

Les techniques de traitement du signal

DSP : Digital Signal Processing

Table des matières générale

- Introduction
- Chapitre 1: Représentation des signaux analogiques
- Chapitre 2: Transformée de Fourier
- Chapitre 3: Systèmes de transmission
- Chapitre 4: Filtrage des signaux analogiques
- Chapitre 5: Echantillonnage
- Chapitre 6: Analyse spectrale des signaux discrets
- Chapitre 7: Introduction au traitement d'images
- Bibliographie

Introduction

- Utilité du traitement de signal
- Définitions
- Principales fonctions du traitement de signal

Utilité du DSP



- Digital Radiographic Imaging
- Data Storage & Transmission
- Ultrasound Medical Imaging
- Spy Satellite Imaging Military Apps
- Video Communications
- Space Imaging Apps
- Speech Recognition
- Real-Time Video-Camera
- ...



Définitions

- **Signal:** représentation physique de l'information qu'il transporte. Manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, ...)
- **Bruit:** phénomène perturbateur qui gêne la perception ou l'interprétation d'un signal. Attention qu'un bruit peut être un signal utile pour qlq'un d'autre (ex: ondes galactiques sont un bruit pour l'ingénieur télécom mais un signal utile pour l'astrophysicien)
- **Théorie du signal:** description mathématique du signal qui permet de mettre en évidence ses principales caractéristiques (distribution fréquentielle, énergie, ...)

Définitions

- **Traitement du signal:** discipline technique basée sur l'électronique, l'informatique et la physique appliquée qui a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux
- **Traitement de l'information:** ensemble de concepts pour évaluer les performances des systèmes de transfert d'informations (codage, correction d'erreurs, cryptage, ...)
- Le traitement d'images peut être considéré comme une extension du DSP aux signaux bidimensionnels

Principales fonctions du DSP

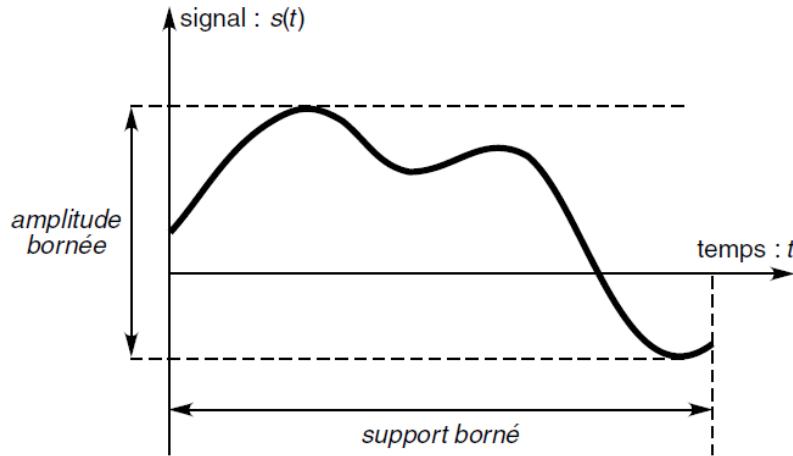
- Elaboration des signaux:
 - Synthèse: création de signaux de forme appropriée
 - Modulation: adaptation d'un signal aux caractéristiques fréquentielles d'un canal de transmission
 - Codage
- Interprétation des signaux:
 - Filtrage: élimination de certaines composantes fréquentielles
 - Fenêtrage: élimination de certaines composantes temporelles
 - Détection: extraction du signal d'un bruit (corrélation)
 - Identification: classification d'un signal
 - Analyse: isolement de composantes essentielles ou utiles d'un signal complexe (transformée de Fourier)
 - Mesure: estimation d'une grandeur caractéristique d'un signal

Chapitre 1: représentation des signaux analogiques

Table des matières chap 1

- Modélisation des signaux
- Classification des signaux
 - Représentation temporelle
 - Classification énergétique
 - Classification spectrale
 - Les signaux numériques

Modélisation des signaux



- Un signal est une grandeur physique et doit donc être réalisable
- Il possède les caractéristiques suivantes:
 - Énergie $< \infty$
 - Amplitude $< \infty$
 - Continu temporellement
 - Causal: $s(t) = 0$ pour $t < 0$

Modélisation des signaux

- Spectre du signal borné: tend vers 0 quand la fréquence tend vers l'infini
- Cependant, au niveau théorique et pour faciliter les calculs, on travaillera avec des signaux représentés par des fonctions:
 - À énergie théorique infinie
 - Avec des discontinuités (ex: signal carré)
 - Définies sur l'ensemble des réels (signaux non causaux)
 - À spectre infini
 - À valeurs complexes: $s(t) = Ae^{j\omega t} = A[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$

Classification des signaux

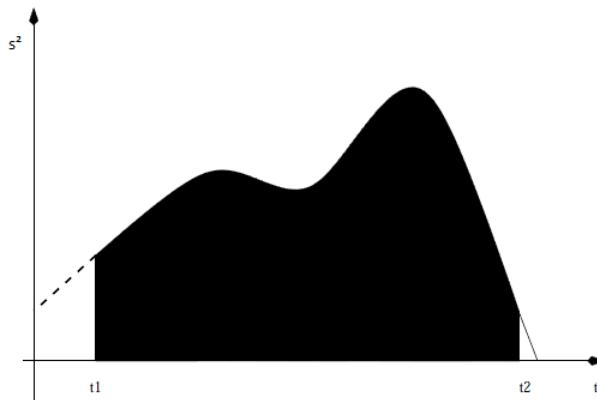
- Pour faciliter l'étude des signaux, différentes modélisations peuvent être envisagées
- Représentation temporelle
 - Signaux certains ou déterministes dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique. Ces signaux peuvent être périodiques ou non
 - Signaux aléatoires dont le comportement temporel est imprévisible. Exemple: bruit
Matlab: s=random('norm',5,sqrt(2),1,10); génère un vecteur de longueur 10 contenant des nombres distribués de manière gaussienne, de moyenne 5 et de variance 2.

Classification des signaux

- Classification énergétique

- La **puissance** d'un courant électrique d'intensité i dans une résistance R est $p(t) = Ri(t)^2$

On dira que $s(t)^2$ représente la puissance instantanée d'un signal
L'énergie contenue dans le signal pendant le temps t_1 à t_2 est représenté par la surface en dessous de la courbe s^2



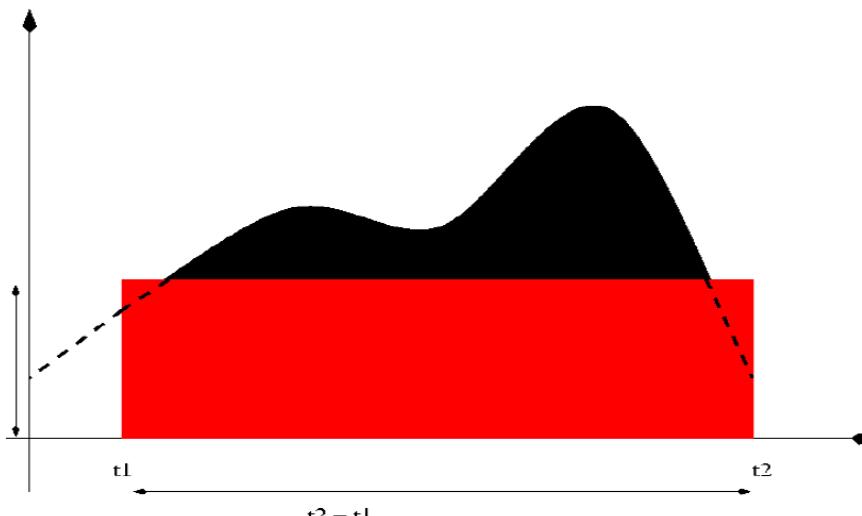
$$W_s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$$

Classification des signaux

- Energie – puissance moyenne

La surface en dessous de la courbe égale la surface du rectangle rouge.

Sa hauteur vaut la puissance moyenne P_{moy}
puisque $S = \text{base} \times \text{hauteur}$



$$P_{moy} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt}{t_2 - t_1}$$

Classification des signaux

La plupart des signaux peuvent être classés à partir de ces deux grandeurs suivant les deux ensembles suivants:

- **Signal à énergie finie:** s'applique aux signaux transitoires

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt < \infty$$

- **Signal à puissance finie :** s'applique aux signaux périodiques ou quasi-périodiques

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t)dt < \infty$$

- Remarque et exemple: le signal $s(t) = \cos(t)$ a une énergie infinie et une puissance moyenne finie non nulle

Classification des signaux

- $s(t) = \cos(t)$ a une énergie infinie car

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 t dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = \infty$$

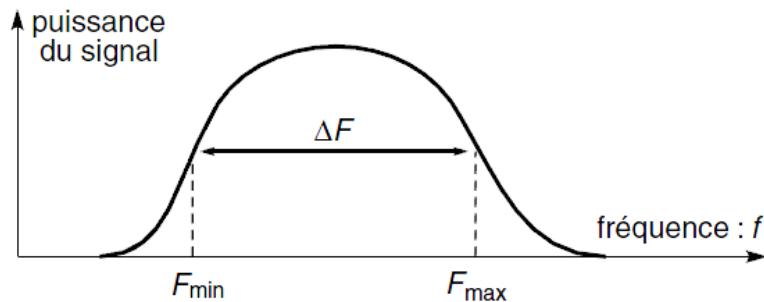
- Sa puissance moyenne vaut

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 t dt = \left\langle \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

- Si le signal $s(t) = \cos(t)$ est limité dans le temps, son énergie sera finie et sa puissance moyenne sera nulle. Cette propriété est vérifiée pour les signaux physiques.

Classification des signaux

- Classification spectrale
 - Un signal peut être classé suivant la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre du signal). Le domaine des fréquences occupé par son spectre ΔF est aussi appelé la largeur de bande du signal



$$\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$$

- Fréquence moyenne

$$f_{moy} = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2}$$

Classification des signaux

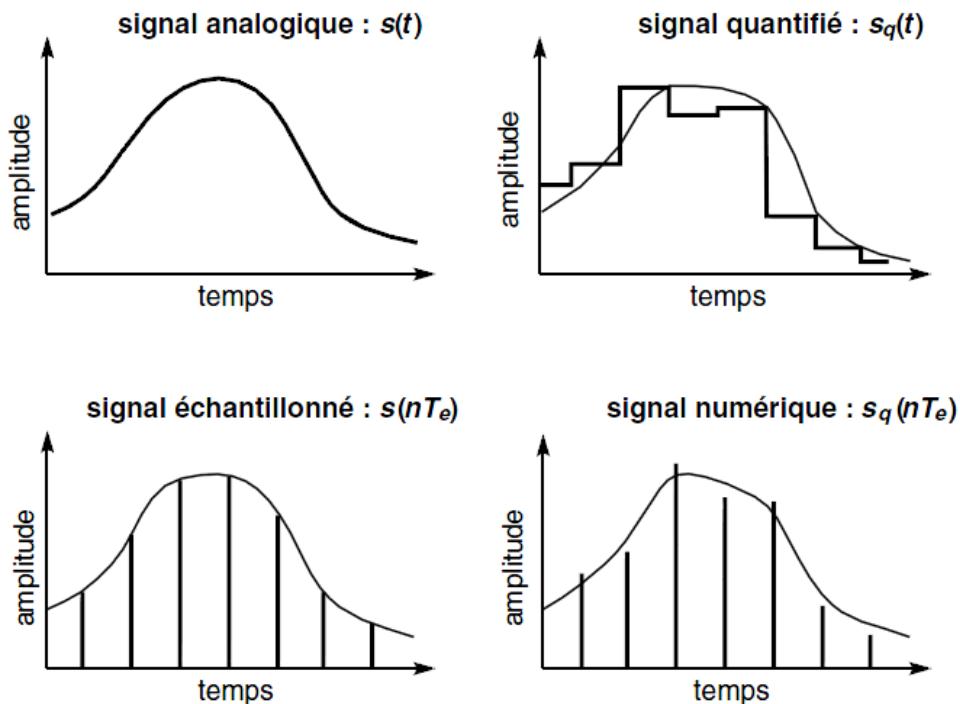
F_{moy}		Classification fréquentielle
	250 kHz	Basses fréquences BF
250 kHz	30 MHz	Hautes fréquences HF
30 MHz	300 MHz	Très hautes fréquences VHF
300 MHz	3 GHz	Ultra hautes fréquences UHF
3 GHz	...	Super hautes fréquences SHF

Classification des signaux

- Les signaux numériques

On appelle numérisation d'un signal l'opération qui fait passer ce signal du domaine des temps et amplitudes continus au domaine des temps et amplitudes discrets

- Échantillonnage
- Quantification



Chapitre 2:

Transformée de

Fourier

Table des matières chap 2

- Rappels mathématiques
- Distribution de Dirac
- Théorème de Fourier
- Transformée de Fourier
- Existence et propriétés

Rappels mathématiques

Un nombre complexe est constitué d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

$$a = 3 + 2j$$

Où 3 est la partie réelle et 2 est la partie imaginaire.

Son module est défini comme la racine carrée de la somme des carrés des parties réelle et imaginaire.

$$|a| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Son argument est lui défini comme la tangente inverse de la partie imaginaire sur la partie réelle.

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

Enfin, son binôme conjugué est défini comme

$$\bar{a} = 3 - 2j$$

Avec comme conséquence

$$|a|^2 = a\bar{a}$$

Rappels mathématiques

Un nombre complexe est un point du plan complexe \mathbb{C} .
Sa représentation trigonométrique est

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

D'où l'on tire que

$$e^{-jx} = \cos(x) - j \sin(x)$$

En conséquence :

$$\begin{cases} \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{cases}$$

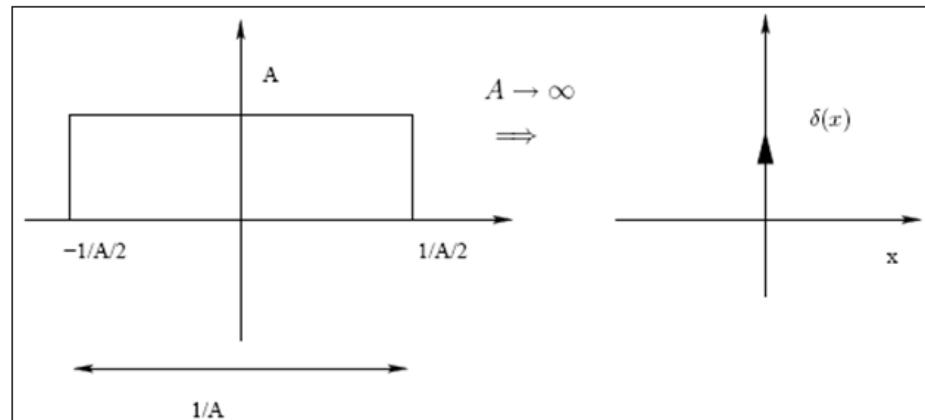
Distribution de Dirac

Une distribution de Dirac $\delta(x)$ est une distribution qui prend une valeur infinie en 0 et qui vaut 0 partout ailleurs et dont l'intégrale sur \mathbb{R} vaut 1.

$$\delta(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \delta(x) = \infty \text{ si } x = 0$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$



On dira que le poids de la distribution de Dirac vaut 1.

Distribution de Dirac

- $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$
exemple : $(x^2 + 2)\delta(x) = 2\delta(x)$
- $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$
exemple : $(x^2 + 2)\delta(x-1) = 3\delta(x-1)$
c'est le cas de la distribution décentrée de Dirac notée $\delta(x-a) = \delta_a(x)$

Théorème de Fourier

• Représentation unilatérale

Toute fonction périodique peut s'écrire

$$s(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi F_0 t) + a_2 \cos(2\pi 2F_0 t) + \dots + b_1 \sin(2\pi F_0 t) + b_2 \sin(2\pi 2F_0 t) + \dots$$

Où F_0 est la fréquence fondamentale du signal périodique.

D'une façon générale

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nF_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nF_0 t)$$

Ou encore

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi nF_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nF_0 t)$$

Vu que $\sin(0) = 0$

Les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n$ forment le spectre unilatéral du signal $s(t)$.

Deux constatations peuvent être faites :

- la valeur moyenne du signal $\langle s(t) \rangle$ est égale à a_0 vu que $\langle \cos(2\pi nF_0 t) \rangle = \langle \sin(2\pi nF_0 t) \rangle = 0$,
- les coefficients a_1 et b_1 représentent la fréquence fondamentale et les coefficients a_n et b_n représentent les harmoniques.

La représentation unilatérale est répartie sur un axe de cosinus pour les coefficients a_i et un axe de sinus pour les coefficients b_i .

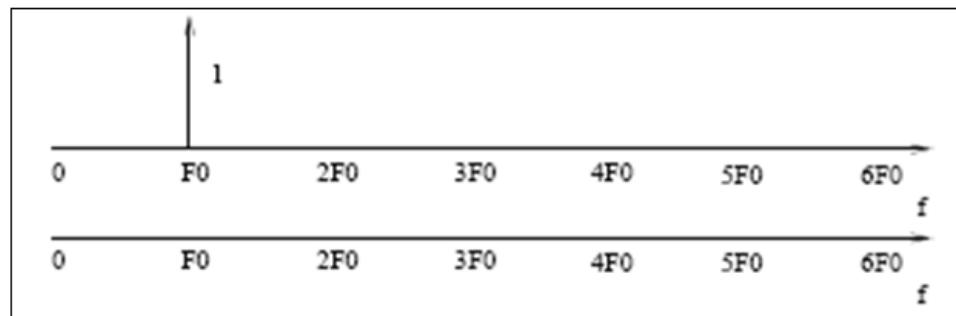
Théorème de Fourier

- Spectre unilatéral de la fonction cosinus

Soit un cosinus pur

$$s(t) = \cos(2\pi F_0 t)$$

Tous les coefficients sont nuls à l'exception de $a_1 = 1$.



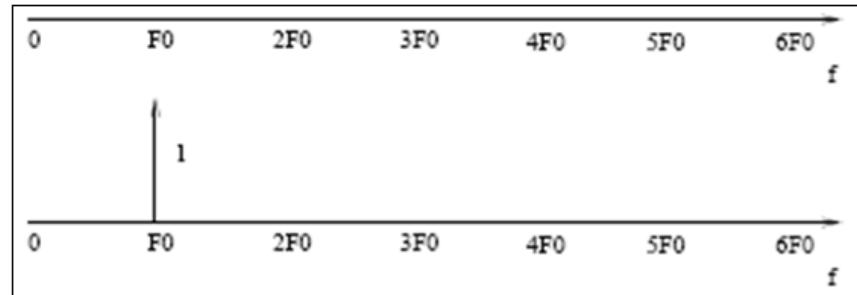
Théorème de Fourier

- Spectre unilatéral de la fonction sinus

Soit un sinus pur

$$s(t) = \sin(2\pi F_0 t)$$

Tous les coefficients sont nuls à l'exception de $b_1 = 1$.



Théorème de Fourier

- Expressions générales des coefficients de Fourier

Toutes les fonctions périodiques ne sont pas toujours aussi évidentes que ces simples cas sinusoïdaux et cosinusoïdaux. Notons par exemple, et pour ne citer que celles là, les fonctions rectangulaires ou triangulaires.

Dans ces cas, des expressions permettent de déterminer la valeur des coefficients du spectre.

Ils sont calculés sur une seule période (T) du signal périodique.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(2\pi nft) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(2\pi nft) dt$$

Théorème de Fourier

- Exercices

Théorème de Fourier

- Représentation bilatérale

Vu que

$$\begin{cases} \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{cases}$$

Le théorème de Fourier est adapté et toute fonction périodique peut s'écrire

$$s(t) = \dots + c_{-2} e^{j2\pi(-2)F_0 t} + c_{-1} e^{j2\pi(-1)F_0 t} + c_0 + c_1 e^{j2\pi(+1)F_0 t} + c_2 e^{j2\pi(+2)F_0 t} + \dots$$

D'une façon générale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

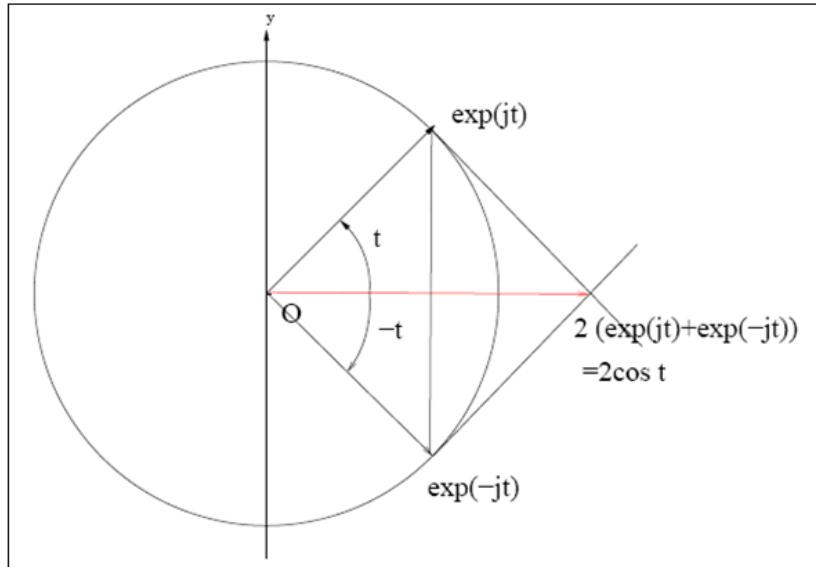
La représentation bilatérale est répartie soit sur un axe réel et un axe imaginaire, soit sur un axe de module et un axe d'angle.

Théorème de Fourier

- Fréquences négatives

On constate donc que des fréquences négatives apparaissent. Ceci est logique vu que le signal réel est la somme d'un signal complexe de fréquence positive et d'un signal complexe de fréquence négative.

Cette notion de fréquence négative peut facilement être mise en évidence :



Théorème de Fourier

- Spectre bilatéral de la fonction cosinus

Soit un cosinus pur

$$s(t) = \cos(2\pi F_0 t)$$

Ou encore

$$s(t) = \frac{e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t}}{2}$$

On obtient les coefficients suivants :

- $c_{-1} = \frac{1}{2}$
- $c_0 = 0$
- $c_1 = \frac{1}{2}$

Tous les autres coefficients sont nuls.

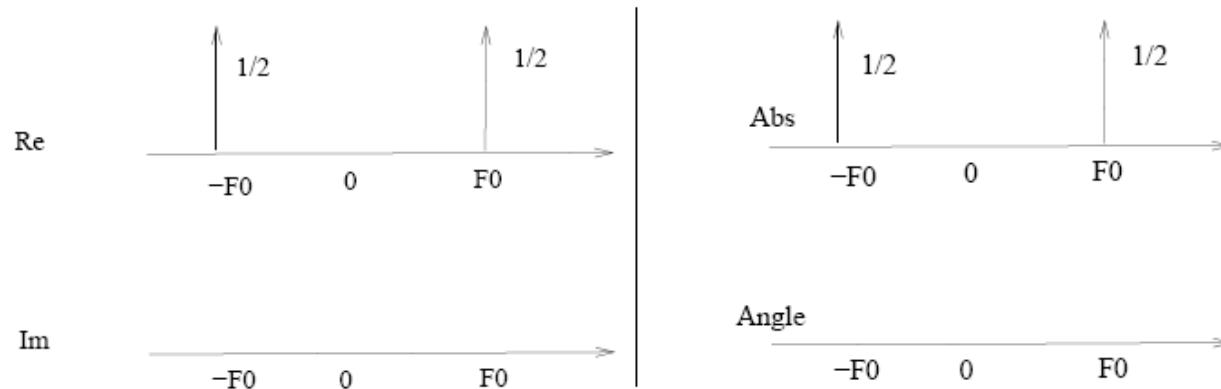
Théorème de Fourier

Le spectre $S(f)$ du signal $s(t)$ vaut donc

$$S(f) = \frac{1}{2}\delta(f + F_0) + \frac{1}{2}\delta(f - F_0)$$

Ou encore

$$S(f) = \frac{1}{2}(\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0))$$



Théorème de Fourier

- Spectre bilatéral de la fonction sinus

Soit un sinus pur

$$s(t) = \sin(2\pi F_0 t)$$

Ou encore

$$s(t) = \frac{e^{j2\pi F_0 t} - e^{-j2\pi F_0 t}}{2j}$$

On obtient les coefficients suivants :

$$\text{- } c_{-1} = \frac{-1}{2j} = \frac{j}{2}$$

$$\text{- } c_1 = \frac{1}{2j} = \frac{-j}{2}$$

Tous les autres coefficients sont nuls.

Théorème de Fourier

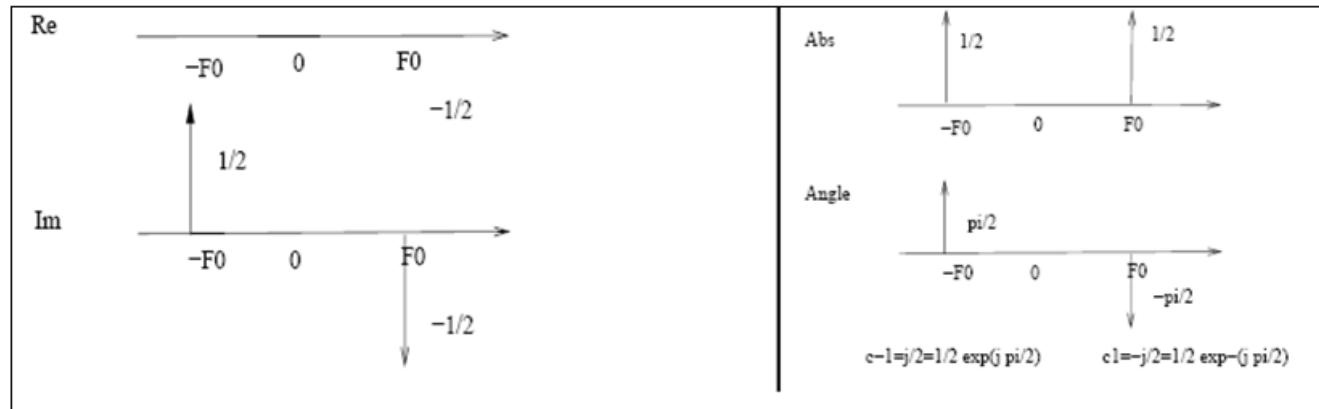
Le spectre $S(f)$ du signal $s(t)$ vaut donc

$$S(f) = \frac{1}{2j} (-\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0))$$

Ou encore

$$S(f) = \frac{j}{2} (\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0))$$

La représentation bilatérale du sinus est donc



Théorème de Fourier

- Spectre bilatéral de la puissance d'un cosinus

Si la puissance instantanée d'un signal $s(t)$ est $s^2(t)$, alors la puissance totale du signal périodique illimité dans le temps est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt$$

Soit donc le signal

$$s(t) = \cos(2\pi F_0 t)$$

Par l'identité trigonométrique

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

Nous obtenons la puissance du signal

$$s^2(t) = \cos^2(2\pi F_0 t) = \frac{1 + \cos(2\pi 2F_0 t)}{2}$$

Ou encore

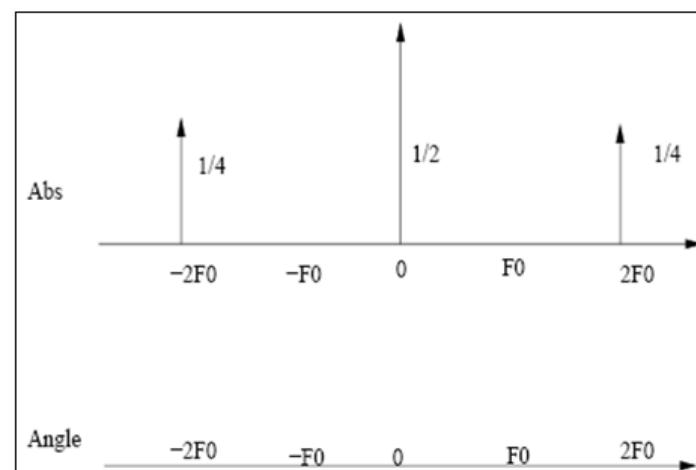
$$s^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{j2\pi 2F_0 t} + e^{-j2\pi 2F_0 t}}{4}$$

Théorème de Fourier

On obtient les coefficients suivants :

- $c_{-2} = \frac{1}{4}$
- $c_0 = \frac{1}{2}$
- $c_2 = \frac{1}{4}$

La représentation bilatérale est donc



La valeur moyenne du signal $\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2}$

Transformée de Fourier

- Généralisation du théorème de Fourier

Le spectre d'un signal non périodique n'est plus exprimé en raies ou en fréquence fondamentale mais en une fonction continue $S(f)$.

On passe de $kF_0 \Rightarrow f$

Le spectre $S(f)$ est donc

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Inversement, on peut récupérer le signal temporel $s(t)$ à partir du spectre $S(f)$ en appliquant la transformée de Fourier inverse

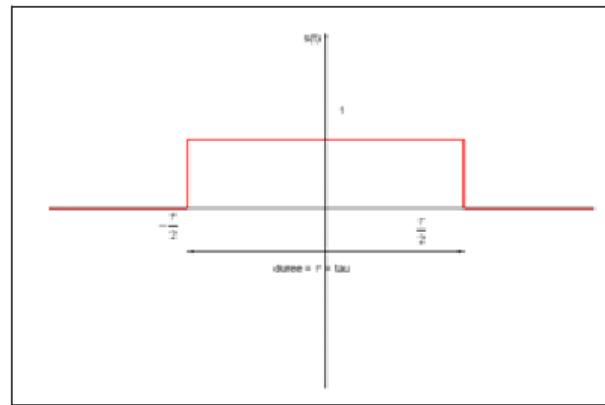
$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

En conclusion, la donnée d'un signal est équivalente à la donnée d'un spectre.

Transformée de Fourier

- Transformée de Fourier de la fonction porte

Soit une fonction porte de durée donnée τ .



L'expression de cette fonction est

$$s(t) = \Pi_{\tau}(t)$$

Cette fonction est égale à 1 entre $-\frac{\tau}{2}$ et $+\frac{\tau}{2}$. Elle vaut 0 partout ailleurs.

Calculons sa transformée de Fourier

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau}(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Transformée de Fourier

Vu la définition de cette fonction, cette intégrale devient

$$S(f) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$S(f) = \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2}$$

$$S(f) = \frac{e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}}}{-j2\pi f}$$

$$S(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f}$$

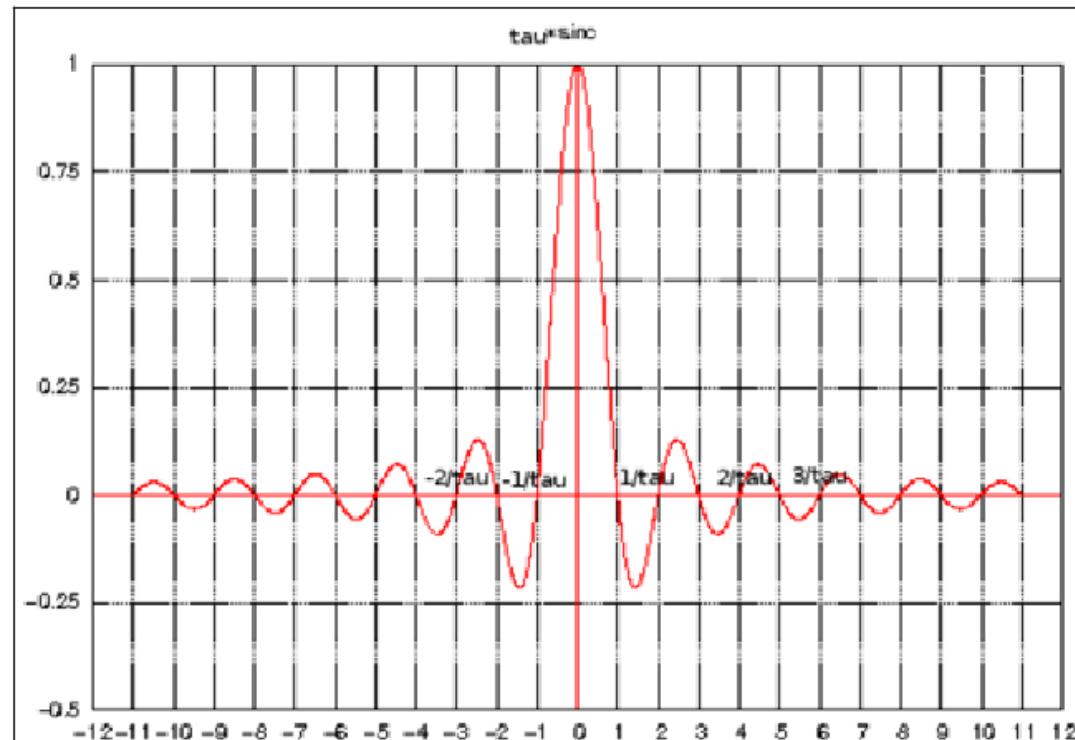
Par artifice

$$S(f) = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$$

$$S(f) = \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau)$$

Transformée de Fourier

En conclusion, c'est la fonction sinus cardinal qui apparaît.



Transformée de Fourier

Pour comprendre l'allure de cette fonction de manière intuitive, rappelons qu'un sinus s'annule en $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc, cette fonction s'annule en $f\tau = \dots; -1; 1; 2; 3; \dots$

Donc quand $f = \frac{-1}{\tau}; \frac{1}{\tau}, \frac{2}{\tau}, \frac{3}{\tau}, \dots$

Avec un cas particulier en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$$

Donc, en 0 on a τ

Transformée de Fourier

En conclusion, un signal d'une durée τ se situera dans une bande de fréquence de largeur $1/\tau$

- signal de durée longue → bande de fréquence étroite
- signal de durée courte → bande de fréquence large

La durée d'un signal a une influence sur son spectre !!!!

Transformée de Fourier

- Transformée de Fourier de la distribution de Dirac

Soit la distribution de Dirac $\delta(t)$

Sa transformée de Fourier est donnée par

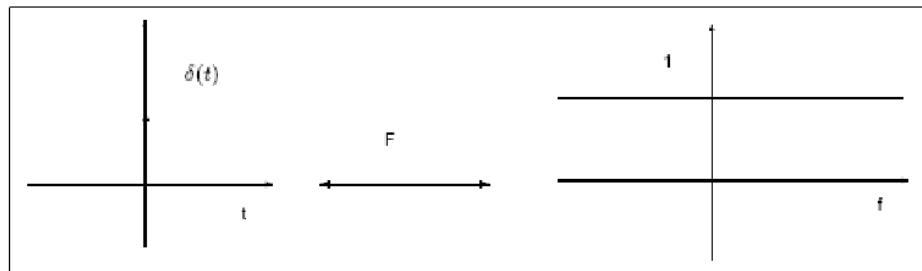
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Et donc, par définition

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Le spectre de la distribution de Dirac est donc une fonction de fréquence constante et unitaire.



On constate en conséquence que le spectre d'un signal de très courte durée sera très étalé.

Existence et propriétés

- Existence

La transformée de Fourier $S(f)$ d'un signal $s(t)$ existe si l'énergie du signal est finie. C'est-à-dire si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty$$

- Linéarité

On peut démontrer que

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f)$$

- Translation dans le temps

$$x(t - a) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi af}$$

Il est important de constater que dans ce cas, $\text{abs}(X(f))$ ne change pas, mais le décalage dans le temps induit un déphasage qui dépend de la fréquence. Exemple : l'écho.

Existence et propriétés

- Translation en fréquence

$$x(t)e^{j2\pi bt} \leftrightarrow X(f - b)$$

- Théorème de la modulation de Fourier

De l'équation de la propriété de translation en fréquence, nous déduisons que

$$x(t)e^{-j2\pi bt} \leftrightarrow X(f + b)$$

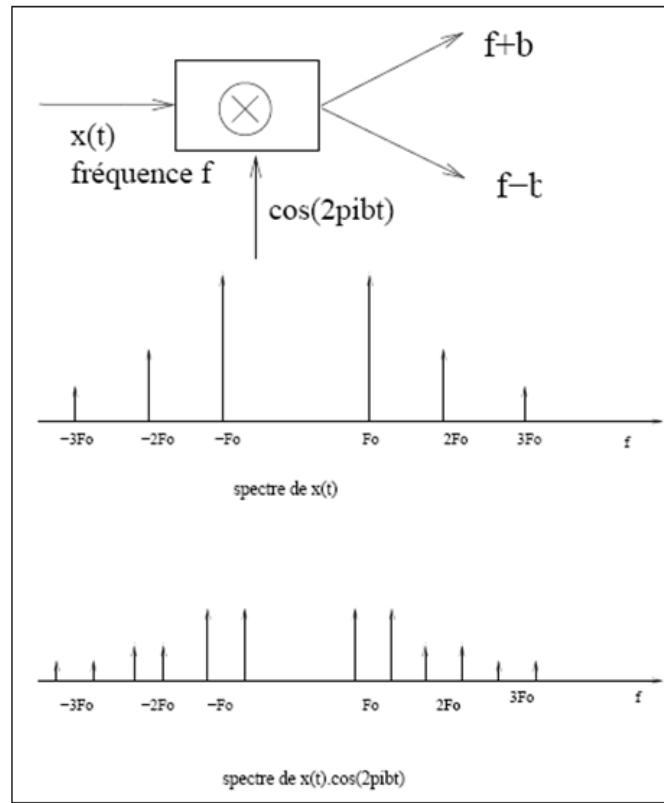
Calculons maintenant la demi-somme de ces deux équations,

$$\frac{x(t)e^{j2\pi bt} + x(t)e^{-j2\pi bt}}{2} \leftrightarrow \frac{X(f - b) + X(f + b)}{2}$$

$$x(t)\cos(2\pi bt) \leftrightarrow \frac{1}{2}(X(f - b) + X(f + b))$$

Existence et propriétés

Cette propriété permet de modifier la fréquence d'un signal et est utilisée, par exemple, dans les récepteurs superhétérodynes.



Existence et propriétés

- Cosinus limité dans le temps

Posons-nous maintenant la question suivante :

« Quel est le spectre d'un signal cosinusoïdal de fréquence f limité dans le temps ? »

Soit un signal cosinusoïdal de fréquence b d'une durée τ :

$$s(t) = \Pi_\tau(t) \cos(2\pi b t)$$

Par le théorème de la modulation, son spectre sera :

$$\frac{1}{2} (X(f - b) + X(f + b))$$

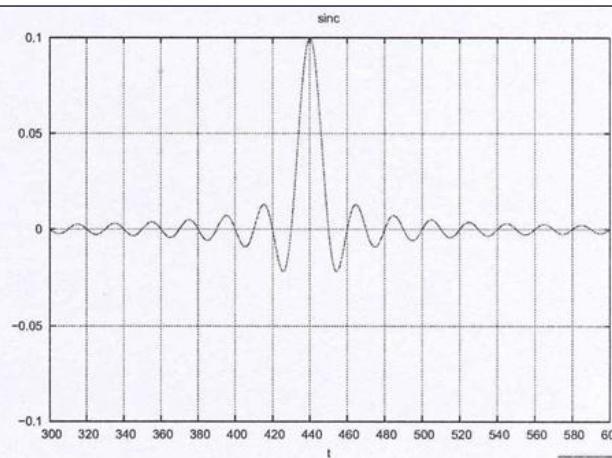
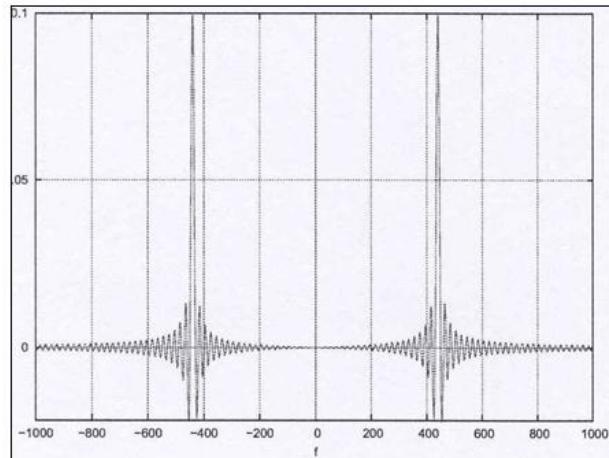
Où $X(f)$ est le spectre de $\Pi_\tau(t)$ c'est-à-dire $\tau \operatorname{sinc}(f\tau)$

$$\Pi_\tau(t) \cos(2\pi b t) \leftrightarrow \frac{\tau}{2} (\operatorname{sinc}(f - b)\tau + \operatorname{sinc}(f + b)\tau)$$

Existence et propriétés

Appliquons cela :

Quelles sont les fréquences présentes dans un La de la 3^{ème} octave limité à 0,1 seconde dans le temps ?



Chapitre 3: Systèmes de transmission

Table des matières chap 3

- Définitions
- Propriétés des systèmes de transmission
- Filtres et convolution
- Notion de corrélation

Définitions

- Un système de transmission (ST) fait correspondre à un signal d'entrée $e(t)$ quelconque un signal de sortie $s(t)$



- $s(t)$ (réponse du système de transmission) est fonction du signal d'entrée $e(t)$ et des caractéristiques du ST
- Idée pour caractériser cette grandeur $s(t)$: comparaison avec le signal d'entrée

$$A_{\text{db}} = 10 \cdot \log_{10} (s(t)/e(t))$$

Définitions

- Gain en puissance:

$$A_{\text{db}} = 10 \cdot \log_{10} (P_s/P_e)$$

avec un gain si cette expression est > 0 et un affaiblissement dans le cas contraire

Et si l'on considère des tension aux bornes de charges résistives:

$$A_{pdB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_s^2}{V_e^2} \cdot \frac{R_e}{R_s} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_s^2}{I_e^2} \cdot \frac{R_s}{R_e} \right)$$

Et si les résistances sont identiques (adaptation d'impédance):

$$A_{pdB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{V_s}{V_e} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_s}{I_e} \right)$$

Définitions

- Gain en tension:

$$A_{\text{db}} = 20 \cdot \log_{10} (V_s/V_e)$$

Cette convention permet d'exprimer, par un même nombre, le rapport en tension et le gain en puissance quand les impédances sont adaptées.

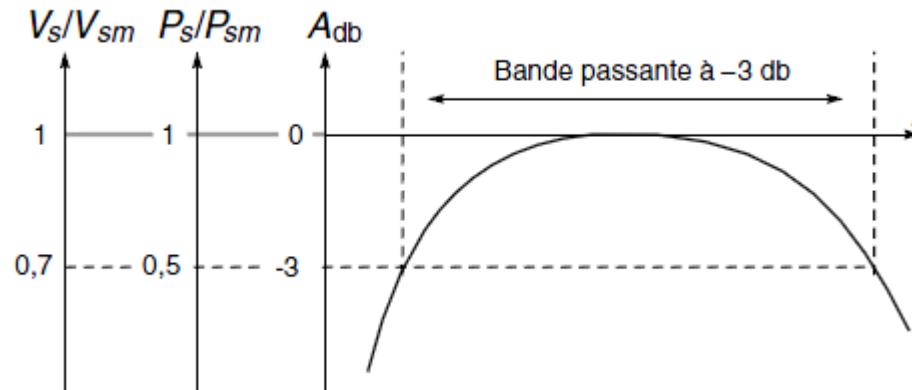
Rapport des tensions V_s/V_e	$1/10$	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	2	10	100
Gain ou affaiblissement en db	-20	-6	-3	6	20	40

Définitions

- Bande passante:

Hyp: soit une tension sinusoïdale fournissant une puissance moyenne entrante constante quelque soit la fréquence à une charge resistive. On étudie l'évolution de la puissance de sortie en fonction de la fréquence.

La **bande passante** à 3dB est la tranche des fréquences pour lesquelles l'affaiblissement de la puissance de sortie , à puissance entrante constante, est inférieur à 3dB par rapport à sa valeur maximale



Propriétés des ST

- **Linéarité:** si $s_1(t)$ est la réponse de $e_1(t)$ et que $s_2(t)$ est la réponse de $e_2(t)$, le ST est dit linéaire si

$$a \cdot e_1(t) + b \cdot e_2(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)$$

- **Continu:** Soit $s_n(t)$ la suite des réponses paramétrées par n aux signaux d'entrée $e_n(t)$, le système est dit continu si nous avons la propriété suivante

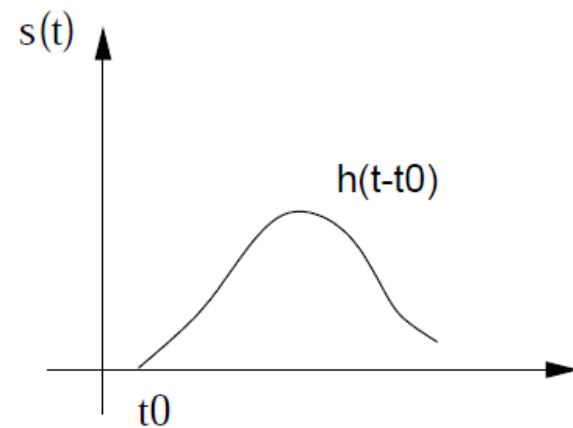
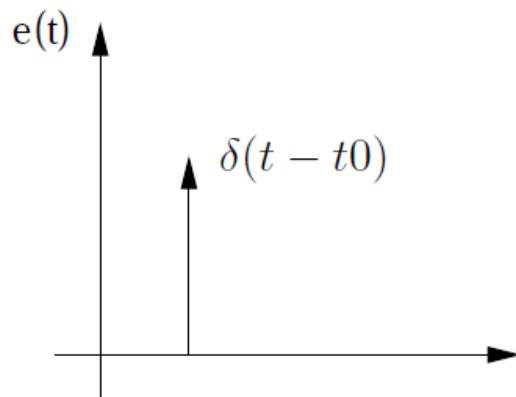
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t)$$

- **Stationnaire:** un système est stationnaire si son comportement est indépendant de l'origine du temps et donc si

$$e(t - \theta) \xrightarrow{\text{S.T.}} s(t - \theta)$$

Filtres et convolution

- Définition: les **filtres** sont définis des systèmes de transmission linéaires, continus et stationnaires
- Définition: une impulsion brève, injectée à l'entrée d'un ST linéaire, continu et stationnaire, ne donne jamais en sortie une impulsion infiniment brève mais un signal de durée finie. Cette réponse est la **réponse impulsionale** du filtre notée $h(t)$



Filtres et convolution

- Dans le cas général, c'est-à-dire pour signal d'entrée quelconque, nous avons une relation mathématique qui lie le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$ pour un ST possédant les trois propriétés vues précédemment ou filtre, noté S.T.-L.C.S., soit :

$$e(t) \xrightarrow{\text{S.T.-L.C.S.}} s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = e(t) * h(t)$$

Cette opération, appelée « **convolution** » et notée $*$, exprime la réponse à un signal quelconque à partir de celle à un signal type (réponse impulsionnelle); la réponse dépend du filtre, caractérisé par $h(t)$, et de l'histoire du signal.

Filtres et convolution

Le calcul de la convolution est complexe. Il nécessite de nombreuses étapes de calculs : pour chaque point de la réponse $s(t)$, il est nécessaire d'élaborer la fonction $h(t - \tau)$, symétrique de la réponse impulsionale par rapport à l'axe des ordonnées et décalée temporellement, puis le produit par le signal d'entrée $e(\tau)$ et enfin l'intégration sur la variable τ . Nous y reviendrons...

- Démonstration

L'idée est que tout signal d'entrée $e(t)$ peut être décomposé en une suite d'impulsions. On a donc

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Filtres et convolution

$d\tau$ possède la dimension d'un temps (s) et $h(t)$ aura donc comme dimension Hz.

Appliquer un filtre à une entrée $e(t)$ revient à lui appliquer un opérateur linéaire L . Et donc

$$s(t) = Le(t) = L\left(\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right)$$

La continuité de l'opérateur L implique que

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L(e(\tau)\delta(t - \tau))d\tau$$

Filtres et convolution

Puisque l'opérateur L s'applique à la fonction du temps t : $e(\tau)(\Delta t - \tau)$ et que $e(\tau)$ ne dépend pas du temps t , la linéarité de l'opérateur L implique que

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)L\delta(t - \tau)d\tau$$

Or, la définition de la réponse impulsionnelle nous dit que:
 $h(t) = L(t)$ d'où l'on tire que

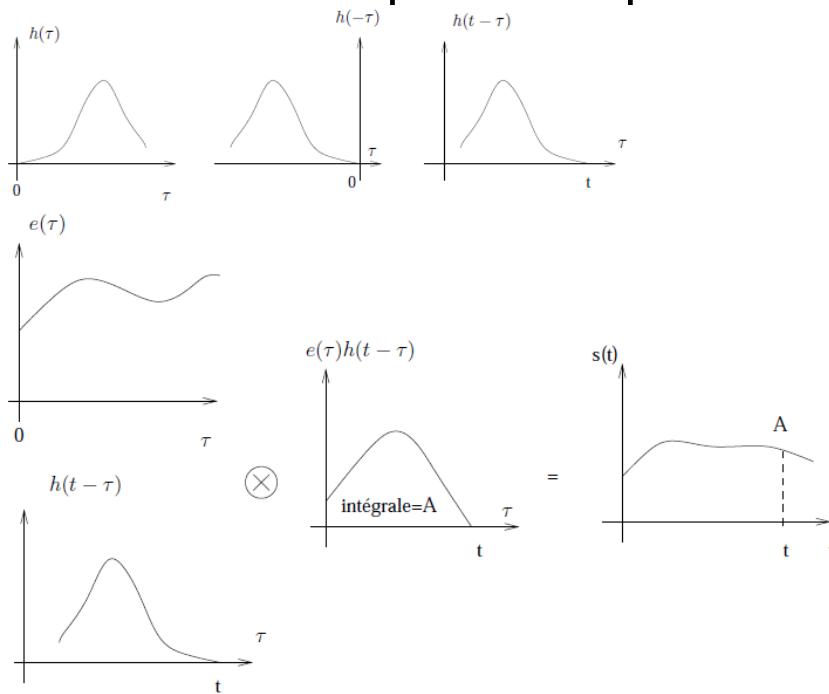
$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Et donc

$$s(t) = e(t) * h(t)$$

Filtres et convolution

- Définition: les filtres, qui sont définis comme des ST linéaires, continus et stationnaires, sont des systèmes de convolution
- Donc, un filtre atténue ou amplifie les composantes fréquentielles de l'entrée $e(t)$
- L'opération de convolution peut se représenter comme suit:



Filtres et convolution

- Propriétés:

- Commutativité

$$x * y = y * x$$

- Distributivité

$$x * (y + z) = x * y + x * z$$

- Associativité

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

- Elément neutre: distribution de Dirac

$$x * \delta = \delta * x = x$$

Filtres et convolution

- Théorème de Plancherel: « la transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement ».

Nous pouvons donc écrire que

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot Y(f) \quad \text{et} \quad x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{F} X(f) * Y(f)$$

- Remarque: convolution des signaux périodiques

$$P_{\text{conv}}(t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot d\tau$$

- Théorème de Parseval: « L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie: temporelle ou fréquentielle ».

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Filtres et convolution

- Exemple de convolution discrète

La convolution d'un vecteur de longueur n avec une autre vecteur de longueur N fournira un vecteur de longueur $2N-1$

```
>>x= [1 , 2 , 3]  
>>y= [4 , 5 , 6]  
>>z=conv (x,y)
```

Réponse:

```
4 13 28 27 18
```

Explication: pour trouver le vecteur résultant, il faudra retourner le vecteur y , le faire “glisser devant le vecteur x et additionner le produit des éléments en face l'un de l'autre”. Tout élément manquant sera mis à 0

Filtres et convolution

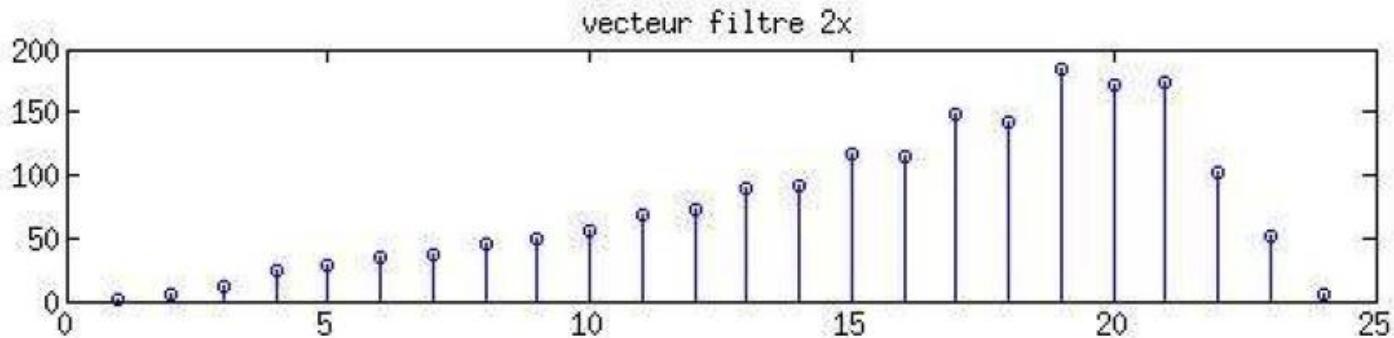
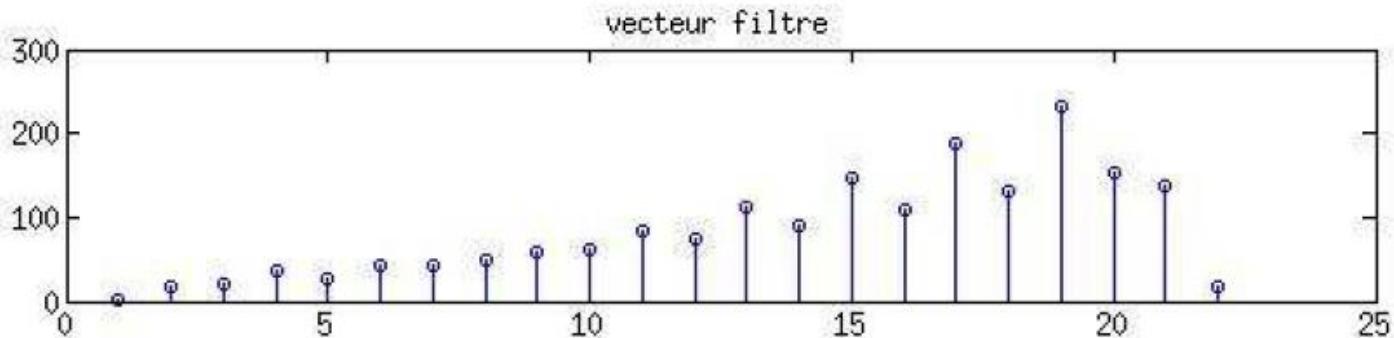
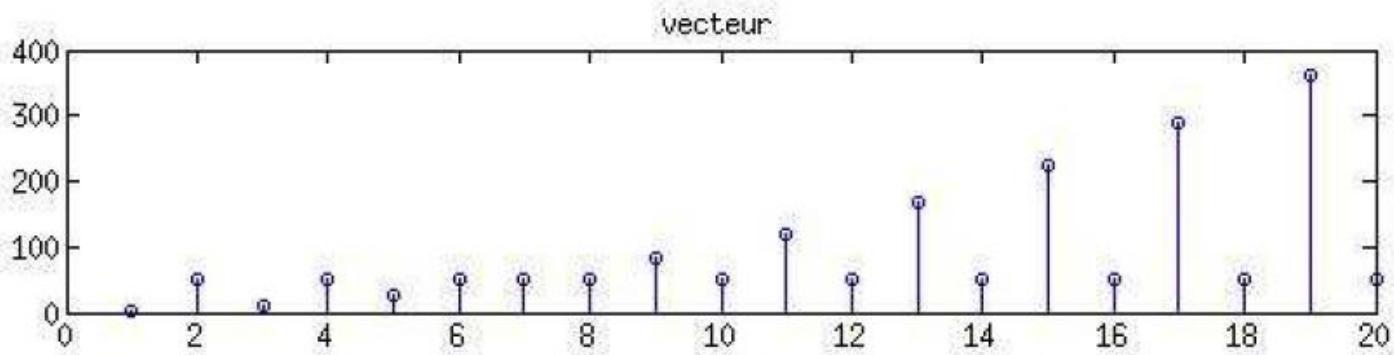
- Un exemple d'application de la convolution est le filtrage d'un signal par un filtre moyenneur. Dans ce cas, la réponse impulsionnelle sera: $h=[1/3 \ 1/3 \ 1/3]$ si on réalise la moyenne d'un point avec ses deux voisins.

Exemple:

Soit le vecteur: $s= 1 \ 50 \ 9 \ 50 \ 25 \ 50 \ 49 \ 50 \ 81 \ 50 \ 121 \ 50 \ 169 \ 50 \ 225 \ 50 \ 289 \ 50 \ 361 \ 50$

Les diagrammes ci-dessous affichent le signal s , le signal s filtré et le signal filtré une seconde fois.

Filtres et convolution



Filtres et convolution

- Application de la convolution à une image (from MatLab)

Linear filtering of an image is accomplished through an operation called *convolution*. Convolution is a neighborhood operation in which each output pixel is the weighted sum of neighboring input pixels. The matrix of weights is called the *convolution kernel*, also known as the *filter*. A convolution kernel is a correlation kernel that has been rotated 180 degrees.

For example, suppose the image is

```
A = [17 24 1 8 15  
      23 5 7 14 16  
      4 6 13 20 22  
      10 12 19 21 3  
      11 18 25 2 9]
```

and the convolution kernel is

```
h = [8 1 6  
      3 5 7  
      4 9 2]
```

The following figure shows how to compute the (2,4) output pixel using these steps:

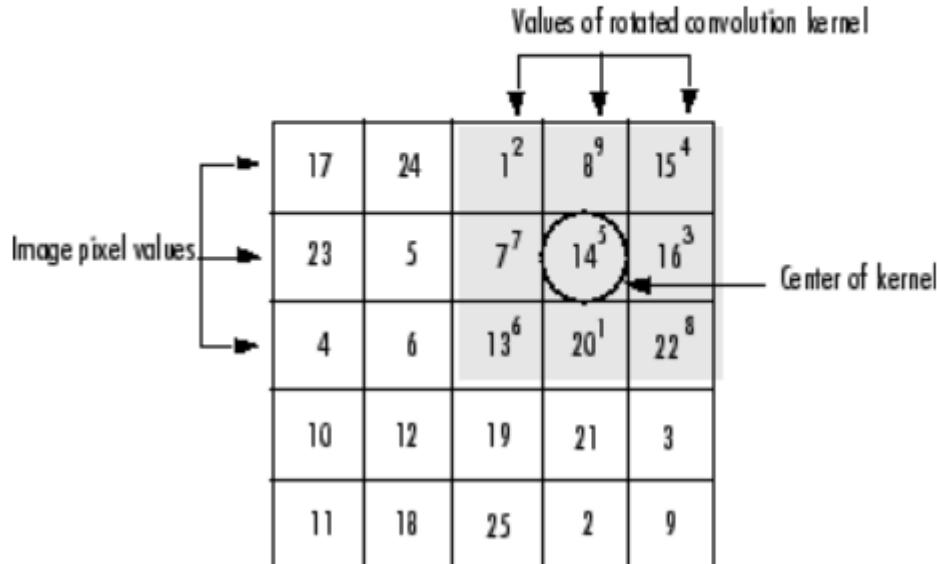
1. Rotate the convolution kernel 180 degrees about its center element.
2. Slide the center element of the convolution kernel so that it lies on top of the (2,4) element of A.
3. Multiply each weight in the rotated convolution kernel by the pixel of A underneath.
4. Sum the individual products from step 3.

Filtres et convolution

Hence the (2,4) output pixel is

$$1 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 15 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + 14 \cdot 5 + 16 \cdot 3 + 13 \cdot 6 + 20 \cdot 1 + 22 \cdot 8 = 575$$

Computing the (2,4) Output of Convolution



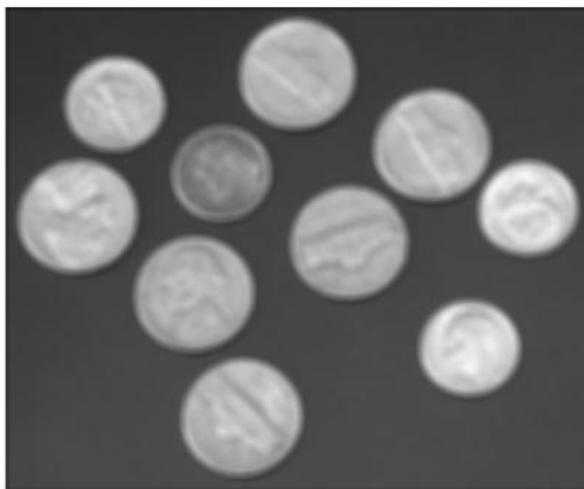
Filtres et convolution

Filtering of images, either by correlation or convolution, can be performed using the toolbox function `imfilter`. This example filters an image with a 5-by-5 filter containing equal weights. Such a filter is often called an *averaging filter*.

```
I = imread('coins.png');
h = ones(5,5) / 25;
I2 = imfilter(I,h);
imshow(I, title('Original Image'));
figure, imshow(I2), title('Filtered Image')
```



Original Image



Filtered Image

Notion de corrélation

- Dans l'opération de convolution, un des signaux est retourné avant multiplication. Dans l'opération de corrélation (ou intercorrélation), il n'y aura pas de retournement.

$$C_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(\tau - t) d\tau$$

- Lorsque les signaux x et y sont identiques, on parle d'autocorrélation et on la note C_{xx}

Notion de corrélation

- Les fonctions de corrélation traduisent la similitude d'un signal ou de deux signaux au niveau de la forme et de la position en fonction du paramètre de translation t . Dans le cas de la fonction d'autocorrélation, c'est une étude de la ressemblance du processus avec lui-même au cours du temps, et, par conséquent, si le signal est périodique, la fonction d'autocorrélation permettra de détecter cette périodicité.
- La fonction d'autocorrélation $C_{xx}(t)$ possède quelques propriétés importantes:
 - Pour des signaux réels, la fonction d'autocorrélation est paire, soit pour un signal $x(t)$ réel :

$$C_{xx}(t) = C_{xx}(-t)$$

Notion de corrélation

- D'autre part la fonction d'autocorrélation a sa valeur maximale pour $t = 0$:

$$C_{xx}(t) \leq C_{xx}(0) \quad \text{quel que soit } t$$

Cette relation se comprend intuitivement par le fait que la fonction d'autocorrélation étant une analyse de la ressemblance d'un signal avec lui-même, le résultat de cette comparaison est maximum lorsque le signal n'est pas décalé temporellement ($t = 0$), c'est-à-dire identique à lui-même.

- si $x(t)$ est périodique, la fonction d'autocorrélation possède toutes les fréquences comprises dans le système initial et seulement celles-ci. Elle **conserve l'information fréquence mais pas les informations de phase et d'amplitude**
- l'autocorrélation d'un signal aléatoire est la distribution δ

Notion de corrélation

- Relation avec la densité spectrale: on peut démontrer que

$$C_{xx}(t) \xleftrightarrow{F} S_{xx}(f)$$

et pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$:

$$C_{xy}(t) \xleftrightarrow{F} S_{xy}(f) \quad \text{ou} \quad C_{yx}(t) \xleftrightarrow{F} S_{yx}(f)$$

Ainsi la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du signal représente la densité spectrale de l'énergie, c'est-à-dire la redistribution de l'énergie du signal sur l'axe des fréquences. Aussi il sera souvent plus facile de calculer la fonction d'autocorrélation ou d'intercorrélation d'un signal en passant par son spectre ou sa densité spectrale

Notion de corrélation

- Le passage de la corrélation à la corrélation discrète se fera de la même manière que pour la convolution. La corrélation d'un vecteur de longueur N avec un autre vecteur de longueur n fournira un vecteur de longueur $2N-1$.

Prenons un exemple

```
>>x= [1, 2, 3]  
>>y= [2, 1, 3]  
>>z=xcorr(x,y)
```

Réponse:

```
= 3 7 13 7 6
```

Explication: pour trouver le vecteur résultant, il faudra faire “glisser” le vecteur y devant le vecteur x (sans retournement) et additionner le produit des éléments en face l'un de l'autre. Tout élément manquant sera mis à 0.

Notion de corrélation

- Exemple de corrélation

Soient les vecteurs:

$a = [12 \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 6]$ et $b = [1 \ 2 \ 3]$

Le vecteur de corrélation de a et b sera donné par l'instruction matlab:

`xcorr(a, b)` qui donne comme résultat:

0 0 0 0 0 36 33 30 14 12 14 23 31 17 6

Le maximum de corrélation vaut 36 et se trouve en 6ème position.

On remarquera que `xcorr(a, b)` possède 15 éléments càd $2N - 1 = 2*8 - 1$

En effet, le vecteur b sera complété par des 0 pour avoir le même nombre d'éléments que le vecteur a.

Notion de corrélation

- Exemple de corrélation

Le résultat de la corrélation de signaux périodiques ne dépend ni de l'amplitude, ni du déphasage.

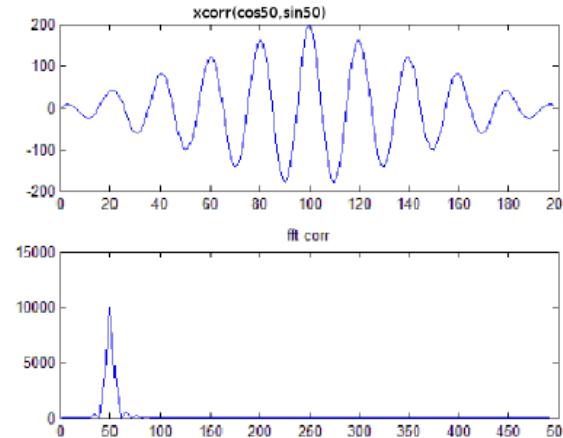
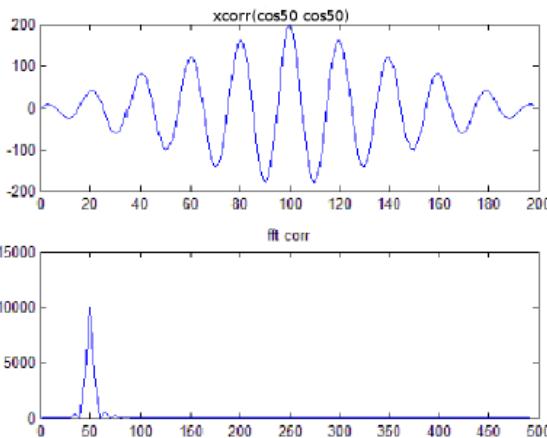
Soient les vecteurs $x = \cos(2\pi 50t)$, $y = \sin(2\pi 50t)$ et leurs corrélations $xcorr(x, x)$ et $xcorr(x, y)$

$$x = \cos(2\pi 50t)$$

$$x = \cos(2\pi 50t) \text{ et } y = \sin(2\pi 50t)$$

$$xcorr(x, x)$$

$$xcorr(x, y)$$

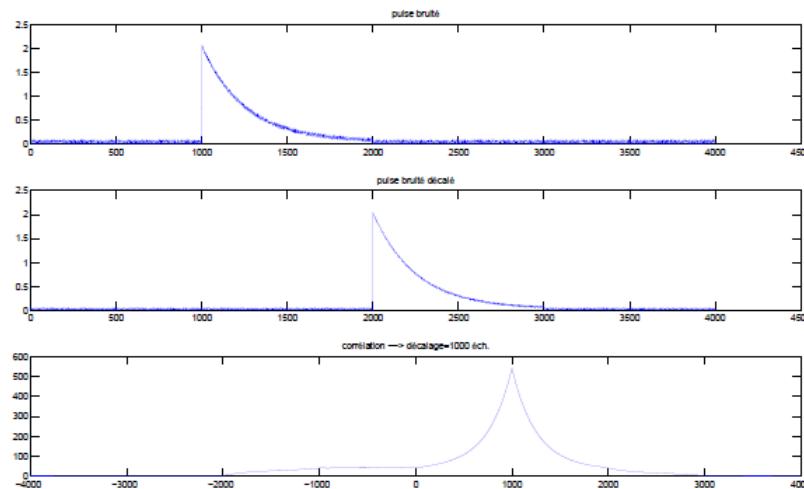


Notion de corrélation

- Exemple de corrélation

La première figure montre un pulse bruité. La seconde figure montre un pulse bruité décalé. La troisième montre la corrélation entre ceux-ci. Elle permet de mesurer ce décalage.

On constatera également que la corrélation des deux signaux est moins bruitée que les signaux de départ.



Notion de corrélation

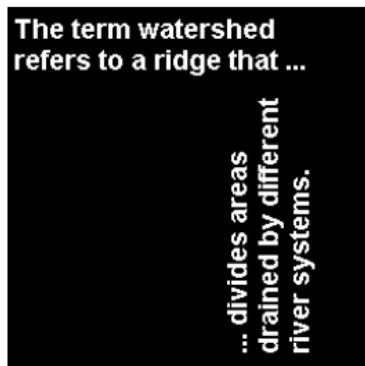
- Exemple de corrélation

La corrélation discrète est également utile pour la reconnaissance de caractères.

Celle-ci peut s'opérer sur l'image ou sur sa transformée de fourier.

La documentation de l’ “Image Processing Toolbox” de Matlab donne un exemple intéressant.

Soit le texte suivant dans lequel on désire trouver les endroits où se situent la lettre “a”.



Notion de corrélation

La corrélation est équivalente à une convolution si on tourne l'image de 180°.

Pour trouver l'image de corrélation entre l'image et le modèle de la lettre “a”, on utilisera la fft à deux dimensions ainsi que sa transformée de Fourier inverse.

L'instruction Matlab sera:

$$C = \text{real}(ifft2(fft2(bw) .* fft2(rot90(a, 2), 256, 256)))$$

où bw est l'image du texte à analyser.

On obtiendra l'image suivante:

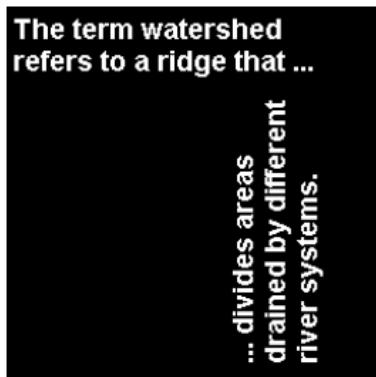


La valeur maximale dans cette image vaut 68.

Notion de corrélation

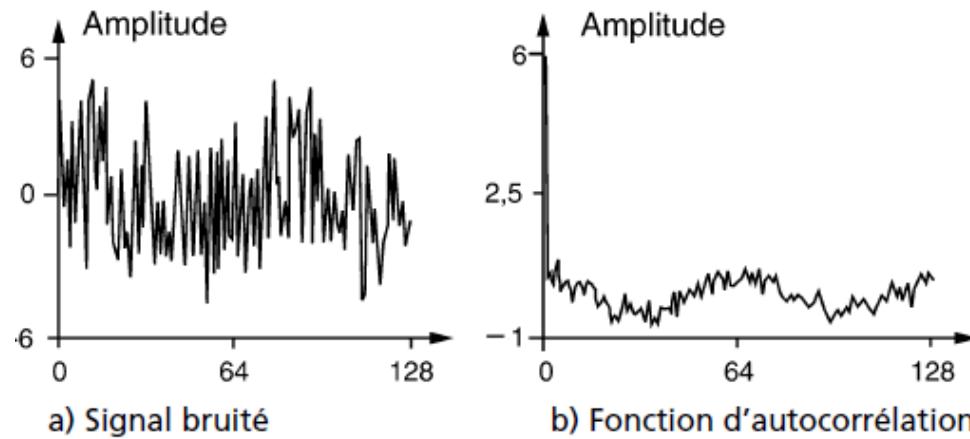
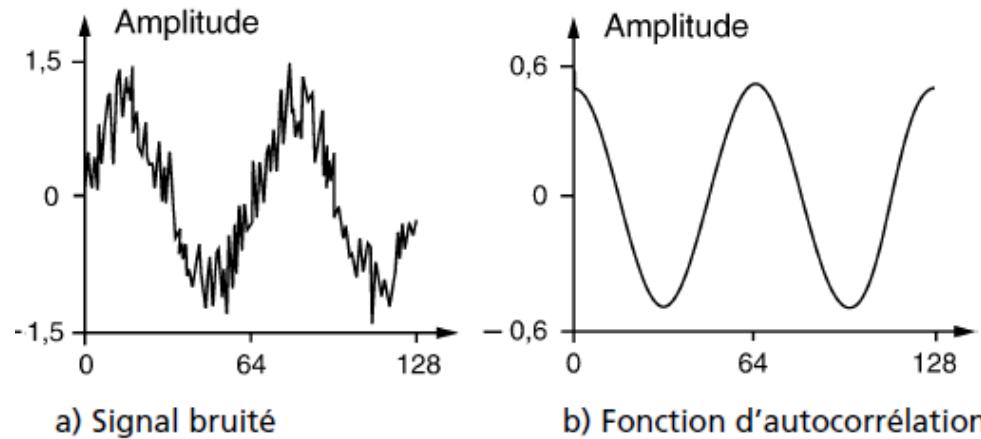
On créera une image binaire en choisissant, par exemple, 60 comme seuil.

Voici le résultat qui répond à la question:



Notion de corrélation

- Exemple d'autocorrélation (et influence du rapport S/N)



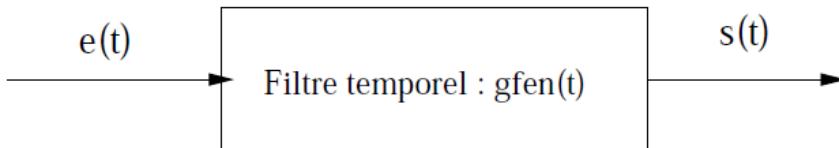
Chapitre 4: Filtrage des signaux analogiques

Table des matières chap 4

- Fenêtrage temporel
- Filtrage fréquentiel
- Filtres numériques
- Principe de causalité

Fenêtrage temporel

- Le terme de filtrage est habituellement utilisé dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporel, nous parlerons donc de fenêtrage. On le définit comme l'opération qui consiste à prélever, interrompre ou seulement atténuer un signal.



- Le signal de sortie est donc le produit du signal d'entrée par la fonction temporelle du filtre. La modification du spectre conséquente à ce filtrage est donnée par le théorème de Plancherel.

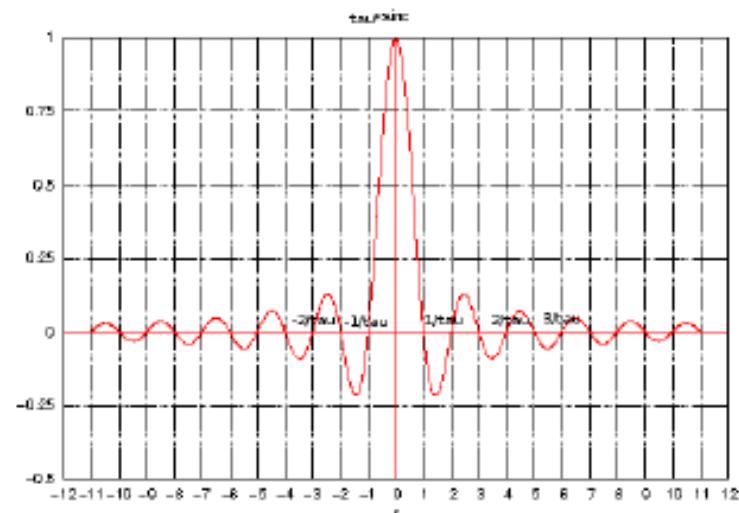
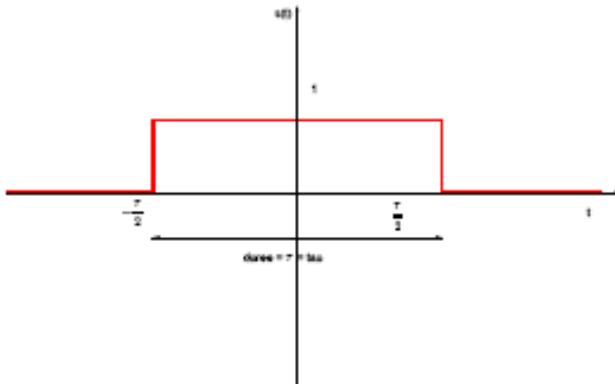
$$s(t) = g_{fen}(t) \cdot e(t) \longleftrightarrow S(f) = G_{fen}(f) * E(f)$$

- Le spectre du signal de sortie sera différent du spectre du signal d'entrée.

Fenêtrage temporel

- Le traitement numérique du signal impose qu'il soit limité dans le temps. On doit donc passer le signal dans une fenêtre rectangulaire dont la plus simple est la fonction porte.
- Nous avons vu que sa transformée de Fourier est un sinc

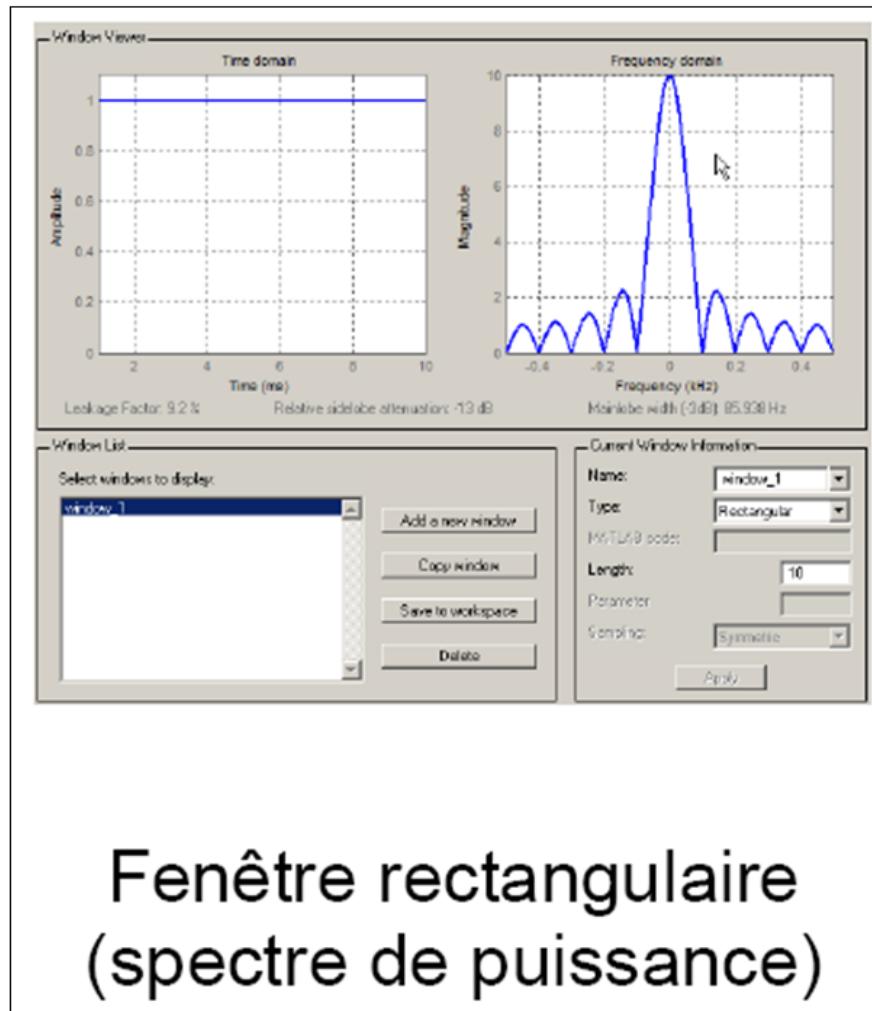
$$s(t) = \Pi_\tau(t).e(t) \longleftrightarrow S(f) = \tau.\text{sinc}(f\tau) * E(f)$$



Fenêtrage temporel

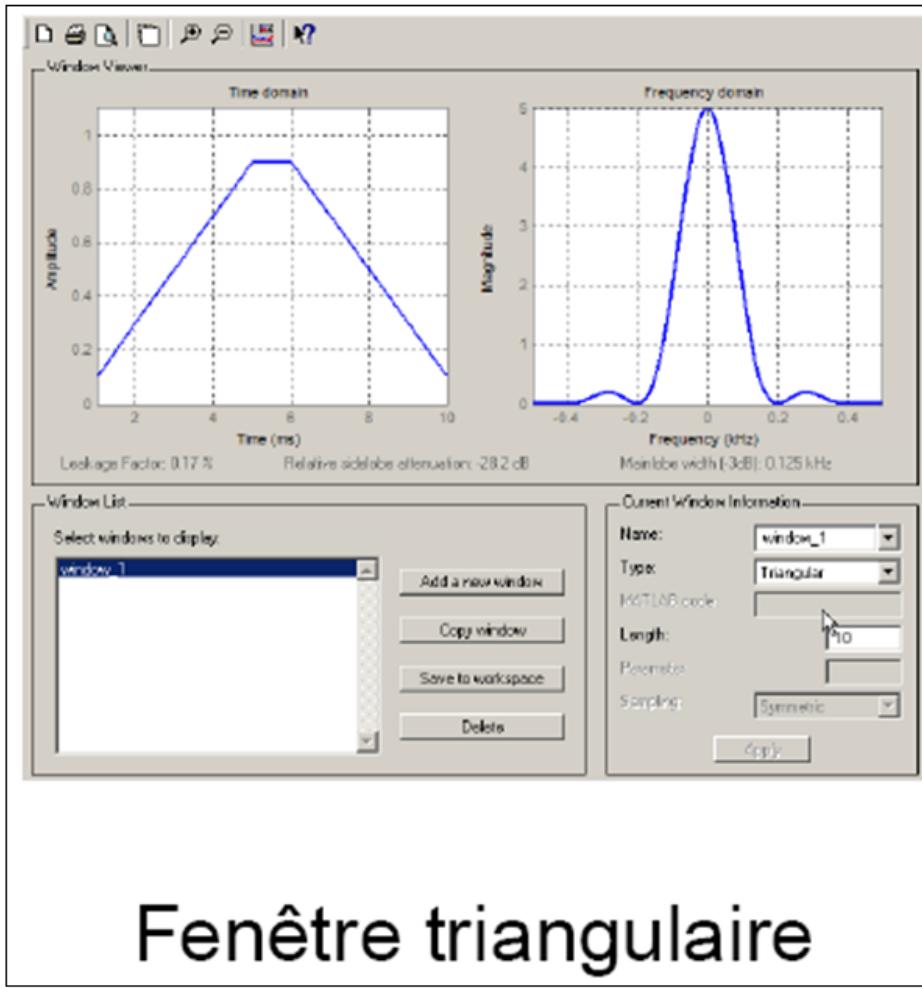
- Le fenêtrage temporel fait donc apparaître des fréquences inexistantes dans le signal d'entrée.
- *Exercice: quel est le spectre d'un cosinus limité dans le temps?*
- D'autres fenêtres, plus performantes sont utilisées:

Fenêtrage temporel



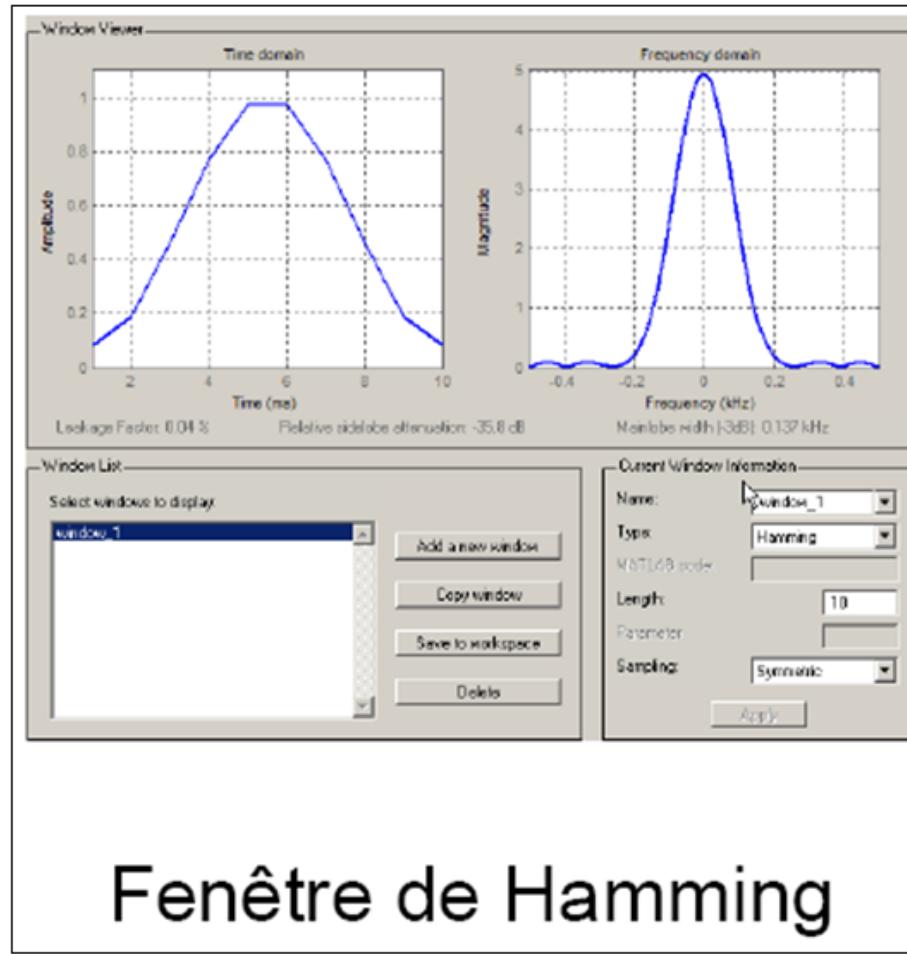
$$g_{fen}(t) = \Pi_\tau(t)$$

Fenêtrage temporel



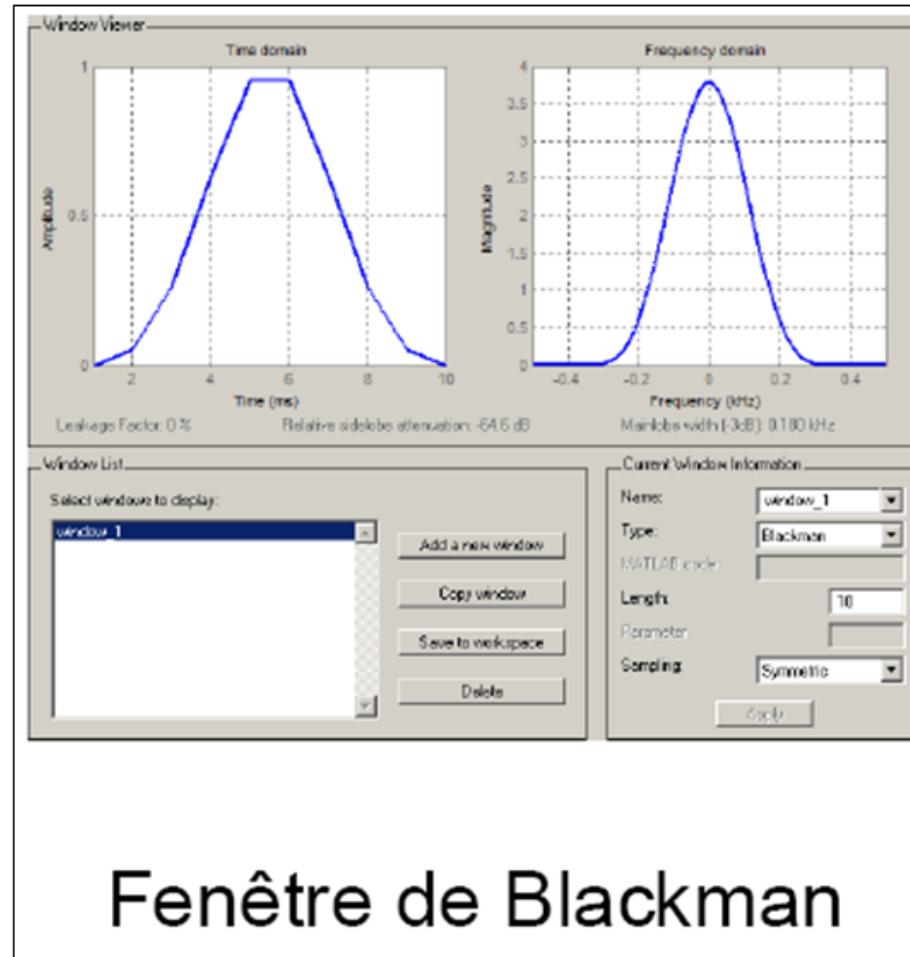
$$g_{fen}(t) = \Lambda_\tau(t)$$

Fenêtrage temporel



$$g_{fen}(t) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

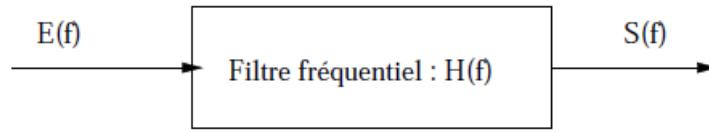
Fenêtrage temporel



$$g_{fen}(t) = 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi t}{\tau}\right)$$

Filtrage fréquentiel

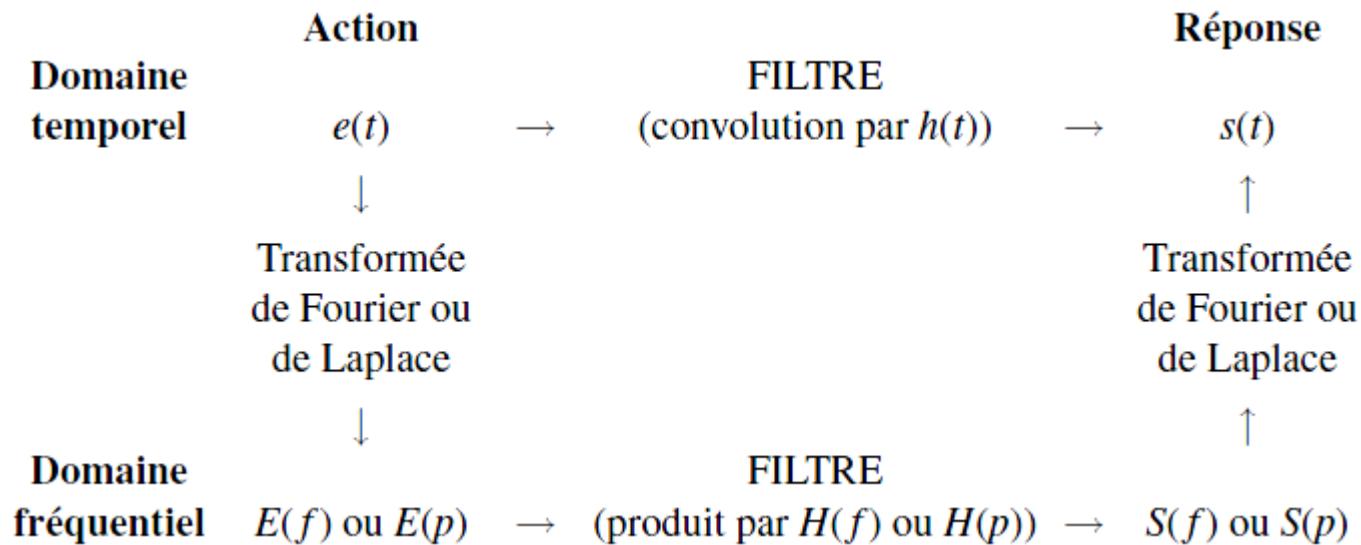
- Comme dans le domaine temporel, le filtrage fréquentiel est l'opération qui consiste à prélever, interrompre ou seulement atténuer tout ou partie des composantes fréquentielles d'un signal.



- Le filtre est défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ et sa transformée de Fourier $H(f)$.

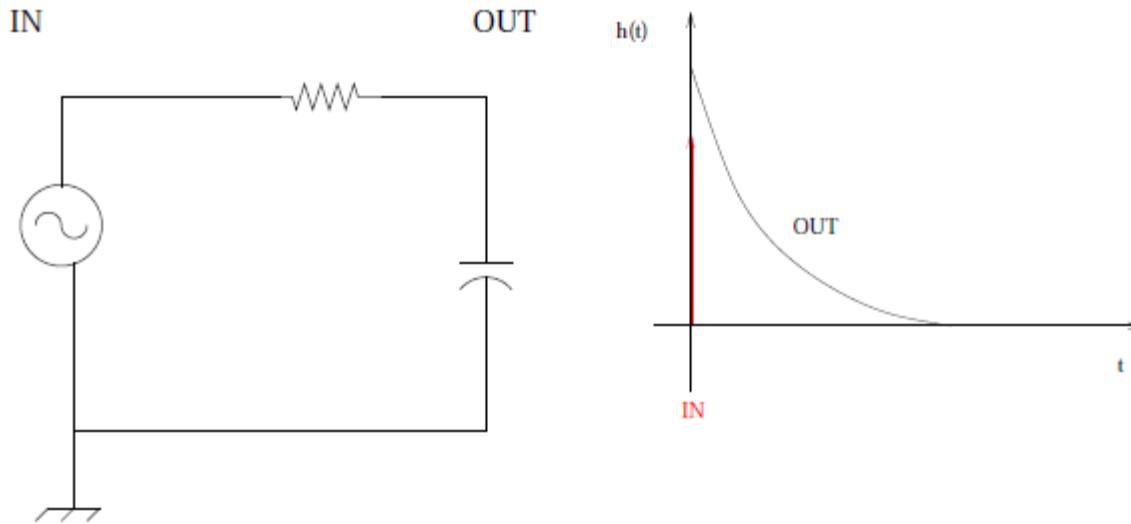
$$\begin{aligned}s(t) &= h(t) * e(t) \\ \Rightarrow S(f) &= H(f).E(f) \\ \Rightarrow H(f) &= \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{V_{out}}{V_{in}}\end{aligned}$$

Filtrage fréquentiel



Filtrage fréquentiel

- Filtre passe-bas RC



On peut montrer que $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$

Que vaut $H(f)$?

Filtrage fréquentiel

Dans le cours d'électricité de 1Ti, nous avons vu que, si i est l'intensité dans le circuit et V_{out} la tension aux bornes de la capacité, on aura

$$V_{out} = \frac{i}{jC\omega}$$

car l'impédance d'une capacité vaut $\frac{1}{jC\omega}$

Si z est l'impédance totale du circuit, la loi d'Ohm nous dit que

$$V_{in} = i.z = i.(R + \frac{1}{jC\omega})$$

Filtrage fréquentiel

$$\text{D'où: } \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jC\omega(R + \frac{1}{jC\omega})}$$

$$\text{D'où } H(f) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{Et } |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

La fréquence de coupure d'un filtre est définie comme la fréquence pour laquelle

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = 0.7 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Filtrage fréquentiel

Or $|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si

$$RC\omega_c = 1 \text{ càd si } \omega_c = \frac{1}{RC}$$

Comme $\omega_c = 2\pi f_c$, la fréquence de coupure $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

On a donc: $|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_c})^2}}$

- Le gain en tension est défini comme

$$A_v = 20 \log \frac{V_{out}}{V_{in}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_c})^2}} = -10 \log(1 + (\frac{f}{f_c})^2)$$

Filtrage fréquentiel

Si $f = f_c \Rightarrow A_v = -3dB$

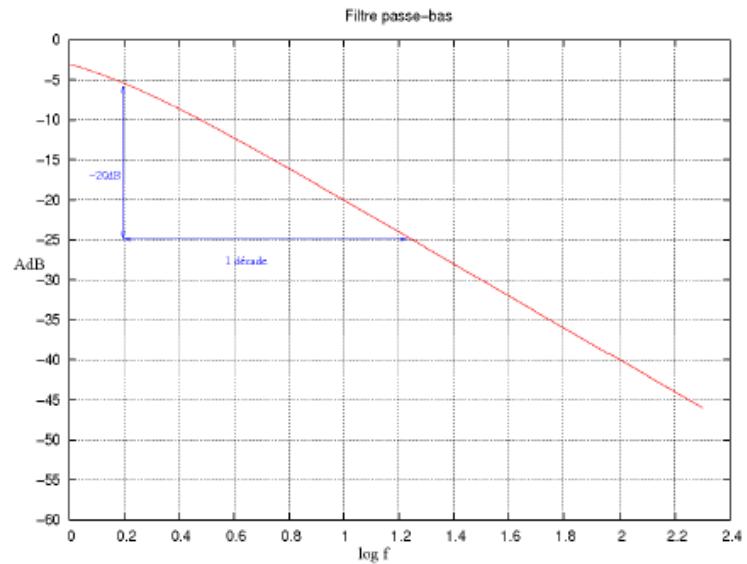
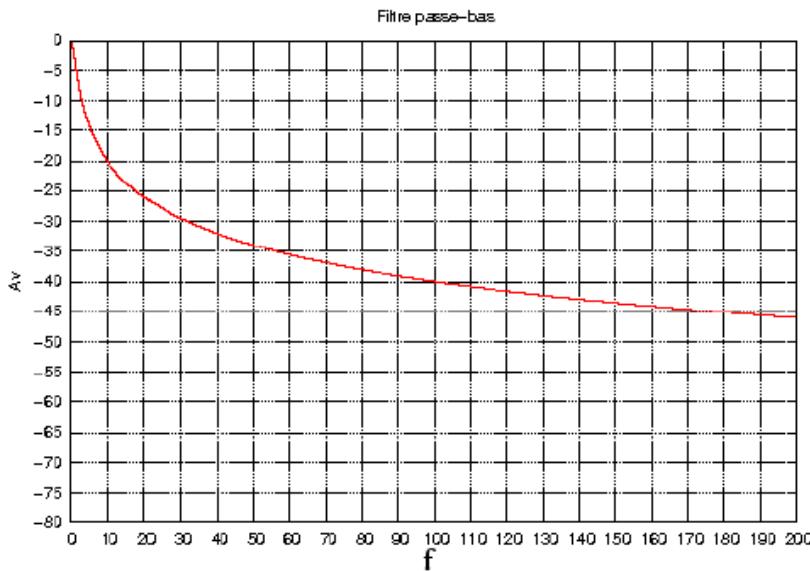
Si $\frac{f}{f_c} \gg 1$ Alors $1 + (\frac{f}{f_c})^2 \simeq (\frac{f}{f_c})^2$ et

$$A_v \simeq -10 \log(\frac{f}{f_c})^2 = -20 \log \frac{f}{f_c}$$

- Conclusion:
 - Si la fréquence est multipliée par 2, c'est-à-dire pour une octave, alors $A_v = -6dB$
 - Si la fréquence est multipliée par 10, c'est-à-dire pour une décade, alors $A_v = -20dB$

Filtrage fréquentiel

- Les diagrammes suivants donnent l'atténuation d'un filtre en fonction de la fréquence ainsi que l'atténuation en dB en fonction du logarithme de la fréquence. Ce dernier diagramme s'appelle "**diagramme de Bode**"



Filtrage fréquentiel

- Attention: une fréquence de coupure est définie comme une fréquence pour laquelle l'atténuation vaut -3dB **quelque soit l'ordre du filtre.**
- De manière générale, un filtre de Butterworth d'ordre n atténuerait de **-6ndB par octave ou -20ndB par décade. (pour des fréquences >>> fréquence de coupure)**
- Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t) = 0 \forall t < 0$
L'effet ne peut précéder la cause : nous reviendrons sur ce principe de causalité un peu plus tard.
- Propriétés:
 - **Tout filtre réalisable physique déphase.** La démonstration s'effectue en supposant que le filtre ne déphase pas et qu'il est réalisable. On conclut que, dans ce cas $h(t) = 0$ partout ce qui est absurde.

Filtrage fréquentiel

- Un filtre qui couperait une bande de fréquences données ne serait pas réalisable.

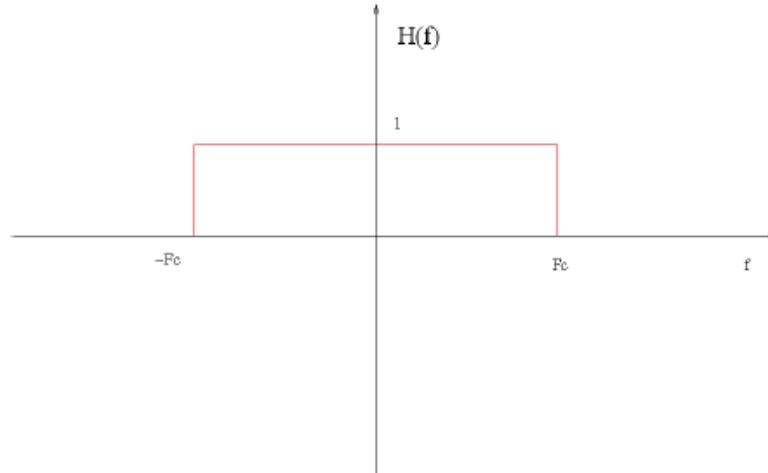
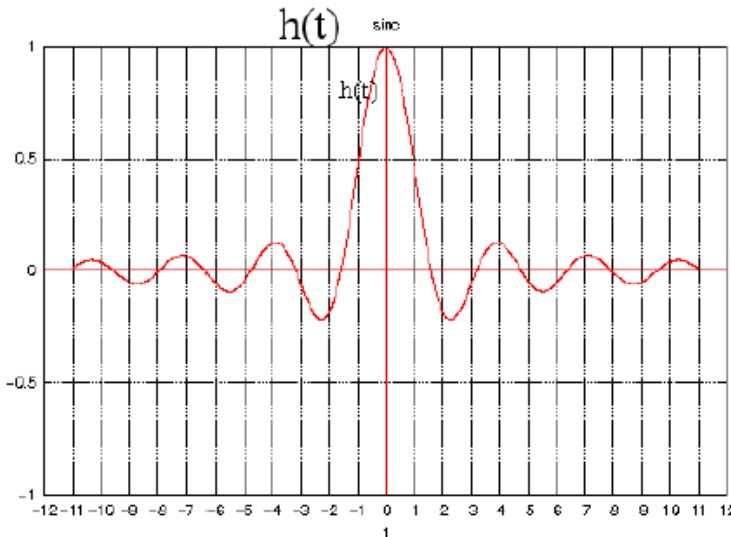
Démontrons cela:

Soit un filtre passe-bas coupant une bande de fréquences $[-f_c, f_c]$

Il aura comme fonction de transfert $H(f) = \Pi_{2F_c(t)}$

Sa réponse impulsionnelle sera donc $h(t) = 2F_c \text{sinc}(2F_c t)$

On voit sur la figure suivante que le filtre n'est pas réalisable puisqu'il ne respecte pas la propriété $h(t) = 0 \forall t < 0$



Filtrage fréquentiel

- Un **filtre analogique, continu et réalisable** est composé de résistances, de selfs, de capacités et d'ampli-opérationnels
Si $p = j\omega$, ils sont **caractérisés par**

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{k=0}^n b_k p^k}$$

- Exemples de filtres
 - Filtre passe-bas de premier ordre

$$H_1(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + \tau p} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{F_c}}$$

vu que $F_c = \frac{1}{2\pi RC}$

Filtrage fréquentiel

- Filtre passe-haut de premier ordre

$$H_2(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p} = \frac{j \frac{f}{F_c}}{1 + j \frac{f}{F_c}}$$

- Filtre passe-haut de deuxième ordre (où ξ représente le coefficient d'amortissement)

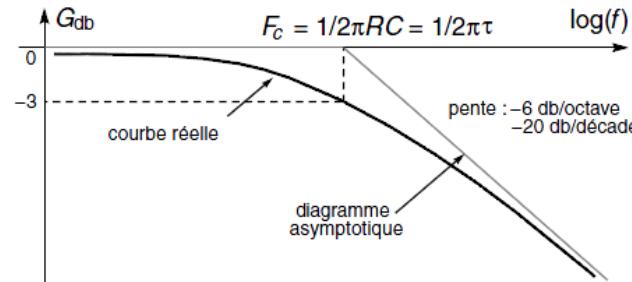
$$H_3(p) = \frac{1}{1 + 2\xi\tau p + (\tau p)^2}$$

- Filtre de Butterworth d'ordre n

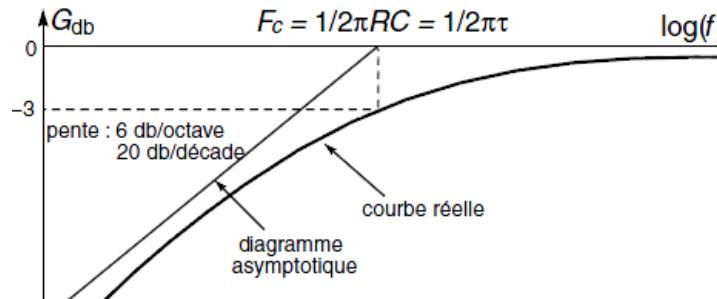
$$|G(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{f}{F_c}\right)^{2n}}}$$

Filtrage fréquentiel

- Gabarits des filtres:
 - Passe-bas



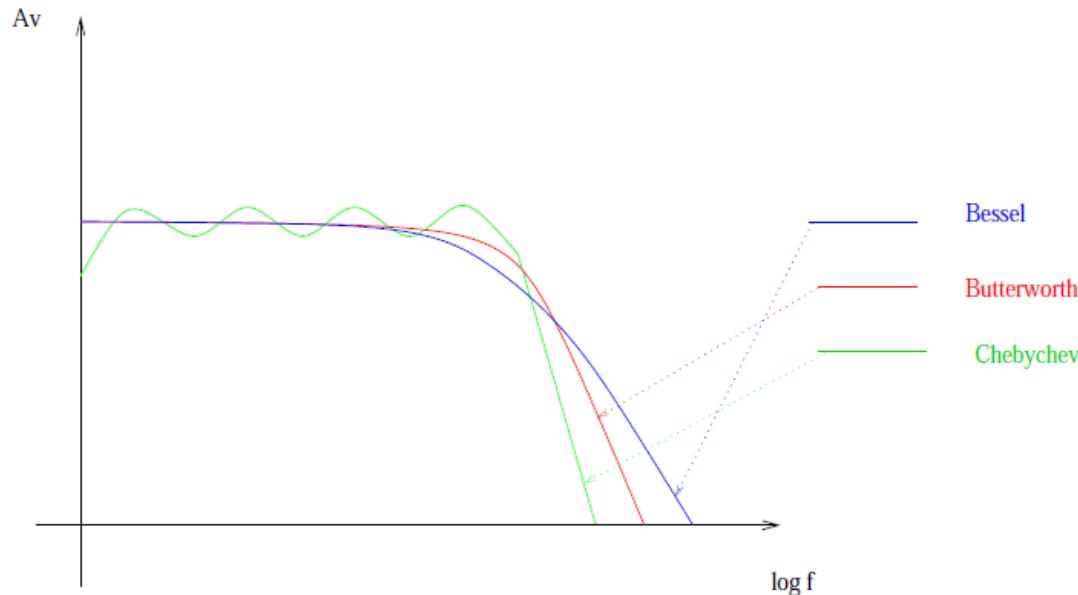
- Passe-haut



- Passe-bande
- Coupe-bande (association d'un passe-bas et d'un passe-haut)

Filtrage fréquentiel

- Types de filtres



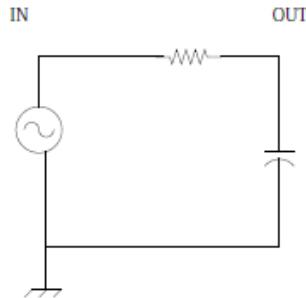
- Filtre de Butterworth: réponse très uniforme dans la bande passante mais produit un déphasage variant de façon non linéaire en fonction de la fréquence
- Filtre de Bessel: produit un déphasage linéaire

Filtrage fréquentiel

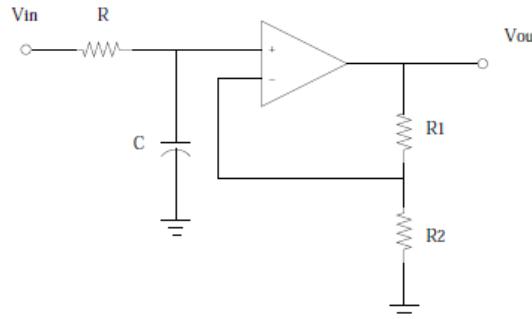
- Paramètres d'un filtre
un filtre est caractérisé par :
 - son type :
 - passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande,
 - Butterworth, Bessel, Chebychev
 - sa fréquence de coupure (pour laquelle l'atténuation vaut -3dB),
 - son ordre n : deux filtres successifs d'ordre 1 donneront un filtre d'ordre 2

Filtrage fréquentiel

- Réalisation de filtres analogiques
 - Filtre passe-bas, passif d'ordre 1



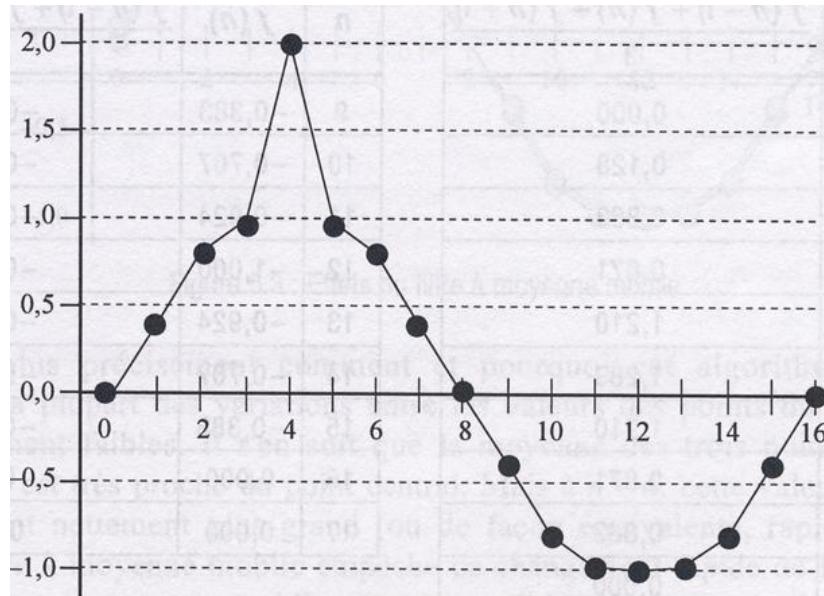
- Filtre passe-bas actif d'ordre 1



Dans le premier montage, la présence d'une charge fera chuter la tension de sortie. Ceci peut être évité dans le second montage

Filtres numériques

- Filtre à moyenne mobile
Soit un craquement sur un signal sinusoïdal



Appliquons sur ce signal une méthode simple : faisons la moyenne des valeurs numériques de part et d'autre du pic en incluant le pic lui-même.

Filtres numériques

Cette technique ne va pas éliminer le pic mais va contribuer à réduire son amplitude et à atténuer ainsi son effet sur le signal.
On décrit cet algorithme de la façon suivante :

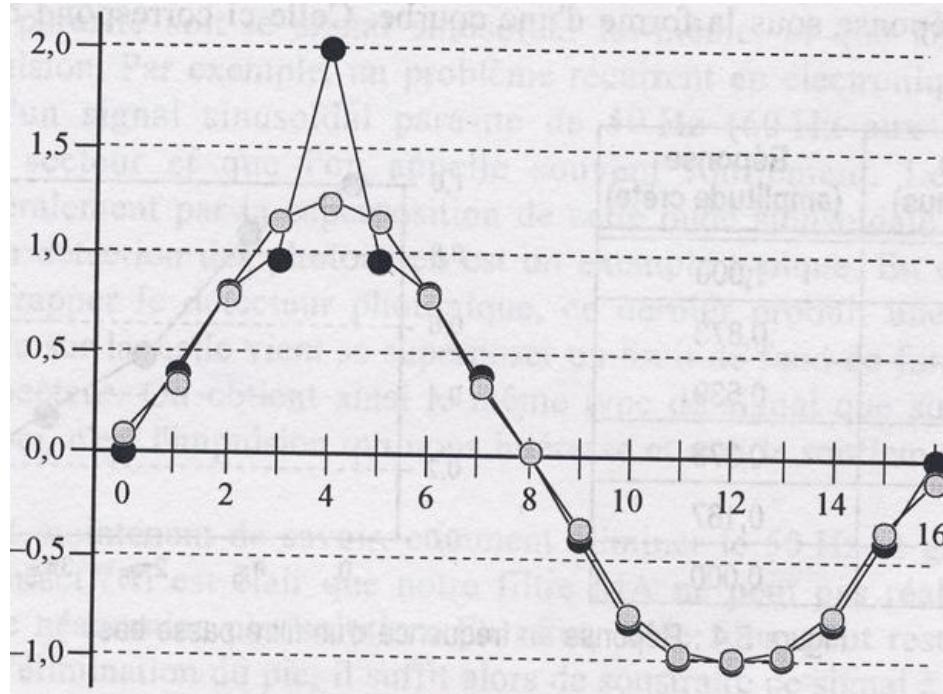
$$g(n) = \frac{f(n-1) + f(n) + f(n+1)}{3}$$

Où $g(n)$ est le signal de sortie issu du calcul de la moyenne effectué sur le signal d'entrée $f(n)$.

n	f(n)	g(n)	n	f(n)	g(n)
-1	0,000	0,000	9	-0,383	-0,363
0	0,000	0,128	10	-0,707	-0,671
1	0,383	0,363	11	-0,924	-0,877
2	0,707	0,671	12	-1,000	-0,949
3	0,924	1,210	13	-0,924	-0,877
4	2,000	1,283	14	-0,707	-0,671
5	0,924	1,210	15	-0,383	-0,363
6	0,707	0,671	16	0,000	-0,128
7	0,383	0,363	17	0,000	0,000
8	0,000	0,000			

Filtres numériques

Cette moyenne est appliquée sur la totalité du signal. Pour raisons de calcul des première et dernière valeurs, on suppose des valeurs antérieures et postérieures au signal nulles. On constat que cette routine a effectué un excellent travail de minimisation du craquement initial.



Filtres numériques

Ce filtre est peu sensible aux petites variations du signal d'entrée mais réagit fortement lorsque celui-ci présente des changements brusques. Ceci équivaut à dire que les basses fréquences sont peu atténuerées alors que les hautes fréquences le sont fortement. Ce filtre est donc un **filtre passe-bas**.

- Filtre différentiateur

Supposons maintenant, toujours dans le cadre du signal précédent, que le signal à conserver est le craquement.

Il suffit simplement de soustraire le signal reconstitué par le filtre précédent au signal lui-même!

Son équation est donnée par

$$g(n) = f(n) - \frac{f(n-1) + f(n) + f(n+1)}{3}$$

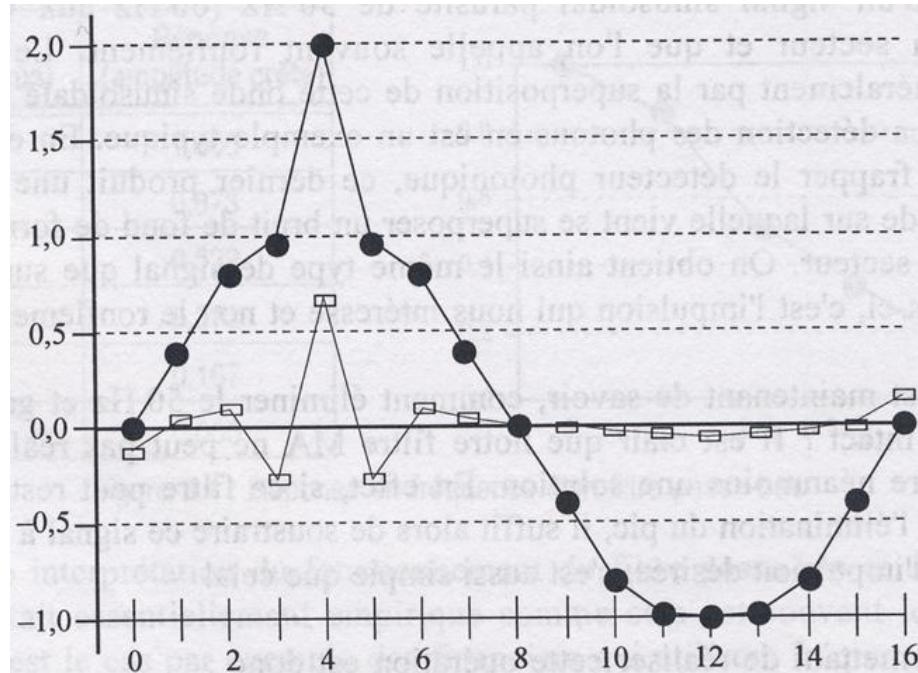
Filtres numériques

Les résultats obtenus sont les suivants :

n	f(n)	g(n)	n	f(n)	g(n)
-1	0,000	0,000	9	-0,383	-0,020
0	0,000	-0,128	10	-0,707	-0,036
1	0,383	0,020	11	-0,924	-0,047
2	0,707	0,036	12	-1,000	-0,051
3	0,924	-0,286	13	-0,924	-0,047
4	2,000	0,717	14	-0,707	-0,036
5	0,924	-0,286	15	-0,383	-0,020
6	0,707	0,036	16	0,000	0,128
7	0,383	0,020	17	0,000	0,000
8	0,000	0,000	18	0,000	0,000

Filtres numériques

Et le signal :



Ce filtre laisse donc passer les hautes fréquences : il s'agit d'un **filtre passe-haut**.

Filtres numériques

- Ces deux filtres illustrent le principe des filtres numériques. En pratique, les filtres utilisés sont plus sophistiqués. Il y a donc lieu d'utiliser Matlab.

La fonction de transfert d'un filtre peut s'écrire avec $p = j2\pi f$

$$H(f) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p^i}{\sum_{k=0}^n b_k p^k}$$

Si on désire filtrer un signal en utilisant un script, on utilisera par exemple les fonctions *butter* et *filter*.

L'instruction *butter* fournira l'ensemble des coefficients a_i et b_i du filtre numérique.

Ainsi, pour un filtre passe-bas du premier ordre:

$$H(f) = \frac{1}{1 + RCp} \text{ d'où } a_i = 0 \text{ et } b_0 = 1, b_1 = RC$$

Filtres numériques

Pour filtrer un signal s , les instructions seront donc

```
[b, a] = butter(n, Wn, 'ftype')  
filter(b, a, s)
```

butter signifie qu'il s'agit d'un filtre de Butterworth

n est l'ordre du filtre

ftype est son type (par défaut passe-bas)

s est le signal à filtrer

Wn est la fréquence de coupure normalisée qui $= 1$ si $F_c = F_s/2$

On aura donc $Wn = \frac{F_c}{F_s/2}$

Exemple: On désire filtrer un signal s avec un *filtre passe-bas* de Butterworth d'ordre 2, avec $F_c = 400$ et $F_s = 2000$

```
»[b,a]=butter(2,400/1000)  
»y=filter(b,a,s)
```

Principe de causalité

- Le principe de causalité suggère que le fonctionnement d'un filtre s'accomplisse en temps-réel. Pour comprendre intuitivement le principe de causalité il est préférable d'analyser ses effets qui sont relativement simples à assimiler sur un exemple pratique. Pour ce faire, revenons sur le filtre passe-bas à moyenne mobile et examinons précisément les indices des échantillons utilisés dans son expression. On note que le calcul de l'échantillon d'indice n fait intervenir les échantillons d'indice $n-1$ et $n+1$. Si l'on considère et c'est toujours le cas, que l'indice n correspond à l'échantillon courant (celui qui vient immédiatement), un problème apparaît inévitablement sur la signification de l'échantillon $n+1$. En effet, puisque n est l'instant courant, le terme $f(n+1)$ de l'équation constitue une valeur future.

Principe de causalité

Cela ne pose pas de problème dans l'exemple si l'on suppose un enregistrement. Les données étant sauvegardées, tous les points sont disponibles aux instants n et $n+1$. Pour les applications en temps-réel, il n'y a cependant pas le choix, on est contraint d'utiliser uniquement les valeurs courantes et passées.

Le filtre basé sur ces valeurs est appelé filtre causal alors que celui nécessitant une ou plusieurs valeurs futures est dit non-causal (c'est le cas du filtre MA).

Notons que les filtres naturels du monde réel sont nécessairement causaux. Cette dernière remarque permet de souligner un autre avantage du traitement numérique de signal qui est de permettre la construction de filtres (non-causaux) ne pouvant pas être réalisés par d'autres techniques.

Principe de causalité

Reprendons le cas du filtre MA, et remarquons qu'on peut rendre le filtre causal en décalant vers l'avant l'instant d'arrivée du signal de sortie.

Son équation devient donc :

$$y(n-1) = \frac{f(n) + f(n-1) + f(n-2)}{3}$$

Cette équation ne travaille pas exactement comme la version originale non-causale, puisque sa forme n'est pas symétrique par rapport à l'échantillon n . Les résultats obtenus sont néanmoins comparables.

Chapitre 5:

Echantillonnage

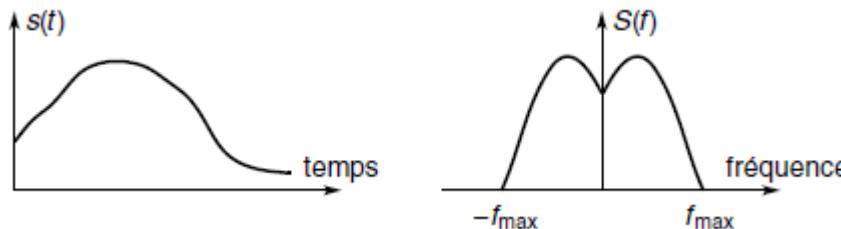
Table des matières chap 5

- Echantillonnage idéal
- Repliement de spectre
- Exemples et exercices

Echantillonnage idéal

- Hyp: On suppose un signal à spectre borné:

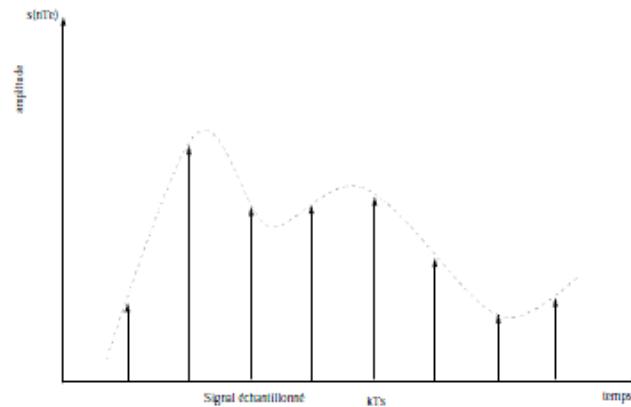
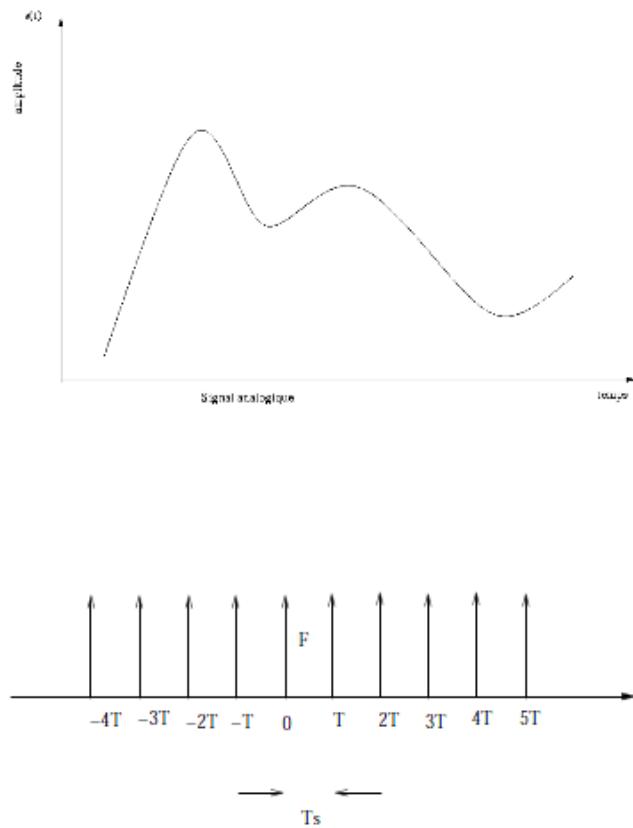
$$S(f) = 0 \text{ pour } f > f_{max}$$



- L'**échantillonnage** consiste à représenter un signal analogique continu $s(t)$ par un ensemble de valeurs $s(nTs)$ avec n entier situées à des instants discrets espacés de Ts (T_e) constante, appelée la **période d'échantillonnage**. Cette opération est réalisée par un circuit appelé « préleur ou échantillonneur » symbolisé souvent par un interrupteur.
- La fréquence d'échantillonnage est $F_s = \frac{1}{T_s}$

Echantillonnage idéal

- Echantillonner un signal, c'est le multiplier par un peigne de Dirac ($\text{Pgn}_{T_e}(t)$) de période T_s (T_e) et donc de fréquence $F_s = \frac{1}{T_s}$



Echantillonnage idéal

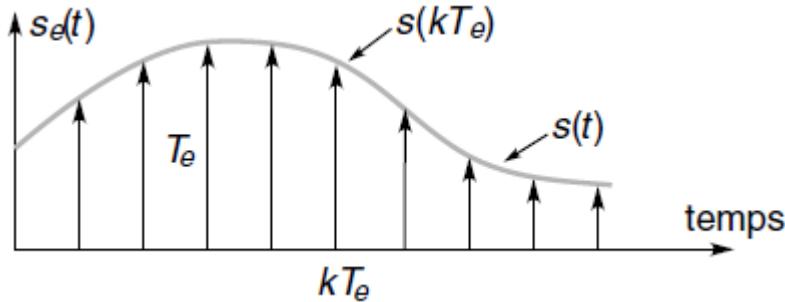
- Propriété: le spectre d'un signal échantillonné est périodique de période F_s
Démontrons cela...
Si l'on peut définir le peigne de Dirac comme une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de la période d'échantillonnage T_e , ce qui revient à écrire

$$\text{Pgn}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$

alors, on peut dire que le signal échantillonné $s_e(t)$ est une suite de pics de Dirac dont les poids sont les valeurs du signal $s(t)$ aux instants kT_e .

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e)$$

Echantillonnage idéal



D'après les propriétés du pic de Dirac, l'expression du signal échantillonné peut être mise sous la forme de l'expression suivante qui est rigoureusement équivalente:

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$

Autrement dit

$$s_e(t) = s(t) \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t)$$

Echantillonnage idéal

Dès lors, la question essentielle à se poser est : le signal échantillonné $se(t)$ contient-il la même information que le signal initial $s(t)$? Une manière de répondre à cette question est d'étudier le spectre $Se(f)$ du signal échantillonné $se(t)$ et de la comparer au spectre $S(f)$ du signal initial $s(t)$.

Nous connaissons la transformée de Fourier de la suite de pics de Dirac qui est donnée par

$$Pgn_{T_0}(t) \xleftrightarrow{F} F_0 \cdot Pgn_{F_0}(f) = F_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(f - nF_0)$$

Echantillonnage idéal

D'après le théorème de Plancherel, le spectre du signal échantillonné sera donné par le produit de convolution du spectre du signal initial avec la transformée de Fourier de la suite de pics de Dirac

$$S_e(f) = S(f) * \left[F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_e) \right]$$

Étant donné la propriété du pic de Dirac, élément neutre de la convolution

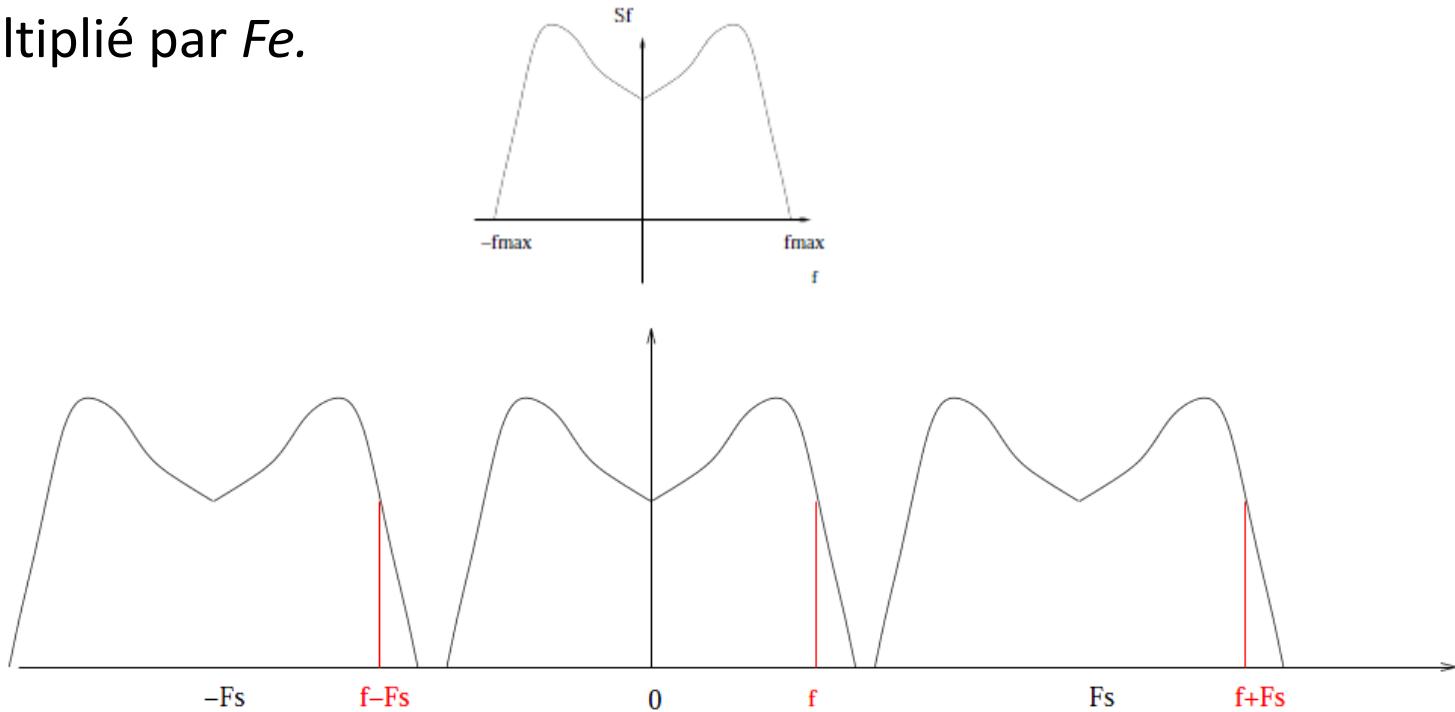
$$S_e(f) = F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - k \cdot F_e)$$

Ce qui revient à écrire

$$S_e(f) = F_e [S(f) + S(f - F_e) + S(f + F_e) + S(f - 2F_e) + S(f + 2F_e) + \dots]$$

Echantillonnage idéal

Par conséquent, le spectre de l'échantillonné $S_e(f)$ s'obtient en périodisant avec une période égale à F_e , sur l'axe des fréquences, la transformée de Fourier $S(f)$ du signal initial $s(t)$ multiplié par F_e .



Echantillonnage idéal

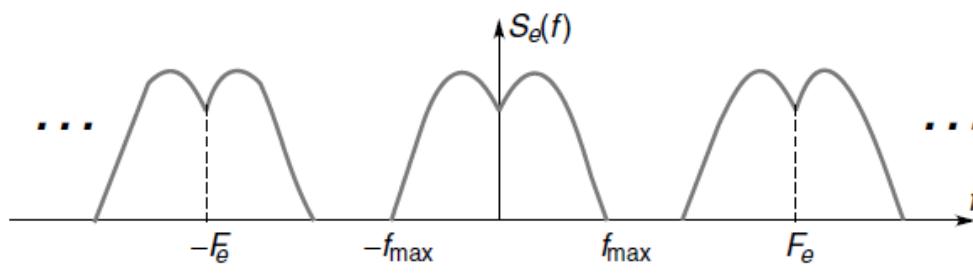
- Deux remarques conséquentes à ce que l'on vient de démontrer:
 - contrairement au signal initial $s(t)$, qui avait un spectre borné et limité par la fréquence f_{\max} ; le signal échantillonné $s_e(t)$ possède un spectre non borné puisque la périodisation est infinie de part et d'autre de l'axe des ordonnées
 - De plus, pour que la construction périodique du spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné ne produise pas une déformation du motif répété du spectre $S(f)$ du signal initial, il faut et il suffit que la fréquence de répétition F_e , qui est la fréquence d'échantillonnage, soit égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale f_{\max} contenue dans le signal initial

➔ c'est le fameux théorème de Shannon-Nyquist

Echantillonnage idéal

- Théorème de Shannon-Nyquist: pour une fréquence d'échantillonnage fixée et égale à F_e , la fréquence limite $F_e/2$, appelée fréquence de Shannon ou fréquence de Nyquist ou encore fréquence de repliement (*folding frequency*), correspond à la fréquence maximale admissible dans le spectre du signal afin d'éviter les distorsions du spectre de l'échantillonné.

$$F_e \geq 2 \cdot f_{\max}$$

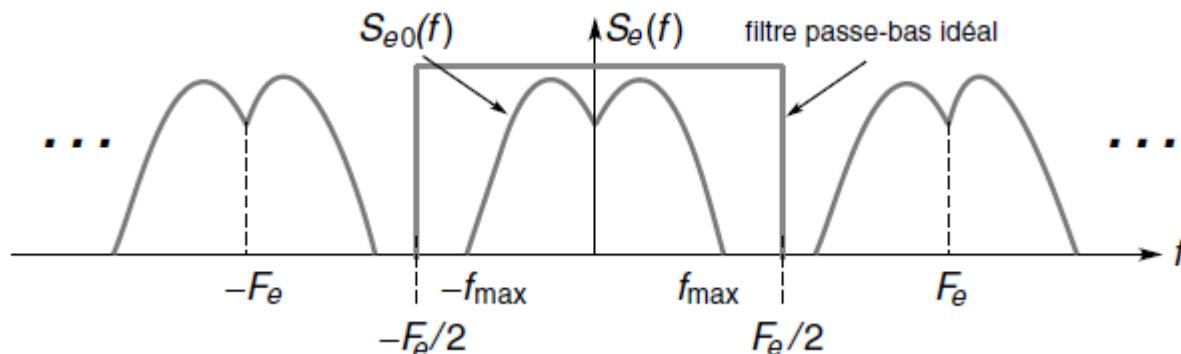


Echantillonnage idéal

- Problème: comment revenir au signal initial à partir du signal échantillonné, c'est-à-dire, si l'on dispose du signal $s_e(t)$, peut-on retrouver le signal $s(t)$?

C'est possible en utilisant un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_e/2$.

La fonction réalisée par le filtre passe-bas idéal est une fonction porte.... ☺



Echantillonnage idéal

- On peut donc exprimer le spectre de base de l'échantillonné sous la forme

$$S_{e0}(f) = S_e(f) \cdot \Pi_{F_e}(f)$$

En appliquant le théorème de Plancherel, on obtient l'expression du signal temporel ayant le spectre de base du signal échantillonné

$$s_{e0}(t) = s_e(t) * [F_e \cdot \text{sinc}(F_e t)] = F_e \cdot \left[s_e(t) * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} \right]$$

Et en considérant l'expression du signal échantillonné, cela devient

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) \right] * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t}$$

Echantillonnage idéal

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) \right] * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t}$$

Ou encore

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)} \right]$$

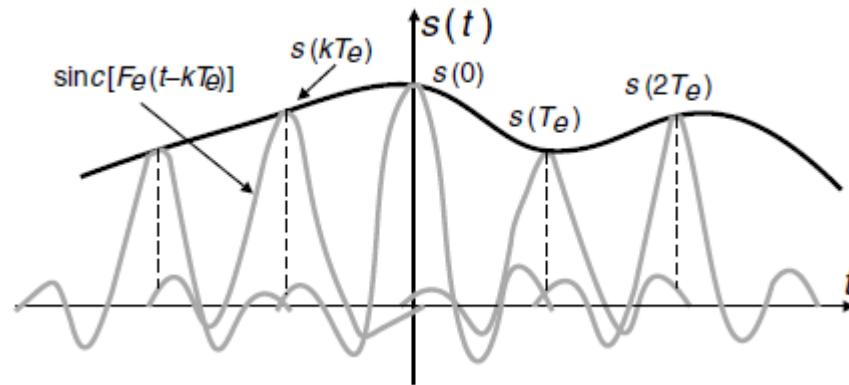
Et finalement par identification, nous obtenons une expression de $s(t)$ en fonction des échantillons prélevés aux instants T_e :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)}$$

Echantillonnage idéal

Le théorème de l'échantillonnage peut aussi s'exprimer de la manière suivante : un signal continu de spectre borné dans l'intervalle de fréquences $(-f_{\max}, +f_{\max})$ est complètement déterminé par les valeurs qu'il prend à des instants régulièrement espacés de $1/(2 f_{\max})$.

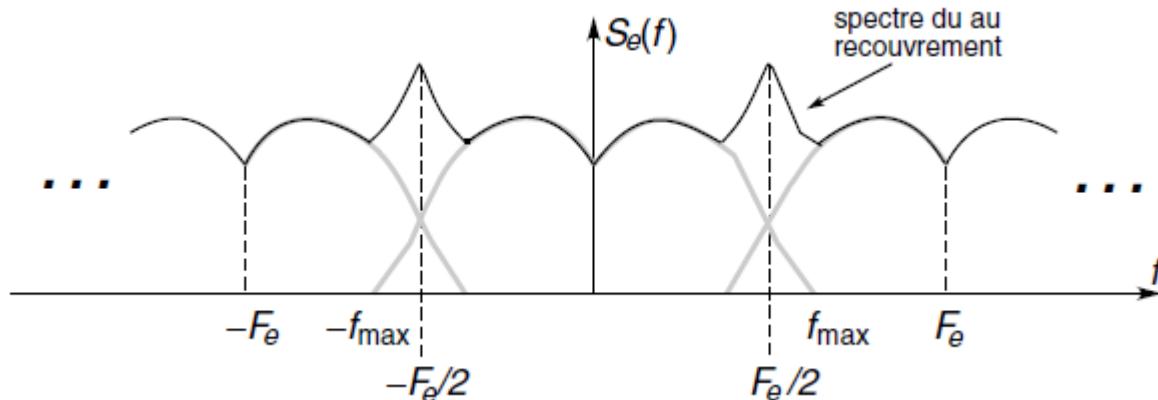
En effet cette somme de produits « $s(kT_e) \cdot \text{sinc}(F_e(t - kT_e))$ » permet de reconstituer exactement le signal et donc l'échantillonnage idéal, dans les conditions du théorème de Shannon, conserve la **totalité de l'information** contenue dans le signal.



Repliement de spectre

- Dans le cas où la condition du théorème de Shannon n'est pas respectée, il y a donc un phénomène de recouvrement de spectre (*folding, aliasing*).

Le spectre résultant a l'allure suivante:



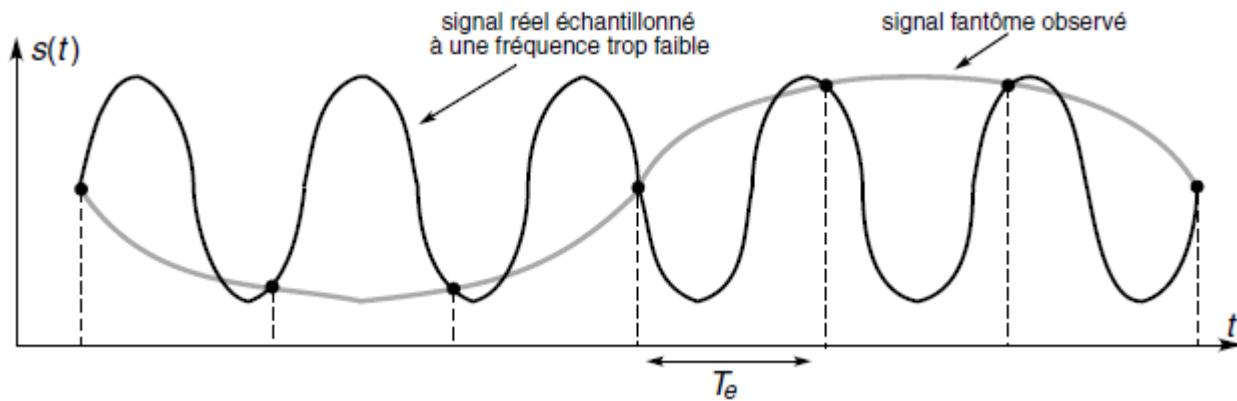
Repliement de spectre

Et donc une fréquence située dans la zone de repliement est susceptible d'appartenir à la fois au spectre de base du signal initial et à son spectre image décalé de $\pm Fe$.

Ainsi, pour une fréquence d'échantillonnage Fe telle que $Fe < 2 f_{\max}$ (non respect du théorème d'échantillonnage), une fréquence fr comprise entre $Fe/2$ et f_{\max} est vue comme la fréquence $Fe - fr$, dite fréquence fantôme de la fréquence fr .

Cette raie fréquentielle due au repliement va apparaître comme une raie appartenant au signal alors qu'elle n'a aucune existence réelle ou encore l'amplitude de cette raie fantôme va s'ajouter à l'amplitude de la composante fréquentielle $fn = Fe - fr$, existant réellement.

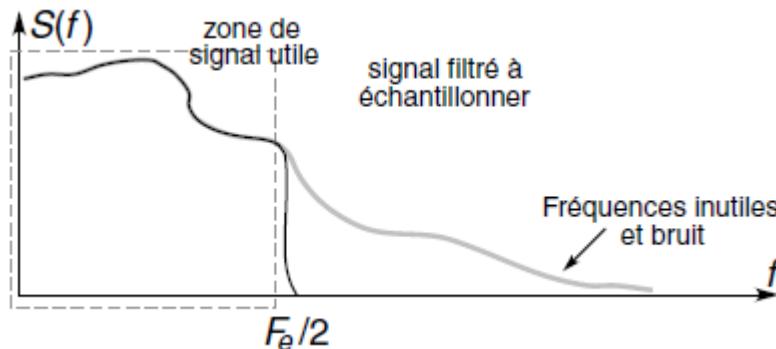
Repliement de spectre



Repliement de spectre

Dans le cas où le signal analogique possède des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist, il faut faire précéder l'échantillonneur d'un **filtre passe-bas anti-repliement**, dont la fréquence de coupure est la fréquence de Nyquist, de manière à supprimer toute fausse fréquence.

Dans la plupart des cas, ce filtrage est indispensable ; en effet le signal peut soit intégrer des hautes fréquences inutiles pour son exploitation ou être superposé à un bruit qui augmente fortement la fréquence maximale



Exemples et exercices

- Exemple: Si on écoute un “**La**” de la 3ème octave avec une fréquence d'échantillonnage de 600Hz, quelles fréquences va-t-on entendre?

f	$f+F_s$	$f-F_s$	$f+2F_s$	$f-2F_s$
440	1040	-160	1640	-760
-440	160	-1040	760	-1640

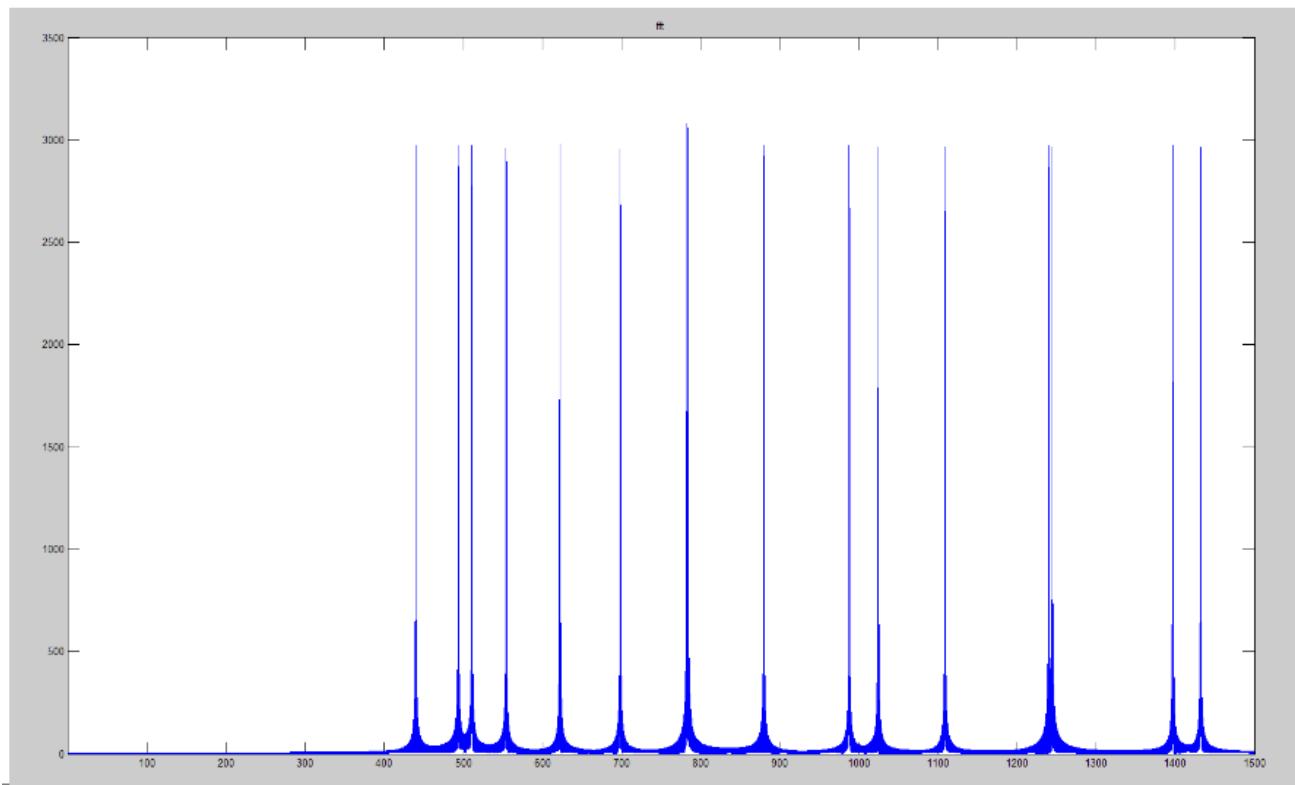
- Quelles fréquences va-t-on entendre si on écoute une succession de notes commençant avec un “**La**” de la 3ème octave sachant que la fréquence d'échantillonnage vaut 3000 Hz?

Exemples et exercices

f	-f	Fs-f	f-Fs	2Fs-f
440,00	-440,00	2560,00	-2560,00	5560,00
493,88	-493,88	2506,12	-2506,12	5506,12
554,37	-554,37	2445,63	-2445,63	5445,63
622,25	-622,25	2377,75	-2377,75	5377,75
698,46	-698,46	2301,54	-2301,54	5301,54
783,99	-783,99	2216,01	-2216,01	5216,01
880,00	-880,00	2120,00	-2120,00	5120,00
987,77	-987,77	2012,23	-2012,23	5012,23
1108,73	-1108,73	1891,27	-1891,27	4891,27
1244,51	-1244,51	1755,49	-1755,49	4755,49
1396,91	-1396,91	1603,09	-1603,09	4603,09
1567,98	-1567,98	1432,02	-1432,02	4432,02
1760,00	-1760,00	1240,00	-1240,00	4240,00
1975,53	-1975,53	1024,47	-1024,47	4024,47
2217,46	-2217,46	782,54	-782,54	3782,54
2489,02	-2489,02	510,98	-510,98	3510,98
2793,83	-2793,83	206,17	-206,17	3206,17
3135,96	-3135,96	-135,96	135,96	2864,04
3520,00	-3520,00	-520,00	520,00	2480,00

Exemples et exercices

On entendra les fréquences jusqu' $\frac{F_s}{2}$ ensuite 1432.02Hz,
1240Hz, 1024.47Hz, 782.54Hz, 510.98Hz, ...



Chapitre 6: Analyse spectrale des signaux discrets

Table des matières chap 6

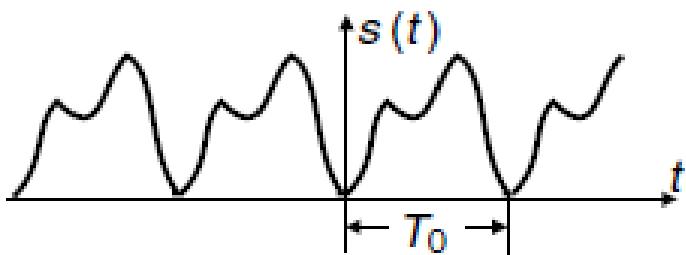
- Les différentes représentations fréquentielles
- Transformée de Fourier discrète (DFT)
- Transformée de Fourier rapide (FFT)
- Spectrogramme

Les différentes représentations fréquentielles

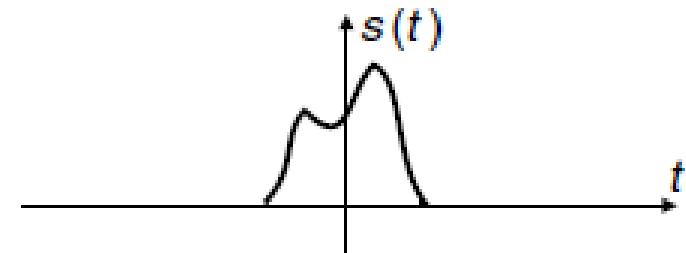
- Correspondance entre les caractéristiques des signaux et des représentations spectrales associées:

<i>Signal</i>	<i>Spectre</i>	
	Méthode de calcul	Caractéristiques
Continu et périodique (1)	Série de Fourier	Discret et non périodique
Continu et non périodique (2)	Intégrale de Fourier	Continu et non périodique
Discret et non périodique (3)	Intégrale de Fourier	Continu et périodique
Discret et périodique (4)	Transformée de Fourier discrète	Discret et périodique

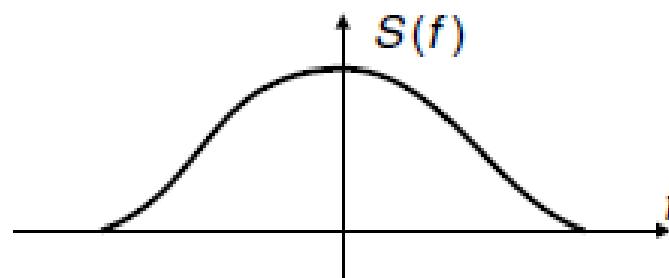
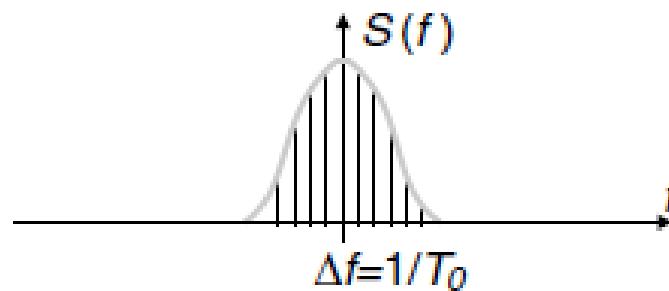
Les différentes représentations fréquentielles



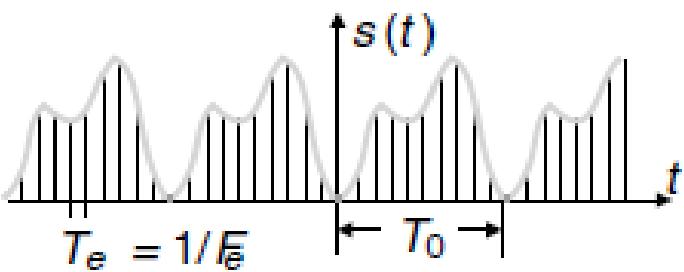
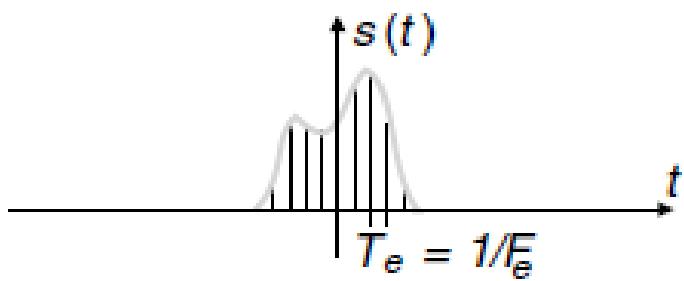
1



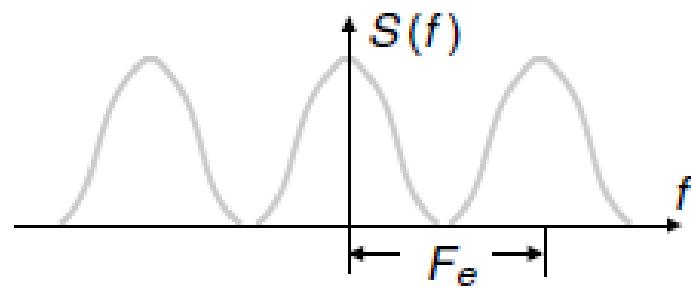
2



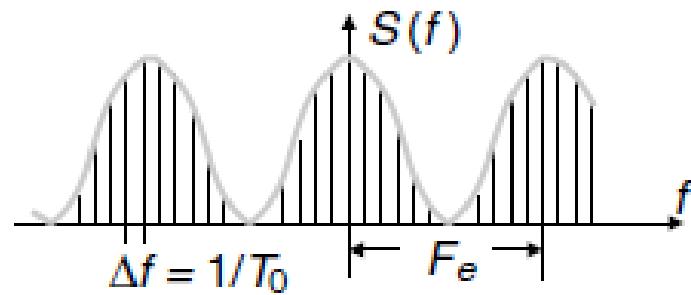
Les différentes représentations fréquentielles



3



4



DFT

- Dans le but de calculer la transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille finie, on est amené à discréteriser le signal (échantillonnage) et à tronquer temporellement ce signal. On obtient ainsi une suite de N termes représentée par:

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

DFT

Appelons s_k les valeurs du signal $s_{e,\Pi}(t)$ aux instants kTe . Le spectre $S_{e,\Pi}(f)$ de ce signal échantillonné limité à N termes $s_{e,\Pi}(t)$ est donné sous la forme de N éléments de valeurs S_m espacés de F_e/N suivant une expression identique

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot \delta\left(f - m \frac{F_e}{N}\right)$$

De la même façon que la transformée de Fourier $S(f)$ du signal analogique $s(t)$ s'exprime sous la forme

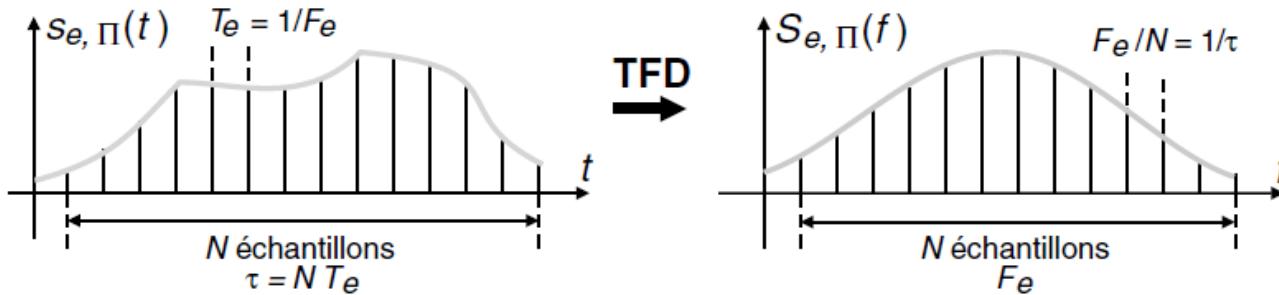
$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

DFT

On appelle Transformée de Fourier Discrète (TFD ou DFT : *Discrete Fourier Transform*) d'un signal défini par N échantillons s_k , la suite de N termes S_m définie par

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{N}}$$

La transformée de Fourier discrète réalise la correspondance entre deux suites de N termes



DFT

Si les N échantillons ont été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$), la durée du signal échantillonné, sur laquelle a été calculée la transformée de Fourier discrète, est donnée par

$$\tau = N \cdot T_e = \frac{N}{F_e}$$

En conséquence, le spectre de ce signal échantillonné, composé aussi de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à

$$\Delta f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N \cdot T_e} = \frac{F_e}{N}$$

DFT

Après le calcul de la DFT, on obtient une suite de N termes. Comme nous l'avons vu précédemment, les N échantillons temporels ayant été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$) et sur une durée τ ($\tau = N/T_e$), le spectre, composé de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à $Df = F_e/N$.

L'interprétation des N échantillons S_m obtenus peut se faire en s'appuyant sur une analogie avec la représentation spectrale obtenue avec le développement en série de Fourier. Chaque échantillon peut être considéré comme un « harmonique » du spectre du signal. D'autre part le calcul est réalisé avec un indice positif des échantillons variant entre $[0, N - 1]$ qui correspond à un domaine fréquentiel $[0, F_e[$. Mais il serait plus exact de la représenter sur un intervalle $]-F_e/2, F_e/2]$.

DFT

Échantillons	Fréquence [0, F_e]	Fréquence [- $F_e/2$, $F_e/2$]	Interprétation
s_0	0	0	Composante continue
s_1	Δf	Δf	Fondamentale ou 1 ^{re} harmonique
s_2	$2\Delta f$	$2\Delta f$	2 ^e harmonique
s_3	$3\Delta f$	$3\Delta f$	3 ^e harmonique
...			
$s_{N/2-1}$	$F_e/2 - \Delta f$	$F_e/2 - \Delta f$	($N/2 - 1$) ^e harmonique
$s_{N/2}$	$F_e/2f$	$F_e/2f$	($N/2$) ^e harmonique (fréquence de Nyquist)
$s_{N/2+1}$	$F_e/2 + \Delta f$	$-F_e/2 + \Delta f$	($N/2 + 1$) ^e harmonique / - ($N/2 - 1$) ^e harmonique
...			
s_{N-3}	$F_e - 3\Delta f$	$-3\Delta f$	($N - 3$) ^e harmonique / - 3 ^e harmonique
s_{N-2}	$F_e - 2\Delta f$	$-2\Delta f$	($N - 2$) ^e Harmonique / - 2 ^e harmonique
s_{N-1}	$F_e - \Delta f$	$-\Delta f$	($N - 1$) ^e harmonique / -1 ^e harmonique

DFT

Cette interprétation des échantillons obtenus montre bien que la précision d'analyse fréquentielle du spectre est donné par Δf qui est directement lié à la fenêtre d'observation du signal τ ($\tau = 1/\Delta f$). Pour une fréquence d'échantillonnage F_e constante, l'augmentation de la précision en fréquence Δf passe par une augmentation du nombre de points N et donc de la fenêtre d'observation τ .

FFT

- La transformée de Fourier rapide (FFT) est un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations pour calculer la transformée de Fourier discrète (DFT). Pour N échantillons du signal, la DFT nécessite N^2 multiplications complexes alors que la FFT nécessite $(N/2)\log(N)$ multiplications complexes.
Pour 1024 échantillons, le calcul de la FFT réduit le temps de calcul d'un facteur

$$\frac{\frac{N^2}{N}}{\frac{N}{2}\log(N)} = 205$$

Il existe plusieurs algorithmes pour calculer la FFT. Matlab utilise l'algorithme de Cooley-Tukey qui s'applique au cas où il existe un entier L pour lequel $N = 2^L$

FFT

- Sous Matlab, la fft se calcule au moyen des instructions

```
>>fft  
et  
>>fftshift
```

Cette dernière opération sert à recentrer la transformée de Fourier pour obtenir un axe fréquentiel allant de $-Fs/2$ à $Fs/2$. La transformée de Fourier inverse se calcule au moyen de l'instruction:

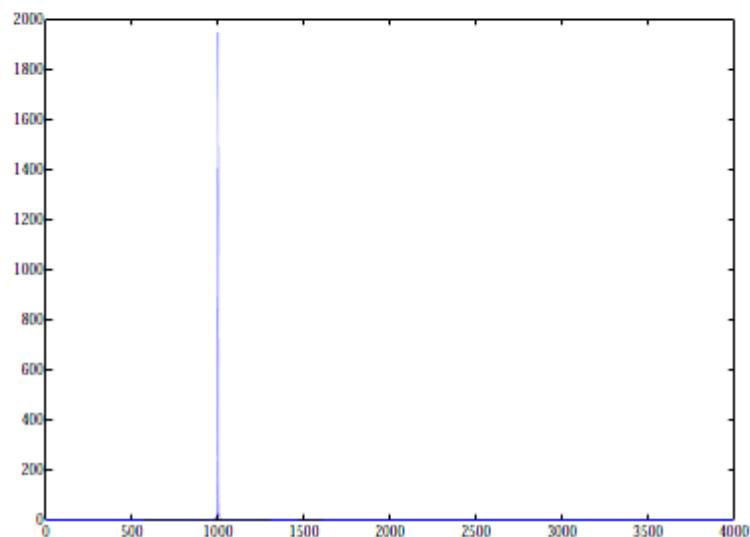
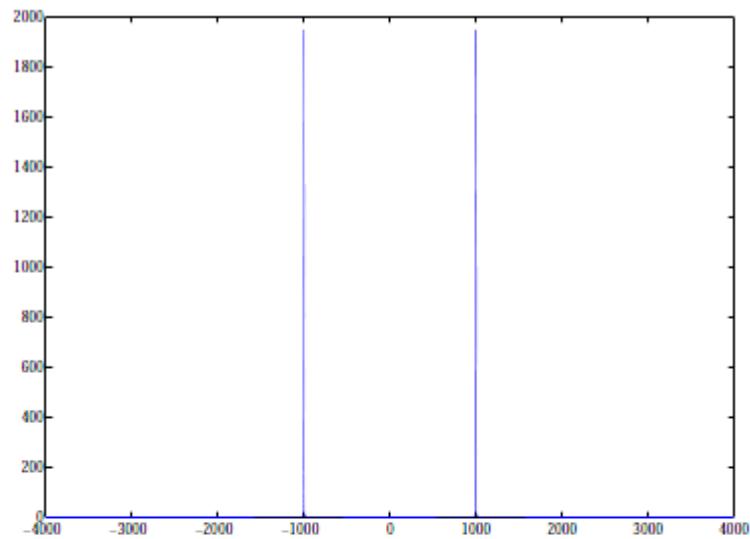
```
>>ifft
```

FFT

- Exemple de code Matlab

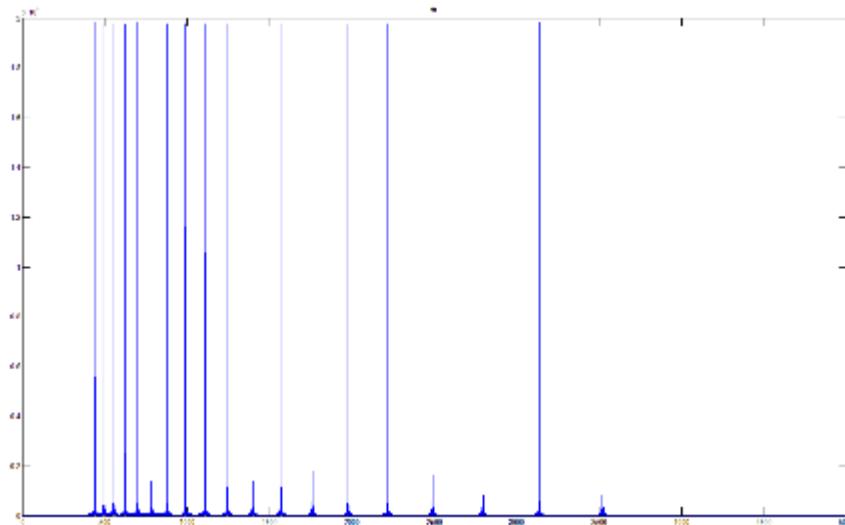
```
clear all;close all;
% definition du signal
Fs=8000; f=1000; duree=2;
t=0:1/Fs:duree;
s=0.25*sin(2*pi*f*t);
% visualisation de la fft de -Fs/2 à Fs/2
df=1/duree; % intervalle de fréquence
f=-Fs/2:df:Fs/2;
u=abs(fftshift(fft(s)));
plot(f,u);
% visualisation de la fft de 0 à Fs/2
de 0 a Fs/2
f1=0:df:Fs/2;
v=u(Fs*duree/2:Fs:duree);
figure;plot(f1,v)
```

FFT



FFT

- Exemple de spectre FFT: Il s'agit de gammes musicales à partir du “La” de la 3^{ème} octave. Le passage d'une note à la suivante sera approximé par la multiplication par le facteur 2^6 . On négligera donc les passages aux demi-tons entre le “Mi” et le “Fa” et entre le “Si” et le “Do”. Nous aurons donc une “gamme” de 6 notes au lieu de 7.



Spectrogramme

- L'instruction *spectrogram* permet de calculer et de visualiser l'évolution du spectre d'un signal dans le temps. La FFT pourra être calculée au voisinage d'un temps t . On l'appellera Short Time Fourier Transform (STFT) avec S comme symbole. Sa densité spectrale $|S|^2$ sera appelée Spectrogramme. Celle-ci sera obtenue dans Matlab v6.5 par l'instruction

```
>> specgram
```

Matlab v7.0 utilisera l'instruction

```
>> spectrogram
```

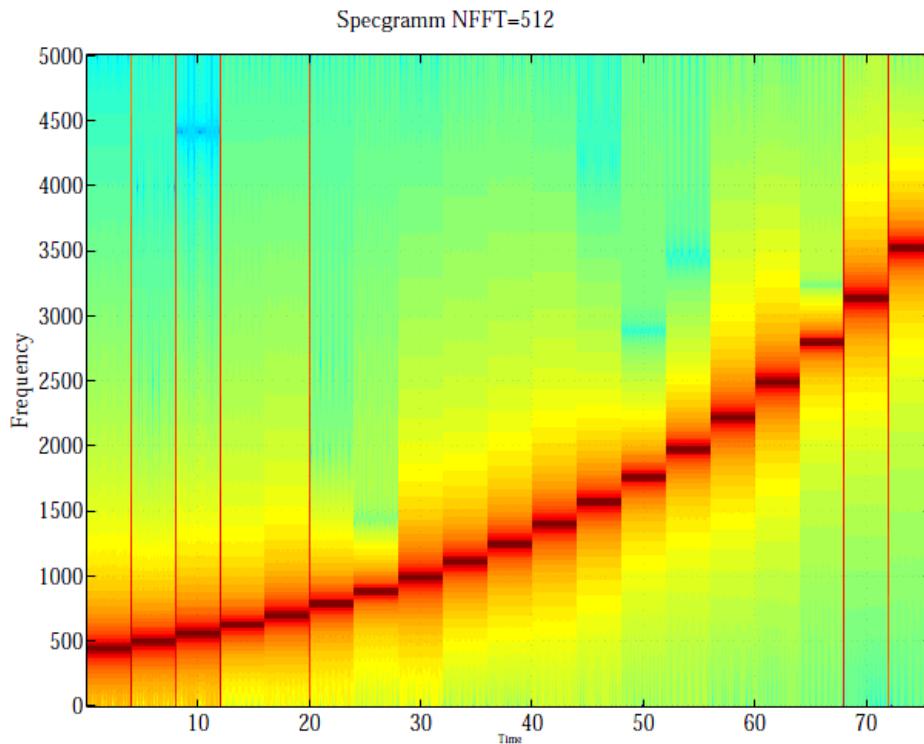
Spectrogramme

- Le calcul de la SFFT d'un signal s fera intervenir un certain nombre de paramètres :
 - le nom du signal s
 - la fréquence d'échantillonnage F_s du signal
 - le nombre d'échantillons NFFT sur lequel le spectre est calculé. NFFT sera une puissance de 2. L'intervalle de temps sera donc $NFFT/F_s$ et l'intervalle de fréquences 0 à $F_s/2$ sera divisé en $NFFT/2$ intervalles
 - on peut également utiliser une fenêtre temporelle afin de minimiser l' apparition de fréquences non-désirées dues au fenêtrage rectangulaire. Par défaut, Matlab utilisera une fenêtre de Hamming
 - un recouvrement des intervalles de calcul de la FFT ("overlap") permettra une plus grande précision des calculs. Par défaut, Matlab choisira un overlap de 50%.

Spectrogramme

- Voici un exemple de code Matlab qui permet de visualiser le specgram d'une gamme musicale

```
>> specgram(s, 512, Fs) avec  $NFFT = 512$ 
```



Spectrogramme

- L'instruction spectrogram s'utilise de la manière suivante: soit NFFT = 512, un intervalle de fréquences de 700 à 799Hz et une fenêtre (Windows) de 512 échantillons (NFFT) avec un overlap de 50% ([]).

```
[S, f, T] =  
spectrogram(s, Windows, [], NFFT, Fs);
```

ou

```
[S, f, T] =  
spectrogram(s, Windows, [], [700; 799], Fs);
```

f est un vecteur fréquences

T est un vecteur temps

S est la matrice du Specgramme qui est une matrice dont les dimensions sont données par les vecteurs f et T

Spectrogramme

Nous pouvons visualiser la matrice S par l'instruction

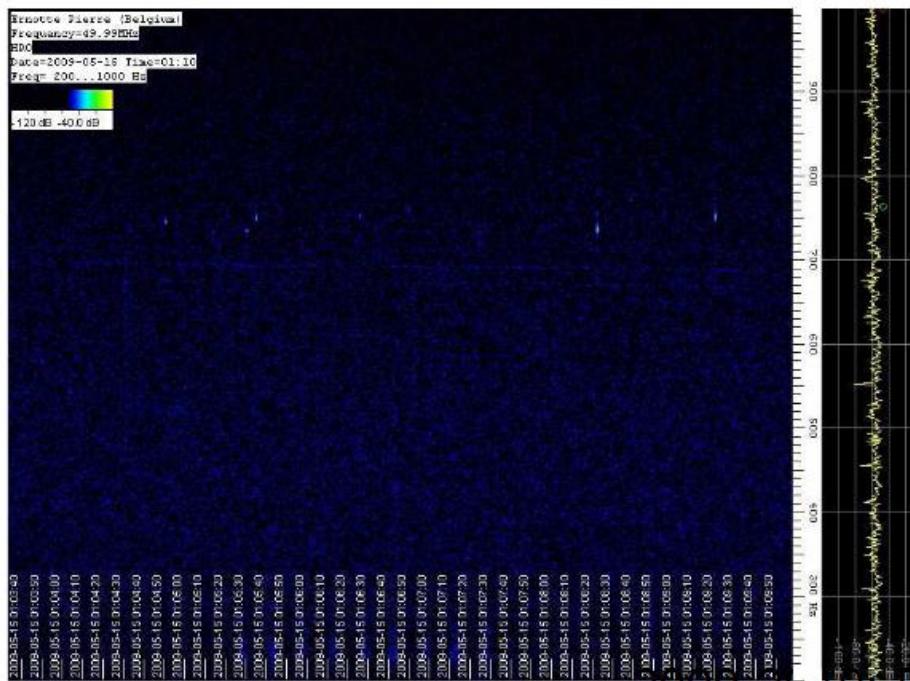
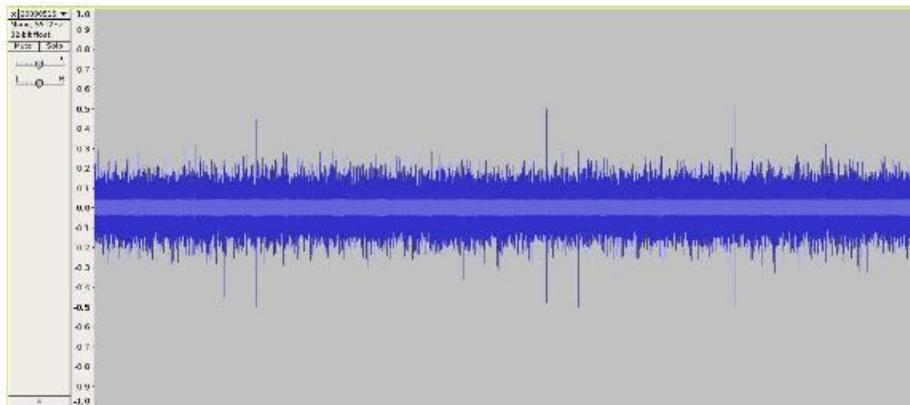
```
imagesc(T,f,10*log10(abs(S)));axis xy ou  
imagesc(T,f,abs(S));axis xy.
```

Si les valeurs de S ne nous intéressent pas, l'instruction suivante affichera directement le résultat

```
spectrogram(s,Windows, [],NFFT,Fs)
```

- La page suivante montre l'intérêt du spectrogram. Il représente l'enregistrement de météores par onde radio. Un météore est détecté par un “ping” clairement audible. Ces “pings” sont cachés dans le signal à cause du bruit. Par contre, ils apparaissent clairement sur le spectrogramme

Spectrogramme

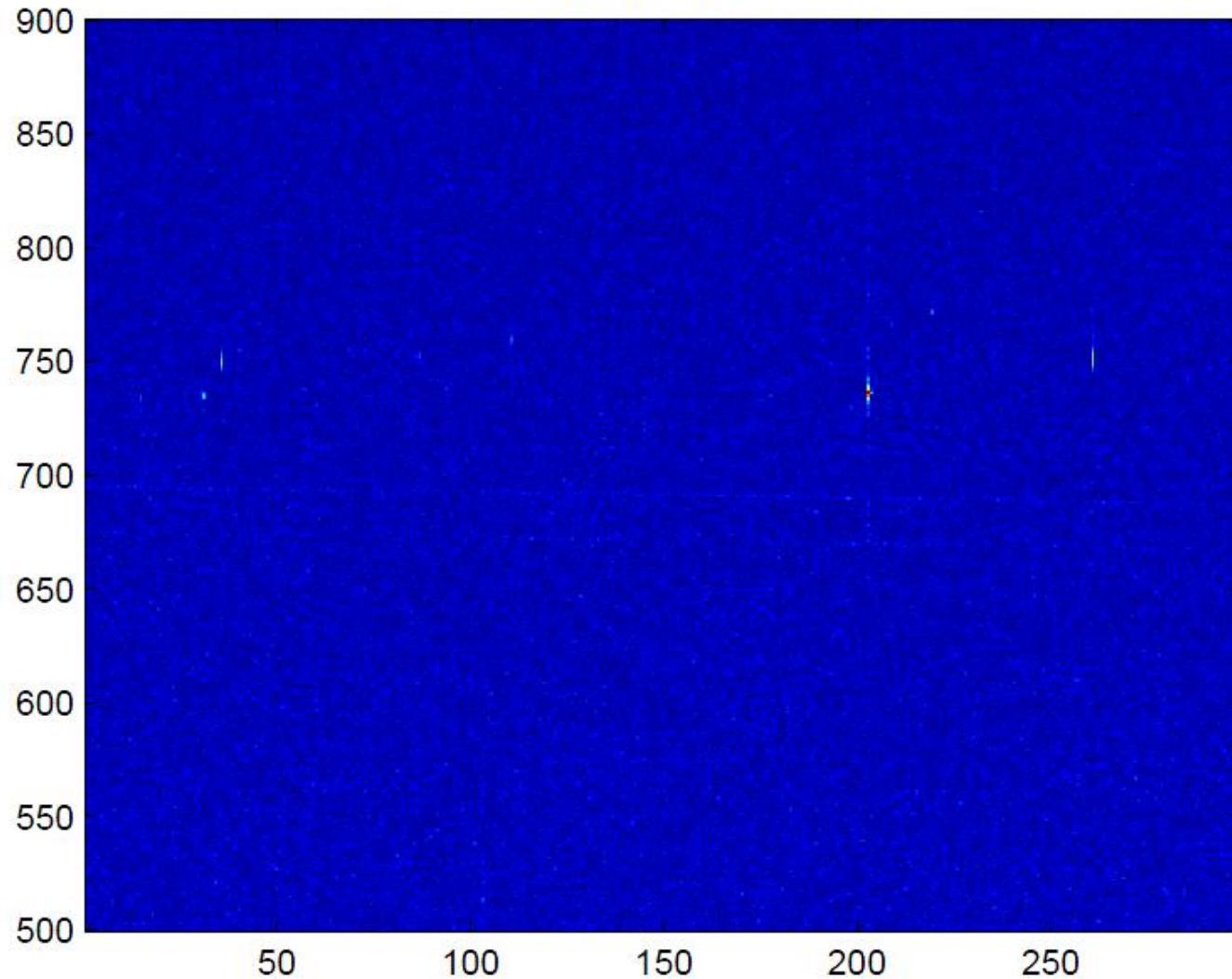


Spectrogramme

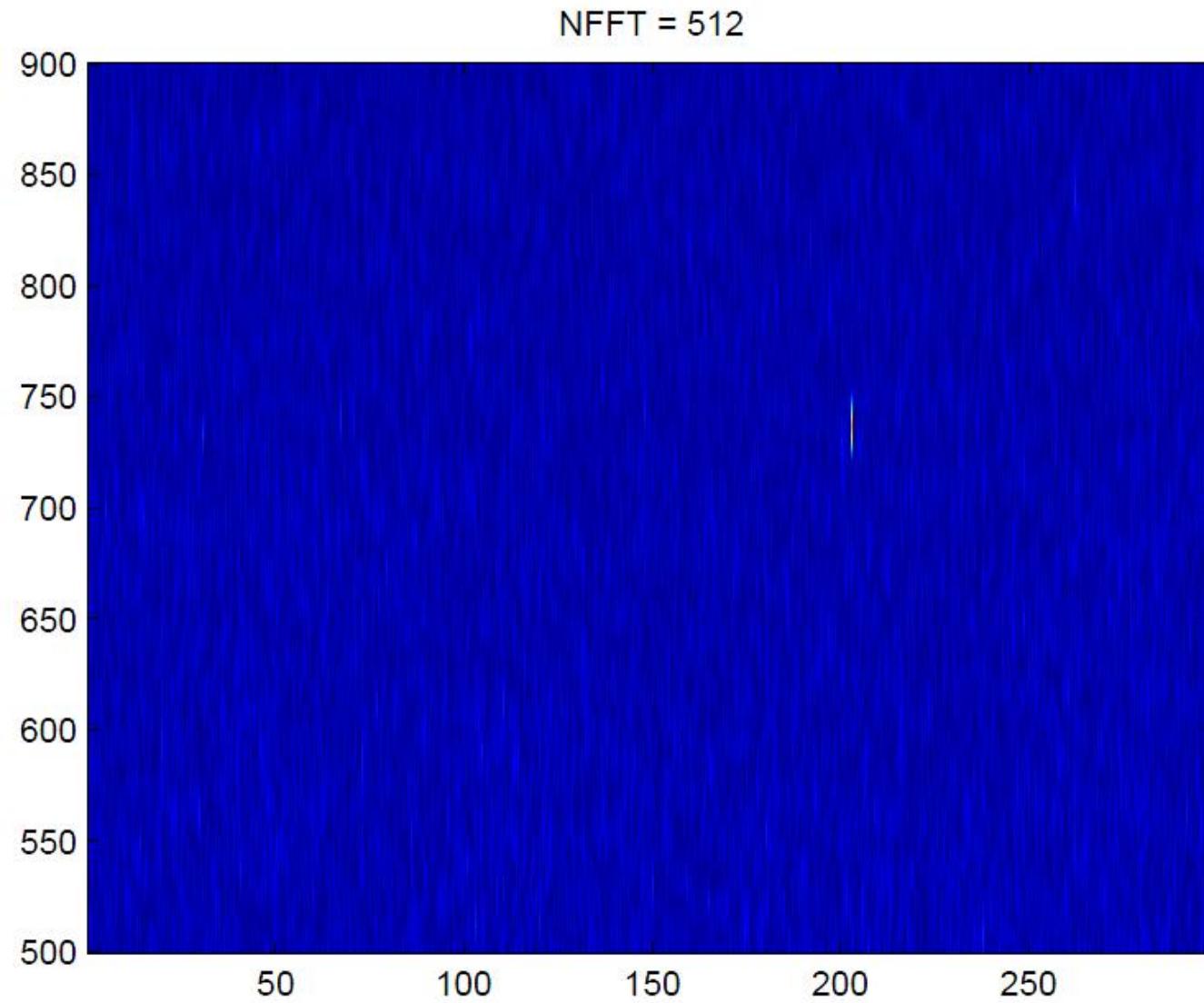
- Dans les figures suivantes, nous prendrons un NFFT de 8916 échantillons puis de 512 échantillons. Dans le second cas, nous avons une meilleure précision sur le temps mais une moins bonne précision sur la fréquence. Ceci est une illustration de la dualité temps-fréquence.

Spectrogramme

NFFT = 8192



Spectrogramme



EPHEC

(167)

Chapitre 7: Introduction au traitement d'images

Table des matières chap 7

- Niveau de gris
- Inversion
- Filtre de bruit par moyenne
- Détection de contours
- Binarisation
- Erosion/Dilatation
- Squelettisation
- Détermination de périmètre
- Remplissage de trous
- Labellisation

Niveau de gris

- En niveau de gris, à chaque pixel correspond une valeur traduite par une couleur entre le noir et le blanc. Par exemple, sur 8 bits, la valeur 0 correspond au noir, la valeur 255 au blanc et les valeurs à l'intérieur de cet intervalle représentent des gris plus ou moins foncés

Inversion

- **L'inversion** est une méthode de calcul assez simple dans laquelle les pixels clairs sont rendus sombres, et inversement. Cette fonction est représentée par l'expression $p(i) = (2^k - 1) - p(i)$
Soit une l'image suivante



Inversion

Appliquons lui le code suivant

```
>> filename = 'CostaRica.jpg';
>> x = imread(filename);
>> % image sur un plan
if (length(size(x))>2)
    x=x(:,:,1);% on prend un seul plan de l'image noir et blanc
end;
>> % on détermine le nombre de bits sur lequel on travaille (ici 8 bits)
info = whos('x');
if strcmp(info.class,'uint8')
    k=8;
elseif strcmp(info.class,'uint16')
    k=16;
elseif strcmp(info.class,'uint32')
    k=32;
elseif strcmp(info.class,'uint64')
    k=64;
end;
```

Inversion

```
>> %on récupère la taille de la matrice
[ligne colonne]=size(x);
% et puis on crée une matrice résultat du même casting que l'image de départ
inverse= zeros(ligne,colonne);
if strcmp(info.class,'uint8')
    inverse=uint8(inverse);
elseif strcmp(info.class,'uint16')
    inverse=uint16(inverse);
elseif strcmp(info.class,'uint32')
    inverse=uint32(inverse);
elseif strcmp(info.class,'uint64')
    inverse=uint64(inverse);
end;
>> % on applique l'algorithme d'inversion
for i=1:ligne
    for j=1:colonnes
        inverse(i,j) = 2^k - x(i,j);
    end
end;
>> % et on affiche le résultat
figure(1)
subplot(121)
imshow(x)
subplot(122)
imshow(inverse)
```

Inversion

Et voici le résultat



Filtre de bruit par moyenne

- **Le filtre de bruit par moyenne** permet de corriger des images bruitées. Dans le cadre de l'exemple ici, un bruit artificiel va être ajouté

```
>> clear all; close all;
filename = 'CostaRica.jpg';
x = imread(filename);
if (length(size(x))>2)
    x=x(:,:,1);
end

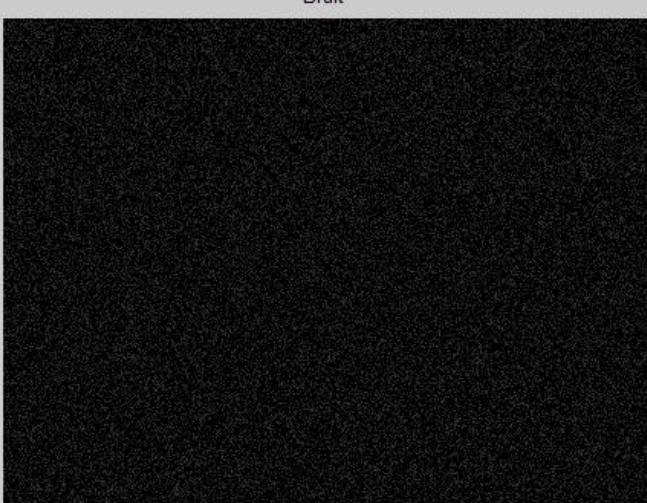
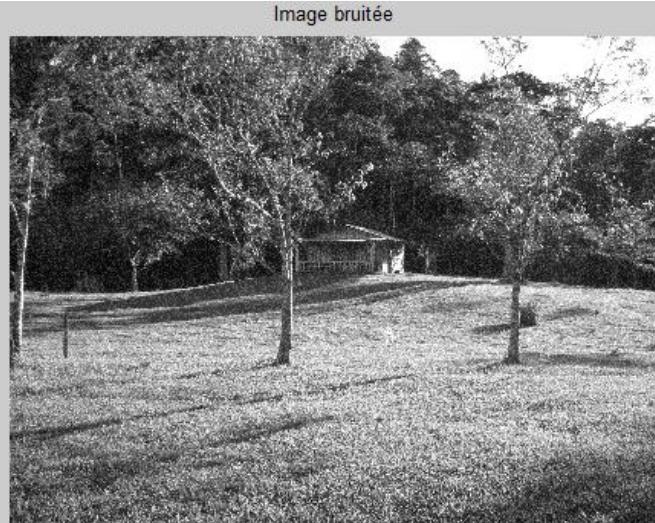
[ligne colonne]=size(x);%taille de la matrice

%On fait 10 images bruitées
image_bruit=uint8(zeros(ligne,colonne,10));
erreur=100;
nbimage=20;
for i = 1 : nbimage
    bruit=uint8(round((rand(ligne,colonne)*erreur)-erreur/2));
    image_bruit(:,:,:,i)= x+bruit;
end
```

Filtre de bruit par moyenne

```
%on calcule la moyenne  
moyenne = uint8(mean(image_bruit,3));  
%on affiche les différentes images  
figure(1)  
subplot(221)  
imshow(x)  
title('Image')  
subplot(222)  
imshow(image_bruit(:,:,1))  
title('Image bruitée')  
subplot(223)  
imshow(bruit)  
title('Bruit')  
subplot(224)  
imshow(moyenne)  
title('Image filtrée')
```

Filtre de bruit par moyenne



Détection de contours

- La **détection de contours** consiste à repérer les grandes variations de couleur entre des pixels proches. Plusieurs méthodes existent (gradient, Roberts, Prewitt, Sobel, Freishen, Canny, ...)

Nous allons illustrer la méthode du gradient définie par

$$\text{gradient}(i, j) = \sqrt{(p(i, j) - p(i, j+1))^2 + (p(i, j) - p(i+1, j))^2}$$

```
>> distance = 3;
>> for i = 1:ligne-distance
    for j = 1:colonne-distance
        img2(i,j) = ((img(i,j)-img(i,j+distance))^2 + (img(i,j)-img(i+distance,j))^2)^0.5;
    end
end
```

Détection de contours

- Appliquons cela à l'image suivante



Détection de contours

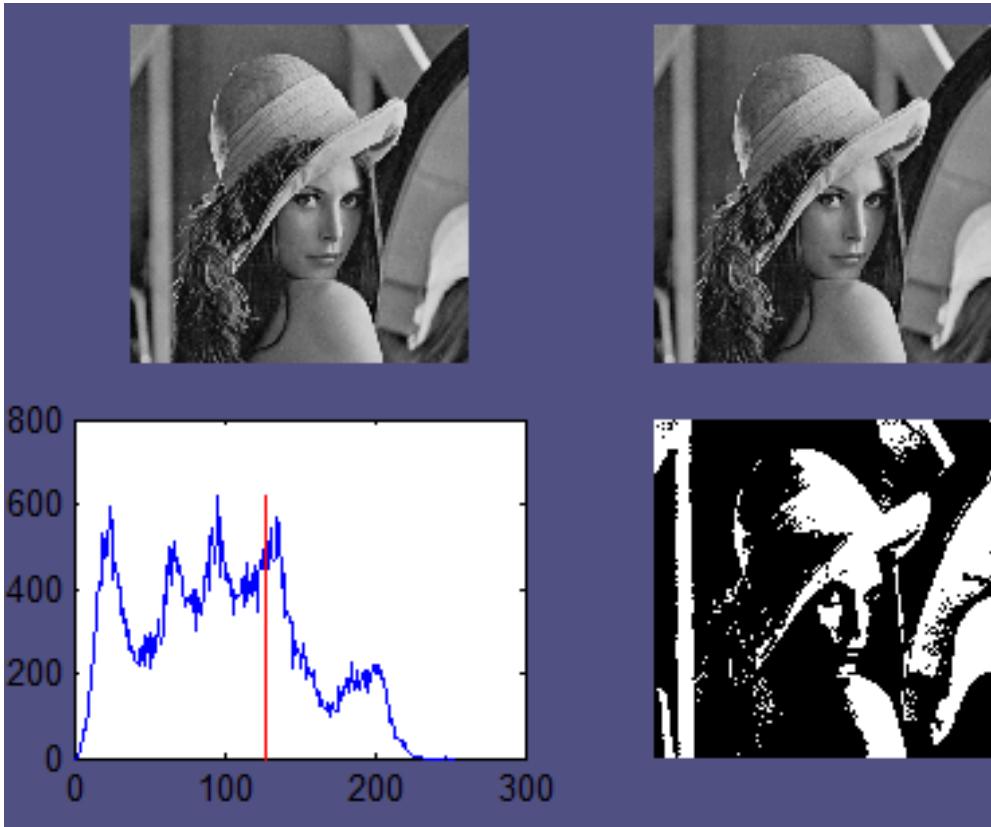


Binarisation

- La **binarisation** consiste à transformer un pixel codé sur plusieurs bits (2, 4 , 8, ...) en une image sur 1 bit. Pour ça, nous allons faire un seuillage. Si la valeur du pixel est en dessous du seuil, nous lui associons la valeur 0. Si la valeur du pixel est égale ou supérieure au seuil, nous lui donnons la valeur 1.

```
% placons le seuil au milieu de l'échelle de valeurs
% et où k est le nombres de bits de codage pour chaque pixel
seuil = round(2^k/2);
for i=1:ligne
    for j=1:colonne
        if x(i,j)<seuil
            img(i,j) = 0;
        else
            img(i,j) = 1;
        end
    end
end|
```

Binarisation

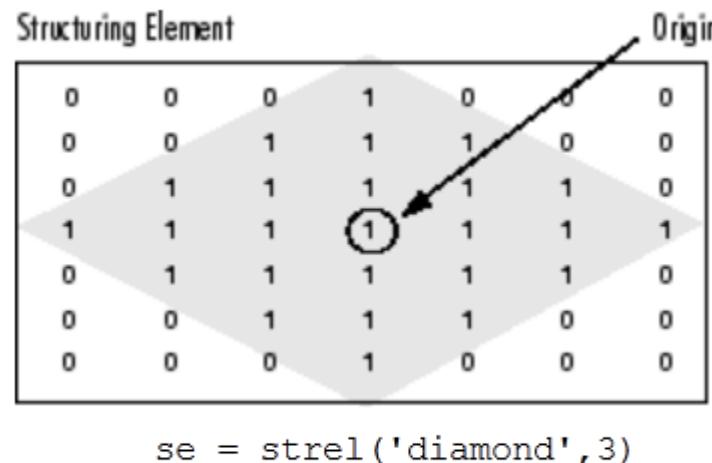
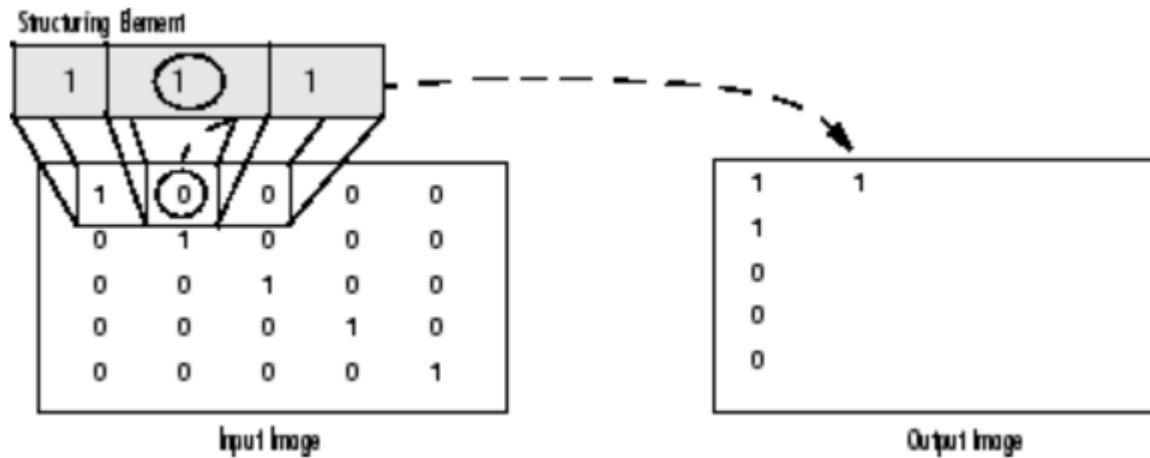


Erosion/Dilatation

- Dans les opérations d'**érosion** et de **dilatation**, l'état de sortie de chaque pixel est déterminé en appliquant un traitement à ce pixel et à ses voisins sur l'image d'entrée
 - **Dilatation:** la valeur du pixel de sortie est la valeur maximum de tous les pixels dans le voisinage du pixel
 - **Erosion:** la valeur du pixel de sortie est la valeur minimum de tous les pixels dans le voisinage du pixel

La forme et la taille du voisinage sont définies par un élément structurant: une matrice généralement beaucoup plus petite que l'image traitée.

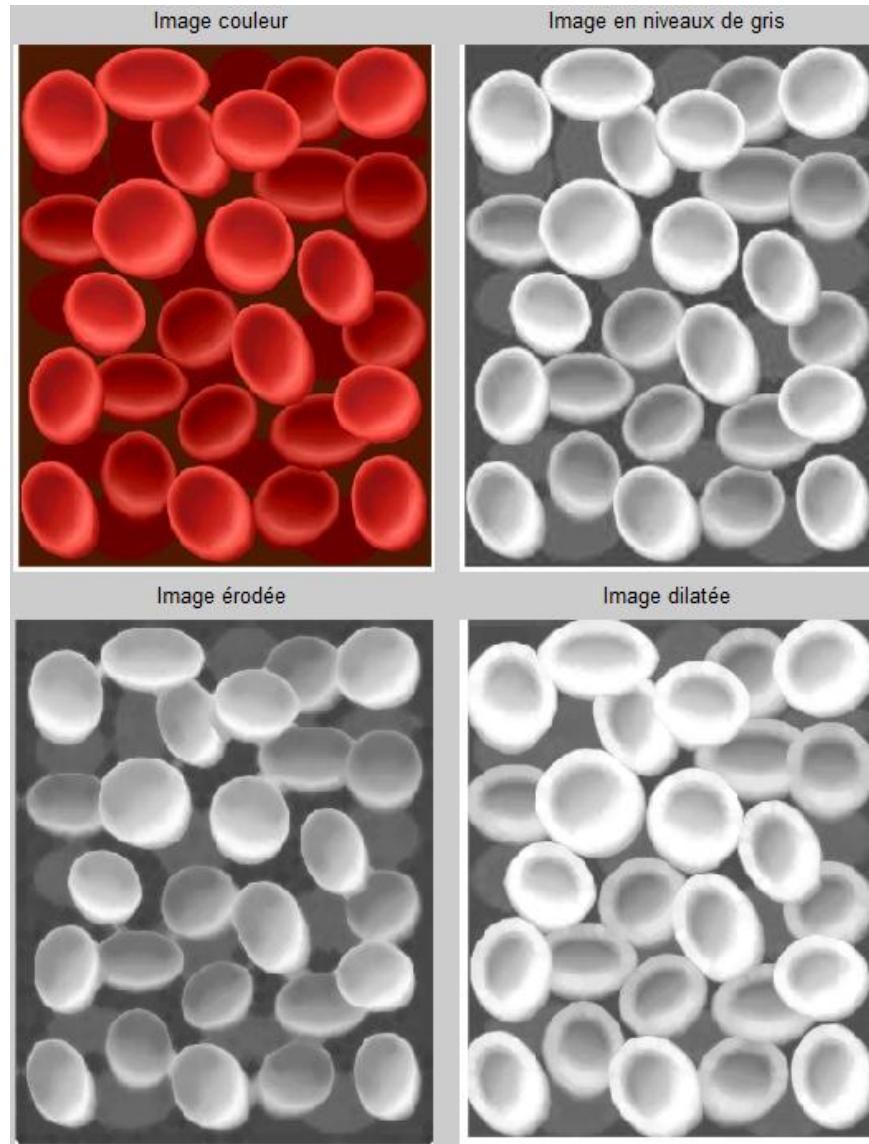
Erosion/Dilatation



Erosion/Dilatation

```
clear all; close all;
filename = 'blood.jpg';
x = imread(filename);
if (length(size(x)) > 2)
x=x(:,:,:,1);
end
se = strel('diamond', 3);
y = imerode(x, se);
z = imdilate(x, se);
subplot(221)
imshow(filename)
title('Image couleur')
subplot(222)
imshow(x)
title('Image en niveaux de gris')
subplot(223)
imshow(y)
title('Image érodée')
subplot(224)
imshow(z)
title('Image dilatée')
```

Erosion/Dilatation

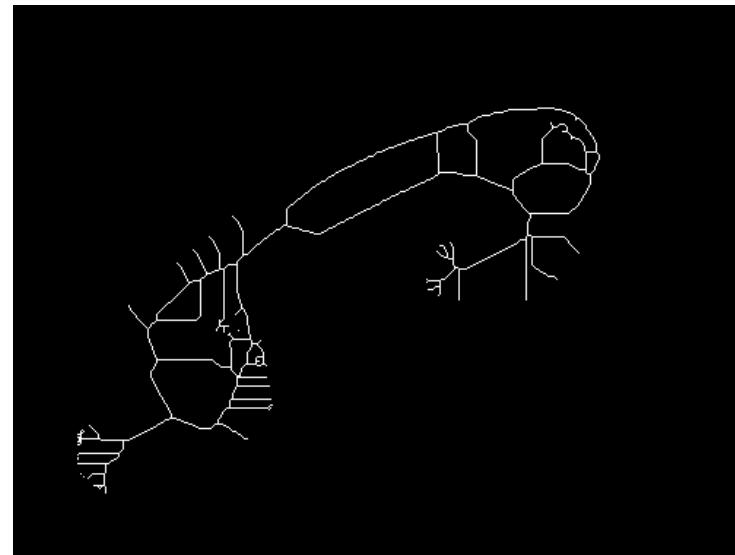
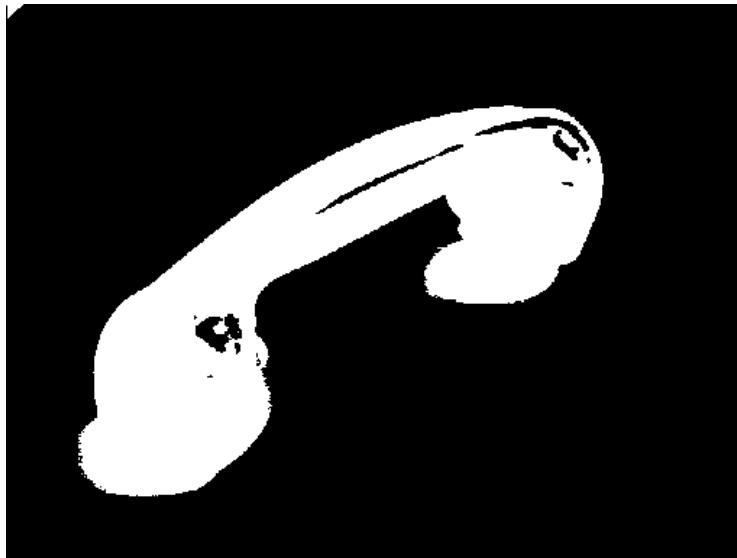


Squelettisation

- La **squelettisation** permet de réduire tous les objets d'une image à des lignes sans changer la structure essentielle de l'image. Cette opération est en fait basée sur les fonctions de dilatation et d'érosion

```
clear all; close all;
filename = 'tel.gif';
x = imread(filename);
y = bwmorph(x, 'skel', Inf);
imshow(y)
```

Squelettisation

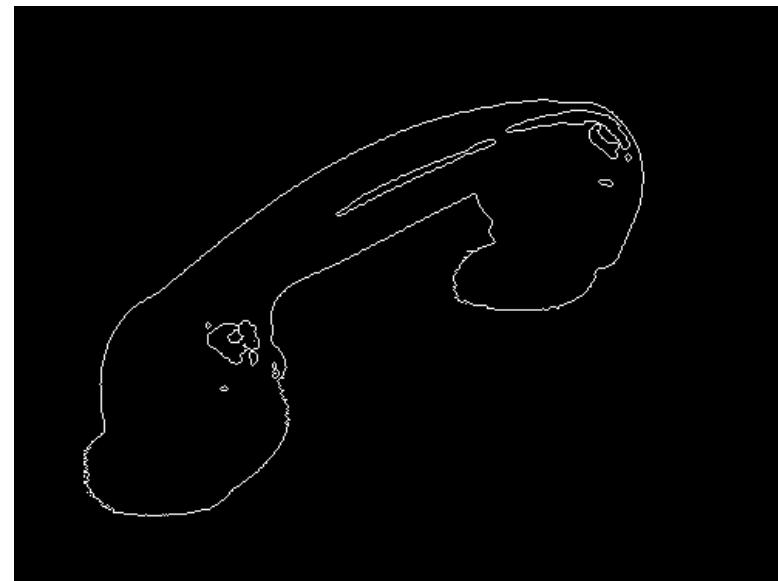
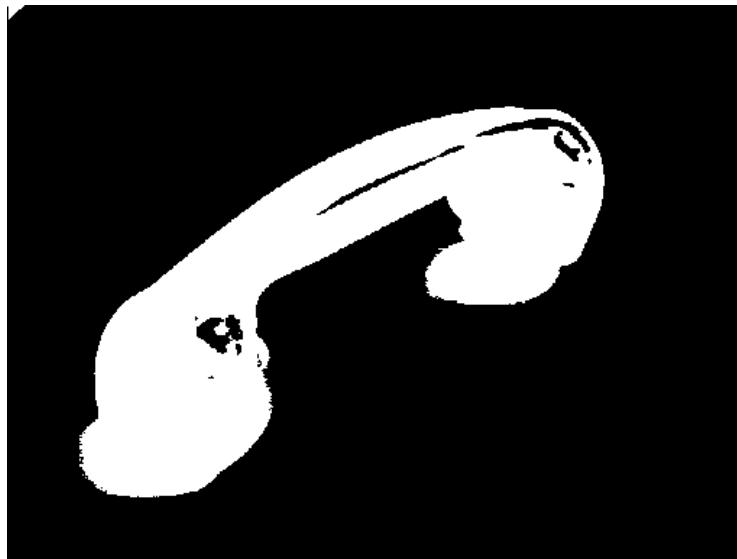


Détermination de périmètre

- La **détermination de périmètre** est très semblable à la squelettisation mais marque cette fois les contours

```
clear all; close all;
filename = 'tel.gif';
x = imread(filename);
y = bwperim(x);
imshow(y)
```

Détermination de périmètre



Remplissage de trous

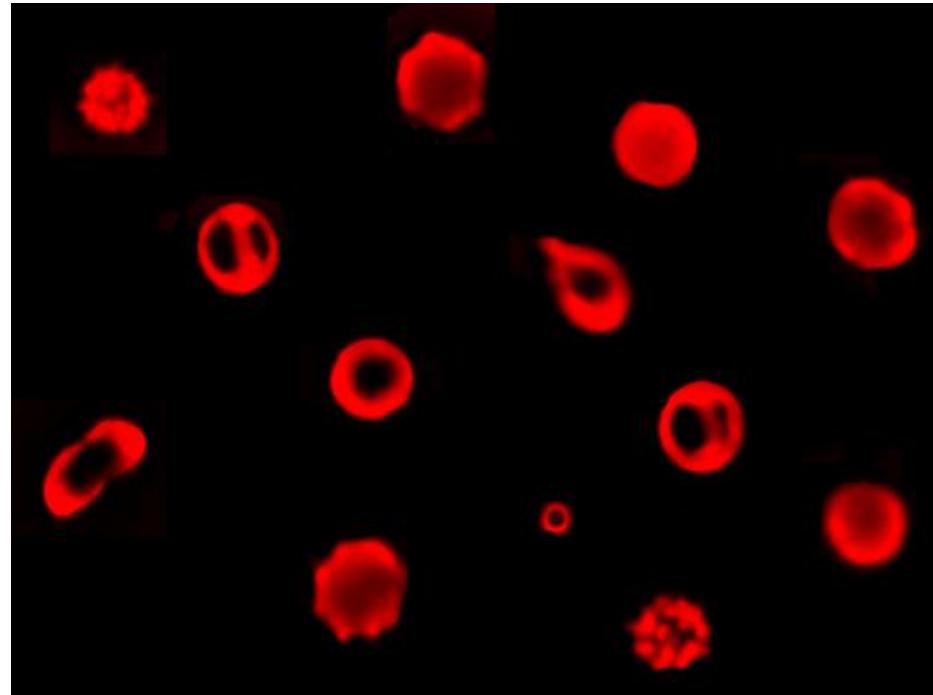
- L'opération de **remplissage de trous** peu être intéressante dans certains cas. Appliquons le code suivant à l'image suivante

```
clear all; close all;
filename = 'blood2.tif';
x = imread(filename);

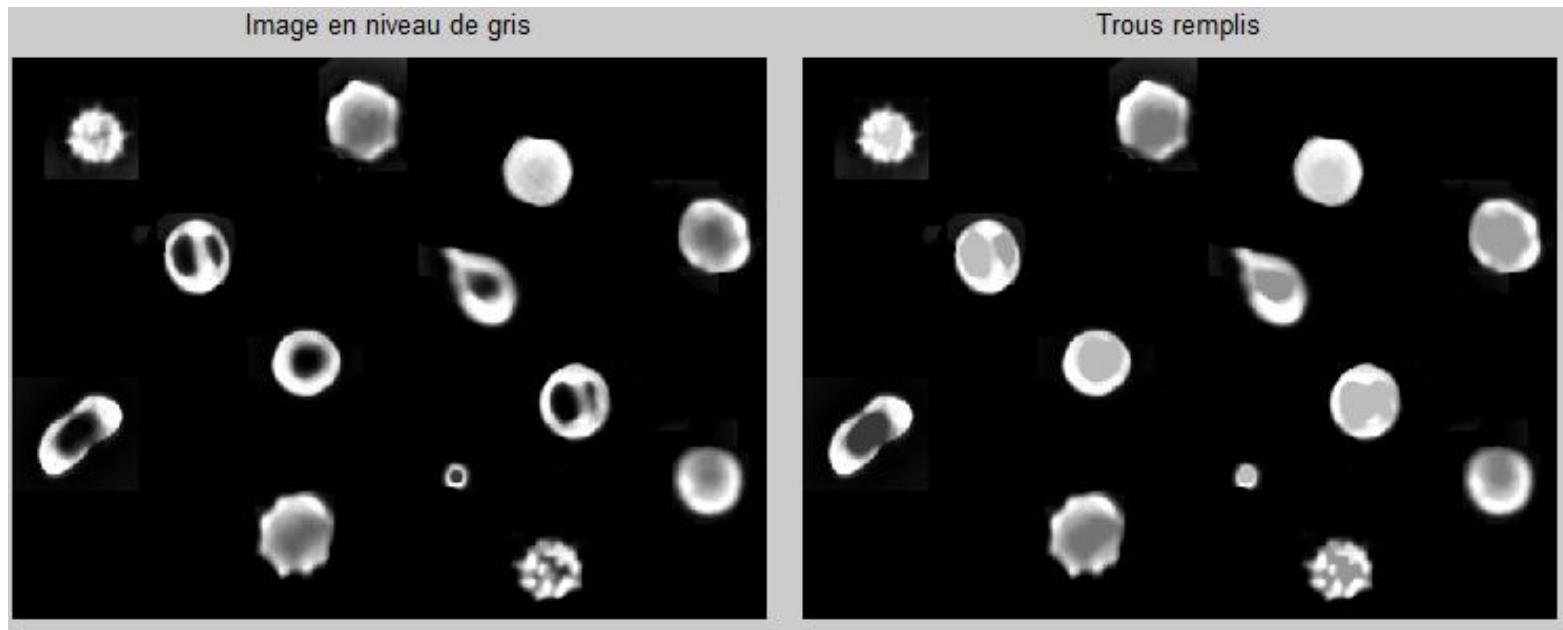
if (length(size(x))>2)
    x=x(:,:,1);
end

y = imfill(x, 'holes');

subplot(131)
imshow(x)
title('Image en niveau de gris')
subplot(132)
imshow(y)
title('Trous remplis')
```



Remplissage de trous



Labellisation

- La **labellisation** est une méthode qui va identifier des objets présents dans une image binaire. Chaque objet est identifié ensuite par un numéro unique.

$$BW = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1; \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1; \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

Connected Components

$$BW = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3; \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3; \\ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0; \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

Labeled Connected Components

Labellisation

Appliquons ceci à l'image précédente avec le code suivant

```
clear all; close all;
filename = 'blood2.tif';
x = imread(filename);

if (length(size(x))>2)
    x=x(:,:,1);
end

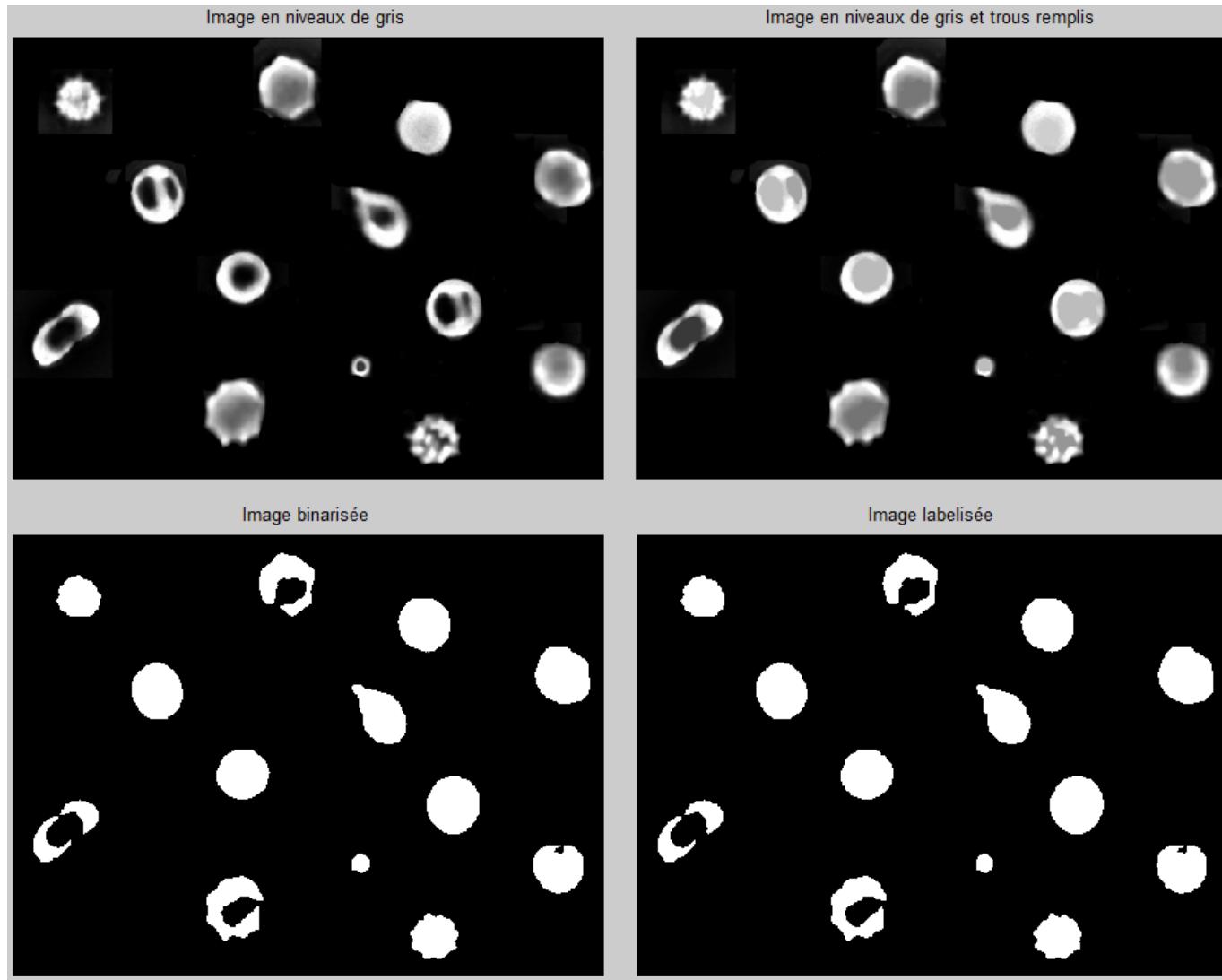
z = imfill(x,'holes');

k = 8;
[ligne colonne]=size(x);
    seuil = round(2^k/2);
]    for i=1:ligne
]        for j=1:colonne
            if z(i,j)<seuil
                img(i,j) = 0;
            else
                img(i,j) = 1;
            end
        end
    end

y = bwlabel(img);

subplot(221)
imshow(x)
title('Image couleur')
subplot(222)
imshow(z)
title('Image en niveaux de gris et trous remplis')
subplot(223)
imshow(img)
title('Image binarisée')
subplot(224)
imshow(y)
title('Image labelisée')
```

Labellisation



Labellisation

Il est ensuite possible de récupérer toute une série d'informations sur l'image labellisée telles que le nombre d'objets, leurs surfaces, ... grâce à la fonction *regionprops*

```
y = bwlabel(img);  
  
data = regionprops(y, 'basic');  
data(1).Area  
data(2).Area
```

Ce à quoi Matlab nous répond que le premier objet a une surface de 560 et le deuxième de 1079

Labellisation

On peut également obtenir le nombre d'objets trouvés par la labellisation grâce au code suivant

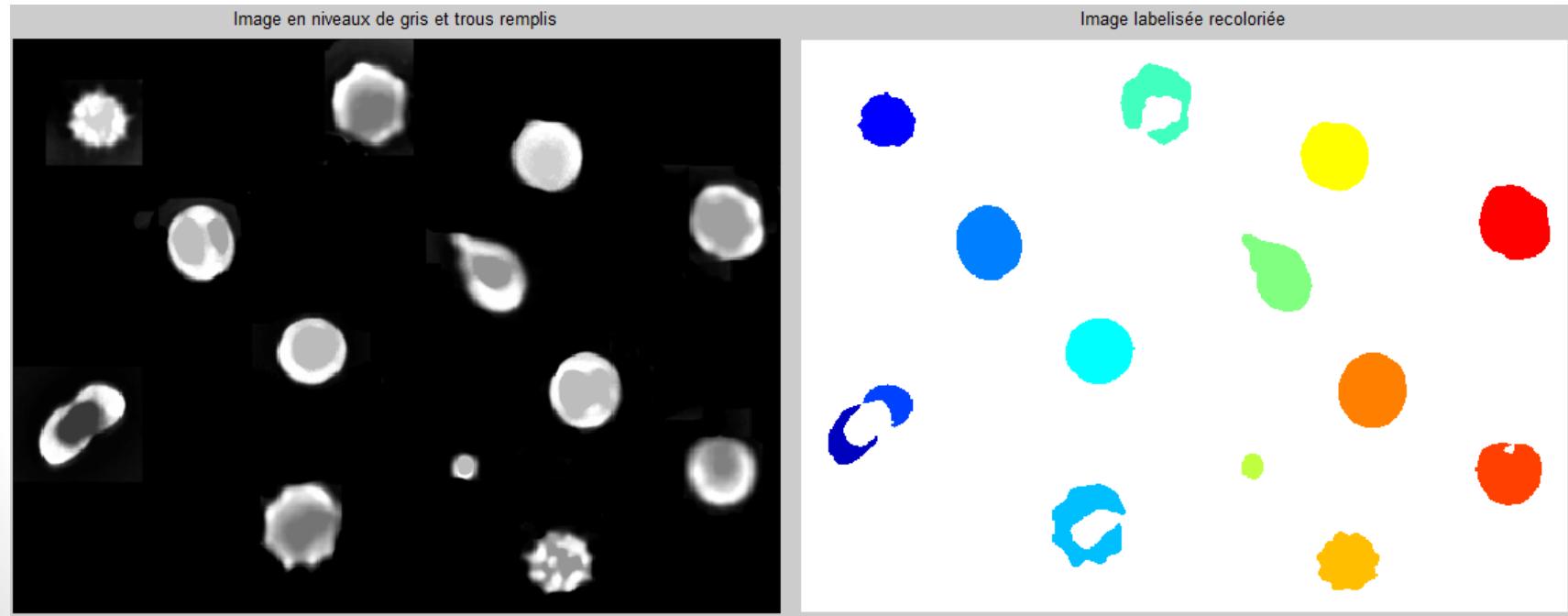
```
[labeled, numObjects] = bwlabel(img);
```

numObjects contient le nombre d'éléments trouvés et dans l'exemple précédent Matlab nous affiche 14.

Labellisation

On peut aussi visualiser chacun de ces 14 éléments labellisé et recoloré avec le code suivant

```
y = bwconncomp(img);  
labeled = labelmatrix(y);  
RGB_label = label2rgb(labeled);
```



Bibliographie

Bibliographie

- Des parties entières sont tirées du cours 2010 de P. Ernotte
- Cottet F., « Traitement des signaux et acquisition des données » 2^{ème} édition. Dunod 2002
- Cours **EPHEC**:
 - Electricité (P. Ernotte et M. De Vleeschouwer)
 - Phénomènes périodiques (P. Ernotte et M. De Vleeschouwer)
 - Mathématiques (A. Dewulf et C. Lambeau)
 - Télécommunications (Y. Bouterfa)
 - Electronique digitale et analyse des signaux (A. Dewulf et Y. Bouterfa)
- Cours ITSCM:
 - Transmissions numériques (A. Dewulf)
- Documentations Matlab
- Voir aussi la bibliographie du cours 2010 de P. Ernotte