Cours: Programmation déclarative
Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

https://github.com/srtaoufik/Cours-Prog-Declarative/

I. Introduction

Définitions :

- un prédicat est une formule logique qui dépend **d'une variable libre**.
- un prédicat c'est une affirmation **qui porte sur des symboles** représentant **des éléments variables d'un ensemble fixe**.

- Puisqu'un prédicat dépend d'une variable x, nous les noterons souvent P(x);
- C'est une application qui associe une proposition P(x) à chaque élément d'un ensemble E, cette ensemble s'appelle **l'univers** du prédicat
- Dans le cas de l'exemple précédent E = N

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

I. Introduction

- Le nombre des variables d'un prédicat s'appelle **poids** du prédicat.
- Exemple : p (a,b) = { le couple d'entiers naturels (a,b) tel que a+b=10}

  - si l'univers du prédicat est N^2 alors son poids est égal à 2

  - si l'univers du prédicat est N alors son poids est égal à 1

- Dans un prédicat de poids n, si l'on affecte une valeur à l'une des variables, on obtient un prédicat de poids n-1.
- Par conséquent, un prédicat de poids 0 est une proposition.
- Les prédicats qui portent sur **le même univers** peuvent être combinés entre eux à l'aide des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ pour former de nouveau prédicat.

3

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

I. Introduction

Définitions :

- Le prédicat $\neg$ p (x) associe à x la négation du prédicat p(x)
- Le prédicat p$\wedge$q (x) associe à x la conjonction des prédicats p(x) et q(x)
  on notera aussi (p $\wedge$ q) (x)
- Le prédicat p$\vee$q (x) associe à x la disjonction des prédicats p(x) et q(x)
  on notera aussi (p $\vee$ q) (x)

• Exemple : même univers N

p(x) = {l'entier naturel x est pair}; q(x) = {l'entier naturel x est divisible pas 5}

- $\neg$ p(x) = {l'entier naturel x est impair}
- p$\wedge$q (x) = {l'entier naturel x est pair, et il est divisible par 5} (poids 1)
- p$\vee$q (x) = {l'entier naturel x est pair, ou il est divisible par 5} (poids 1)

Attention : si l'univers est N^2 (poids 2), il ne faut pas confondre p$\wedge$q (n) avec S (n,m) = {l'entier naturel n est pair et l'entier naturel m est divisible par 5}

4

II. Formalisation du langage naturel

Les quantificateurs :

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie est E tout entier » est une proposition ; on la note $\forall x\ P(x)$

  ➔ on lit : quelque soit x la proposition P(x) est vrai

  $\forall$: quantificateur universel

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie n'est pas vide » est une proposition ; on la note $\exists x\ P(x)$

  ➔ on lit : il existe x tel que P(x) est vraie

  $\exists$: quantificateur existentiel

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

II. Formalisation du langage naturel

<u>Exemples</u> :

- Soit le prédicat P(x) = { l'entier naturel x est pair }

- $\forall x$ P(x) est une proposition fausse car on lit : « tout entier naturel est pair »
- $\exists x$ P(x) est une proposition vraie car on lit : « il existe un entier naturel pair »

<u>Exercice d'application:</u>

- Soit les prédicats : H(x) = { x est un homme }
  M(x) = { x est méchant }

Formuler les affirmation suivantes:

- «C'est faux que tout les hommes sont méchants »: $\neg(\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x)))$
- «Seulement les hommes sont méchants » : $\forall x\ (M(x) \rightarrow H(x))$
- « Il existe un homme méchant » : $\exists x\ (H(x) \wedge M(x))$
- « Il n'existe pas d'homme méchant » : $\neg (\exists x\ (H(x) \wedge M(x)))$

II. Formalisation du langage naturel

Remarques :

- Soit P un prédicat dont l'univers est E = { e_1, e_2, e_3,….., e_n}

  - La proposition $\forall x$ P(x) est vraie quand les propositions P(e_1) , P(e_2),……, P(e_n) sont toutes vraies.

    ➔ $\forall x$ P(x) se confond avec la proposition P(e_1) $\wedge$ P(e_2) $\wedge$…… $\wedge$ P(e_n)

  - La proposition $\exists x$ P(x) est vraie si l'une au moins des propositions P(e_1) , P(e_2),……, P(e_n) est vraie.

    ➔ $\exists x$ P(x) se confond avec la proposition P(e_1) $\vee$ P(e_2) $\vee$ …… $\vee$ P(e_n)

- Soit P(x,y,z) un prédicat de poids 3

  - Q(x,z) = $\exists y$ P(x,y,z) est un prédicat de poids 2
  - R(z) = $\forall x$ Q(x,z) = $\forall x$ $\exists y$ P(x,y,z) est prédicat de poids 1

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Alphabet du langage du premier ordre (prédicat)

Le langage du calcul des prédicats est formé de :

--Les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

- Les quantificateurs

  $\exists$: quantificateur existentiel (« il existe » : $\exists x$ P(x))

  $\forall$: quantificateur universel (« pour tout ») : $\forall x$ P(x))

- Des constantes logiques : V et F

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Formules du langage :

– A est une formule atomique ssi A s'écrit sous la forme P(t_1, t_2,t_3 …. t_n)
avec: P est un symbole de prédicat de poids n ($P \in \mathcal{P}_n$)

t_1, t_2,t_3 …. t_n sont des termes

– Si A est une formule, alors ($\neg$ A) est une formule.

– Si A et B sont deux formules, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des formules.

– Si A est une formule et x est une variable, alors $\exists$x. A et $\forall$x. A sont des formules.

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Termes du langage :

- Les termes sont construits à partir de l'ensemble des variables et des symboles de fonctions F .
- Tout terme est engendré par l'application des lois suivantes:
  - Une constante est un terme (qui sera interprétée par un individus fixé)
  - Les symboles de fonctions ayant chacun un poids ≥ 1 sont des termes. (un nombre d'arguments fixé)
  - Une variable est un terme (qui varie dans l'ensemble des individus de l'interprétation)
  - Si f est un symbole fonctionnel d'arité (de poids) n et si t1, t2,t3 …. tn sont n termes, alors f (t1, t2,t3 …. tn) est un terme.

Un terme est dit **clos** s'il ne contient aucune variable

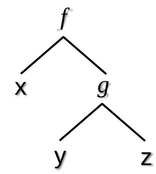
Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Termes du langage : Exemples

f (x, g (y , z)) est un terme si f et g sont des symboles de fonction de poids 2.

Arbre de décomposition :



- f (5, 3) est un terme clos
- f (x, g (y1, y2)) est un terme

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Revenons au deux quantificateurs (existentiel et universel) développer précédemment. Nous rappelons les définitions de chacun:

- ∃: « existe au moins un sel »

- ∃! : « existe un et un seul »

- ∀: « quelque soit, ou pour tout »

- Quantificateurs imbriqués:

Notons que l'ordre des quantificateurs est important. En effet, « tout le monde aime quelqu'un » s'écrirait ∀x.(∃y. Aime(x,y)), qui n'a pas exactement le même sens que « il y a quelqu'un qui est aimé par tout le monde » qui s'écrirait ∃y.(∀x. Aime(x,y)).

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Loi de Morgan entre les quantificateurs:

$$\neg\forall x.F(x)\equiv\exists x.\neg F(x)$$

$$\neg\exists x.F(x)\equiv\forall x.\neg F(x)$$

$$\forall x.F(x)\equiv\neg\exists x.\neg F(x)$$

$$\exists x.F(x)\equiv\neg\forall x.\neg F(x)$$

13

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Formules du langage :

Illustration: soit le prédicat Aime (A, B) : « A aime B »

- « Tout le monde déteste les brocolis » revient au même que « Il n'existe personne qui aime les brocolis »:

$\forall x.\ \neg$Aime(x,brocolis)$\equiv\neg\ \exists x.$ Aime(x,brocolis)

-« Tout le monde aime les glaces » et « il n'y a personne qui n'aime pas les glaces » sont équivalentes:

$\forall x.$ Aime(x,glaces) $\equiv\ \neg\exists x.\neg$Aime(x,glaces)

14

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 1: Formuler en calcul des prédicats les phrases suivantes:

1. les baleines sont des mammifères.

2. les entiers sont pairs ou impairs

3. Il existe un entier pair

Correction:

B (x) : « x est un baleine »

M (x) : « x est un mammifère »

Traduction : $\forall x. (B(x) \rightarrow M(x))$

E(x) : « x est un entier»

P(x) : « x est pair»

I(x) : « x est impair»

Traduction : $\forall x\ (E(x) \rightarrow (P(x) \vee I(x)))$

15

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 2: Exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

1. « Tous les lions sont féroces. »

2. « Quelques femmes ne boivent pas du café »

Correction:

Lion (x) : « x est un lion»

Feroce(x) : « x est un féroce»

Traduction : $\forall x.(Lion(x) \rightarrow Feroce(x))$

Femme (x) : « x est une femme»

Cafe(x) : « x boit du café»

Traduction : $\exists x.(Femme(x) \wedge \neg Cafe(x))$

16

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 3: Utiliser les 3 prédicats suivants pour exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

Etudiant (x) : « x est un étudiant »; **Assiste (x, y)** : « x assiste au cours y »

Interessant(y) : « y est intéressant »

1. « Certains étudiants assistent à tous les cours »:

   $\exists$x.(Etudiant(x)$\wedge$($\forall$y . Assiste(x,y)))

2. « Aucun étudiant n'assiste à un cours intéressant »:

   $\forall$ x.(Etudiant(x) $\rightarrow$(Assiste(x,y)$\wedge\rceil$ Interessant(y)))

Dans la seconde formule, on constate que la variable y n'est pas quantifiée: une telle variable est dite **libre**. Une variable quantifiée est dite **liée**.

IV. Règles d'inférences/Interprétation:

Une règle d'inférence est la représentation d'un procédé qu'à partir d'une ou plusieurs formules dériver d'autres formules.

Exemple:

1. La règle d'inférence appelée Modus Ponens, à partir de deux formules respectivement de la forme G et (G→H), dérivé la formule H.
2. La règle d'inférence spécialisation universelle, à partir d'une formule de la forme ($\forall$X).G(X) et de n'importe quelle constante, soit : « a », dérive la formule G(a): toutes les occurrences de X dans G sont remplacées par « a ».
3. La règles d'inférence appelée Modus Tollens, à partir de deux formules respectivement de la forme ($\neg$ H) et (G→H), dérive la formule ($\neg$ G).

Les formules choisies initialement sont appelées **axiomes**. Les formules obtenus par application des règles d'inférences sont appelées **théorèmes**.

Une chaîne d'application de règles d'inférence conduisant, depuis les axiomes, à un théorème, constitue une preuve de théorème.

IV. Règles d'inférences/Interprétation:

- Une interprétation I est la donnée :
  - d'un univers non vide D éventuellement infini
  - d'une évaluation dans D de chaque variable
  - d'un ensemble P de prédicats.

- La valeur de la formule A sous l'interprétation I est notée : $[A]_I$

IV. Règles d'inférences/Interprétation:

- **Exemples:** Soient les formules suivantes:

G1: (∀x) P(X) et G2: (∀x) (∃Y) Q(X,Y)

Soit une interprétation de I1 de G1:

I1: D1 ={1,2}
PI1={2}
où
I1[(P(1)]=F
I1[(P(2)]=V

Donc on peut conclure que:
$[G1]_{I1}$ =F
Car c'est faux que ∀X dans D1 on a P(X)=V

Soit une interprétation de I2 de G2:

I2: D2={1,3}; QI2={(1,3), (3,3)}
I2[Q(1,1)]=F
I2[Q(1,3)]=V
I2[Q(3,1)]=F
I2[Q(3,3)]=V

Donc on peut conclure que:
$[G2]_{I2}$ =V
Car ∀X dans D2, on peut trouver un Y dans D tq Q(X,Y) =V

IV. Règles d'inférences/Interprétation:

Exemple : $A : \forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(f(x), a)\ )$

soit l'interprétation I1 définie comme suite:

$D_{I1} = \{1,2\}$

$a_{I1} = 1$ (l'interprétation de la constante a dans I1 est égale 1)

$P_{I1}=\{2\}$ (sig seulement P(2)= V)

$Q_{I1}=\{(1,1),(1,2)\}$

(sig seulement Q(1,1)= vrai et Q(1,2)= vrai)

$f_{I1} : 1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 1$

$[A]_{I1\,(x=1)} = P_{I1}(1) \rightarrow Q_I(2,1) = F \rightarrow F = V$

$[A]_{I1\,(x=2)} = P_{I1}(2) \rightarrow Q_I(1,1) = V \rightarrow V = V$

Donc pour x = 1 et x = 2, la formule est vraie, **donc $[A]_{I1} = V$**

IV. Règles d'inférences/Interprétation:

Exemple : $A : \forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(f(x), a)\ )$

$D_{I2} = \{1,2,3\}$

$I2 : a_{I2} = 1$

$P_{I2}=\{2\}$ (sig seulement P(2)= V)

$Q_{I2}=\{(1,1),(1,2), (1,3)\}$

(sig seulement Q(1,1)= vrai, Q(1,2)= vrai et Q(1,3)= vrai)

$f_{I2} : 1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 1$

$3 \rightarrow 1$

$[A]_{I2\,(x=1)} = P_I(1) \rightarrow Q_I(2,1) = F \rightarrow F = V$

$[A]_{I2\,(x=2)} = P_I(2) \rightarrow Q_I(1,1) = V \rightarrow V = V$

$[A]_{I2\,(x=3)} = P_I(3) \rightarrow Q_I(1,1) = F \rightarrow V = V$

Donc pour x = 1, x = 2 et x=3, la formule est toujours vraie, **donc $[A]_{I2} = V$**

IV. Règles d'inférences/Interprétation:

Exercice: Soit l'interprétation suivante du calcul des prédicats :
- Constantes : *a* : Adel ; *b* : Basma; *c* : Chahira
- Prédicat : P(x,y) = {<a, b>, <a, c>, <b, c>, <c, c>, <c, a>}

Nous dirons que la relation « P(x,y) = *x* voit *y* ».

1/ Est-ce que Chahira voit Adel ?
2/ Est-ce que Chahira voit Basma ?
3/ Dites si les formules suivantes sont vraies dans cette interprétation :

a/ $P(b,a)$
b/ $P(c,b) \vee P(c,c)$
c/ $P(b,a) \rightarrow P(c,c)$
d/ $(P(a,b) \rightarrow (P(b,a) \vee \neg P(c,b))) \rightarrow P(b,c)$
e/ $\exists x\, P(x,x)$
f/ $\forall x\, P(x,c)$
g/ $\forall x\, P(a,x)$
h/ $\exists x\, \forall y\, P(y,x)$
i/ $\exists x\, \forall y\, P(x,y)$
j/ $\forall x\, (P(x,x) \rightarrow \exists y\, \neg P(x,y))$

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

V. Satisfiable/Valide :

<u>Définition : Cas d'une formule Close</u> (Var(A) = $\emptyset$) (pas de variable libre)

- A est **satisfaite** (ou satisfiable) par $(\mathcal{D},\mathcal{I})$ ssi $[A]_{\mathcal{I}} = V$, noté $(\mathcal{D},\mathcal{I}) \models A$

$(\mathcal{D},\mathcal{I})$ est appelée un modèle de A

- Une formule A est satisfiable ssi elle admet un modèle
- Elle est **insatisfiable** dans le cas contraire (aucun modèle).
- Une formule A est dite **valide** (tautologie) ssi elle est satisfiable pour tout (D,I)

Notation : $\models A$

- Elle est **invalide** dans le cas contraire (antilogie).

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

V. Satisfiable/Valide :

Définition : Cas d'une formule non Close

Soient :

- A une formule non close
- Var(A) = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ les variables libres de A

- On appelle clôture universelle de A, la formule :

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \ldots\ldots \forall x_n \, A$$

- On appelle clôture existentielle de A, la formule :

$$\exists \, x_1 \, \exists \, x_2 \ldots\ldots \exists \, x_n \, A$$

25

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

V. Satisfiable/Valide :

Définition : Cas d'une formule non Close

soit A une formule non close

- A est satisfiable ssi sa clôture existentielle est satisfiable
- A est valide dans (D,I) ssi sa clôture universelle est satisfaite par (D,I)

  Notation : $(D,I) \models A$

- A est valide universellement (tautologie) ssi sa clôture universelle est valide. Notation : $\models A$

26

V. Satisfiable/Valide :

	formule Close $Var(A) = \varnothing$	formule non Close $Var(A) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
Satisfiable	Il existe (D,I) : $I[A] = V$	Il existe (D,I) : $I[\exists x_1 \ldots \exists x_n A] = V$
		Valide dans / satisfiable par (D,I) Il existe (D,I) : $I[\forall x_1 \ldots \forall x_n A] = V$
Valide	Pour tout (D,I) : $I[A] = V$	Valide universellement Pout tout (D,I) = $I[\forall x_1 \ldots \forall x_n A] = V$

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

VI. Equivalence et conséquence sémantique:

Définition :

- A est une conséquence de B ssi tout modèle de B est un modèle de A ,
  $B \models A$
- Dans le cas des formules non closes, on passe par la clôture universelle :
  $B \models A$ ssi $(\forall Var(B)\ B) \models (\forall Var(A)\ A)$

- On appelle équivalence sémantiquement la congruence associé au pré-ordre
  c.a.d $A = B$ ssi $A \models B$ et $B \models A$

Propositions :

- $B \models A$ ssi $\models (B \rightarrow A)$ (signifie $B \rightarrow A$ est une Tautologie)
- $B = A$ ssi $\models (B \leftrightarrow A)$) (signifie $B \leftrightarrow A$ est une Tautologie)

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

VI. Equivalence et conséquence sémantique:

Propriétés : Equivalence

- $\neg (\forall x\ A) = \exists x (\neg A)$
- $\forall x\ A = \neg (\exists x (\neg A))$
- $\neg (\exists x\ A) = \forall x (\neg A)$
- $\exists x\ A = \neg (\forall x (\neg A))$
- $\forall x (A \wedge B) = (\forall x (A)) \wedge (\forall x (B))$
- $\exists x\ (A \vee B) = (\exists x (A)) \vee (\exists x (B))$
- $\forall x\ \forall y\ A = \forall y\ \forall x\ A$
- $\exists x\ \exists y\ A = \exists y\ \exists x\ A$
- $\exists x (A \rightarrow B) = (\forall x\ A) \rightarrow (\exists x\ B)$

29

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

VI. Equivalence et conséquence sémantique:

Propriétés : Conséquence

- $\exists x\ \forall y\ A (x,y) \models \forall y\ \exists x\ A(x,y)$ (pas le contraire)
- $\exists y\ \forall x\ A (x,y) \models \forall x\ \exists y\ A(x,y)$ (pas le contraire)
- $\exists x (A \wedge B) \models (\exists x (A)) \wedge (\exists x (B))$ (pas le contraire)
- $\forall x (A \vee B) \models (\forall x (A)) \vee (\forall x (B))$ (pas le contraire)

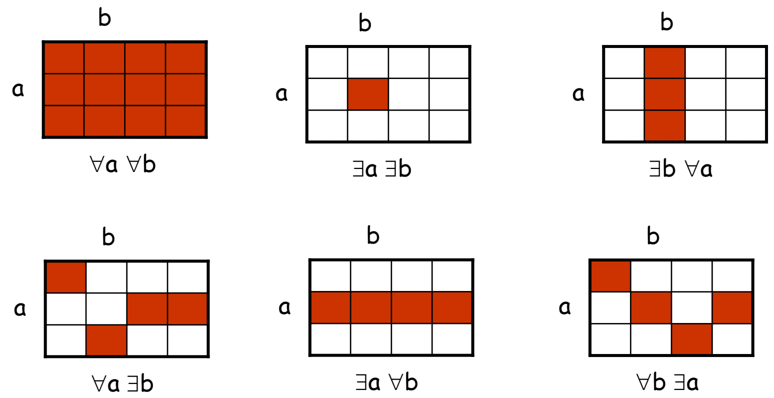
Exemple 1 : P(a,b) = { le couple d'entiers relatifs (a,b) est tel que a + b = 5 }

$\forall a\ \forall b\ P(a,b)$	{Tout couple d'entiers relatifs (a,b) vérifie : a + b = 5 }	F
$\exists a\ \exists b\ P(a,b)$	{Il existe un couple d'entiers relatifs (a,b) tel que : a + b = 5 }	V
$\exists b\ \forall a\ P(a,b)$	{Il existe un entier relatif b tel que pour tout entier relatif a on ait : a + b = 5 }	F
$\forall a\ \exists b\ P(a,b)$	{Quelque soit l'entier relatif a il existe un entier relatif b tel que : a + b = 5 }	V
$\exists a\ \forall b\ P(a,b)$	{Il existe un entier relatif a tel que pour tout entier relatif b on ait : a + b = 5 }	F
$\forall b\ \exists a\ P(a,b)$	{Quelque soit l'entier relatif b il existe un entier relatif a tel que : a + b = 5 }	V

30

IV. Equivalence et conséquence sémantique:

Exemple 2:



Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

VI. Equivalence et conséquence sémantique:

Propriétés : Equivalence lorsque $x \notin Var(A)$

- $\forall x \ A = \exists x \ A = A$
- $\forall x \ (A \wedge B) = A \wedge (\forall x (B))$
- $\exists x \ (A \wedge B) = A \wedge (\exists x (B))$
- $\forall x \ (A \vee B) = A \vee (\forall x (B))$
- $\exists x \ (A \vee B) = A \vee (\exists x (B))$
- $\exists x \ (A \rightarrow B) = A \rightarrow (\exists x B)$
- $\forall x \ (A \rightarrow B) = A \rightarrow (\forall x B)$
- $\exists x \ (B \rightarrow A) = (\forall x B) \rightarrow A$
- $\forall x \ (B \rightarrow A) = (\exists x B) \rightarrow A$

VII. Les formes normales | **1) Forme Prénexe**

- Une formule A est dite sous forme normale *prénexe* ou simplement forme prénexe, ssi
  - A est de la forme $\#x_1 \#x_2 \#x_3 \ldots\ldots\ldots \#x_n \; B \qquad \# \in \{ \forall, \exists \}$
  - et la forme B ne contient aucun quantificateur.
- Toute formule admet une forme prénexe qui lui est équivalente

Exemples : 1/ $\forall x \, \exists y \, (P(x) \wedge P(y))$ est sous forme prénexe

2/ $(\forall x \, P(x)) \wedge (\exists y \, P(y))$ n'est pas sous forme prénexe

3/ $\forall x \, (P(x) \rightarrow \exists y \, Q(y))$ n'est pas sous forme prénexe

➔par contre sa forme prénexe est $\forall x \, \exists y \, (\neg P(x) \vee Q(y))$

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

VII. Les formes normales | **2) Forme Skolem**

- A partir d'une formule sous forme prénexe, on construit une formule sous forme de *Skolem* en éliminant les quantificateurs existentiels et en introduisant des symboles de fonctions et de constantes dites de *Skolem.*
- Soit A une formule sous forme prénexe

$$\#x_1 \#x_2 \#x_3 \ldots\ldots\ldots \#x_n \; B \qquad \# \in \{ \forall, \exists \}$$

Une forme Skolem de A est obtenue en appliquant le processus suivant en commençant par la gauche de la formule jusqu'à l'élimination de tous les quantificateurs existentiels.

VII. Les formes normales | 2) Forme Skolem

Cas 1: Si A est de la forme $\exists x_i \ldots\ldots \# x_n$ B avec $\# \in \{\forall, \exists\}$

c-à-d à gauche de $\exists x_i$ il n' y a aucun quantificateur universel, alors :

- On supprime $\exists x_i$
- On introduit un symbole de constante c_i (constante de Skolem)
- On remplace partout dans la formule de B, la variable x_i par la constante c_i

Exemple :

$\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w \quad P(x,y,z) \wedge Q(u,x,v,w)$

$\forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w \quad P(a,y,z) \wedge Q(u,a,v,w)$

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

VII. Les formes normales | 2) Forme Skolem

Cas 2: Si A est de la forme $\forall x_1 \ldots\ldots \forall x_m\ \exists x_i \ldots\ldots \# x_n$ B $\# \in \{\forall, \exists\}$

c-à-d à gauche de $\exists x_i$ il y a m quantificateurs universels, alors :

- On supprime $\exists x_i$
- On introduit un symbole de fonction f_i ayant m arguments (fonction de Skolem)
- On remplace partout dans la formule de B, la variable x_i par la fonction $f_i(x_1, \ldots\ldots, x_m)$

Exemple :

$\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w \quad P(x,y,z) \wedge Q(u,x,v,w)$

- $\forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w \quad P(a,y,z) \wedge Q(u,a,v,w)$
- $\forall y\ \forall z\ \forall v\ \exists w \quad P(a,y,z) \wedge Q(f(y,z), a, v, w)$
- $\forall y\ \forall z\ \forall v \quad P(a,y,z) \wedge Q(f(y,z), a, v, g(y,z,v))$

➔forme skolem de A : $\forall y\ \forall z\ \forall v\ \ P(a,y,z) \wedge Q(f(y,z),a,v,g(y,z,v))$

VII. Les formes normales | 2) Forme Skolem

Propriété

Soient A_p une formule sous forme de prénexe et A_s sa forme de skolem alors A_p est insatisfiable SSi A_s est insatisfiable

VII. Les formes normales | 2) Forme Clausale

- La forme clausale (ou Standard) d'une formule A est obtenue comme suit :

  1/ Mise de forme prénexe de A (on obtient A_p)

  2/ Mise de forme de Skolem de A_p (on obtient A_s)

  3/ Suppression des quantificateurs universels

  4/ Mise sous forme normale conjonctive de la formule restante

  (on obtient A_c : $B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots\ldots \wedge B_m$ Chaque B_i est une clause)

On note la formule A_c ainsi obtenue sous forme d'un ensemble de clauses $\{B_1 , B_2 , \ldots\ldots , B_m \}$

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

VII. Les formes normales | **2) Forme Clausale**

Exemple :

A_p : $\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\quad P(x,y,z) \rightarrow (\ Q(u,x,v,w) \wedge R(w,x)\ )$

$\rightarrow \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\quad P(a,y,z) \rightarrow (\ Q(u,a,v,w) \wedge R(w,a)\ )$

$\rightarrow \forall y\ \forall z\ \ \forall v\ \exists w\quad P(a,y,z) \rightarrow (\ Q(f(y,z), a, v, w) \wedge R(w,a)\ )$

A_s : $\forall y\ \forall z\ \ \forall v\quad P(a,y,z) \rightarrow (\ Q(f(y, z), a, v , g(y,z,v)) \wedge R(g(y,z,v),a)\ )$

→Suppression des quantificateurs universelles, (soit substituer y, z et v par des des nouvelles constantes (b,c et d) soit supprimer les quantificateur univ et considerer y, z et v comme des nouvelles constantes)

$P(a,y,z) \rightarrow (\ Q(f(y,z), a, v , g(y,z,v)) \wedge R(g(y,z,v),a)\ )$

$= \quad \neg P(a,y,z) \vee (\ Q(f(y,z), a, v , g(y,z,v)) \wedge R(g(y,z,v),a)\ )$

$A_{c=}\ (\neg P(a,y,z) \vee Q(f(y,z), a, v , g(y,z,v))\ ) \wedge (\neg P(a,y,z) \vee R(g(y,z,v),a)\ )$

Chapitre 1: Rappelle sur la logique des prédicats

VII. Les formes normales | **4) Théorèmes**

Soient A une formule, A_p une forme prénexe équivalente a A, A_s sa forme de skolem et A_c sa forme clausale, alors

A est insatisfiable SSi A_p est insatisfiable

A_p est insatisfiable SSi A_s est insatisfiable

A_s est insatisfiable SSi A_c est insatisfiable

→ A est insatisfiable SSi A_c est insatisfiable