Traitement de signal

Définitions

- **Signal** : représentation physique de l'information qu'il transporte. Manifestation physique d'une grandeur mesurable.
- **Bruit**: phénomène perturbateur qui gêne la perception ou l'interprétation d'un signal.
- **Théorie du signal**: description mathématique du signal qui permet de mettre en évidence ses principales caractéristiques.
- **Traitement du signal**: discipline technique basée sur l'électronique, l'informatique et la physique appliquée qui a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux.
- **Traitement de l'information**: ensemble de concepts pour évaluer les performances des systèmes de transfert d'informations (codage, correction d'erreurs, cryptage, …).

Les principales fonctions d'un DSP sont : - L'élaboration des signaux (modulation, codage)
- L'interprétation des signaux (filtrage, analyse,…)

Chapitre 1 : Représentation des signaux analogiques

Un signal est une grandeur physique et donc réalisable.
Il possède plusieurs caractéristiques :

- Énergie $<\infty$
- Amplitude $<\infty$
- Continu temporellement
- Causal : $s(t) = 0$ pour $t < 0$

Un spectre du signal borné tend vers 0 quand la fréquence tend vers l'infini. On utilise des fonctions pour la facilité.

Classification des signaux

1. Représentation temporelle

Signaux certains ou déterministes dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique.
Signaux aléatoires dont le comportement temporel est imprévisible (ex : bruit).

2. Classification énergétique

La puissance d'un courant électrique d'intensité I dans une résistance R.
$S(t)^2$ représente la puissance instantanée d'un signal.
La puissance moyenne : est l'énergie E délivrée par un phénomène divisée par la durée τ de ce phénomène.

a. Signal à énergie finie : s'applique aux signaux transitoires.
b. Signal à puissance finie : s'applique aux signaux périodiques ou quasi-périodiques.

3. Classification spectrale

Un signal peut être classé suivant la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence. La largeur de bande d'un signal est le domaine des fréquences occupé par son spectre.
$\Delta F = Fmax - Fmin$
La fréquence moyenne : $\frac{Fmax+Fmin}{2}$

4. Les signaux numériques

Un signal numérisé est un signal qui est passé du domaine des temps et amplitudes continus au domaine des temps et amplitudes discrets. On va échantillonné et quantifié.

Chapitre 2 : Transformée de Fourier

Un nombre complexe est constitué d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Son **module** est définit comme la racine ² de la somme des carrés des parties réelles et imaginaire. Son **argument** est définit comme la tangente inverse de la partie imaginaire sur la partie réelle.

Exemple : a = 3+2j

Modulo : $|a| = \sqrt{3^2} + \sqrt{2^2} = \sqrt{13}$

Argument : $\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

Binôme conjugué $\bar{a} = 3 - 2j$

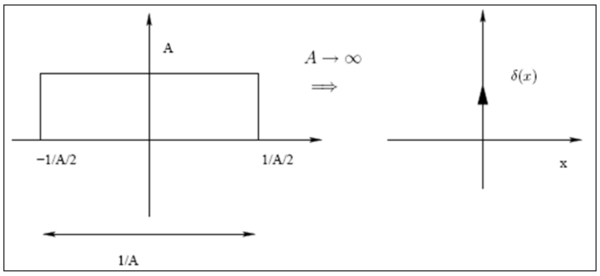
Formules :

$$e^{jx} = \cos(x) + jsin(x) \qquad \cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

$$e^{-jx} = \cos(x) - jsin(x) \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

Une distribution de Dirac $\delta(x)$ est une distribution qui prend une valeur infinie en 0 et qui vaut 0 partout ailleurs et dont l'intégral sur R vaut 1

Ici le poids de la distribution de Dirac vaut 1.



La représentation unilatérale

Les coefficients a_1 et b_1 représente la fréquence fondamentale et les coefficients a_n et b_n représentes des harmoniques.
La représentation unilatérale est répartie sur un axe de cosinus pour les coefficients a_1 et sur un axe de sinus pour les coefficients b_1.

a. Pour la fonction cosinus $s(t) = \cos(2\pi F_0 t)$: tous les coefficients sont à nuls à l'exception de $a_1 = 1$.
b. Pour la fonction sinus $s(t) = \sin(2\pi F_0 t)$: tous les coefficients sont à nuls à l'exception de $b_1 = 1$.
c. Pour les autres fonctions périodiques : $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\cos(2\pi f t)dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\sin(2\pi f t)dt$$

La représentation bilatérale

La représentation bilatérale est répartie soit un axe réel et un axe imaginaire, soit sur un axe de module et un axe d'angle.
Des fréquences négatives apparaissent puisque le signal réel est la somme d'un signal complexe de fréquence positive et d'un signal complexe de fréquence négative.

a. Pour la fonction cosinus $s(t) = \cos(2\pi F_0 t)$: tous les coefficients sont à nuls à l'exception de $c_{-1} = \frac{1}{2}$ et $c_0 = 0$ et $c_1 = \frac{1}{2}$
b. Pour la fonction sinus $s(t) = \sin(2\pi F_0 t)$: tous les coefficients sont à nuls à l'exception de $c_{-1} = \frac{-1}{2j} = \frac{j}{2}$ et $c_1 = \frac{1}{2j} = \frac{-j}{2}$

Spectre bilatéral de la puissance d'un cosinus : $\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt$

Généralisation du théorème de Fourier

Transformée de Fourier :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

Transformée inverse de Fourier :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi f t}df$$

La donnée d'un signal est équivalente à la donnée d'un spectre.

Transformée de Fourier de la fonction porte

Voir les exercices réalisés la dessus.
On obtient la fonction sinus cardinal. Donc, un signal d'une durée τ se situera dans une bande de fréquence de largeur 1/ τ

- Signal ou τ est grand → bande de fréquence étroite
- Signal ou τ est petit → bande de fréquence large

La durée d'un signal a une influence sur son spectre !

Transformée de Fourier de la distribution de Dirac

Voir les exercices effectués.
Le spectre de la distribution de Dirac est une fonction de fréquence constante et unitaire. Un signal de courte durée aura un spectre étalé.

Existence et propriétés

La transformée de Fourier d'un signal existe si l'énergie de celui-ci est finie. Il peut exister des déphasages.

Chapitre 3 : Les systèmes de transmission

Un système de transmission (ST) faire correspondre à un signal d'entrée quelconque un signal de sortie.
Le signal de sortie est fonction du signal d'entrée et des caractéristiques du ST.

$$A_{db} = 10. log_{10}(s(t)/e(t))$$

Le gain en tension : $A_{db} = 20. log_{10}V_s/V_e$

La bande passante à 3dB est la tranche des fréquences pour lesquelles l'affaiblissement de la puissance de sortie, à puissance entrante constante, est inférieur à 3dB par rapport à sa valeur maximale.

Propriétés des systèmes de transmissions

Si $s_1(t)$ est la réponse de $e_1(t)$ et que $s_2(t)$ est la réponse de $e_2(t)$ le ST est **linéaire**.
Le ST est **continu** si les signaux d'entrées tendent vers l'infini et que les signaux de sorties tendent vers l'infini.
Un ST est stationnaire si son comportement est indépendant de l'origine du temps.

Les filtres

Les **filtres** sont définis des ST linéaires, continus et stationnaires.
Une impulsion brève, injectée à l'entrée d'un ST linéaire, continu et stationnaire, ne donne jamais en sortie une impulsion infiniment brève mais un signal de durée finie → c'est la **réponse impulsionnelle** du filtre → h(t).

Convolution

L'opération de convolution (*) exprime la réponse à un signal quelconque à partir de celle à un signal type ; la réponse dépend du filtre caractérisé par h(t) et de l'histoire du signal.

$$d(\tau) = e(t) * h(t)$$

Remarque : le ST doit posséder les trois propriétés L, C, S.
⚠ Démonstration slide 60 à 62

Lest filtres qui sont définis comme des ST linéaires, continus et stationnaires sont des **systèmes de convolution**.
Un filtre atténue ou amplifie les composantes fréquentielles de l'entrée e(t).
Les opérations de convolution sont commutatives, distribuables, associatives et élément neutre (distribution de Dirac).

Le théorème de Plancherel : « La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement ».
Le théorème de Parseval : « L'énergie totale d'un signal de dépend pas de la représentation choisie : temporelle ou fréquentielle ».

Exercice convolution slide 66 à 71

Notion de corrélation

Dans l'opération de convolution, un des signaux est retourné avant la multiplication tandis que dans l'opération de corrélation, il n'y aura pas de retournement.

$$C_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\,y(\tau - t)dr$$

Si les signaux sont identiques, on parle d'autocorrélation notée C_{xx}

Les fonctions de corrélation traduisent la similitude d'un signal ou de deux signaux au niveau de la forme et de la position en fonction du paramètre t. Pour l'autocorrélation, c'est une étude de la ressemblance du processus avec lui-même au cours du temps. L'autocorrélation permettra de détecter la périodicité d'un signal.

Propriétés de l'autocorrélation

- Pour des signaux réels, la fonction d'autocorrélation est paire.
- La fonction d'autocorrélation a sa valeur maximale pour t=0.
- Si x(t) est périodique, la fonction d'autocorrélation possède toutes les fréquences comprises dans le système initial et seulement celles-ci. Elle conserve l'information fréquence mais pas les informations de phase et amplitude.
- L'autocorrélation d'un signal aléatoire est la distribution de Dirac.

Relation avec la densité spectrale

La transformée de Fourier de la fonction de corrélation du signal représente la densité spectrale de l'énergie, càd, la redistribution de l'énergie sur l'axe des fréquences.

Exercice corrélation slide 76 à 83

Chapitre 4 : Filtrage des signaux analogiques

Fenêtrage temporel

C'est l'opération qui consiste à prélever, interrompre ou seulement atténuer un signal. Le signal de sortie est donc le produit du signal d'entrée par la fonction temporelle du filtre. On obtient la modification du spectre par le théorème de Plancherel.
Pour traiter le signal numériquement, celui-ci doit être défini dans le temps. On passe donc le signal dans une fenêtre rectangulaire comme la fonction porte (→ sinc).
Des fréquences inexistantes dans le signal d'entrée apparaissent à cause du fenêtrage temporel.
Il existe différentes fenêtres : la fenêtre rectangulaire, triangulaire, de Hamming, de Blackman,…

Filtrage fréquentiel

C'est l'opération qui consiste à prélever, interrompre ou seulement atténuer tout ou partie des composantes fréquentielles d'un signal. Le filtre est défini par sa réponse impulsionnelle et sa transformée de Fourier $H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{Vout}{Vin}$

Attention question examen de l'année passée

	Action				Réponse
Domaine temporel	$e(t)$	$\rightarrow$	FILTRE (convolution par $h(t)$)	$\rightarrow$	$s(t)$
	$\downarrow$				$\uparrow$
	Transformée de Fourier ou de Laplace				Transformée de Fourier ou de Laplace
	$\downarrow$				$\uparrow$
Domaine fréquentiel	$E(f)$ ou $E(p)$	$\rightarrow$	FILTRE (produit par $H(f)$ ou $H(p)$)	$\rightarrow$	$S(f)$ ou $S(p)$

Démonstration slide 95 à 99

Le **diagramme de Bode** donne l'atténuation en dB en fonction du logarithme de la fréquence.
Une fréquence de coupure $\frac{Vout}{Vin} = 0{,}7$ est définie comme une fréquence pour laquelle l'atténuation vaut -3 dB quel que soit l'ordre du filtre.
Pour des fréquences plus grandes que la fréquence de coupure, un **filtre de Butterworth** d'ordre n atténuera de -6ndB par octave ou -20ndB par décade. Ce filtre donne une réponse très uniforme dans la bande passante mais produit un déphasage variant de façon non linéaire en fonction de la fréquence.
Un filtre de Bessel produit un déphasage linéaire.
Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t) = 0 \forall t < 0$

Exemples de filtre slide 103 à 105

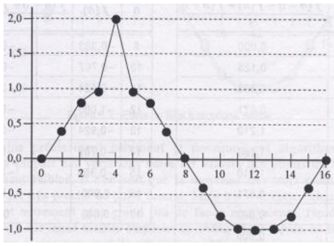
Propriétés

- Tout filtre réalisable déphase.
- Un filtre qui couperait une bande de fréquences donnée de serait pas réalisable. (voir filtre réalisable au-dessus)
- Un filtre analogique, continu et réalisable est composé de résistances, de selfs, de capacités, et d'ampli-opérationnels.

Paramètres d'un filtre

- Son type : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande, Butterworth, Bessel, Chebychev,…
- Sa fréquence de coupure (atténuation vaut -3dB)
- Son ordre n : deux filtres successifs d'ordre 1 donneront un filtre d'ordre 2.

Filtre à moyenne mobile



Réalisation de la moyenne des valeurs numériques de part et d'autre du pic en incluant le pic lui-même. Cette technique va réduire l'amplitude du pic et atténuer son effet sur le signal. $g(n) = \frac{f(n-1)+f(n)+f(n+1)}{3}$ f(n) est le signal d'entrée et g(n) est le signal de sortie. Cette moyenne est calculée sur l'ensemble du signal.
Les basses fréquences seront moins atténuées et les hautes fortements → filtre passe-bas.

Filtre différenciateur

Même signal, mais il faut conserver le craquement. On va soustraire le signal reconstitué par le filtre à moyenne mobile au signal lui-même. $g(n) = f(n) - \frac{f(n-1)+f(n)+f(n+1)}{3}$
Ce filtre laisse donc passer les hautes fréquences → filtre passe-haut.

Exemples de filtre numérique slide 116

Principe de causalité

Le principe de causalité suggère que le fonctionnement d'un filtre s'accomplisse en temps-réel. Par exemple, pour un filtre passe-bas à moyenne mobile, on note que le que le calcul de l'échantillon d'indice n fait intervenir les échantillons d'indice n-1 et n+1. Si l'indice n correspond à l'échantillon courant, à quoi sert n+1. Si l'on suppose un enregistrement cela ne pose pas de problème. Comme les données sont sauvegardées, tous les points sont disponibles aux instants n et n+1. Pour le temps réel, on ne peut utiliser que les valeurs courantes et passées.

On appellera cela un **filtre causal**, un filtre nécessitant des valeurs futures sera appelé **filtre non-causal**.
Exemple de transformation du moyenne mobile en causal : $g(n-1) = \frac{f(n-1)+f(n)+f(n+1)}{3}$

Chapitre 5 : Echantillonnage

L'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu par un ensemble de valeurs avec n entier situées à des instants discrets espacés de Ts constante, appelée la période d'échantillonnage. **La fréquence d'échantillonnage** est $F_S = \frac{1}{T_S}$.
Echantillonner un signal, c'est le multiplier par un peigne de Dirac.

Propriétés

Le spectre d'un signal échantillonné est périodique de période F_S.
Le spectre du signal échantillonné sera donné par le produit de convolution du spectre du signal initial avec la transformée de Fourier de la suite de pics de Dirac (élément neutre de la convolution).

Démonstration slide 124 à 128

Le signal échantillonné possède un spectre non borné puisque la périodisation est définie de part et d'autre de l'axe des ordonnées.
!!! Il faut respecter de théorème de Shannon-Nyquist afin d'éviter les distorsions du spectre de l'échantillonné → la fréquence d'échantillonnage doit est égale ou supérieur à deux fois la fréquence maximale continue dans le signal initial.

Pour revenir au signal initial, il faut utiliser un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure Fe/2. La fonction réalisée par le filtre passe-bas est une fonction porte.

Démonstration slide 132 à 133

Un signal continu de spectre borné dans l'intervalle de fréquences (−fmax, + fmax) est complètement déterminé par les valeurs qu'il prend à des instants régulièrement espacés de 1/(2 fmax). En effet cette somme de produits permet de reconstituer exactement le signal et donc l'échantillonnage idéal, dans les conditions du théorème de Shannon, conserve la totalité de l'information contenue dans le signal.

Repliement de spectre

Si non respect de Shannon → phénomène de recouvrement du spectre. On a l'apparition de fréquence fantômes.
Si le signal analogique possède des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist, il faut faire précéder l'échantillonneur d'un filtre passe-bas anti-repliement dont la fréquence de coupure est la fréquence de Nyquist afin de supprimer toute fausse fréquences (exemple pour un signal exposé à un bruit).

Exemple et exos slide 139 à 141

Chapitre 6 : Analyse spectrale des signaux discrets

DFT

Dans le but de calculer la transformée de Fourier d'un signal, l'ordinateur ayant un nombre limité de mots de taille finie, on discrétise (échantillonnage) le signal et le tronque temporellement.

Une suite de N échantillons.

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} S_k . e^{-j2\pi\frac{k.m}{N}}$$

La DFT réalise la correspondance entre deux suites de N termes.

FFT

La transformée de Fourier rapide est un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations pour calculer la transformée de Fourier discrète. Pour N échantillons du signal, la DFT nécessite N^2 multiplications complexes.

⚠ Le reste du chapitre es composé d'exemple et le chapitre 7 est à lire avec les notions de traitement d'image.