TD sur la Complexité

Exercice 1

Soit la suite U_n définit par :

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} \times U_{n-2} + U_{n-3} \\ U_0 = 1 \\ U_1 = 1 \\ U_2 = 1 \end{cases}$$

Question :

- Donner un algorithme récursif qui calcule U_n
- Évaluer sa complexité.

Correction :

```
unsigned  SuiteU (unsigned n ) {
    if (n <=3 )
        return 1;
    else
        return SuiteU (n-1)* SuiteU (n-2)+ SuiteU (n-3) ;
    }
```

➔La complexité de la solution est exponentielle : O (3^n)

Exercice 2 : Triangle de Pascal

On veut calculer les coefficients binomiaux $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Rappelons les propriétés suivantes :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \ pour\ 0 < k < n$$

$$\binom{n}{n} = 1\ et\ \binom{n}{0} = 1$$

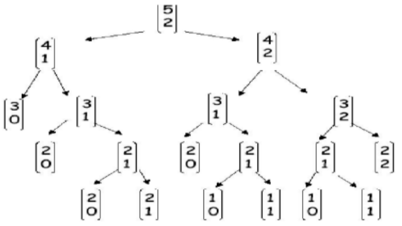
Question :

- Donner un algorithme récursif qui calcul de $\binom{n}{k}$
- Evaluer sa complexité.

Correction :

```
unsigned Combinaison(unsigned n, unsigned k) {
        if (k = = 0) || (k = = n)
                return 1;
        else
                return (Combinaison(n-1, k-1) + Combinaison(n-1, k));
}
```

➔La complexité de la solution est exponentielle : O (2^n)



	0	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
$n-1$	1	$n-1$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n-1}{3}$	$\cdots$	1	
n	1	n	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\cdots$	n	1

Exercice 3 :

1. Ecrire une fonction qui permet de calculer la somme des éléments d'une matrice carée

```
const unsigned n=10;
float M[n][n];
float somme () {
    unsigned i, j;
    float s=0;
    for (i=0; i<n; i++)
              for (j=0; j<n; j++)
                     s+= M[i][j];
     return s;
} /* O(n^2)  */
```

Exercice 4 :

1. Ecrire une fonction itérative puissanceIterative (a, n) qui permet de calculer a^n.

Rq. En utilisant seulement les opérateurs simples (+, −, ∗, /)

```
float puissanceIterative (float a, unsigned n) {
   unsigned i,
    int resultat = 1;
    for (i=0; i<n; i++)
          resultat *= a;
     return resultat;
}   /* O(n) */
```

2. Ecrire une fonction récursive puissanceRecursive (a, n) qui permet de calculer a^n.

```
float puissanceRecursive (float a, unsigned n) {
   if (n==0)
         return 1;
   else
         return  a* puissanceRecursive (a, n-1);
}   /* O(n) */
```

3. Supposant qu'on peut écrire la fonction puissance de la manière suivante :

$a^{n} = a^{n \text{ div } 2} \times a^{n \text{ div } 2}$ si n est pair, sinon $a^{n} = (a^{n \text{ div } 2} \times a^{n \text{ div } 2} \times a)$

$a^{n/2} = a^{n/4} \times a^{n/4}$

…………

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

Proposer une fonction puissanceDdynamique (a, n) en utilisant le principe de la programmation dynamique.

Sol 1 :

```
float puissanceDdynamique1 (float a, unsigned n) {
   if (n == 0)
      return 1;
   if (n % 2 == 0)
      return puissanceDdynamique1 (a, n/2) * puissanceDdynamique1 (a, n/2);
   else
      return puissanceDdynamique1 (a, n/2) * puissanceDdynamique2 (a, n/2) * a;
   }   /* O(2 log n) ==> O(n) */
```

Sol 2 :

```
float puissanceDdynamique2 (float a, unsigned n) {
   int temp = puissanceDdynamique2 (a, n/2);
   if (n == 0)
      return 1;
   if (n % 2 == 0)
      return temp * temp;
   else
      return temp * temp * a;
   }   /* O (log2 n)  */
```

Exercice 5 :
Les nombres de Fibonacci sont définis par la récurrence :

- $F_0 = 1$
- $F_1 = 1$
- $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ pour $n \geq 2$

On peut programmer le calcul de la valeur du nombre de Fibonacci au rang n de plusieurs façons :

- Solution récursif :

```
unsigned fibonR( unsigned n ){
   if((n==0)||(n==1))
        return 1;
   else return fibonR(n-1)+fibonR(n-2);
}/*Complexite est O(2^n)*/
```

- Solution itératif :

```
unsigned fibonI( unsigned n ){
   unsigned F0 = 1, F1 = 1, F = 1;
   for(int i = 2; i<= n; ++i){
      F = F0+F1;
      F0 = F1;
      F1 = F;
   }
   return F1;
} /* Complexite est O(n)*/
```