

Support de cours Module : ASD2 & Complexité

Chapitre 2: Les algorithmes de tri et de recherche Partie ½ : Les algorithmes élémentaires

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

1

Chapitre 2: Les algorithmes de tri et de recherche

I. Introduction

- Le problème de tri consiste à trier (où à ranger) dans un ordre croissant au sens large une suite d'éléments comparables (dotés d'une relation d'ordre total).
- Le problème de recherche consiste à examiner une suite d'éléments(élément par élément) et voir si **info** appartient ou non à la suite,
- Il existe plusieurs algorithmes permettant de réaliser l'opération de tri et de recherche.
- Ces algorithmes sont classés en deux catégories :
 - ❖ **Algorithmes élémentaires** : tri par sélection, tri par insertion, recherche séquentielle sans sentinelle, recherche séquentielle avec sentinelle, etc.
 - ❖ **Algorithmes évolués** : tri par tas, tri rapide, recherche dichotomique, etc.

2

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

II. Le tri par sélection

1) Présentation informelle (ou principe)

Cet algorithme consiste à trouver l'emplacement de l'élément le plus petit du tableau. C'est-à-dire un entier « m » telle que $a_i \geq a_m$ pour tout i appartenant à $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle$, avec n est la taille du tableau à trier.

Une fois m est trouvé on échange a_i et a_m ;

On recommence ces deux opérations (emplacement de l'élément le plus petit et échange) sur la nouvelle suite jusqu'à la suite $\langle a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle$ soit formée d'un seul élément $\langle a_n \rangle$

3

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

II. Le tri par sélection

2) Réalisation:

```
Const n100
Type Tab : Tableau [1..n] d'entiers
proc tri_selection ( var a: Tab; n: entier )
var
  /* variables locales*/
  i: entier /*varie entre 1 et n-1. Elle indique l'avancement dans le tri*/
  j: entier /*varie entre i+1 et n. Elle permet de calculer m*/
  m: entier /*emplacement de l'élément le plus petit entre i et n */
  aux: entier /*pour l'échange a[i] et a[m]*/
  /******partie executive*****/
debut
pour i de 1 à n-1 faire
  /*recherche de m*/
  m ← i;
  pour j de i+1 à n faire
    si (a[j] < a[m]) alors
      m ← j;
  fin pour
  /*échange entre a[i] et a[m]*/
  aux=a[i] ;
  a[i]=a[m] ;
  a[m]=aux ;
fin pour
fin proc.
```

4

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

II. Le tri par sélection

3) Réalisation en C:

```
void tri_selection ( int a [ ], int n) {

    /* variables locales*/
    unsigned i ; /*varie entre 0 et n-2. Elle indique l'avancement dans le tri*/
    unsigned j ; /*varie entre i+1 et n-1. Elle permet de calculer m*/
    unsigned m ; /*emplacement de l'élément le plus petit entre i et n-1 */
    int t        /*pour l'échange a[i] et a[m]*/
    /*****partie executive*****/
    for (i=0 ;i<n-1 ;i++) { /*recherche de m*/
        m=i;
        for (j=i+1 ;j<n ;j++)
            if (a[j] < a[m])
                m=j;
        /*échange entre a[i] et a[m]*/
        t=a[i] ;
        a[i]=a[m] ;
        a[m]=t ;
    }/*fin for i*/
}/*fin tri_selection*/
```

5

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

II. Le tri par sélection

4) Complexité:

Un algorithme a un coût Spatiale : espace mémoire nécessaire

complexité temporelle : temps exigé

La complexité est exprimée par rapport à la taille du problème résolu par l'algorithme concerné. Pour le problème de tri, la taille est le nombre d'éléments à trier : **n** éléments.

- **Complexité spatiale** : La complexité spatiale est de l'ordre de n . On note $O(n)$: en effet le tri se fait dans le même tableau.
- **Complexité temporelle** : Le tri par sélection comporte deux types d'opérations élémentaires :
 - recherche de m entre $a[i]$ et $a[n]$
 - l'échange entre $a[i]$ et $a[m]$

6

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

II. Le tri par sélection

4) Complexité:

- **Pour l'échange:** L'échange a lieu systématiquement dans la boucle principale " pour i de 1 à n-1 faire" qui s'exécute n-1 fois. Sachant que l'opération d'échange exige 3 affectations. On peut conclure que la complexité en transfert est $O(3n) = O(n)$

➔ La complexité en nombre d'échange est de l'ordre de n, que l'on écrit $O(n)$.

7

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

II. Le tri par sélection

4) Complexité:

- **Pour la recherche de m :** On mesure cette complexité par rapport au nombre de comparaisons de l'opération élémentaire : $a[j] < a[m]$? ;

Pour chaque itération (boucle externe) on démarre avec l'élément de position a_i et on le compare avec $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_n$

Donc le nombre de comparaison est **(n-i)**

On commence avec $i=1$ et on termine avec $i=n-1$, ainsi, le nombre de comparaisons total est =

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = (n-1) * (n-1 + 1) / 2 = (n-1) * n / 2$$

➔ La complexité en nombre de comparaison est de l'ordre de n^2 , que l'on écrit $O(n^2)$.

8

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

II. Le tri par sélection

4) Complexité:

- Toutefois cette complexité en nombre d'échanges de cellules n'apparaît pas comme significative du tri, outre le nombre de comparaison, c'est le nombre d'affectations d'indice qui représente une opération fondamentale.

Conclusion : la complexité est de l'ordre $O(n^2)$. On dit que son temps est quadratique par rapport à n (taille du problème).

9

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

III. Le tri par insertion

1) Présentation informelle (ou principe)

On suppose que les $(i-1)$ premiers éléments sont triés.

On essaye de trouver la place de l'élément de position i par rapport aux $(i-1)$ éléments déjà triés.

Et ainsi de suite jusqu'à $i=n$.

10

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

III. Le tri par insertion

2) Réalisation: Proposer un algorithme pour cette procédure

11

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

III. Le tri par insertion

3) Réalisation en c

```
void tri_insertion( int a[ ], int n) {
    unsigned i ; /* niveau d'avancement dans le tri*/
    unsigned j ; /*pour le décalage*/
    int v ; /*élément à insérer*/
    for (i=1 ; i<n ; i++) {
        /*insertion de a[i]*/
        v=a[i];
        j=i;
        while(j>0 && a[j-1]>v) {
            a [ j ]=a [ j-1];
            j--;/*passer à l'élément précédent*/
        }
        a[ j ] = v ;
    }
}
```

12

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

III. Le tri par insertion

4) Complexité

Complexité spatiale : La complexité spatiale est de l'ordre de n . On note $O(n)$: en effet le tri se fait dans le même tableau.

Complexité temporelle :

On identifie l'opération atomique (ou élémentaire) à comptabiliser. On s'intéresse à la boucle interne (**tant que**) et plus précisément, on s'intéresse à l'expression qui gouverne **tant que** à savoir **$j > 1$ et $a[j-1] > v$**

→ ou va comptabiliser le nombre de comparaisons $a[j-1] > v$ pour une itération donnée.

Le nombre de comparaisons ($a[j-1] > v$) n'est pas connu.

Il dépend de la configuration initiale du tableau a.

13

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

III. Le tri par insertion

4) Complexité

Complexité temporelle : On distingue les 3 cas suivants :

A) Cas minimum Ou favorable ou encore optimiste.

Pour chaque élément à insérer on fait une comparaison :

$a[j-1] > v$?

Un tel cas traduit un tableau trié dans le bon ordre.

a 11 12 20 40 60

→ $C_{\min} = n-1$ comparaison. Elle est en $O(n)$.

B) Cas maximum ou défavorable ou encore pessimiste

Pour l'insertion d'un élément de position i , on fait $i-1$ comparaisons de l'expression $a[j-1] > v$. On commence par $i=2$ et on finit avec $i=n$.

→ $C_{\max} = 1+2+\dots+(n-1) = n(n-1)/2$. Elle est en $O(n^2)$.

Un tel cas traduit un tableau trié dans l'ordre inverse.

a 60 40 20 12 11

14

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

III. Le tri par insertion

4) Complexité

Cas moyen :

Configuration aléatoires C_{moy} est compris entre $O(n)$ et $O(n^2)$.

Hypothèse : pour insérer un élément de position i , on fait en moyenne $i/2$ comparaisons ($a[j-1] > v$). Il suffit de diviser C_{max} sur 2.

$$C_{\text{moy}} = n(n-1)/4 : \text{ elle est en } O(n^2).$$

Conclusion: NOMBRE GLOBAL DE COMPARAISON

Cas minimum : $C_{\text{min}} = n-1 \Rightarrow O(n)$

Cas maximum : $C_{\text{max}} = 1+2+3+\dots+n-1 = n(n-1)/2 \Rightarrow O(n^2)$

Cas moyen : $C_{\text{moy}} =$ de l'ordre de $O(n^2)$

15

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

IV. Comparaison entre tri par insertion et tri par sélection

Complexité spatiale : elle est en $O(n)$ pour les deux algorithmes.

Complexité temporelle :

- l'algorithme de tri par sélection ne prend pas en compte la configuration initiale du tableau à trier. Ceci explique $C_{\text{min}} = C_{\text{moy}} = C_{\text{max}} = O(n^2)$.
- L'algorithme de tri par insertion est sensible à la configuration initiale du tableau à trier. On a tendance à comparer les algorithmes résolvant le même problème sur la complexité au pire des cas.
- ❖ Les deux algorithmes (tri par sélection et tri par insertion) présentent la même tendance $O(n^2)$. Dans le cas pessimiste.
- ❖ En moyenne (en multipliant l'exécution sur des configurations différentes), le tri par insertion est plus efficace que le tri par sélection, car prend en compte la configuration initiale du tableau à trier.

16

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

V. La recherche séquentielle

1) Présentation informelle

Un problème de recherche est un problème ayant deux issues :

Echec : info se trouve dans la table

Succès : info ne se trouve pas dans la table

Soient une table a et une information « info » traduisant une caractéristique relative aux éléments stockés dans la table.

L'algorithme de recherche séquentielle (ou linéaire) consiste à examiner la table éléments par éléments et voir si « info » appartient ou non à la table a .

17

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

V. La recherche séquentielle

2) Solution 1 (sans sentinelle):

proposer un algorithme pour cette procédure

18

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

V. La recherche séquentielle

3) Solution 1 en C:

```
int recherche (int T[], int n, int info) {
    /* rend -1 si info n'appartient pas à T
    sinon la position correspondante*/

    unsigned i ;/*pour parcourir le tableau*/

    for(i=0 ;i<n ;i++) {
        if (T[i] == info) /*issue positive*/
            return( i );
    }
    /*issue négative*/
    return -1 ;
}
```

19

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

VI. La recherche séquentielle

4) **Solution 2** : proposer un algorithme basé sur le schéma
Tant Que

20

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

VI. La recherche séquentielle

5) Solution 2 en C : (basée sur le schéma while)

```
int recherche (int t [ ], int n, int info) {
    unsigned i ; /* pour parcourir le tableau */
    i=0 ;
    while (i<n && T[i] !=info)
        i++; /* pour passer à l'élément suivant */

    /* à la sortie de la boucle while :
        i >= n      => échec ou
        T[i] == info => succès et  forcément i < n */
    if(i < n)
        return i ;
    else
        return -1 ;
}
```

21

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

VI. La recherche séquentielle

6) Solution 3 : (en utilisant une sentinelle)

L'idée consiste à utiliser $n+1$ cases et on insère dans la dernière case l'élément à recherché.

22

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

VI. La recherche séquentielle

6) Solution 3 en C : (en utilisant une sentinelle)

/*on utilise n+1 cases et on insère dans la dernière case l'élément à recherché*/

```
int recherche (int t[], int n1; int info)  {
/* rend -1 si info n'appartient pas au tableau sinon la position
correspondante*/
unsigned i ;/*pour parcourir nom*/
T[n1]=info ; /*garantir le non dépassement du tableau */
while(T[i] != info)
    i++;
if( i==n1)
    return( -1 ) ;
else
    return( i ) ;
}
```

23

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

VI. La recherche séquentielle

7) Comparaison solution2/solution3 :

complexité spatiale :

solution 2 → n éléments → $O(n)$

solution 3 → (n+1) éléments → $O(n)$

complexité temporelle :

solution 2 : à chaque itération, 3 évaluations

solution 3 : à chaque itération, 1 évaluation

On a amélioré le temps de la solution 2 moyennant un espace supplémentaire (1 seul élément)

On ne recommande pas la solution 1.

Remarque : Dans une structure linéaire ici les tableaux on peut placer moyennement un espace supplémentaire soit une sentinelle à droite soit à gauche.

24

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

VI. La recherche séquentielle

7) Comparaison solution2/solution3 :

-complexité temporelle : l'opération à comptabiliser est la comparaison entre x et l'élément courant

On distingue :

-Cas minimum : une seule comparaison, un tel cas traduit que x coïncide avec le premier élément du tableau.

-Cas maximum : n comparaisons x coïncide avec le dernier élément ou x n'appartient pas à $\text{nom}[i]$:

- sans sentinelle $\rightarrow n$ comparaisons

- avec sentinelle $\rightarrow n+1$ comparaisons

Elle est en $O(n)$

-Cas moyen : $n/2$ comparaisons.

25

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche

VII. Exercices d'application

Exercice 1 :

Écrire une procédure qui permet d'afficher les sous séquences strictement croissantes depuis un tableau de N entiers.

Exemple pour $T = 5|7|9|2|3|1|20|25$

La fonction affiche :

5|7|9

2|3

1|20|25

Exercice 2:

On donne un tableau appelé redondant contenant des entiers redondants et dans un ordre quelconque.

Présenter d'une façon informelle puis écrire un algorithme permettant de compter la fréquence de chaque élément figurant dans le tableau redondant dans une table.

26

Chapitre 1 : Les algorithmes de tri et de recherche**VII. Exercices d'application****Exercice 3 :**

On possède un tableau de nombres entiers, classés par valeur croissante, chaque entier pouvant être répété plusieurs fois :

3 5 5 5 7 9 9 9 9 10 10 12 12 12 13

On appelle plateau la suite de tous les entiers consécutifs de même valeur : dans l'exemple ci-dessous le plateau de valeur 5 comporte 3 nombre, celui de valeur 10 comporte 2 etc. On appelle la longueur d'un plateau la valeur commune à tous ses termes. Un tableau a de n termes étant donné, trouver la longueur et la valeur de son plus long plateau.