$$

Fereastra Hanning

$$f_{Hn}[n] = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{M-1} \right), n \in \overline{0, M-1}. \quad (4.10)$$

Fereastra Kaiser

$$f_{Ks}[n] = \frac{\sinh \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{M-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{M-1}{2} \right)^2} \right]}{\sinh \left[\alpha \frac{M-1}{2} \right]}, n \in \overline{0, M-1}, \quad (4.11)$$

unde prin \sinh a fost notată funcția *sinus hiperbolic* $\left(\sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$, iar parametrul $\alpha > 0$ este înălțimea dorită (în dB) a primului lob parazit din spectrul ferestrei.

Fereastra Lanczos

$$f_{Lz}[n] = \left[\frac{\sin 2\pi \left(\frac{2n-M+1}{2(M-1)} \right)}{2\pi \left(\frac{2n-M+1}{2(M-1)} \right)} \right]^L, n \in \overline{0, M-1}, \quad (4.12)$$

unde exponentul $L > 0$ controlează deschiderea ferestrei.

Fereastra Tuckey (fereastra dreptunghiulară cu margini netede)

$$f_{Tk}[n] = \begin{cases} 1 & , \left| n - \frac{M-1}{2} \right| \leq \alpha \frac{M-1}{2} \\ \sin^2 \left(\frac{n}{(1-\alpha)(M-1)} \pi \right) & , 0 \leq n < \frac{(1-\alpha)(M-1)}{2} \\ \sin^2 \left(\frac{n-M+1}{(1-\alpha)(M-1)} \pi \right) & , \frac{(1+\alpha)(M-1)}{2} < n \leq M-1 \end{cases}, n \in \overline{0, M-1}. \quad (4.13)$$

Parametrul $\alpha \in (0, 1)$ controlează procentajul deținut de suportul ferestrei dreptunghiulare centrate din suportul întregii ferestre.

Toate cele 9 ferestre descrise mai sus sunt simetrice, așa cum o dovedesc graficele acestora din Figura 4.3.

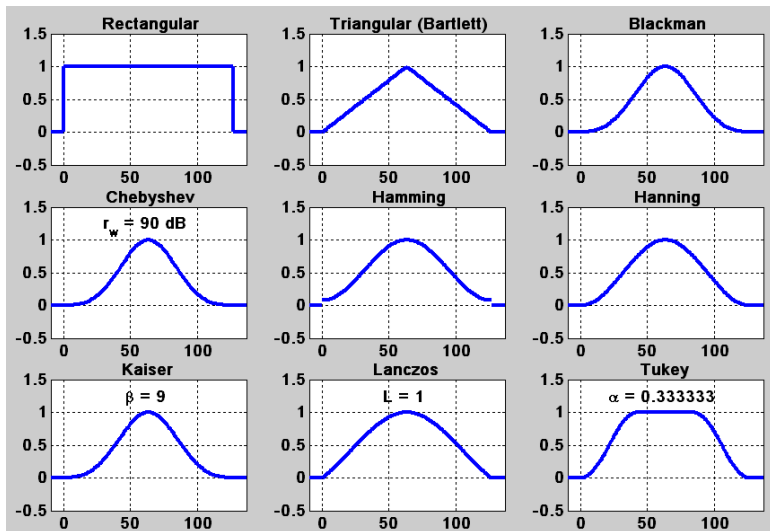


Figura 4.3. Nouă dintre cele mai utilizate ferestre culisante ($M = 128$).

Deși unele ferestre par a avea aceeași alură, ele sunt în realitate extrem de diferite, în special prin comportamentul în frecvență. Acesta este ilustrat în Figura 4.4.

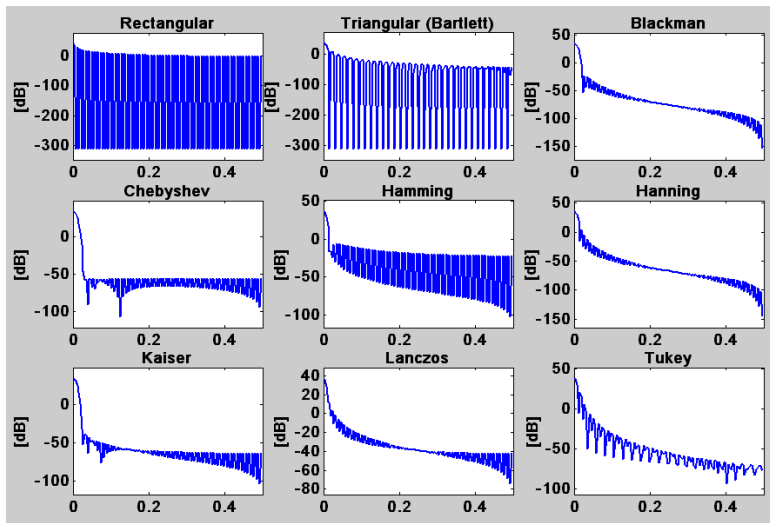


Figura 4.4. Spectrele celor nouă ferestre culisante.

Lobul principal se găsește în banda de joase frecvențe, în timp ce *lobii secundari/paraziți* ocupă benzile de medie și înaltă frecvență. Lobul principal este mai bine pus în evidență pentru ferestrele lui Blackman, Cebîșev sau Kaiser.

Unul dintre cele mai folosite criterii de alegere a ferestrei adecvate îl constituie atenuarea provocată de lobii paraziți. În mod inevitabil, spectrul original al datelor este distorsionat de către cel al ferestrei. Ideal ar fi ca TF a ferestrei să fie egală cu impulsul Dirac, caz în care spectrul datelor nu mai este distorsionat prin convoluție. Cu alte cuvinte, spectrul ferestrei trebuie să se reducă la un singur lob - cel principal - și acesta trebuie să aibă o deschidere nulă.

Ca urmare a Principiului de incertitudine Gabor-Heisenberg, cazul ideal este imposibil de atins în practică. De aceea, se consideră că o "bună" fereastră (în sensul criteriului de atenuare în zona lobilor paraziți) ar trebui să aibă o deschidere cât mai mică a lobului principal din spectru și o atenuare accentuată a lobilor paraziți. O astfel de fereastră ar introduce o distorsiune minimală în spectrul datelor și ar oferi o bună localizare a acestora în frecvență. Însă, așa cum era de așteptat, cele două proprietăți sunt opuse, tot din cauza Principiului de incertitudine.

Problema de proiectare a filtrelor cu toleranțe impuse (PPFTI)

Plecând de la perechea de pulsații $\{\omega_p, \omega_s\}$ și perechea de toleranțe corespunzătoare $\{\Delta_p, \Delta_s\}$, se cere să se proiecteze un filtru care satisface cerințele din Fig. 4.2. Filtrul poate avea un ordin prestabilit sau un ordin cât mai mic.

Ghid MATLAB

Proiectare filtru FIR cu Metoda ferestrei

Se proiectează un filtru FIR cu Metoda ferestrei utilizând funcția `fir1` ce folosește o fereastră de tip Hamming (4.9).

→ Filtru trece-jos

```
» h=fir1(M,om_c);
```

Precizarea ferestrei se realizează prin apelul :

```
» h=fir1(M,om_c,w);
```

unde w este semnalul fereastră (un vector ce include valori ale ferestrei).

→ Filtru trece-sus

```
» h=fir1(M,om_c,'high');
```

→ Filtru trece-bandă

Moduri de apel dezvoltate de comanda `help fir1`

M este ordinul filtrului, iar om_c este pulsația de tăiere (normalizată) a filtrului ideal (4.2).

Generare ferestre

O fereastră de lungime M poate fi generată cu una dintre comenzile următoare :

- `>> w=boxcar(M); % Fereastră dreptunghiulară`
- `>> w=triang(M); % Fereastră triunghiulară`
- `>> w=blackman(M); % Fereastră Blackman`
- `>> w=chebwin(M,r); % Fereastră Cebîșev`
- `>> w=hamming(M); % Fereastră Hamming`
- `>> w=hanning(M); % Fereastră Hanning`
- `>> w=kaiser(M,beta); % Fereastră Kaiser`
- `>> w=tuckeywin(M,alfa); % Fereastră Tuckey`

Până la versiunea MATLAB 7.04, nu există o funcție care să implementeze fereastră lui Lanczos (4.12). Proiectarea unei astfel de funcții poate constitui un exercițiu util pentru cititor.

Problema PPFTI

Funcția `kaiserord` întoarce parametrii necesari rezolvării (aproximative a) unei probleme PPFTI, cu un apel la `fir1`, utilizând o fereastră Kaiser.

Proiect

Faza 1 (Răspunsurile la impuls și în frecvență ale ferestrelor uzuale)

Considerați cele 9 ferestre descrise anterior, pentru $M = 16$.

- Pentru fereastra lui Cebîșev, se vor alege mai multe valori ale atenuării r , între $80dB$ și $100dB$.
- Pentru fereastra lui Kaiser, se vor alege mai multe valori ale parametrului β , între 0 și $10dB$.
- Pentru fereastra lui Lanczos, se vor alege mai multe valori ale parametrului L , între 0 și 3 .
- Pentru fereastra lui Tuckey, se vor alege mai multe valori ale parametrului α , între 0% și 100% .
- a. Trasați răspunsurile la impuls ale celor 9 ferestre, ca în Figura 4.3, dar cu ajutorul funcției stem. De exemplu, pentru fereastra Hamming, trebuie să executați instrucțiunile :
 - » `w=hamming(M);`
 - » `stem(w);`
- b. Trasați amplitudinile răspunsurilor în frecvență ale ferestrelor de mai sus, ca în Figura 4.4, normând răspunsurile astfel încât amplitudinea la frecvență nulă să fie unitară. De exemplu, pentru răspunsul la impuls w , se pot utiliza instrucțiunile :
 - » `w=w/sum(w); % Normare`
 - » `[W,om]=freqz(w); % Calcul raspuns in frecventa;`

- c. Comentați și comparați proprietățile în frecvență ale ferestrelor. Observați că, în general, lățimea lobului principal și înălțimea lobilor secundari sunt în relație inversă, i.e. un lob principal îngust e însoțit de lobi secundari înalți, iar un lob principal lat apare împreună cu lobi secundari scunzi.

Faza 2 (Filtre proiectate cu diverse ferestre)

- a. Folosind Metoda ferestrei, proiectați FTJ de tip FIR de ordin $M = 16$, cu pulsația de tăiere $\omega_c = 0.4\pi$, folosind toate tipurile de ferestre studiate la tema anterioară. (Puteți utiliza funcția Matlab fir1 sau scrie o funcție echivalentă.) Comparați caracteristicile de frecvență ale filtrelor obținute și evaluați calitățile lor. Observați că răspunsurile cu atenuare mare în banda de trecere au benzi de tranziție largi, iar cele cu benzi de tranziție înguste au atenuări mici.
- b. Alegeți o fereastră și, menținând $\omega_c = 0.4\pi$, măriți ordinul filtrului, de exemplu, la valoarea $M = 24$, apoi la valoarea $M = 32$. Comentați modificările caracteristicii de frecvență.

Faza 3 (Utilizarea Metodei ferestrei pentru rezolvarea PPFTI)

Dorim să rezolvăm o PPFTI, pentru un FTJ. Așadar, se cunosc ω_p , ω_s , Δ_p și Δ_s , cu semnificațiile din Figura 4.2. Folosind Metoda ferestrei, se poate proceda (sub-optimal) astfel :

1. Se aleg ordinul M și frecvența de tăiere ω_c , astfel încât $\omega_p < \omega_c < \omega_s$.
2. Utilizând Metoda ferestrei, cu datele M și ω_c , se proiectează un filtru FIR, H .
3. Se verifică dacă filtrul H satisface cerințele PPFTI. Pentru aceasta, se calculează abaterea maximă de la răspunsul ideal, în benzile de trecere și stopare. De exemplu, presupunând că h este răspunsul la impuls al filtrului, eroarea în banda de trecere $[0, \omega_p]$ este următoarea :
 >> grila_frecv=0 :om_p/1000 :om_p ; % Se generează suficient de multe puncte.
 >> H=freqz(h,1,grila_frecv) ;
 >> Deltab_real=max(abs(1-abs(H))) ;
4. Dacă s-a obținut un filtru valid, se poate încerca găsirea unei soluții de ordin mai mic. Se micșorează M și se reia procedura de la pasul 2.
5. Dacă nu s-a obținut niciun filtru valid, se poate amenda procedura prin creșterea ordinului filtrului și/sau modificarea pulsației de tăiere ω_c și/sau alegerea unei alte ferestre. Cu aceste schimbări, se reia procedura de la pasul 2.

- a. Scrieți o funcție MATLAB care primește ca argumente răspunsul la impuls al unui filtru FIR și frecvențele ω_p , ω_s , definind benzile de trecere, respectiv stopare ale unui FTJ. Funcția va întoarce abaterile maxime Δ_p și Δ_s în benzile de trecere, respectiv stopare.
- b. Folosind algoritmul sugerat mai sus și funcția scrisă la punctul a, proiectați un FTJ de tip FIR care să rezolve PPFTI, cu $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.5\pi$, $\Delta_p = 0.05$ și $\Delta_s = 0.05$. (Scrieți un program care să proiecteze un singur filtru, dându-se M , ω_c și tipul ferestrei. Modificați "manual" argumentele, în căutarea unei soluții mai bune.)

Faza 4 (Concurs de proiectare)

Plecând de la datele unei PPFTI (i.e. ω_p , ω_s , Δ_p și Δ_s), se dorește găsirea *celui mai bun* FTJ de tip FIR. *Acesta trebuie să aibă ordinul cel mai mic*. La ordine egale, câștigă filtrul cu abateri mai mici de la răspunsul ideal (mai precis, cel pentru care valoarea $\Delta_p + \Delta_s$ este mai mică).

Faza 5 <opțională> (Un filtru nestandard)

Utilizând metoda ferestrei, proiectați un filtru FIR cu $M = 20$, pornind de la răspunsul ideal :

$$H_{id} \left(e^{j\omega} \right) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & , \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases} . \quad (4.14)$$