TD3

Ex 2

- Méthode comptable $\Rightarrow$ crédit Total de n opér ≥ 0

$\Rightarrow$ On peut prendre comme crédit Total = nb d'élément dans la SD

CT_n : Crédit Total après n opér

$$= \sum_{i=1}^{n} \hat{C}_i - C_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \hat{C}_i - C_i + \hat{C}_n - C_n$$

$$= CT_{n-1} + \hat{C}_n - C_n$$

$\Rightarrow$ • Si l'operation n est empiler

$$CT_n = CT_{n-1} + \hat{C}_{emp} - C_{emp} = CT_{n-1} + 1$$

$$\Rightarrow \hat{C}_{emp} = 1 + 1 = 2$$

• Si l'operation numero n est depiler

$$CT_n = CT_{n-1} + \hat{C}_{dep} - C_{dep} = CT_{n-1} - 1$$

$$\Rightarrow \hat{C}_{dep} = 1 - 1 = 0$$

• Si la n^{eme} opér est Multidep

$$CT_n = CT_{n-1} + \hat{C}_{Mdep} - C_{Mdep} = CT_{n-1} - \min(S,k)$$

$$\Rightarrow \hat{C}_{Mdep} = \min(S,k) - \min(S,k) = 0$$

• Si la n^{eme} opér est PileVide

$$CT_n = CT_{n-1} + \hat{C}_{vide} - C_{vide} = CT_{n-1}$$

$$\Rightarrow \hat{C}_{vide} = C_{vide} = 1$$

TD3

Ex2

Methode potentiel

soit $\phi(D_i)$ = nb d'elements dans la pile D_i

• supposant que la i-ème opér est empiler

$$\Rightarrow \hat{C}_{emp} = C_{emp} + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$$

$$= C_{emp} + (\phi(D_{i-1}) + 1) - \phi(D_{i-1})$$

$$= C_{emp} + 1 = 2$$

• supposant que la i-ème opér est dépiler

$$\Rightarrow \hat{C}_{dep} = C_{dep} + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$$

$$= C_{dep} + (\phi(D_{i-1}) - 1) - \phi(D_{i-1})$$

$$= C_{dep} - 1 = 0$$

• supposant que la i-ème opér est multidep

$$\Rightarrow \hat{C}_{mdep} = C_{mdep} + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$$

$$= C_{mdep} + (\phi(D_{i-1}) - \min(s,k)) - \phi(D_{i-1})$$

$$= \min(s,k) - \min(s,k) = 0$$

• supposant que la i-ème opér est pileVide

$$\Rightarrow \hat{C}_{v.d} = C_{v.d} + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$$

$$= C_{v.d} + \phi(D_{i-1}) - \phi(D_{i-1})$$

$$= C_{v.d} = 1$$

TD3

Ex3

- Méthode comptable => crédit Total de n opér ≥ 0

on prend par exp comme crédit Tot : nb d'éléments restant dans la SD

- CT_n crédit Total $= \sum_{i=1}^{n} (\hat{c}_i - c_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{c}_i - c_i) + \hat{c}_n - c_n$$

$$= CT_{n-1} + \hat{c}_n - c_n \quad ①$$

=> si l'opér n est un empilement

$$CT_n = CT_{n-1} + 1 \quad ②$$

① et ② => $\hat{c}_{emp} = c_{emp} + 1 = \cancel{1} + a$

=> si l'opér n est un dépilement

$$CT_n = CT_{n-1} - 1 \quad ③$$

① et ③ => $\hat{c}_{dep} = c_{dep} - 1 = b - 1$

=> si l'opér n est un multidep

$$CT_n = CT_{n-1} - \min(s, k) \quad ④$$

① et ④ => $\hat{c}_n = c_n - \min(s, k)$

$$\hat{c}_{Mdep} = c_{Mdep} - \min(s, k)$$

$$= c + b(\min(s, k)) - \min(s, k) = c + (b-1)\min(s, k)$$

=> si l'opér n est Pvide

$$CT_n = CT_{n-1} \quad ⑤$$

① et ⑤ => $\hat{c}_{Pvide} = c_{Pvide} = c$

Méthode potentiel

Soit $\phi(D_i)$ = nb éléments dans la SD à l'état D_i

$$\hat{C}_{emp} = C_{emp} + \underbrace{\phi(D_i) - \phi(D_{i-1})}$$

$$= a + \left(\underbrace{\phi(D_{i-1})}_{S} + 1\right) - \underbrace{\phi(D_{i-1})}_{S}$$

$$= a + 1$$

$$\cdot\ \hat{C}_{dep} = C_{dep} + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$$

$$= b + \left(\underset{S'}{\phi(D_{i-1})} - 1\right) - \underset{S'}{\phi(D_{i-1})}$$

$$= b - 1$$

$$\cdot\ \hat{C}_{multidep(S,K)} = C_{multidep} + \underbrace{\phi(D_i) - \phi(D_{i-1})}_{Min(S,K)}$$

$$= C_{multidep}$$

$$= C + b \cdot min(S,K) + Min(S,K)$$

$$= C + (b - 1)(Min(S,K))$$

$$\cdot\ \hat{C}_{Vide()} = C_{Vide} + \underbrace{\phi(D_i) - \phi(D_{i-1})}_{0}$$

$$= C_{Vide} +$$

$$= C$$

TD3

Ex5 (Pile avec Sauvegarde)

$$\begin{array}{c|c} n & K \\ \hline r & q \end{array}$$

$\to r$: n mod k — $q \leftarrow$ n div k

on a n operations $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow n = q * k + r$

$\Leftrightarrow$

- q oper de copie

+

- $n - q$ oper usuelle

. cout des q oper de copie $= q \times k$ — au max k élts sont copiés

$= \cancel{n\ div\ k * k}$

$= n - r$

$$\boxed{\begin{array}{l} n = q \cdot k + r \Rightarrow \\ q \cdot k = n - r \end{array}}$$

. cout du reste des oper usuelles $= (n - q) \times 1$

$= n - q$

$\Rightarrow$ cout Total $= (n - r) + n - q = 2n - (r + q)$

$\leq 2n \Rightarrow O(n)$

chaque operation est $O(1) \rightsquigarrow$ linéaire

	c	c
emp(s,x)	1	2
dep(s)	1	0
V.de(s)	1	1
Copie(s)	s	s

. Methode potentiel $\phi(D_i)$ = nb d'élements dans la pile

⋮

Ex 6 méthode potentielle

comme sol (c'est pas la seule sol)

on définit la fonction potentiel ϕ de la file (composée de 2 piles P1 et P2)

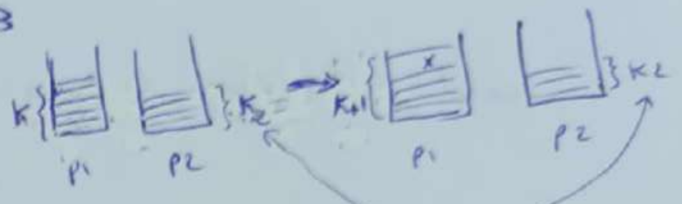
par $2 * nb\_elements$ dans **P1**

* $Credit_{enfiler} = C_{rempiler} + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$

Cas 1. si P1 est initialement vide $\Rightarrow$

$= 1 + (2*1) - (2*0) = 3$

Cas 2. si P1 contient K élements $\Rightarrow$



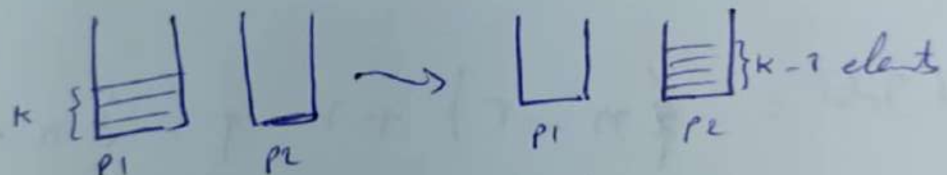
$= 1 + 2(K+1) - (2*K) = 3$

$K_2 = 0$ ou non c'est la même

$\Rightarrow$ Toujours $= 3$

* $Credit_{defiler} = C_{réel\,def} + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$

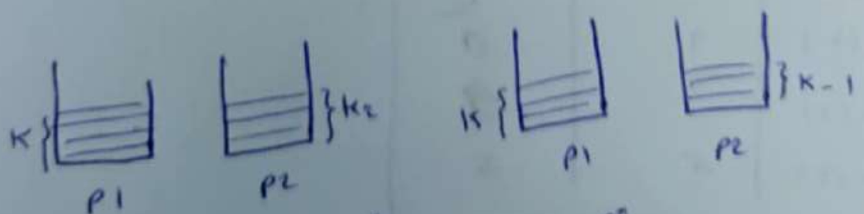
Cas 1.



$= \underbrace{(K + K + 1)}_{C_{réel}} + \underbrace{0}_{D_i} - \underbrace{2*K}_{D_{i-1}} = 1$

K depilements depuis P1 — K empilements dans P2 — 1 depilement depuis P2

Cas 2.



$= \underbrace{1}_{C_{réel}} + \underbrace{2*K}_{\phi_{D_i}} - \underbrace{2*K}_{\phi_{D_{i-1}}} = 1$

$\Rightarrow$ Toujours $= 1$

ISIMM SECTION : ING1INFO	ANNEE UNIVERSITAIRE : 2024-2025 ENSEIGNANT : SAKKA ROUIS TAOUFIK
MATIERE : CONCEPTION ET ANALYSE D'ALGORITHMES	

TD3

EXERCICE 1 :

On considère une pile munie des opérations suivantes :

— PUSH(S, x) : empile un objet x sur la pile S

— POP(S) : dépile le sommet de la pile S et retourne l'objet dépilé

— MULTIPOP(S, k) : dépile au plus k objets de la pile S

```
Algorithm 1: MULTIPOP(S, k)
début
    tant que S ≠ ∅ et k ≠ 0 faire
        POP(S);
        k ← k − 1;
```

1. Quelle est la complexité de chacune des 3 opérations ? En déduire avec la méthode globale (méthode de l'agrégat) le coût amorti pour une suite de n opérations PUSH, POP et MULTIPOP sur une pile initialement vide.

2. Même question avec la méthode des acomptes.

3. Même question avec la méthode des potentiels.

4. On souhaite implémenter une file à l'aide de deux piles, de telle façon que le coût amorti des opérations Enfiler et Défiler soit O(1). Comment peut-on faire ?

EXERCICE 2 : ajout de PileVide

Dans la méthode comptable du cours, on avait supposé un peu abusivement que PileVide ne coûtait rien. Supposez maintenant les coûts suivants et trouvez les bons coûts amortis (s est le nombre d'éléments dans la pile à ce moment de l'exécution).

Opération	coût réel	coût amorti
EMPILER(S, x)	1	?
DÉPILER(S)	1	?
MULTIDÉPILER(S, k)	$\min(s, k)$	?
PILEVIDE(S)	1	?

EXERCICE 3 : ajout des coûts réels

On affecte les coûts réels suivants aux fonctions de pile

Opération	coût réel	coût amorti
EMPILER(S, x)	a	?
DÉPILER(S)	b	?
MULTIDÉPILER(S, k)	$c + b\min(s, k)$	?
PILEVIDE(S)	c	?

Que faut-il choisir comme coûts amortis pour que le raisonnement précédent continue à fonctionner ?

EXERCICE 4 : ajout des coûts réels

On affecte les coûts réels suivants aux fonctions de pile

Opération	coût réel	coût amorti
EMPILER(S, x)	a	?
DÉPILER(S)	b	?
MULTIDÉPILER(S, k)	$c + d \min(s, k)$	?
PILEVIDE(S)	e	?

Que faut-il choisir comme coûts amortis pour que le raisonnement précédent continue à fonctionner ?

Exercice 5. Pile avec sauvegarde régulière

Soit une pile avec les 3 fonctions usuelles (Empiler(S, x), Dépiler(S), PileVide(S)). On rajoute une fonctionnalité à la pile qui est que toutes les k opérations, on fait une copie de sauvegarde de toute la pile. On suppose de plus que la pile ne dépasse jamais k valeurs. Montrer alors, en choisissant bien les coûts amortis, que le coût amorti total de n opérations (sauvegardes incluses) est bien O(n).

Exercice 6. Analyse amortie d'une file implémentée à l'aide de deux piles

Montrer que l'on peut implémenter une file avec deux piles ordinaires, de telle manière que le coût amorti de chaque opération Enfiler et Défiler soit O(1).

Ecrivez d'abord les pseudo-codes de la procédure Enfiler (F, x) et de la fonction Defiler (F).

On pourra supposer que F.P 1 et F.P 2 sont les deux piles associées à F.

Utilisez ensuite la méthode de l'agrégat, puis la méthode comptable pour trouver les coûts amortis.