Université de Monastir

Cours: Algorithmes et Complexité

Chapitre 1: La récursivité (Parie 3)

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

1

Chapitre 1: La récursivité

I. Le paradigme diviser pour régner

Le paradigme **diviser pour régner** (ou diviser pour résoudre) est une technique algorithmique qui consistant à :

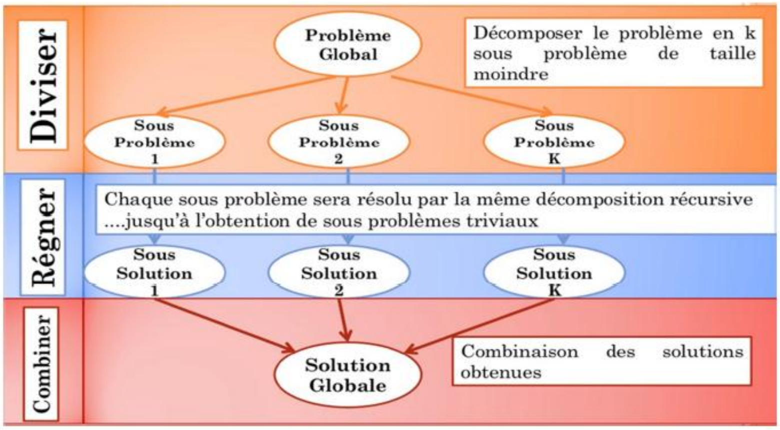
Diviser : découper un problème initial en sous-problèmes ;
Régner : résoudre les sous-problèmes (récursivement ou directement s'ils sont assez petits) ;
Combiner : calculer une solution au problème initial à partir des solutions des sous-problèmes.

Cette technique fournit des algorithmes efficaces pour de nombreux problèmes.
NB. Les algorithmes basés sur le paradigme *diviser pour régner* sont souvent adaptés pour être exécutés sur des machines avec **plusieurs processeurs**.

2

Chapitre 1: La récursivité

I. Le paradigme diviser pour régner



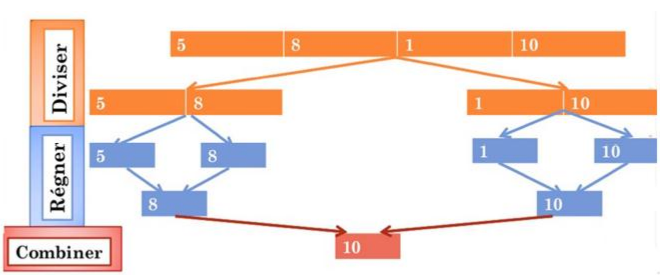
3

Chapitre 1: La récursivité

I. Le paradigme diviser pour régner

Exemple 1: Recherche le Maximum

Soit T un tableau à n éléments, écrire une fonction récursive permettant de rechercher l'indice du maximum dans T en utilisant le paradigme diviser pour régner!



4

I. Le paradigme diviser pour régner

Solution de l'exemple 1:

I. Le paradigme diviser pour régner

Exemple 2
La technique de recherche dichotomique n'est applicable que si le tableau est **déjà trié** (par exemple dans l'ordre croissant).

Le but de recherche dichotomique est de diviser l'intervalle de recherche par 2 à chaque itération. Pour cela, on procède de la façon suivante :
Soient premier et dernier les extrémités gauche et droite de l'intervalle dans lequel on cherche la valeur x, on calcule M, l'indice de l'élément médian :
M = (premier + dernier) div 2
Il y a 3 cas possibles :
x = T[M] : l'élément de valeur x est trouvé, la recherche est terminée
x < T[M] : l'élément x, s'il existe, se trouve dans l'intervalle [premier..M-1]
x >T[M] : l'élément x, s'il existe, se trouve dans l'intervalle [M+1..dernier]
La recherche dichotomique consiste à itérer ce processus jusqu'à ce que l'on trouve x ou que l'intervalle de recherche soit vide.

Proposer une implémentation récursive et une autre itérative pour cette méthode.

I. Le paradigme diviser pour régner

Solution de l'exemple 2:

II. Complexité de qq algo basés sur ce paradigme

Cas de l'Algo de Rech Dichotomique.

-Complexité en temps :
On va comptabiliser l'opération de comparaison de x avec T[m]

On distingue les cas suivant :
-Cas minimum ou optimiste: une seul comparaison, ceci traduit que x coïncide avec T[0+(N-1)/2].

-Cas maximum ou pessimiste :(dans le pire des cas) un tel cas traduit x n'appartient pas au tableau. À chaque itération, on part d'un problème de taille N et moyennant une comparaison, on tombe sur un problème de taille N/2.

L'algorithme de recherche dichotomique applique le principe « diviser pour résoudre » ou encore « diviser pour régner » : le problème initiale est divisé en deux sous problème **disjoints** et de taille plus ou moins égale.

Chapitre 1: La récursivité

II. Complexité de qq algo basés sur ce paradigme

Supposant que N est le nombre d'éléments,
On note C_N : le nombre de fois où la comparaison est effectuée.
➔ $C_N = C_{N/2} + 1$

avec $C_1 = 1$

On pose $N = 2^n$ ou $n = \log_2 N$

$C_N = C_{2^n}$

$C_{2^n} = C_{2^{n-1}} + 1$

$= C_{2^{n-2}} + 1 + 1$

$= C_{2^{n-3}} + 3$

…….

$= C_1 + n = 1 + n = 1 + \log_2 N$

Ainsi, cet algorithme est $O(\log_2 N)$

-Cas moyen : entre 1 et $\log_2 N$

Chapitre 1: La récursivité

II. Complexité de qq algo basés sur ce paradigme

Remarque : Le gain apporté par l'application de l'algorithme de recherche dichotomique sur un tableau **trié** peut être illustré par l'exemple suivant : on souhaite effectuer une recherche sur un tableau trié T de taille N=10000.

Si on applique

- l'algorithme de recherche séquentielle la complexité dans le cas moyen est 5000
- l'algorithme de recherche dichotomique, la complexité au pire des cas est $O(\log_2 10000) \approx 14$

Chapitre 1: La récursivité

III. Exercice d'application

Le principe de **trie par fusion** est :

- Découper le tableau T[1, .. n] à trier en deux sous-tableaux T[1, .. n/2] et T[n/2 +1,..n]

- Trier les deux sous-tableaux T[1, .. n/2] et T[n/2 +1,..n] (récursivement, ou on ne fait rien s'ils sont de taille 1)

-Fusionner les deux sous-tableaux triés T[1, .. n/2] et T[n/2 +1,..n] de sorte à ce que le tableau final soit trié.

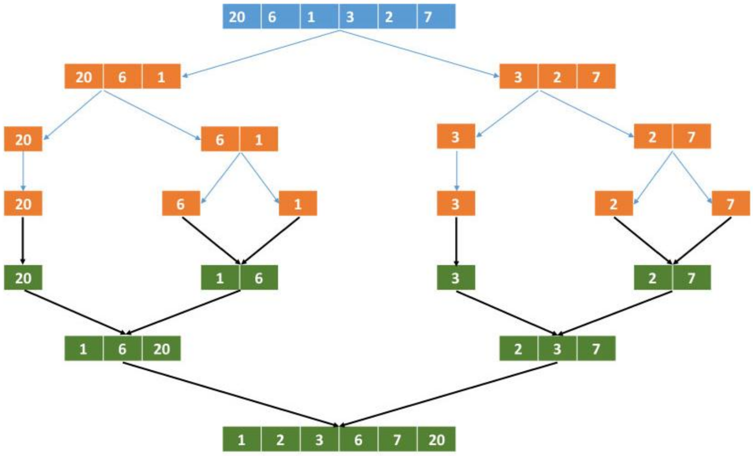
1) Proposer une implémentation récursive pour cette technique
2) Déterminer sa complexité.

11

Chapitre 1: La récursivité

III. Exercice d'application

Illustration de l'algo de trie par fusion



12

III. Exercice d'application

Solution

```
#include <stdio.h>

void fusion (int T [ ], int g, int m, int d);

void TriFusion(int T [ ], int g, int d){
        int m;
        if (g<d){
                m=(g+d)/2;
                TriFusion(T, g, m) ;
                TriFusion(T, m+1, d) ;
                 Fusion(T, g, m, d) ;
        }
}
```


III. Exercice d'application

Solution

```
void fusion (int tab [ ], int g, int m, int d) {
        int n1 = m - g + 1, n2 = d - m;
        int i, j, k;
        int T1 [n1],  T2 [n2] ;
        for (i = 0; i < n1; i++)
                T1[i] = tab[g + i];
        for (j = 0; j < n2; j++)
                T2[j] = tab[m + 1 + j];
 /* maintient trois pointeurs, un pour chacun des deux tableaux et un pour
    maintenir l'index actuel du tableau trié final     */
         i = 0;      j = 0;      k = g;
        while (i < n1 && j < n2)
             if (T1[i] <= T2[j])
                  tab[k++] = T1[i++];
           else
                tab[k++] = T2[j++];
   /* tab[k++]= (T1[i] <= T2[j]) ? T1[i++]:T2[j++]; */
 // Copiez tous les éléments restants du tableau non vide
        while (i < n1)         tab[k++] = T1[i++];
        while (j < n2)         tab[k++] = T2[j++];
 }
```