

Université de Monastir

Cours: Conception et Analyse d'Algorithmes

Chapitre 3: La programmation dynamique

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis

1

Chapitre 3: La programmation dynamique

I. Classifications de paradigmes algorithmiques

- **Algorithme glouton** : construit une solution de manière incrémentale, en optimisant un critère de manière locale.
- **Diviser pour régner** : divise un problème en sous-problèmes indépendants (**qui ne se chevauchent pas**), résout chaque sous-problème, et combine les solutions des sous-problèmes pour former une solution du problème initial.
- **Programmation dynamique** : divise un problème en sous-problèmes qui sont non indépendants (**qui se chevauchent**), et cherche (et stocke) des solutions de sous-problèmes de plus en plus grands

2

Chapitre 3: La programmation dynamique

II. Historique de la programmation dynamique

- Paradigme est développé par Richard Bellman en 1953.
- Technique de conception d'algorithme très générale et performante.
- Permet de résoudre de nombreux problèmes d'optimisation:
 - Problème de sac à dos
 - Problème de voyageurs de commerce

3

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

Il est basé sur la décomposition du problème initial en problèmes plus simples et la résolution de ces sous-problèmes à partir des plus simples.

Le but de la programmation dynamique est de trouver un **objet optimal** à partir d'un ensemble donné d'objets.

La programmation dynamique est un paradigme algorithmique qui résout un problème complexe en le divisant en sous-problèmes et stocke les résultats des sous-problèmes **pour éviter de calculer à nouveau les mêmes résultats**.

4

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

Les deux propriétés principales d'un problème suggérant qu'il peut être résolu à l'aide de la programmation dynamique sont:

- Chevauchement de sous-problèmes
- Sous-structure optimale

5

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

Similairement au paradigme basé sur le principe diviser pour régner, la programmation dynamique combine des solutions à des sous-problèmes.

La programmation dynamique est principalement utilisée lorsque **des solutions des mêmes sous-problèmes** sont nécessaires à plusieurs reprises.

Dans la programmation dynamique, les solutions calculées aux sous-problèmes sont stockées dans une table de sorte qu'elles ne doivent pas être recalculées.

6

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

→ La programmation dynamique n'est pas utile lorsqu'il n'y a pas de sous-problèmes communs (qui se chevauchent) parce qu'il n'y a pas de raison de stocker les solutions si elles ne sont pas nécessaires à nouveau.

Exemples:

La recherche dichotomique n'a pas de sous-problèmes communs.

Le tri par fusion n'a pas de sous-problèmes communs.

Le tri rapide n'a pas de sous-problèmes communs.

7

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

Voici une implémentation **naïvement** (c-a-d la **transcription intuitive de sa définition**) de la suite de Fibonacci

```

function fibo (n: entier) : entier
debut
    si (n =0 ou n=1 ) alors
        return n
    Sinon
        return fibo(n-1) + fibo(n-2)

    finsi
finFn
  
```

Nous remarquons que la **complexité algorithmique** de cette fonction est **exponentielle** → **Solution inefficace**

8

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

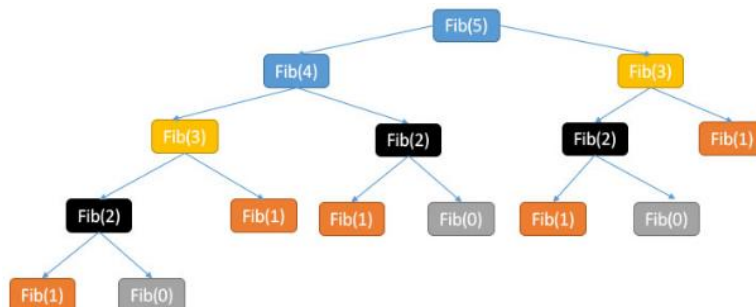
→ Pour calculer $\text{Fibo}(5)$ on peut conclure que

Fib(3) est appelé (calculé) 2 fois.

Fib(2) est appelé (calculé) 3 fois.

Fib(1) est appelé (calculé) 5 fois.

Fib(0) est appelé (calculé) 3 fois.



9

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

→ **Idé**: Si nous avons stocké les valeurs de **Fib(0)**, **Fib(1)**, **Fib(2)**, **Fib(3)**,... et **Fib(n-1)**, alors au lieu de les calculer à nouveau, nous aurions pu réutiliser les anciennes valeurs stockées.

Il y a deux façons différentes de stocker les valeurs pour que ces valeurs puissent être réutilisées :

- **Mémoïsation** (Méthode descendante: du haut vers le bas)
- **Tabulation** (Méthode ascendante: de bas en haut)

10

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

Mémoïsation

Le programme mémoisé pour un problème est similaire à la version récursive avec une petite modification qui consiste à regarder dans un dictionnaire avant de calculer la solution.

Nous créons un dictionnaire vide. Chaque fois que nous avons besoin de la solution à un sous-problème, nous examinons d'abord le dictionnaire. Si la valeur pré-calculée est là, nous renvoyons cette valeur. Sinon, nous calculons la valeur et plaçons le résultat dans le dictionnaire afin qu'il puisse être réutilisé ultérieurement.

11

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

Mémoïsation

Voici la version mémoisée de la suite de Fibonacci

fonction fiboMem (n: entier) : entier

debut

si (memo[n] existe) **alors**

return memo [n]

finSi

si (n =0 ou n=1) **alors**

return n

Sinon

 memo[n] = fiboMem (n-1) + fiboMem (n-2)

return memo[n];

finsi

finFn

12

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

Mémoïsation

FiboMem (k) induit des appels récursifs seulement la première fois qu'elle est appelée.

Nombre d'appels non mémoïsés : (entre 0 et n) → $O(n)$.

Temps d'un appel (sans compter les appels **récursifs non mémoïsés**) : $O(1)$ du fait de l'addition entière FiboMem(k-1) + FiboMem(k-2).

→ Complexité temporelle : $O(n)$.

13

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

Mémoïsation

Idée générale: mémoïser et réutiliser les solutions de sous-problèmes qui aident à résoudre le problème.

Complexité temporelle = nombre de sous-problèmes

x

complexité par sous-problème

NB. Dans le calcul de la complexité par sous-problème, **on ne compte pas les appels récursifs**. Parce que grâce à la mémoïsation, les appels récursifs deviennent des simples lectures du tableau memo[], donc ils ne se propagent pas en cascade comme dans la version naïve.

14

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

Pour la version mémorisée de la suite de Fibonacci:

On a n sous-problèmes : il y a n valeurs différentes de $\text{fib}(0)$ à $\text{fib}(n-1)$, $\rightarrow O(n)$.

Complexité par sous-problème : une addition simple $\text{memo}[n-1] + \text{memo}[n-2] \rightarrow O(1)$.

\rightarrow Complexité totale = $O(n) \times O(1) = O(n)$

15

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

B. Tabulation

Le programme tabulé pour un problème donné crée une table de manière **ascendante** et renvoie la dernière entrée de la table.

Par exemple, pour le même nombre de Fibonacci, nous calculons d'abord $\text{Fib}(0)$ puis $\text{Fib}(1)$ puis $\text{Fib}(2)$ puis $\text{Fib}(3)$ et ainsi de suite.

Nous construisons donc littéralement les solutions de sous-problèmes ascendantes.

16

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

B. Tabulation

Voici la version tabulée de la suite de Fibonacci

fonction fiboTab (n: entier) : entier

debut

 memo[0] = 0

 memo[1] = 1

Pour i de 2 **a** n **faire**

 memo[i] = memo[i-1] + memo[i-2]

fin pour

return memo[n];

finFn

Nous remarquons que la **complexité algorithmique** de cette fonction est **linéaire** → **O(n)**

17

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

1/ Chevauchement de sous-problème

C. Tabulation Vis Mémoïsation

Si le problème initial nécessite la résolution de tous les sous-problèmes, la **tabulation** est généralement plus performante que la **mémoïsation** par un facteur constant. En effet, la tabulation ne nécessite pas de temps supplémentaire pour la récursivité et peut utiliser un tableau préalloué plutôt qu'un dictionnaire.

Si seulement certains des sous-problèmes doivent être résolus pour que le problème initial soit résolu, la **mémoïsation** est préférable car les sous-problèmes sont résolus paresseusement, c'est-à-dire que les calculs nécessaires sont effectués.

18

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

2/ Sous-structure optimale

Un problème donné a une propriété de sous-structure optimale si une solution optimale du problème donné peut être obtenue par des solutions optimales de ses sous-problèmes.

Par exemple, le problème du plus court chemin a la propriété de sous-structure optimale suivante :

Si un nœud x se trouve dans le plus court chemin d'un nœud source u à un nœud de destination v ,

→ Le plus court chemin de u à v est la combinaison du plus court chemin de u à x et du plus court chemin de x à v .

19

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

2/ Sous-structure optimale

Exemples typiques de la programmation dynamique.

-L'algorithme **Floyd-Warshall** est un algorithme pour déterminer les distances des plus courts chemins entre toutes les paires de sommets dans un graphe orienté.

-L'algorithme **Bellman-Ford** est un algorithme qui calcule des plus courts chemins depuis un sommet source donné dans un graphe orienté pondéré.

20

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

3/ Comment résoudre un problème de programmation dynamique

Le développement d'un algorithme de programmation dynamique se devise en quatre étapes :

- 1/ Identifiez s'il s'agit d'un problème de programmation dynamique
- 2/ Identifiez les variables du problème
- 3/ Exprimer clairement la relation de récurrence
- 4/ Faire la tabulation (ou ajouter une mémorisation)

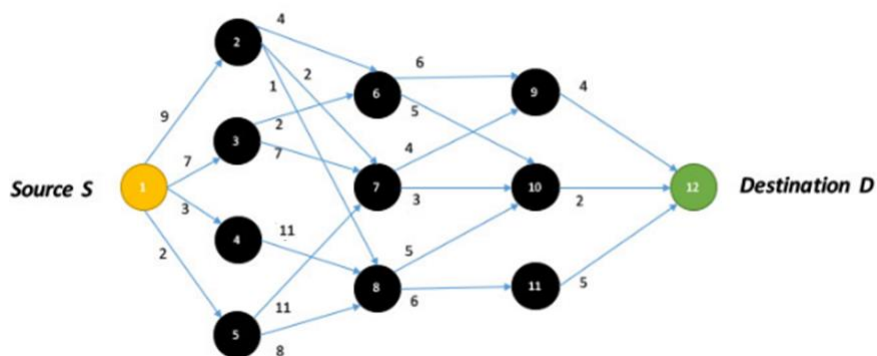
21

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

3/ Comment résoudre un problème de programmation dynamique

Exemple : Graph de décision en plusieurs étapes



22

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

3/ Comment résoudre un problème de programmation dynamique

Exemple : Graph de décision en plusieurs étapes

1- Identifiez s'il s'agit d'un problème de programmation dynamique

En règle générale, la programmation dynamique permet de résoudre tous les problèmes nécessitant de maximiser ou de minimiser certaines quantités ou les problèmes de dénombrement nécessitant de compter les arrangements dans certaines conditions ou avec certains problèmes de probabilité.

Tous les problèmes de programmation dynamique satisfont la propriété de sous-problèmes qui **se chevauchent** et la plupart des problèmes dynamiques classiques satisfont également à la propriété de sous-structure optimale. Une fois que nous observons ces propriétés dans un problème donné, assurez-vous qu'il peut être résolu en utilisant la programmation dynamique.

23

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

Dans notre exemple, le problème consiste à calculer le plus court chemin entre la source **S** et la destination **D**. Ce problème a les deux propriétés : Chevauchement de sous-problèmes et Sous-structure optimale donc c'est un problème de programmation dynamique.

Chevauchement de sous-problèmes : deux appels au plus court chemin à partir du nœud 9, une à partir du nœud 6 et l'autre du nœud 7

Sous-structure optimale : le nœud 7 se trouve dans le plus court chemin du nœud 1 à un nœud de destination 12, le plus court chemin de 1 à 12 est la combinaison du plus court chemin de 1 à 7 et du plus court chemin de 7 à 12

24

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

3/ Comment résoudre un problème de programmation dynamique

Exemple : Graph de décision en plusieurs étapes

2- Identifiez les variables du problème

Nous avons maintenant établi qu'il existe une structure récursive entre les sous-problèmes. Ensuite, nous devons exprimer le problème en terme de paramètres de fonction et voir lesquels de ces paramètres changent.

Une façon de déterminer le nombre de paramètres changeants est d'énumérer des exemples de plusieurs sous-problèmes et de comparer les paramètres. Compter le nombre de paramètres changeants est précieux pour déterminer le nombre de sous-problèmes que nous devons résoudre. Il est également important pour nous aider à renforcer la compréhension de la relation de récurrence de l'étape 1.

25

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

3/ Comment résoudre un problème de programmation dynamique

Exemple : Graph de décision en plusieurs étapes

2- Identifiez les variables du problème

Dans notre exemple, les deux paramètres susceptibles de changer pour chaque sous-problème sont :

- On veut calculer le coût minimum du nœud x au nœud D
→ Coût minimum entre deux nœuds?
- On veut déterminer le prochain nœud dans le chemin le plus court entre le nœud x et le nœud D
→ Prochain nœud dans le chemin le plus court?

26

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

3/ Comment résoudre un problème de programmation dynamique Exemple : Graph de décision en plusieurs étapes

3- Exprimer clairement la relation de récurrence

C'est une étape importante. Exprimer la relation de récurrence aussi clairement que possible renforcera la compréhension de votre problème et facilitera considérablement le reste.

Une fois que vous avez déterminé que la relation de récurrence existe et que vous avez spécifié les problèmes en terme de paramètres, cela devrait être une étape naturelle. Comment les problèmes se rapportent-ils ? En d'autres termes, supposons que vous avez calculé les sous-problèmes. Comment calculeriez-vous le problème principal ?

27

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

3/ Comment résoudre un problème de programmation dynamique Exemple : Graph de décision en plusieurs étapes

3- Exprimer clairement la relation de récurrence

Voici comment nous y pensons dans notre exemple :

Pour calculer le plus court chemin entre le nœud 6 et le nœud 12 (D) il faut récupérer le minimum du cout entre les nœuds voisins de 6 dans le chemin vers le nœud 12 (deux choix passant par le nœud 9 ou par le nœud 10)

→ On peut représenter cette relation comme suit :

$$\text{Cout}(6) = \text{Min}\{\text{poids}(6-9) + \text{Cout}(9), \text{poids}(6-10) + \text{Cout}(10)\}$$

en générale :

$$\text{Cout}(i) = \text{Min}_{v=\text{nœuds voisins}} \{ \text{poids}(i, v) + \text{cout}(v) \}.$$

28

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

3/ Comment résoudre un problème de programmation dynamique

Exemple : Graph de décision en plusieurs étapes

4- Faire la tabulation (de bas en haut)

C'est l'étape la plus simple, consiste à commencer le calcul à partir du destination (**D**) et remonté dans le graph jusqu'à le nœud source (**S**).

29

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

Etape 1 : trivial le plus court chemin entre 12 et 12 c'est zéro

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coût	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	0
Nœud suivant	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	12

Etape 2 : calculer le plus court chemin entre la destination et les nœuds menant directement au nœud 12

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Coût	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	4	2	5	0
Nœud suivant	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	12	12	12	12

30

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

Etape 3 :

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cout	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	7	5	7	4	2	5	0
Nœud suivant	nulle	nulle	nulle	nulle	nulle	10	10	10	12	12	12	12

$Cout(8) = \min\{ \text{poids}(8-11) + \text{cout}(11), \text{poids}(8-10) + \text{cout}(10) \}$
 $= \min\{6+5, 5+2\} = 7$ (nœud suivant est 10)

$Cout(7) = \min\{ \text{poids}(7-9) + \text{cout}(9), \text{poids}(7-10) + \text{cout}(10) \}$
 $= \min\{4+4, 3+2\} = 5$ (nœud suivant est 10)

$Cout(6) = \min\{ \text{poids}(6-9) + \text{cout}(9), \text{poids}(6-10) + \text{cout}(10) \}$
 $= \min\{6+4, 5+2\} = 7$ (nœud suivant est 10)

31

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

Etape 4 :

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cout	nulle	7	9	18	15	7	5	7	4	2	5	0
Nœud suivant	nulle	7	6	8	8	10	10	10	12	12	12	12

$Cout(5) = \min\{ \text{poids}(5-7) + \text{cout}(7), \text{poids}(5-8) + \text{cout}(8) \}$
 $= \min\{11+5, 8+7\} = 15$ (nœud suivant est 8)

$Cout(4) = \min\{ \text{poids}(4-8) + \text{cout}(8) \}$
 $= \min\{11+7\} = 18$ (nœud suivant est 8)

$Cout(3) = \min\{ \text{poids}(3-6) + \text{cout}(6), \text{poids}(3-7) + \text{cout}(7) \}$
 $= \min\{2+7, 7+5\} = 9$ (nœud suivant est 6)

$Cout(2) = \min\{ \text{poids}(2-6) + \text{cout}(6), \text{poids}(2-7) + \text{cout}(7), \text{poids}(2-8) + \text{cout}(8) \}$
 $= \min\{4+7, 2+5, 1+8\} = 7$ (nœud suivant est 7)

32

Chapitre 3: La programmation dynamique

III. Principe de la programmation dynamique

Etape 5:

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cout	16	7	9	18	15	7	5	7	4	2	5	0
Nœud suivant	{2,3}	7	6	8	8	10	10	10	12	12	12	12

$\text{Cout}(1) = \min\{ \text{poids}(1-2) + \text{cout}(2), \text{poids}(1-3) + \text{cout}(3), \text{poids}(1-4) + \text{cout}(4), \text{poids}(1-5) + \text{cout}(5) \}$
 $= \min\{9+7, 7+9, 3+18, 2+15\} = 16$ (nœud suivant est 2 ou 3)

Donc le cout du plus court chemin allant du nœud **1 (S)** au nœud **12(D)** est **16** en partant soit de **2** ou de **3**:

1->2->7->10->12 ou bien **1->3->6->10->12**

La complexité de cet algorithme est $O(n^2)$ dans un graph complet ou n est le nombre de nœuds

Comme vous voyez au cours de résolution du problème on a 5 étapes et dans chaque étape il faut prendre une décision pour le chemin optimal à suivre d'où le nom de **graphe en plusieurs étapes** et c'est l'idée générale de la programmation dynamique,

Implémentation ==> <https://sourceforge.net/projects/algocompmr1/files/>
 (GraphDesision.py) 33