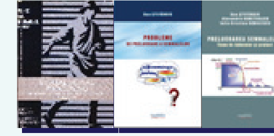
❽ Algoritmi evoluați de tip FFT

❽.❸ Algoritmi FFT compoziți, de tip Cooley-Tukey



Nu se poate renunța la condiția ca durata semnalului original să fie o putere a lui 2?

Noi algoritmi de tip FFT: **Cooley-Tukey**

Într-adevăr, anumite aplicații necesită **conservarea duratei semnalului de intrare**, chiar dacă nu este exprimată ca o putere a lui 2.

$x \in \mathcal{S}_{dN}$ → Exprimare a duratei sub forma unui **număr compozit**

divizorul principal

$$N = P_1 P_2 \cdots P_L$$

(descompunere în factori primi)
(nu neapărat ordonați crescător sau descrescător)

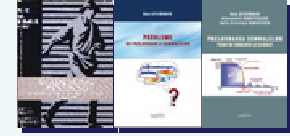
Ideea lui Cooley & Tukey ⇒ Pentru a reduce dimensiunea TFD, se poate aplica **Teorema Împărțirii cu Rest (TIR).**

$$N = P_1 \underbrace{P_2 \cdots P_L}_{Q_1} = P_1 \cdot Q_1$$

$n = qP_1 + p \in \overline{0, N-1}$, unde: $q \overset{def}{=} \left\lfloor \dfrac{n}{P_1} \right\rfloor \in \overline{0, Q_1 - 1}$; $p \overset{def}{=} n \% P_1 \in \overline{0, P_1 - 1}$

$k = lQ_1 + m \in \overline{0, N-1}$, unde: $l \overset{def}{=} \left\lfloor \dfrac{k}{Q_1} \right\rfloor \in \overline{0, P_1 - 1}$; $m \overset{def}{=} k \% Q_1 \in \overline{0, Q_1 - 1}$

☝ Algoritmul de descompunere a unui număr natural în factori primi implementează **Metoda („ciurului") lui Eratostene.**



❽.❸ Algoritmi FFT compoziți, de tip Cooley-Tukey

După principiul segmentării în timp

$$\mathrm{TFD}_N(x)[k] \overset{def}{=} X[k] \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w_N^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

$$n = qP_1 + p \in \overline{0, N-1}$$, unde: $$q \overset{def}{=} \left\lfloor \frac{n}{P_1} \right\rfloor \in \overline{0, Q_1 - 1}, \quad p \overset{def}{=} n\%P_1 \in \overline{0, P_1 - 1}$$

TIR

$$X[k] = \sum_{p=0}^{P_1-1}\sum_{q=0}^{Q_1-1} x[qP_1 + p]w_N^{k(qP_1+p)} = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \sum_{q=0}^{Q_1-1} x[qP_1 + p]w_N^{kqP_1} = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \sum_{q=0}^{Q_1-1} x[qP_1 + p]w_{\cancel{P_1}Q_1}^{kq\cancel{P_1}}$$

$$= \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \sum_{q=0}^{Q_1-1} \underbrace{x[qP_1 + p]}_{x_p[q]} w_{Q_1}^{kq} = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \sum_{q=0}^{Q_1-1} x_p[q]w_{Q_1}^{kq} = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \boxed{\sum_{q=0}^{Q_1-1} x_p[q]w_{Q_1}^{q(k\%Q_1)}}, \quad \forall k \in \overline{0, N}$$

segment de semnal temporal

$$w_{Q_1}^{kq} = w_{Q_1}^{q(lQ_1+m)} = w_{\cancel{Q_1}}^{ql\cancel{Q_1}} w_{Q_1}^{qm} = w_{Q_1}^{qm} = w_{Q_1}^{q(k\%Q_1)}$$

$$k = lQ_1 + m \in \overline{0, N-1}$$, unde: $$l \overset{def}{=} \left\lfloor \frac{k}{Q_1} \right\rfloor \in \overline{0, P_1 - 1}, \quad m \overset{def}{=} k\%Q_1 \in \overline{0, Q_1 - 1}$$

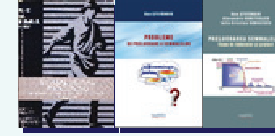
TIR

$$\mathrm{TFD}_{Q_1}(x_p)[k\%Q_1] \overset{def}{=} X_p[k\%Q_1] \overset{def}{=} \sum_{q=0}^{Q_1-1} x_p[n]w_{Q_1}^{q(k\%Q_1)}, \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

☝ **Dimensiunea transformatei a scăzut de P_1 ori.**

$$\mathrm{TFD}_{P_1Q_1}(x)[k] = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp}\, \mathrm{TFD}_{Q_1}(x_p)[k\%Q_1], \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

❽.❸ Algoritmi FFT compoziți, de tip Cooley-Tukey



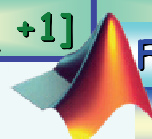
Cum pot fi descrise segmentele semnalului temporal?

Semnalul de intrare se poate **aranja într-o matrice** cu P_1 coloane și Q_1 linii.

indice de segment p

indice temporal q

x[0]	x[1]	...	x[p]	...	$x[P_1-1]$
$x[P_1]$	$x[P_1+1]$	...	$x[P_1+p]$	...	$x[2P_1-1]$
...	...	...	...	...	...
$x[qP_1]$	$x[qP_1+1]$	...	$x[qP_1+p]$	...	$x[(q+1)P_1-1]$
...	...	...	...	...	...
$x[(Q_1-1)P_1]$	$x[(Q_1-1)P_1+1]$		$x[(Q_1-1)P_1+p]$	...	$x[Q_1P_1-1]$



Funcție utilă
reshape

☝ Segment de semnal temporal.

- Fiecare segment de semnal este reprezentat într-un **vector coloană**.
- Durata oricărui segment de semnal este de asemenea un **număr compozit**.

$$Q_1 = P_2 \cdots P_L$$

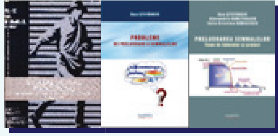
TFD a fiecărui segment se poate exprima cu ajutorul a P_2 transformate de ordin $Q_2 = P_3 \ldots P_L$.

- Procedeul recursiv se opreşte la **ultimul număr prim** (P_L), pentru care **TFD** se evaluează **folosind definiția**.

$$P_L = \min\{P_1, P_2, \cdots, P_L\}$$

(pentru a reduce efortul de calcul)

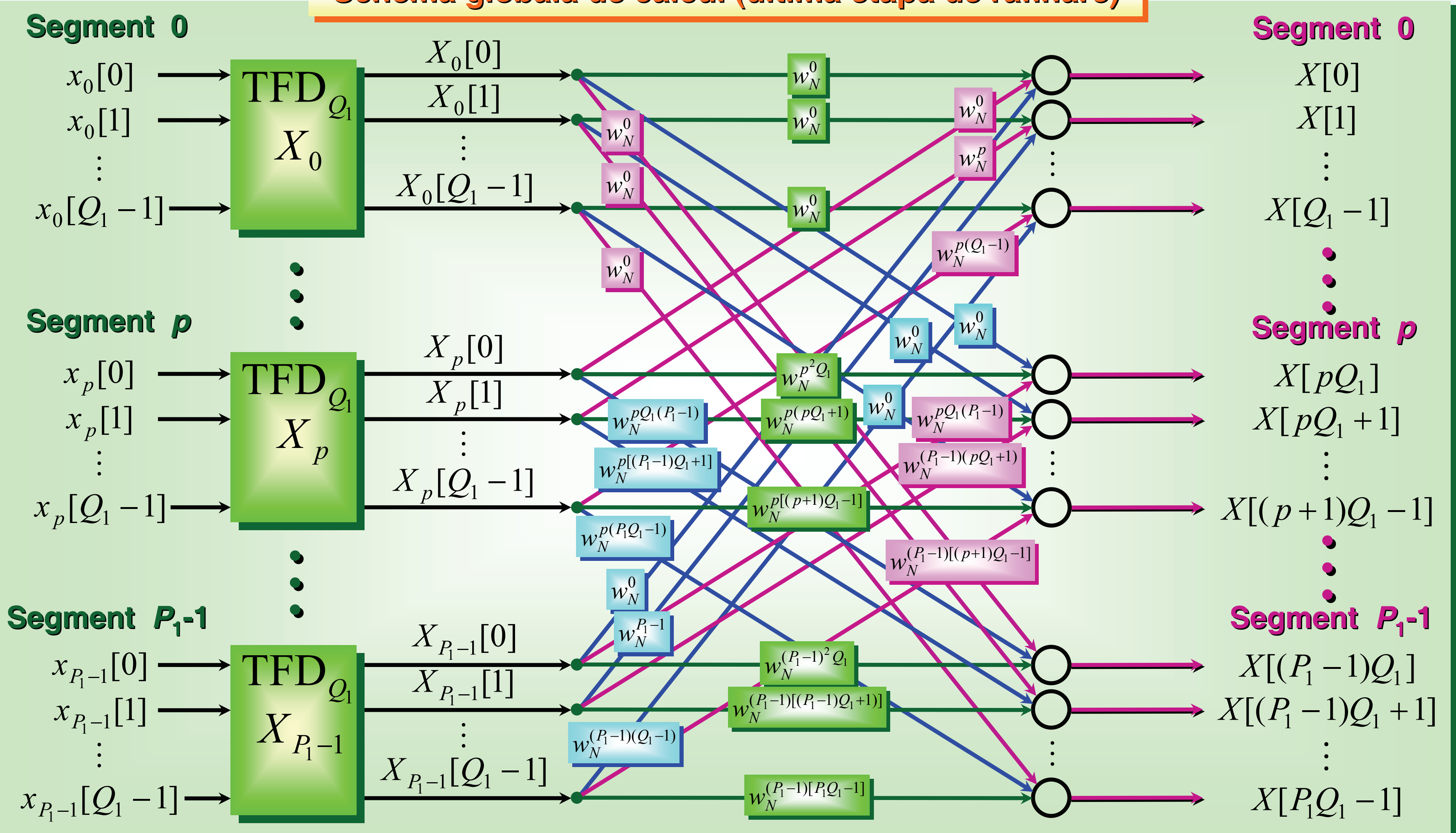
❽.❸ Algoritmi FFT compoziți, de tip Cooley-Tukey



☹ semnal rearanjat

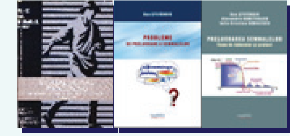
Schema globală de calcul (ultima etapă de rafinare)

semnal normal ☺



☝ **În funcție de valorile factorilor primi, efortul de calcul poate fi redus prin exploatarea proprietății de simetrie a armonicelor elementare.**

❽.❸ Algoritmi FFT compoziți, de tip Cooley-Tukey



$$\mathrm{TFD}_{P_1Q_1}(x)[k] = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp}\,\mathrm{TFD}_{Q_1}(x_p)[k\%Q_1] \qquad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

Cooley-Tukey compozit-timp

Efortul de calcul al Algoritmilor Cooley-Tukey compoziți.

$$\mathcal{O}_{CT}[N] = \mathcal{O}_{CT}[P_1Q_1] = P_1\mathcal{O}_{CT}[Q_1] + N[4P_1]_\bullet + N[2(2P_1-1)]_+$$

(relație recursivă)

$N = P_1Q_1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{CT}[N] = \mathcal{O}_{CT}[P_1Q_1] &= P_1\left(\mathcal{O}_{CT}[Q_1] + Q_1[4P_1]_\bullet + Q_1[2(2P_1-1)]_+\right) = \\
&= P_1\left(P_2\mathcal{O}_{CT}[Q_2] + Q_1[4P_2]_\bullet + Q_1[2(2P_2-1)]_+\right) + N[4P_1]_\bullet + N[2(2P_1-1)]_+ = \\
&= P_1P_2\mathcal{O}_{CT}[Q_2] + N[4(P_1+P_2)]_\bullet + N[2(2P_1+2P_2-2)]_+ = \cdots = \\
&= P_1\cdots P_{L-1}\boxed{\mathcal{O}_{TFD}[P_L]} + N\left[4\sum_{i=1}^{L-1}P_i\right]_\bullet + N\left[2\left(2\sum_{i=1}^{L-1}P_i - L + 1\right)\right]_+
\end{aligned}$$

inducție matematică

$$\mathcal{O}_{TFD}[P_L] = [4P_L^2]_\bullet + [2P_L(2P_L-1)]_+$$

$$\mathcal{O}_{CT}[N] = 4N\left[\sum_{i=1}^{L}P_i\right]_\bullet + 2N\left[\left(2\sum_{i=1}^{L}P_i - L\right)\right]_+ \sim 4\left(\prod_{i=1}^{L}P_i\right)\left(\sum_{i=1}^{L}P_i\right)$$

☞ **Inferior lui $4N^2$.**

$N = P^L \Rightarrow \mathcal{O}_{CT}[P^L] \sim 4LP^{L+1} = 4PN\log_P N$

$N = 2^L \Rightarrow \mathcal{O}_{CT}[N] \sim 8N\log_2 N$

Funcții utile

`fft`

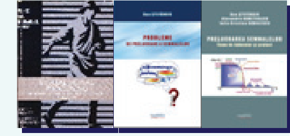
`fft2`

`fftshift`

Exercițiu

- Descrieți **Algoritmul Cooley-Tukey compozit, cu segmentare în frecvență.**

De această dată, semnalul frecvențial trebuie aranjat într-o matrice, în timp ce semnalul temporal nu necesită rearanjare.



❽.❹ Implementări RADIX ale algoritmilor FFT compoziți

- Decada 1970-1980 a înregistrat o intensă activitate de proiectare a algoritmilor compoziți bazați pe ideea lui Cooley & Tukey.

Algoritmi FFT-RADIX

Denumire sugerată de Limbajul FORTRAN, care indică divizorul principal sau baza duratei (în cazul factorizării de tipul P^L).

$N = P^L$ sau $N \in P\mathbb{N}$ ⇒ **Algoritm FFT-RADIX*P***

- Cei mai populari algoritmi FFT compoziți: RADIX3, RADIX4, RADIX16, RADIX32, RADIX64.
- Exemplele care urmează: RADIX3 & RADIX4.

Exemplul 1 Algoritmul compozit FFT-RADIX3 $N = 3^L$ sau $N = 3M \in 3\mathbb{N}$

$$\mathrm{TFD}_{3M}(x)[k] = \sum_{p=0}^{2} w_{3M}^{kp}\, \mathrm{TFD}_M(x_p)[k\%M] \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

Cooley-Tukey compozit-timp

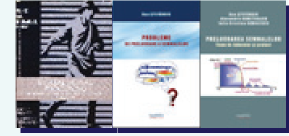
$$\mathrm{TFD}_M(x_p)[k] \overset{def}{=} X_p[k] \overset{def}{=} \sum_{m=0}^{M-1} \underbrace{x[3m+p]}_{x_p[m]} w_M^{mk} \quad \forall k \in \overline{0, M-1} \quad \forall p \in \overline{0,2}$$

$$\begin{cases} TFD_{3M}(x)[k] = X[k] = w_{3M}^{0} X_0[k] + w_{3M}^{k} X_1[k] + w_{3M}^{2k} X_2[k] \\ TFD_{3M}(x)[M+k] = X[M+k] = w_{3M}^{0} X_0[k] + w_3^1 w_{3M}^{k} X_1[k] + w_3^2 w_{3M}^{2k} X_2[k] \\ TFD_{3M}(x)[2M+k] = X[2M+k] = w_{3M}^{0} X_0[k] + w_3^2 w_{3M}^{k} X_1[k] + w_3^1 w_{3M}^{2k} X_2[k] \end{cases} \quad \forall k \in \overline{0, M-1}$$

$\overline{w_3^1}$ (simetrie)

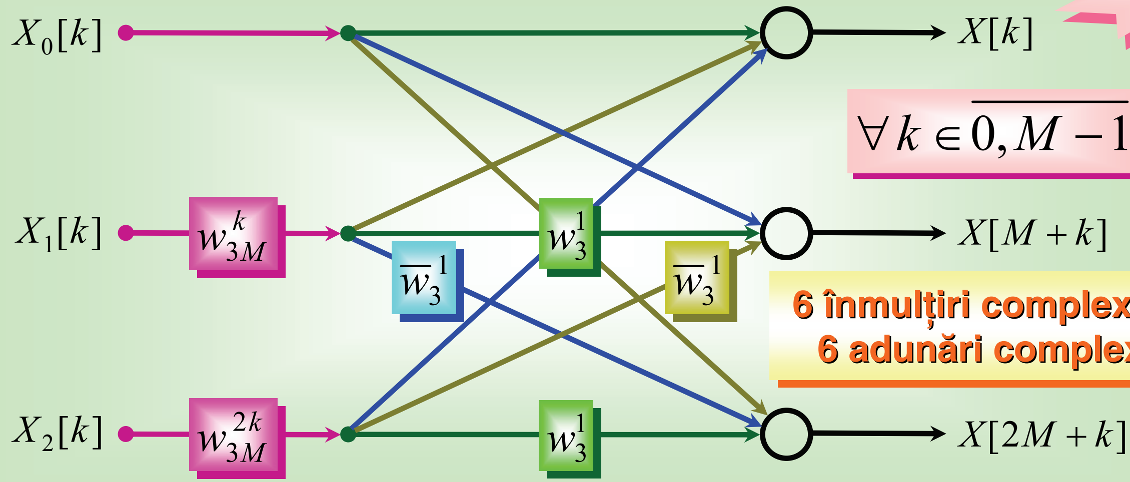
❽ Algoritmi evoluați de tip FFT

❽.❹ Implementări RADIX ale algoritmilor FFT compoziți



Exemplul 1 — **Algoritmul compozit FFT-RADIX3 (final)**

Blocul de calcul paralel



6 înmulțiri complexe & 6 adunări complexe

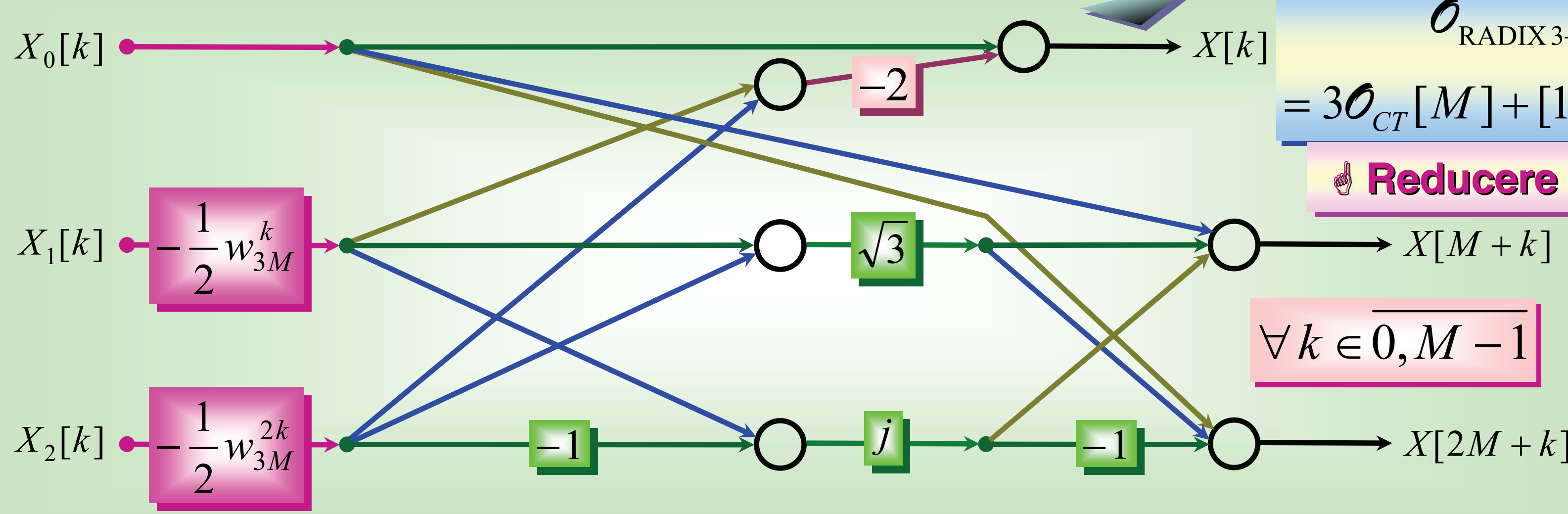
"butterfly"

$$\mathcal{O}_{\text{atomic}}^{\text{RADIX3}} = [24]_{\bullet} + [24]_{+}$$

$$\mathcal{O}_{\text{RADIX3}}[3M] = 3\mathcal{O}_{CT}[M] + [24M]_{\bullet} + [24M]_{+}$$

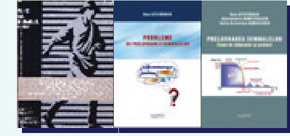
☝ **Efortul de calcul poate fi redus prin exploatarea totală a simetriei armonicei interioare.**

$$w_3^1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$$



$$\mathcal{O}_{\text{RADIX3+}}[3M] = 3\mathcal{O}_{CT}[M] + [12M]_{\bullet} + [20M]_{+}$$

☝ **Reducere de peste 2 ori.**



❽.❹ Implementări RADIX ale algoritmilor FFT compoziți

Exemplul 2 — **Algoritmul compozit FFT-RADIX4**

$N = 4^L$ **sau** $N = 4M \in 4\mathbb{N}$

$$\mathrm{TFD}_{4M}(x)[k] = \sum_{p=0}^{3} w_{4M}^{kp}\, \mathrm{TFD}_M(x_p)[k\% M] \qquad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

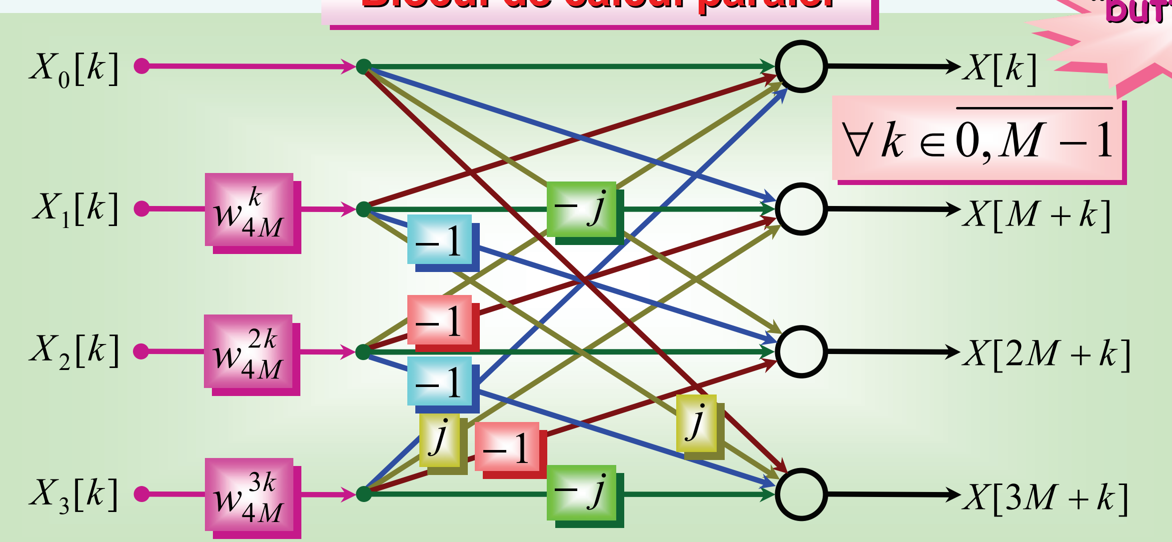
$$\mathrm{TFD}_M(x_p)[k] \overset{def}{=} X_p[k] \overset{def}{=} \sum_{m=0}^{M-1} \underbrace{x[4m+p]}_{x_p[m]} w_M^{mk} \qquad \forall k \in \overline{0, M-1} \quad \forall p \in \overline{0,3}$$

Cooley-Tukey compozit-timp

$$w_4^k = (-j)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} TFD_{4M}(x)[k] = X[k] = w_{4M}^0 X_0[k] + w_{4M}^k X_1[k] + w_{4M}^{2k} X_2[k] + w_{4M}^{3k} X_3[k] \\ TFD_{4M}(x)[M+k] = X[M+k] = w_{4M}^0 X_0[k] + w_4^1 w_{4M}^k X_1[k] + w_4^2 w_{4M}^{2k} X_2[k] + w_4^3 w_{4M}^{3k} X_3[k] \\ TFD_{4M}(x)[2M+k] = X[2M+k] = w_{4M}^0 X_0[k] + w_4^2 w_{4M}^k X_1[k] + w_4^0 w_{4M}^{2k} X_2[k] + w_4^2 w_{4M}^{3k} X_3[k] \\ TFD_{4M}(x)[3M+k] = X[3M+k] = w_{4M}^0 X_0[k] + w_4^3 w_{4M}^k X_1[k] + w_4^2 w_{4M}^{2k} X_2[k] + w_4^1 w_{4M}^{3k} X_3[k] \end{cases} \quad \forall k \in \overline{0, M-1}$$

Blocul de calcul paralel



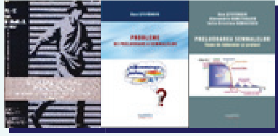
"butterfly"

3 înmulțiri complexe & 12 adunări complexe

$$\mathcal{O}_{\text{atomic}}^{\text{RADIX4}} = [12]_{\bullet} + [30]_{+}$$

$$\mathcal{O}_{\text{RADIX4}}[4M] = 4\mathcal{O}_{CT}[M] + [12M]_{\bullet} + [30M]_{+}$$

❾ Noţiuni de eşantionare şi interpolare



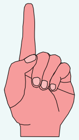
- O parte dintre semnalele practice (cauzale şi stabile) sunt generate cu ajutorul operaţiei de eşantionare.

☞ Problema eşantionării corecte

- Fie un semnal continual generat de un sistem cauzal şi stabil. Pentru a prelucra informaţia transportată de acesta, se utilizează un semnal discret obţinut prin eşantionare. Se cere să se precizeze regulile după care trebuie efectuată eşantionarea astfel încît semnalul discret rezultat să conserve sau să distorsioneze în manieră minimală informaţia originală.

- Valorile semnalului continual între momentele consecutive de eşantionare se pierd.

☝ Aceasta nu conduce în mod automat la pierderea de informaţie.



Semnalele continuale pot prezenta un anumit grad de redundanţă.

- Pentru reconstituirea valorilor pierdute, se poate apela la operaţia (duală) de interpolare.

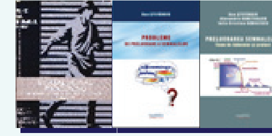
☺ Prin eşantionare, valorile redundante pot fi înlăturate.

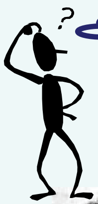
☹ Pot fi însă înlăturate şi valori importante în codificarea informaţiei, dacă operaţia nu este efectuată corect.

☜ Problema interpolării (exacte)

- Fie un semnal discret, eventual obţinut prin eşantionarea unui semnal continual. Se cere să se precizeze o procedură de interpolare cu ajutorul căreia să poată fi recuperată parţial sau integral informaţia pierdută prin eşantionare.

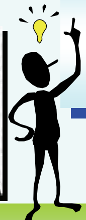
❾ Noțiuni de eşantionare şi interpolare





De unde se poate pleca pentru a rezolva problema eşantionării corecte?

Reprezentările lui Fourier ar putea constitui un punct de plecare.



Ideea lui FOURIER

Orice semnal poate fi considerat ca o suprapunere aditivă de semnale atomice "monofrecvențiale", de diferite amplitudini, numite armonice elementare.

\+

Proprietatea lui Parseval pentru semnale de bandă finită

Seria Fourier se poate trunchia

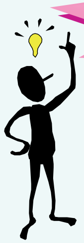
$$f(t) \overset{\text{apt}}{=} \tilde{f}(t) \cong \sum_{k=0}^{K} \mathcal{A}_k(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

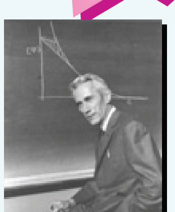
Există o armonică elementară de pulsație/perioadă maximă/minimă.

$$\mathcal{A}_K(t) = a_K \cos\left(K\pi F_c t\right) + b_K \sin\left(K\pi F_c t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

frecvența de tăiere
(lărgimea de bandă a semnalului continual)

Ideea lui Shannon

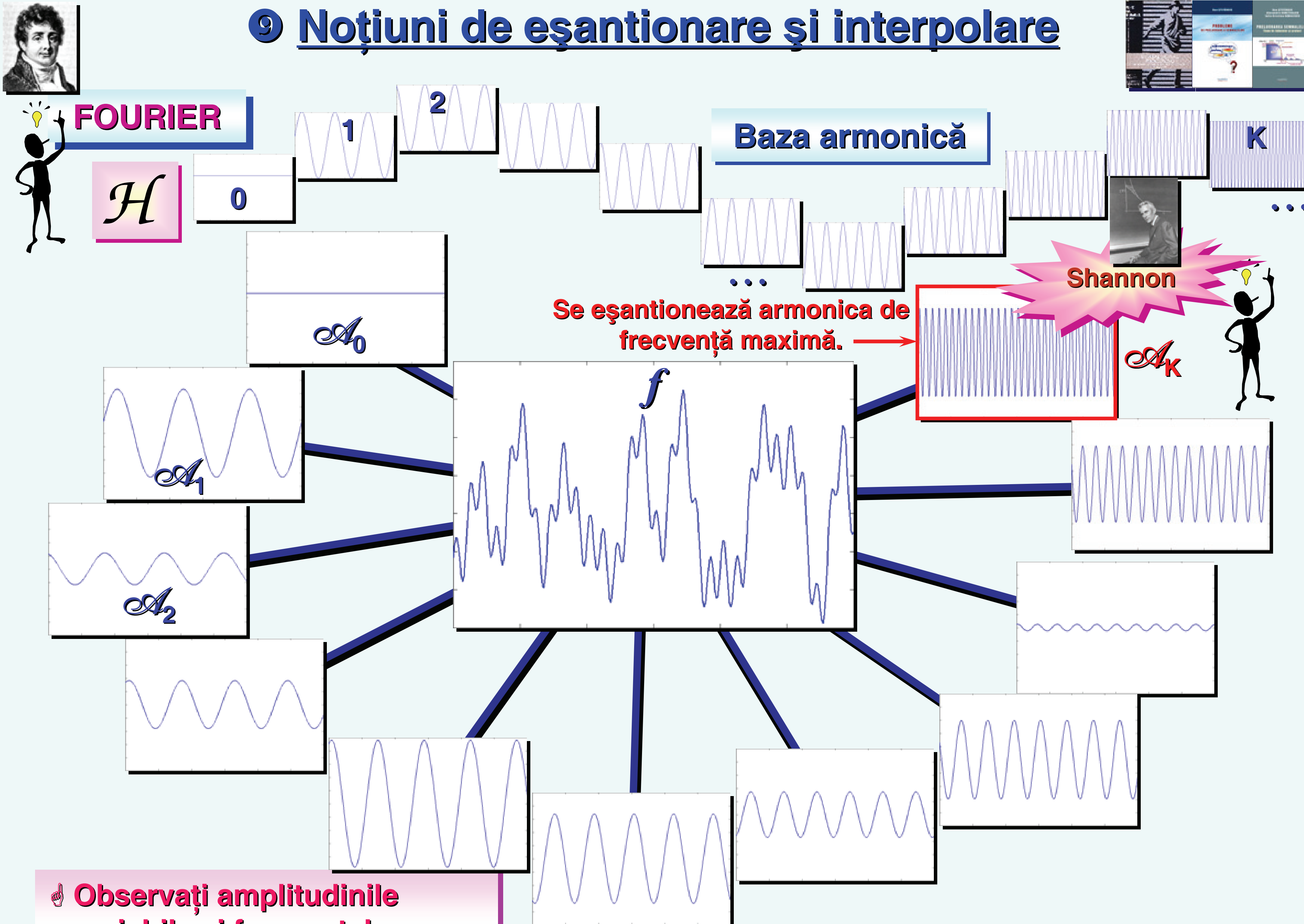




Dacă armonica cea mai rapid oscilantă este eşantionată corect, atunci întreaga Serie Fourier (trunchiată) va fi eşantionată corect.

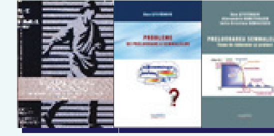
☝ Adică informația armonicelor inferioare se conservă.

➒ Noţiuni de eşantionare şi interpolare



☝ Observaţi amplitudinile variabile şi frecvenţele crescătoare ale armonicelor.

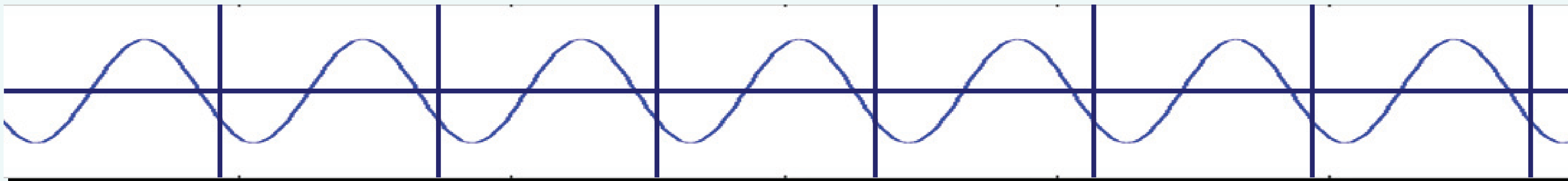
❾ Noţiuni de eşantionare şi interpolare



Cum poate fi eşantionată o armonică fără a pierde informaţie?

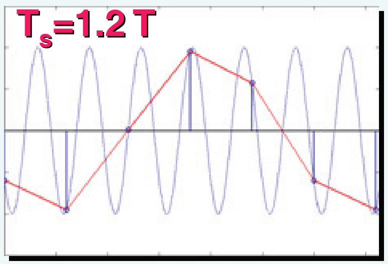
Cazul $\frac{T_s}{T} \in \mathbb{Q}$

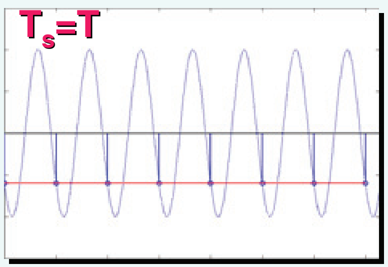
☝ Cazul iraţional este neinteresant practic.

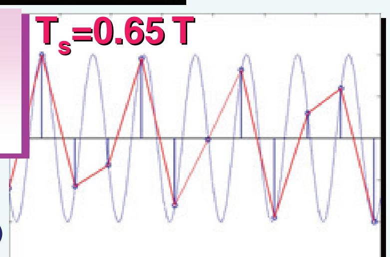


3 cazuri de bază

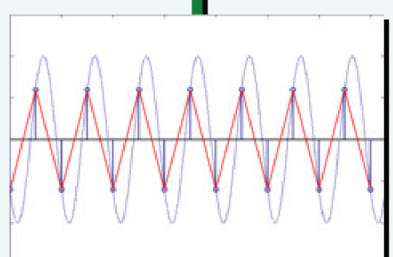
$T_s > \frac{T}{2}$



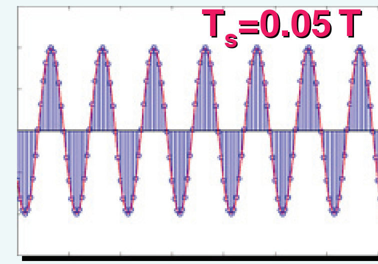


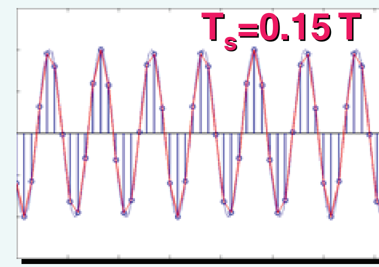


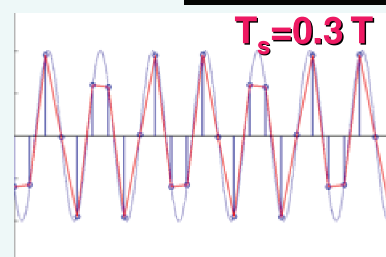
$T_s = \frac{T}{2}$



$T_s < \frac{T}{2}$





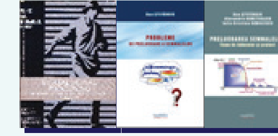


☝ Semnalul eşantionat este întotdeauna periodic.

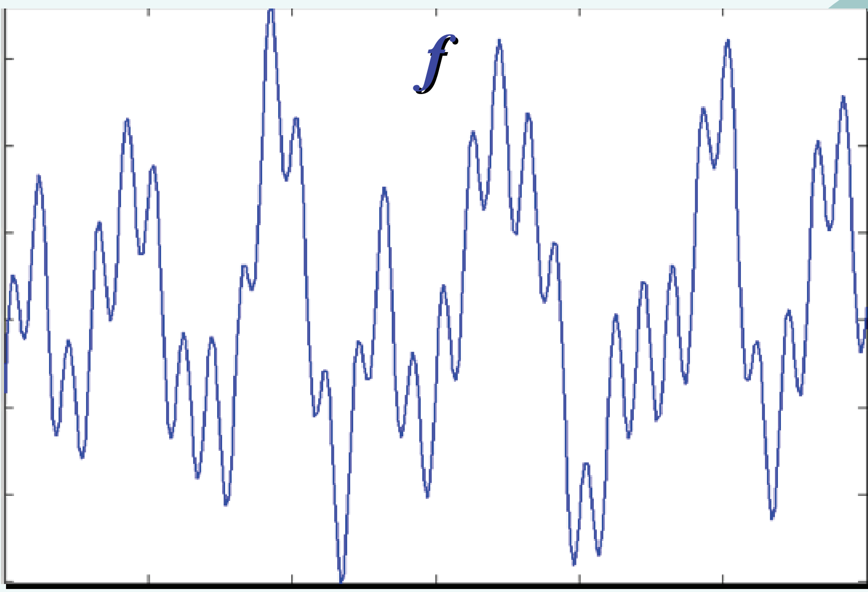
Perioada?

Exerciţiu

❾ Noţiuni de eşantionare şi interpolare

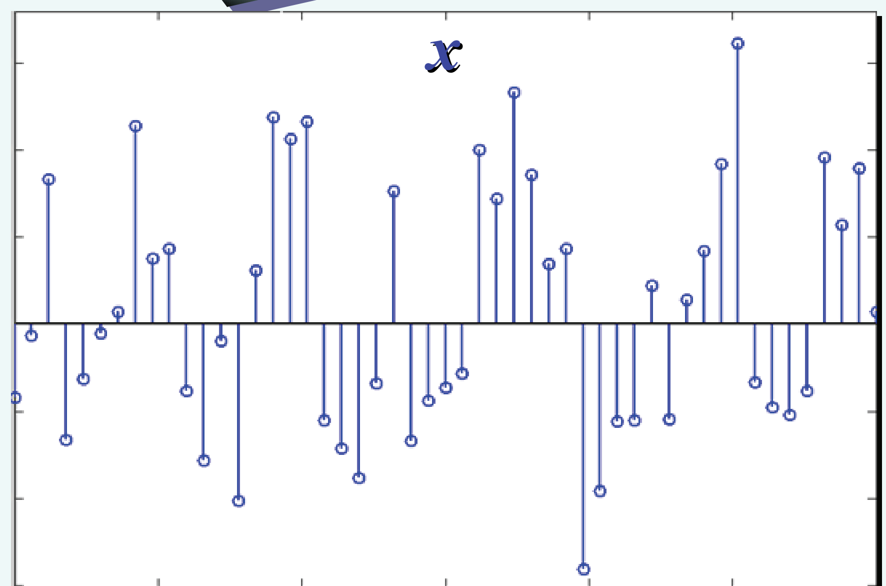


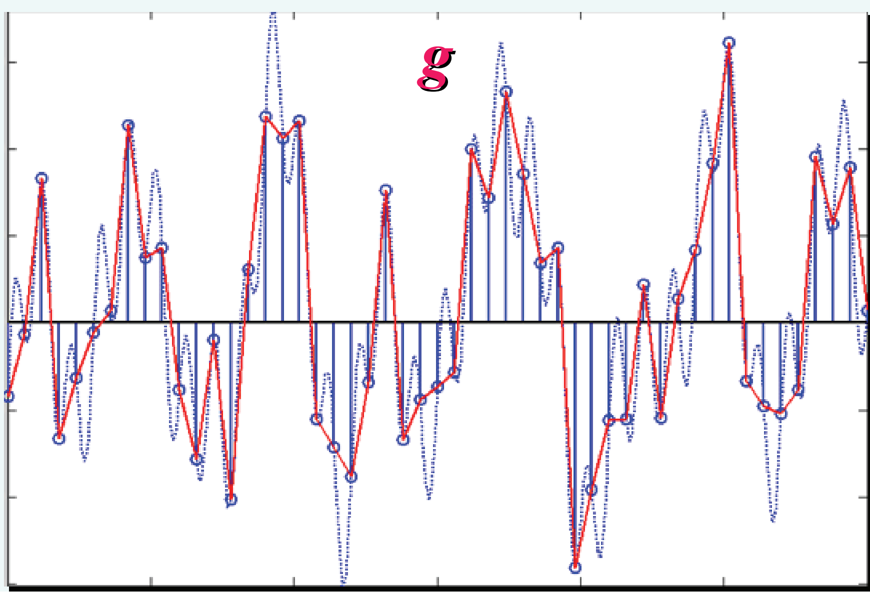
- Termenii de **eşantionare** şi **interpolare** sunt duali, dar, în general, **nu reprezintă operaţii inverse una alteia**.



Eşantionare

Rezultat determinat numai de valoarea **perioadei de eşantionare**.

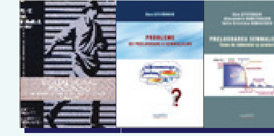


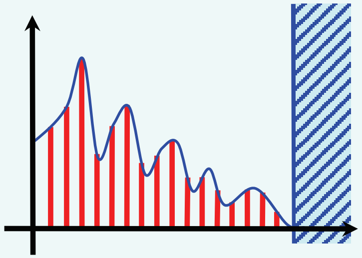


Interpolare

Rezultat determinat în mod sensibil de **metoda de interpolare**.

❾ Noţiuni de eşantionare şi interpolare





Scurt istoric

☝ Mai multe detalii se găsesc în Anexa G.

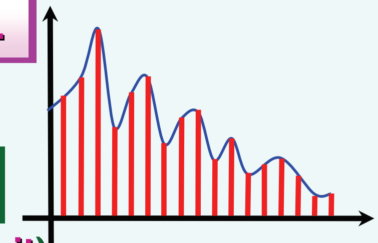
Există două mari categorii de semnale ce pot fi analizate

De bandă limitată

(cu suport temporal infinit)

- Analiza clasică.

↑ Acest curs se concentrează pe semnalele de bandă limitată.

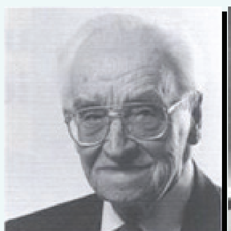


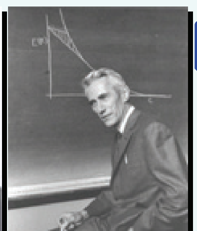
De bandă nelimitată

(cu suport temporal eventual finit)

- Analiza modernă.

☝ Deşi semnalele practice au suport temporal finit, deci sunt de bandă nelimitată.





✵ Semnalele *"esenţial localizate simultan în timp şi frecvenţă"*.

- Analiza clasică este adesea aplicată şi acestor semnale.

Semnal şi spectru cu valori neglijabile în afara unor suporturi compacte / finite.

☞ **V. Kotel'nikov & C. Shannon**

(Rusia) (SUA)

(1933) Al doilea rezultat important de eşantionare-interpolare, legat de comportamentul în frecvenţă al semnalelor.

- Deşi Teorema lui Vallée Poussin sugerează definirea momentelor de eşantionare cu ajutorul conceptului de pulsaţie, ea este interpretată mai mult ca un rezultat de interpolare, adică în domeniul timpului.

$$\mathscr{T}_m \stackrel{def}{=} \left\{ t_k \stackrel{def}{=} \frac{k\pi}{m} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

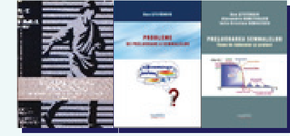
Vallée Poussin

$$\mathscr{O}_N \stackrel{def}{=} \left\{ \omega_k^N \stackrel{def}{=} \frac{2k\pi}{N} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

Fourier

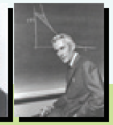
- Teorema lui Kotel'nikov & Shannon (enunţată în pagina următoare) constituie un rezultat de eşantionare efectivă, analiza desfăşurîndu-se în domeniul frecvenţei, deşi el este formulat tot ca un rezultat de interpolare.

❾ Noţiuni de eşantionare şi interpolare



Scurt istoric (final)

Teorema 4 (Kotel'nikov-Shannon)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un semnal continual absolut integrabil (stabil), de energie finită şi bandă limitată, inclusă în intervalul $[-\Omega_c,+\Omega_c]$, unde $\Omega_c>0$ este o pulsație fixată.

Se **eşantionează** semnalul continual folosind următoarea mulțime de momente:

$$\mathscr{T} \overset{def}{=} \left\{ t_k \overset{def}{=} \frac{k\pi}{\Omega_c} \right\}_{k\in\mathbb{Z}} .$$

Atunci, se poate verifica următoarea **formulă de interpolare exactă**:

$$f(t) \overset{\text{PC}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t_k)\frac{\sin(\Omega_c t - k\pi)}{\Omega_c t - k\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t_k)\,\mathrm{Sc}(\Omega_c t - k\pi) \quad , \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

☝ Acelaşi nucleu de interpolare ca în Teorema lui Vallée Poussin.

(deşi cu alt argument, a se vedea Anexa G)

Demonstrație
- ➔ Lucrările originale ale celor 2 cercetători.
- ➔ Similară Teoremei G1, dar mai laborioasă.

- În mulțimea momentelor de eşantionare apare acum explicit **pulsația de tăiere**. Ω_c
- De această dată, interpolatorul construit în teoremă este **unic** şi **exact**.
- Formula de interpolare este doar **teoretică**, deoarece suma este **infinită** (şi punctual convergentă).
  - ➔ Ar putea avea un număr finit de termeni dacă semnalul ar avea **suport compact**.

☝ Semnalul nu poate avea suport compact, deoarece este de bandă limitată.