TD sur la Complexité

Exercice 1

Soit la suite U_n définit par :

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} \times U_{n-2} + U_{n-3} \\ U_0=1 \\ U_1=1 \\ U_2=1 \end{cases}$$

Question :

- Donner un algorithme récursif qui calcule U_n
- Évaluer sa complexité.

Exercice 2 : Triangle de Pascal

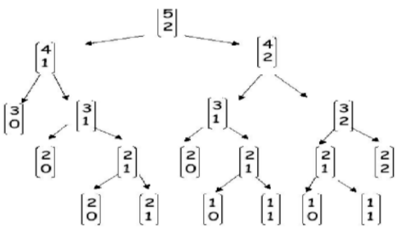
On veut calculer les coefficients binomiaux $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Rappelons les propriétés suivantes :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \; pour \; 0 < k < n$$

$$\binom{n}{n} = 1 \; et \; \binom{n}{0} = 1$$

Question :

- Donner un algorithme récursif qui calcul $\binom{n}{k}$
- Évaluer sa complexité.



	0	1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
$n-1$	1	$n-1$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n-1}{3}$	$\cdots$	1	
n	1	n	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\cdots$	n	1

Exercice 3 :

- Ecrire une fonction qui permet de calculer la somme des éléments d'une matrice carrée
- Évaluer sa complexité.

Exercice 4 :

1. Ecrire une fonction itérative puissanceIterative (a, n) qui permet de calculer a^n. Rq. En utilisant seulement les opérateurs simples (+, −, ∗, /)
2. Évaluer sa complexité.
3. Ecrire une fonction récursive puissanceRecursive (a, n) qui permet de calculer a^n.
4. Évaluer sa complexité.

5. Supposant qu'on peut écrire la fonction puissance de la manière suivante :
   $a^{n} = a^{n \text{ div } 2} \times a^{n \text{ div } 2}$ si n est pair, sinon $a^{n} = (a^{n \text{ div } 2} \times a^{n \text{ div } 2} \times a)$

   $a^{n/2} = a^{n/4} \times a^{n/4}$

   …………

   $a^1 = a$

   $a^0 = 1$
6. Évaluer sa complexité.

7. Proposer une fonction puissanceDdynamique (a, n) en utilisant le principe de la programmation dynamique.

8. Évaluer sa complexité

Solution 1 Q7:

```
int puissanceDdynamique1(int a, unsigned n) {
   int temp = puissanceDdynamique1 (a, n/2);
   if (n == 0)
      return 1;
   if (n % 2 == 0)
      return temp * temp;
   else
      return temp * temp * a;
   }  /* O (log2 n)  */
```

Solution 2 Q7 :

```
int puissanceDdynamique2 (int a, unsigned n) {
   if (n == 0)
      return 1;
   if (n % 2 == 0)
      return puissanceDdynamique2 (a, n/2) * puissanceDdynamique2 (a, n/2);
   else
      return puissanceDdynamique2 (a, n/2) * puissanceDdynamique2 (a, n/2) * a;
   }  /* O(2 log n) ==> O(n) */
```

Exercice 5 :
Les nombres de Fibonacci sont définis par la récurrence :

- $F_0 = 1$
- $F_1 = 1$
- $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ pour $n \geq 2$

On peut programmer le calcul de la valeur du nombre de Fibonacci au rang n de plusieurs façons :

- Solution récursif :

```
unsigned fibonR( unsigned n ){
   if((n==0)||(n==1))
        return 1;
   else return fibonR(n-1)+fibonR(n-2);
}/*Complexite est O(2^n)*/
```

- Solution itératif :

```
unsigned fibonI( unsigned n ){
   unsigned F0 = 1, F1 = 1, F = 1;
   for(int i = 2; i<= n; ++i){
      F = F0+F1;
      F0 = F1;
      F1 = F;
   }
   return F1;
} /* Complexite est O(n)*/
```