Traitement du Signal - Exercices

Youri Mouton

January 1, 2016

1 Fenêtrage temporel

L'équation $s(t) = \cos(2\pi 440t) \prod 2(t)$ représente un signal fréquence de La de troisième octave (440hz) de deux secondes ($\prod 2$). La fonction est multipliée par une fonction porte, permettant de limiter le signal en temps. On utilise une intégrale de Fourrier car le signal est limité en temps. Commençons par réaliser la représentation unilatérale du signal:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi 440t) \prod 2(t) e^{-j2\pi 440t} dt \tag{1}$$

$$S(f) = \int_{-1}^{1} \cos(2\pi 440t) e^{-j2\pi ft} \tag{2}$$

Passons ensuite à la représentation bilatérale:
Selon Euler, $\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$, donc

$$S(f) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{j2\pi 440t} + e^{-j2\pi 440t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt \tag{3}$$

On multiplie dans l'autre sens pour et on met en évidence des facteurs:

$$S(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-j2\pi ft + j2\pi 440t} + e^{-j2\pi ft + -j2\pi 440t} dt \tag{4}$$

$$S(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-j2\pi t(f-440)} + e^{-j2\pi t(f+440)} dt \tag{5}$$

Ensuite on intègre la fonction:

$$\int e^{f(x)} = \frac{e^{f(x)}}{f'(x)}$$

et

$$\int a + b = \int a + \int b$$

donc,

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j2\pi t(f-440)}}{-j2\pi(f-440)}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j2\pi t(f+440)}}{-j2\pi(f+440)}\right]_{-1}^{1} \tag{6}$$

On développe les bornes de l'intégrale; on remplace t par 1 puis -1, en faisant la différence des deux résultats:

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j2\pi(f-440)} - e^{j2\pi(f-440)}}{-j2\pi(f-440)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j2\pi(f+440)} - e^{j2\pi(f+440)}}{-j2\pi(f+440)}\right] \tag{7}$$

On peut donc simplifier et déduire en multipliant les numérateurs et dénominateurs par -1 et en inversant les termes. En appliquant la règle d'Euler $\sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$, on obtient:

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\pi(f-440))}{\pi(f-440)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\pi(f+440))}{\pi(f+440)}\right] \tag{8}$$

En simplifiant:

$$S(f) = \frac{\sin(2\pi(f-440))}{2\pi(f-440)} + \frac{\sin(2\pi(f+440))}{2\pi(f+440)} \tag{9}$$

On peut simplifier encore car $sinc(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$S(f) = sinc(2\pi(f-440)) + sinc(2\pi(f+440)) \tag{10}$$

2 Transformée de Fourrier de la distribution de Dirac

Soit la distribution de Dirac $\delta(t)$, sa transformée de Fourrier est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

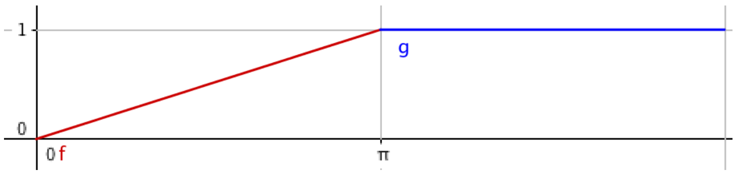
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi f_0}dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

Fonction de fréquence constante et unitaire. En conséquence, le spectre d'un signal de très courte durée sera très étalé.

3 Séries de Fourrier

3.1 Fonction 1



Comme on peut le voir sur l'image, il s'agit d'une fonction de période de 2π. s(t) est définit comme ceci:

$$s(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{t}{\pi} & \forall t \in [0, \pi] \\ 1 & \forall t \in [\pi, 2\pi] \end{array} \right\} \tag{1}$$

Nous allons calculer la moyenne du signal a_0 et puis les valeurs d'énergie aux fréquences fondamentales a_n et b_n, qui forment le spectre du signal.
A noter que si la fonction périodique est impaire $f(-x) = -f(x)$, $a_n = 0$ pour tout n. Si la fonction périodique est paire $f(-x) = f(x)$, alors $b_n = 0$ pour tout n.

Le calcul des coefficients a et b sera utilisé dans la série de Fourrier:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n F_0 t) + b_n \sin(2\pi n F_0 t))$$

Comme $T = 2\pi$, $F = \frac{1}{2\pi}$. On sait que

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \mathrm{d}t$$

donc ici a_0 est égal à

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{\pi} \mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} 1 \mathrm{d}t \tag{2}$$

On intègre:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{t^2}{2\pi} \right]_0^{\pi} + \left[t \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \tag{3}$$

En développant les bornes, on trouve que $a_0 = \frac{3}{4}$. On veut maintenant pouvoir trouver tous les coefficients du spectre. Pour ceci on utilise la formule suivante:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(2\pi n F_0 t) \mathrm{d}t$$

Ici,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{t}{\pi} \cos(nt) \mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nt) \mathrm{d}t \right) \tag{4}$$

On peut retirer le second terme car $\int \cos(nt) = \frac{\sin(nt)}{n}$ et les bornes sont π et 2π, dont le sinus est toujours égal à 0.

Calculons l'intégrale du premier terme que voici:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \frac{t}{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t\right)$$

Pour faire cela nous aurons besoin d'utiliser la règle des intégrales par partie:

$$fg' = fg - \int f'g$$

$$f = \frac{t}{\pi}, g' = \cos(nt), f' = \frac{1}{\pi}, g = \frac{\sin(nt)}{n}$$

En appliquant la règle des intégrales par parties:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin(nt)}{\pi n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{\pi n}\mathrm{d}t\right) \tag{5}$$

On peut simplifier en retirant le premier terme car, comme expliqué plus haut, les sinus de 0 ou π sera toujours égal à 0. Il nous reste le second terme à intégrer:

$$a_n = \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{\pi n}\mathrm{d}t$$

On sait que $\int \sin(nt) = \frac{-\cos(nt)}{n}$, donc:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(nt)}{\pi n^2}\right]_0^{\pi}\right) \tag{6}$$

Pour a_1, il suffit de remplacer n par 1 et développer les bornes, ce qui donne:

$$a_n = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$a_1 = \frac{-2}{\pi^2}, a_2 = 0, a_3 = \frac{-2}{9\pi^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{-2}{25\pi^2}, a_6 = 0, ...$$

Vous remarquerez qu'il y a un modèle récurrent.

Trouvons maintenant b_n, qui est défini comme ceci:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(2\pi F_0 t)\mathrm{d}t$$

Ici,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} 1\sin(nt)\mathrm{d}t\right) \tag{7}$$

Intégrons en utilisant les intégrales par parties ($fg' = fg - \int f'g$):

$$f = \frac{t}{\pi}, g' = \sin(nt), f' = \frac{1}{\pi}, g = \frac{-\cos(nt)}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos(nt)}{\pi n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(nt)}{\pi n}\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nt)\mathrm{d}t\right) \tag{8}$$

Calculons les deux intégrales restantes:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos(nt)}{\pi n}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin(nt)}{\pi n^2}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \tag{9}$$

On peut retirer le second terme car le sinus de π et 0 est toujours 0. Notre equation pour trouver les coefficients b est donc la suivante:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos(nt)}{\pi n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \tag{10}$$

Pour trouver b_1, on remplace n par 1 et on développe les bornes et donc:

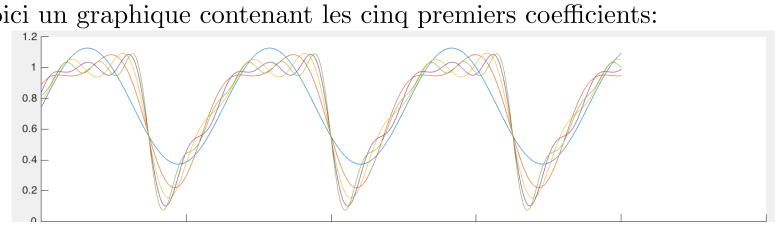
$$b_n = \frac{-1}{n\pi}$$

$$b_1 = \frac{-1}{\pi}, b_2 = \frac{-1}{2\pi}, b_3 = \frac{-1}{3\pi}, b_4 = \frac{-1}{4\pi}, b_5 = \frac{-1}{5\pi}, b_6 = \frac{-1}{6\pi}, ...$$

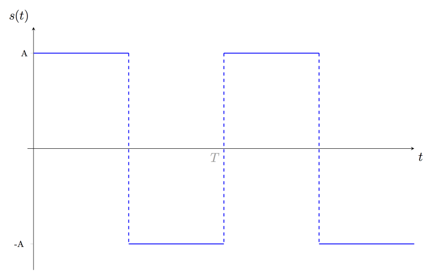
On peut utiliser Matlab pour visualiser l'approximation du signal carré avec les coefficients an et bn:

```
x = -10:1/100:10;
s = 3/4;
for n = 1:1000
    an = (cos(n*pi) - 1) / (pi*pi*n*n);
    bn = (-1) / (n*pi);
    s = s + (((an * cos(n*x)) + (bn * sin(n*x))));
end
plot(s);
```

Voici un graphique contenant les cinq premiers coefficients:



3.2 Fonction 2



Comme on peut le voir sur l'image, il s'agit d'une fonction carrée. Sa période T est de 2π, elle est définie comme ceci:

$$s(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \forall t \in [0, \pi] \\ -1 & \forall t \in [\pi, 2\pi] \end{array} \right\} \tag{1}$$

s(t) est une fonction impaire $f(-x) = -f(x)$ donc il ne faut pas calculer les coefficients a_n et la moyenne $a_0 = 0$.

Calculons b_n qui est défini comme ceci:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(2\pi n F_0 t) \mathrm{d}t$$

Pour notre fonction, b_n vaut:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \sin(nt) \mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \sin(nt) \mathrm{d}t \right) \tag{2}$$

Intégrons:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) \tag{3}$$

En calculant les bornes on obtient b_n:

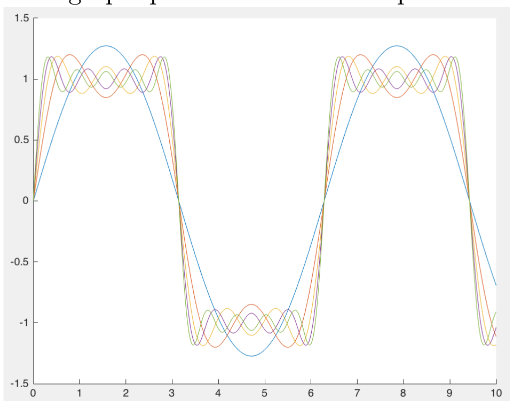
$$b_n = \frac{-2\cos(n\pi) + 2}{n\pi}$$

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4}{5\pi}, b_6 = 0, ...$$

On peut utiliser Matlab pour visualiser l'approximation du signal carré avec les coefficients bn:

```
t = 0:1/100:10;
s = 0;
for n = 1:2:1000
     bn = ((-2*cos(n*pi)) + 2) / (n*pi);
     s = s + (bn * sin(n*t));
end
plot(t, s);
```

Voici un graphique contenant les dix premiers coefficients:



4 Spectre de Fourrier

4.1 Sin et Cos

$$s(t) = 2 - \sqrt{3}\cos(2\pi 100t) - 3\sin(2\pi 100t)$$

Les termes de cos sont 2, $-\sqrt{3}$ et celui de sin est -3.
Faisons la représentation bilatérale du signal. En sachant que

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Alors,

$$s(t) = 2 - \sqrt{3}\left(\frac{e^{j2\pi 100t} + e^{-j2\pi 100t}}{2}\right) - 3\left(\frac{e^{j2\pi 100t} - e^{-j2\pi 100t}}{2j}\right) \tag{1}$$

Le spectre du signal, on arrive à ceci en évitant les complexes au dénominateur:

$$S(t) = 2\delta(0) - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta(f-100) - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta(f+100) + \frac{3j}{2}\delta(f-100) - \frac{3j}{2}\delta(f+100) \tag{2}$$

Sur l'axe des réels, nous avons $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ en -100 et 100 (translation horizontale contrariante), en 0 il y a 2. Sur l'axe imaginaire, il y a $\frac{-3}{2}$ en -100 et $\frac{3}{2}$ en 100. Le module en 0 est 4 car $\sqrt{(2)^2 + (0)^2} = 2$.

Le module et l'argument, en 100:

$$mod = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$angle = arctg\left(\frac{img}{reel}\right)$$

ici, l'angle est

$$angle = arctg\left(\frac{\frac{3j}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$angle = arctg(-\sqrt{3}j) = \frac{-\pi}{3}$$

En passant à l'axe des réels (inversion sin/cos) on obtient $\frac{-\pi}{6}$ qui est au quatrième quadrant alors que 100 est au second quadrant! On prend l'angle à l'opposé, $\frac{5\pi}{6}$ ici. Le module et l'argument, en -100:

$$mod = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

ici, l'angle est

$$angle = arctg\left(\frac{\frac{-3j}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$angle = arctg(\sqrt{3}j) = \frac{\pi}{3}$$

En passant à l'axe des réels (inversion sin/cos) on obtient $\frac{\pi}{6}$ qui est au quatrième quadrant alors que -100 est au quatrième quadrant! On prend l'angle à l'opposé, $\frac{7\pi}{6}$ ici.

4.2 Simpson

$$s(t) = \cos(2\pi t)\cos(2\pi 440t)$$

On utilise ici la formule de Simpson suivante:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Donc,

$$s(t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi t + 2\pi 440t) + \cos(2\pi t - 2\pi 440t)) \tag{1}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}(\cos(2\pi 441t) + \cos(2\pi 439t)) \tag{2}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}\frac{e^{2\pi 441t} + e^{-2\pi 441t}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2\pi 439t} + e^{-2\pi 439t}}{2} \tag{3}$$

$$S(t) = \frac{1}{4}\delta(f-441) + \frac{1}{4}\delta(f+441) + \frac{1}{4}\delta(f-439) + \frac{1}{4}\delta(f+439) \tag{4}$$

Sur l'axe des réels nous avons donc $\frac{1}{4}$ en -441, -439, 439, 441. Rien sur l'axe des imaginaires (pas de sinus dans l'énoncé!), et les axes de modules et angles sont identiques aux axes réels/imaginaires.

5 Convolutions

Les convolutions respectent la distributivité, l'associativité, et les distributions de Dirac sont des éléments neutres:

$$\delta * x = x$$

5.1 Plancherel

La transformée de Fourrier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement:

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(f).Y(f)$$

et

$$x(t).y(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(f) * Y(f)$$

5.2 Parseval

L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie: temporelle ou fréquentielle.

5.3 Convolutions de matrices

Commençons simplement par deux vecteurs:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Pour faire une convolution d'une matrice x par un kernel y, il faut faire la symétrie du kernel,

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Puis il faut faire la somme des produits des éléments de la matrice par le vecteur, en bougeant le kernel d'un emplacement à chaque fois:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & & \\
6 & 5 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & = & 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & & \\
 & 6 & 5 & 4 & & & \\
0 & 0 & 5 & 8 & 0 & = & 13
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & & \\
 & & 6 & 5 & 4 & & \\
0 & 0 & 6 & 10 & 12 & = & 28
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & & & \\
 & & 6 & 5 & 4 & & \\
0 & 0 & 12 & 15 & 0 & = & 27
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & & & & \\
 & & 6 & 5 & 4 & & \\
0 & 0 & 18 & 0 & 0 & = & 18
\end{array}
$$

On obtient de vecteur suivant:

$$x * y = \left[\begin{array}{ccccc} 4 & 13 & 28 & 27 & 18 \end{array} \right]$$

Avec deux matrices de 2x2:

$$a = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

On applique la symétrie sur le kernel b:

$$b = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Procédons à la convolution: $a * b = z$

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & \\ 0 & -1 & \\ & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ & & \\ & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ & & \end{pmatrix} \text{z(1,1) = -1 . 5 = -5}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & -1 \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ & \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ & \end{pmatrix} \text{z(1,2) = 0 . 5 + -1 . 7 = -7}$$

$$\begin{pmatrix} & 9 & 5 \\ & 0 & -1 \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} & \\ & & \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \\ & & \end{pmatrix} \text{z(1,3) = 0 . 7 = 0}$$

$$\begin{pmatrix} & 9 & 5 \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} & \\ & 0 & -1 \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \end{pmatrix} \text{z(2,3)} = 9.7 + 0.9 = 63$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ 0 & -1 \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \text{z(2,2)} = 9.5 + 5.7 + 0.8 + \text{-}1.9 = 71$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & \\ & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ 0 & -1 & \\ & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \text{z(2,1)} = 5.5 + \text{-}1.9 = 17$$

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ 9 & 5 & \\ & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ 0 & -1 & \end{pmatrix} \text{z(1,1)} = 5.8 = 40$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ 9 & 5 \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{z(3,2)} = 9.8 + 5.9 = 117$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} & \\ & 9 & 5 \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \\ & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{z(3,3)} = 9.9 = 81$$

$$a * b = \begin{pmatrix} -5 & -7 & 0 \\ 17 & 71 & 63 \\ 40 & 117 & 81 \end{pmatrix}$$

Ce que l'on peut vérifier avec le code matlab suivant:

```
a = [5 ,7;8 ,9];
b = [-1 ,0;5 ,9];
conv2(a,b)
```

6 Corrélations

Même procédé que pour les convolutions, mais on effectue pas de symétrie sur le kernel. La corrélation permet de de traduire la similitude de un ou deux signaux au niveau de la forme et de la position en fonction du paramètre de translation t.

6.1 Exemple

Soient a et b:

$$a = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Alors $a * b$:

$$a * b = \begin{pmatrix} 45 & 88 & 35 \\ 72 & 116 & 38 \\ 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

En matlab, on utilise $xcorr2$ pour faire la corrélation de deux matrices.

6.2 Auto-Corrélation

Comme son nom l'indique, il s'agit de faire la corrélation d'une matrice avec elle-même. Soit un vecteur:

$$x = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur résultant de l'auto-corrélation de x est:

$$x = \begin{bmatrix} 4 & 15 & 26 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

7 Formules

$$\int \sin nt = \frac{-\cos nt}{n} \tag{1}$$

$$\int \cos nt = \frac{\sin nt}{n} \tag{2}$$

$$\int e^{f(x)} = \frac{e^{f(x)}}{f'(x)} \tag{3}$$

$$fg' = fg - \int f'g \tag{4}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \tag{5}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \tag{6}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \mathrm{d}t \tag{7}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(2\pi n F_0 t) \mathrm{d}t \tag{8}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(2\pi n F_0 t) \mathrm{d}t \tag{9}$$

Carnot:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \tag{10}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \sin 2a}{2} \tag{11}$$

Ptolémée

$$\cos a + b = \sin a \cos b - \sin a \sin b \tag{12}$$

$$\cos a - b = \sin a \cos b + \sin a \sin b \tag{13}$$

$$\sin a \pm b = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \tag{14}$$

Simpson

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos a + b + \cos a - b) \tag{15}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos a - b - \cos a + b) \tag{16}$$