

TD2**EXERCICE 1 :**

On considère une pile munie des opérations suivantes :

- PUSH(S, x) : empile un objet x sur la pile S
- POP(S) : dépile le sommet de la pile S et retourne l'objet dépilé
- MULTIPOP(S, k) : dépile au plus k objets de la pile S

Algorithm 1: MULTIPOP(S, k)

```

début
    tant que  $S \neq \emptyset$  et  $k \neq 0$  faire
        POP( $S$ );
         $k \leftarrow k - 1$ ;

```

1. Quelle est la complexité de chacune des 3 opérations ? En déduire avec la méthode globale (méthode de l'agrégat) le coût amorti pour une suite de n opérations PUSH, POP et MULTIPOP sur une pile initialement vide.
2. Même question avec la méthode des acomptes.
3. Même question avec la méthode des potentiels.
4. On souhaite implémenter une file à l'aide de deux piles, de telle façon que le coût amorti des opérations Enfiler et Défiler soit $O(1)$. Comment peut-on faire ?

EXERCICE 2 : ajout de PileVide

Dans la méthode comptable du cours, on avait supposé un peu abusivement que PileVide ne coûtait rien. Supposez maintenant les coûts suivants et trouvez les bons coûts amortis (s est le nombre d'éléments dans la pile à ce moment de l'exécution).

Opération	coût réel	coût amorti
EMPLER(S, x)	1	?
DÉPILER(S)	1	?
MULTIDÉPILER(S, k)	$\min(s, k)$?
PILEVIDE(S)	1	?

EXERCICE 3 : ajout des coûts réels

On affecte les coûts réels suivants aux fonctions de pile

Que faut-il choisir comme coûts amortis pour que le raisonnement précédent continue à fonctionner ?

Opération	coût réel	coût amorti
EMPLER(S, x)	a	?
DÉPILER(S)	b	?
MULTIDÉPILER(S, k)	$c + d \min(s, k)$?
PILEVIDE(S)	e	?

Exercice 4. Pile avec sauvegarde régulière

Soit une pile avec les 3 fonctions usuelles (Empiler(S, x), Dépiler(S), PileVide(S)). On rajoute une fonctionnalité à la pile qui est que toutes les k opérations, on fait une copie de sauvegarde de toute la pile. On suppose de plus que la pile ne dépasse jamais k valeurs. Montrer alors, en choisissant bien les coûts amortis, que le coût amorti total de m opérations (sauvegardes incluses) est bien $O(m)$.

Exercice 5. Analyse amortie d'une file implémentée à l'aide de deux piles

Montrer que l'on peut implémenter une file avec deux piles ordinaires, de telle manière que le coût amorti de chaque opération Enfiler et Défiler soit $O(1)$.

Ecrivez d'abord les pseudo-codes de la procédure Enfiler (F, x) et de la fonction Défiler (F).

On pourra supposer que F.P 1 et F.P 2 sont les deux piles associées à F .

Utilisez ensuite la méthode de l'agrégat, puis la méthode comptable pour trouver les coûts amortis.