Cours: Théorie des langages & Compilation

Chapitre 3: Langages réguliers et Automates finis (partie C)

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

C.I. Les langages réguliers

Définition: Un langage L est dit régulier s'il existe un automate fini A qui l'accepte (L(A) = L)

Le lemme de pompage : Soit L un langage régulier reconnu par un automate à n états.

Pour tout mot z de L, z est de longueur ≥ n,
il existe une factorisation z = uvw,

où $\begin{cases} |uv| \leq n, \\ v \neq \varepsilon \text{ et,} \\ \forall\ i \geq 0, \end{cases}$ on a $uv^i w \in L$.

C.I. Les langages réguliers

Exemple d'application :

Montrer que certains langages ne sont pas réguliers.

L = $\{0^n1^n : n \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Si L est reconnu par un automate à n états, la factorisation de 0^n1^n conduit à une contradiction.

L = {écritures binaires de p, où p est premier} n'est pas régulier.

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

Propriétés des langages réguliers (LR)

- ø est un langage régulier (Il existe un automate fini qui l'accepte)

- Si L1 et L2 sont des langages réguliers **alors**

L1+L2 (Union), L1.L2 (Concaténation) et L1 ∩ L2 (Intersection) sont des langages réguliers

- Si L est un langage régulier **alors**

L^* (Fermeture transitive), L^+ (Fermeture transitive réflexive), (Complément X-L) et L^R (Image miroir) sont des langages réguliers.

C.I. Les langages réguliers

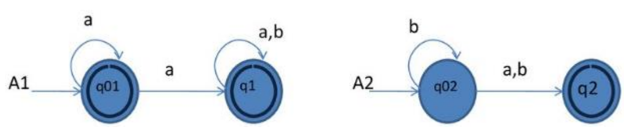
P1: Si L1 et L2 sont des langages réguliers alors L1+L2 (Union) est un langage régulier.

On peut toujours construire un automate fini qui accepte L1 + L2 à partir des automates finis qui acceptent respectivement L1 et L2.

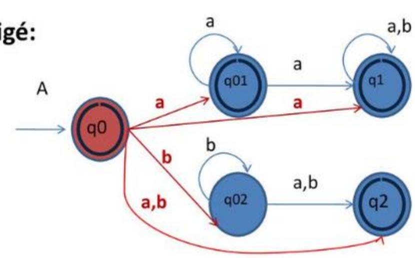
Soit $A1 = (Q1, X1, \delta1, q01, F1)$ / $L(A1) = L1$
$A2 = (Q2, X2, \delta2, q02, F2)$/ $L(A2) = L2$
On construit $A = (Q, X, \delta, q0, F)$/ $L(A) = L1+L2$
$Q = Q1 \cup Q2 \cup \{q0\}$
$X = X1 \cup X2$
$\delta = \delta1 \cup \delta2 \cup \{(q0, x, q) / (q01, x, q) \in \delta1 \text{ ou } (q02, x, q) \in \delta2\}$
F = $F1 \cup F2 \cup \{q0\}$ si $q01 \in F1$ ou $q02 \in F2$
$F1 \cup F2$ sinon

C.I. Les langages réguliers

Exercice: Soient les automates A1 et A2, construire un automate A qui reconnaît L(A1) + L(A2) (l'union des deux langages reconnus par A1 et A2)



Corrigé:



C.I. Les langages réguliers

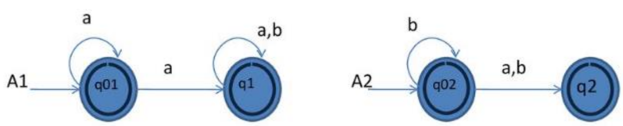
P2: Si L1 et L2 sont des langages réguliers alors L1.L2 (concaténation) est un langage régulier.

On peut toujours construire un automate fini qui accepte L1.L2 à partir des automates finis qui acceptent respectivement L1 et L2

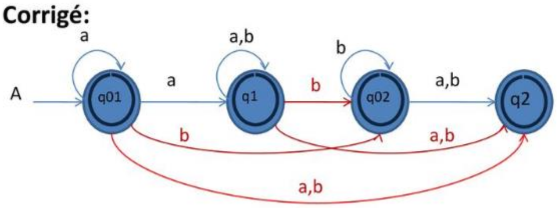
Soit $A1 = (Q1, X1, \delta 1, q01, F1) \,/\, L(A1) = L1$
$A2 = (Q2, X2, \delta 2, q02, F2) \,/\, L(A2) = L2$
On construit $A = (Q, X, \delta, q0, F) \,/\, L(A) = L1.L2$
$Q = Q1 \cup Q2$
$X = X1 \cup X2$
$q0 = q01$
$\delta = \delta 1 \cup \delta 2 \cup \{(p, x, q) \,/\, (q02, x, q) \in \delta 2 \text{ et } p \in F1\}$
$F =$ $F1 \cup F2$ si $q02 \in F2$
$F2$ sinon

C.I. Les langages réguliers

Exercice: Soient les automates A1 et A2 suivants, construire un automate A qui accepte L(A1) . L(A2)

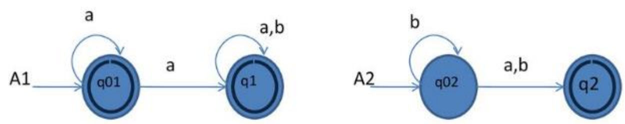


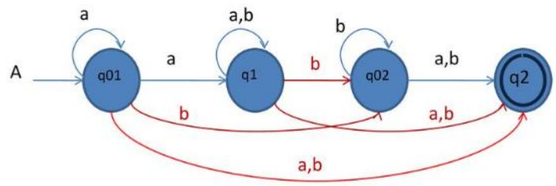
Corrigé:



C.I. Les langages réguliers

Exercice: Soient les automates A1 et A2 suivants, construire un automate A qui accepte L(A1) . L(A2)





Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

P3: Si L est un langage régulier alors L* est un langage régulier

On peut toujours construire un automate fini qui accepte L* à partir de l'automate fini qui accepte L

Soit $A1 = (Q1, X1, \delta1, q01, F1)$ / $L(A1) = L1$

On construit $A = (Q, X, \delta, q0, F)$/ $L(A) = L^*$

$Q = Q1 \cup \{q0\}$

$X = X1$

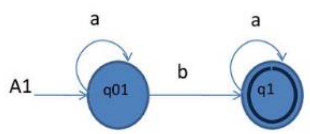
$\delta = \delta1 \cup \{(q0, x, q) / (q01, x, q) \in \delta1\} \cup \{(qf, x, q) / (q01, x, q) \in \delta1 \text{ et } qf \in F1\}$

$F = F1 \cup \{q0\}$

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

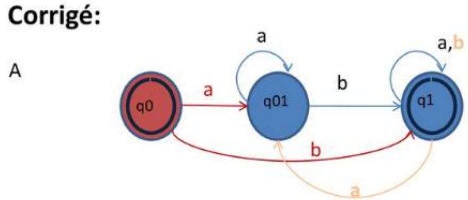
C.I. Les langages réguliers

Exercice: Soi l'automate A1, construire un automate A qui accepte (L(A1))*



L(A1) = a*ba*
L(A) = (L(A1))* = (a*ba*)*
Par ce que on a :
(q01, a q01) et (q01, b, q1)
dans δ1 qu'on ajoute :
(q0, a, q01) et (q0, b, q1) à δ

Corrigé:



Par ce que on a :
(q01, a, q01) et (q01, b, q1)
dans δ1 qu'on ajoute :
(q1, a, q01) et (q1, b, q1) à δ

11

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

- P4: Si L est un langage régulier alors L^+ est un langage régulier

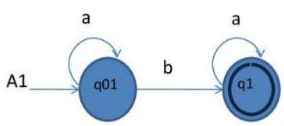
On peut toujours construire un automate fini qui accepte L^+ à partir de l'automate fini qui accepte L

Soit A1 = (Q1, X1, δ1, q01, F1) / L(A1) = L1
On construit A = (Q, X, δ, q0, F)/ L(A) = $L1^+$
Q = Q1∪{q0}
X = X1
δ= δ1∪{(q0, x, q)/ (q01, x, q) ∈δ1}∪{(qf, x, q)/ (q01, x, q) ∈ δ1 et qf∈F1}
F = F1

12

B.IV. Les langages réguliers

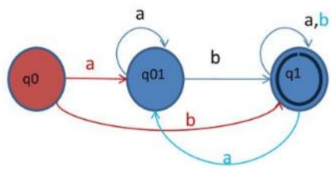
Exercice: Soi l'automate A1, construire un automate A qui accepte $(L(A1))^+$



L(A1) = a*ba*
L(A) = (L(A1))⁺ = (a*ba*)⁺
Par ce que on a :
(q01, a q01) et (q01, b, q1)
dans δ1 qu'on ajoute :
(q0, a, q01) et (q0, b, q1) à δ

Corrigé:

A



Par ce que on a :
(q01, a, q01) et (q01, b, q1)
dans δ1 qu'on ajoute :
(q1, a, q01) et (q1, b, q1) à δ

C.II. Expressions régulières et automates finis

Une expression régulière (ER) est définie récursivement comme suit:

- ε est une ER
- Un symbole a de X est une ER
- Si E est une ER alors E^+, E^*, (E) sont des ER
- Si E1 et E2 sont des ER alors E1.E2 et E1+E2 sont des ER

Lemme
{langages réguliers} = {langages représentés par une expression régulière}

Rq. Un langage est dit régulier s'il existe un automate fini qui l'accepte ou une expression régulière qui le représente

C.II. Expressions régulières et automates finis

Exemples:

- a^*b^*
- $(a+b)^*c^+$
- $(0+1+2+\ldots9)^+$ ➔ représentations décimales des entiers
- $(a+b+\ldots z+A+B+\ldots Z)\ (a+b+\ldots z+A+B+\ldots Z+0+1+\ldots 9)^*$
  ➔ les identificateurs alphanumériques qui commencent par un caractère alphabétique
- $(a+b)^*aa$ ➔ mots sur {a, b} ayant aa comme facteur droit
- $(a+b+c)^*abc(a+b+c)^*$ ➔ mots sur {a,b,c} ayant abc comme facteur
- $0^*(1+2+\ldots9)\ (0+1+\ldots9)^*$ ➔ représentations décimales des entiers non nuls

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.II. Expressions régulières et automates finis

Limites des automates finis

Exercice : Prouver que le langage L suivant n'est pas un langage régulier:
$L = \{a^i b^i, i >= 0\}$ C-a-d, il n'existe pas un automate fini qui l'accepte

Corrigé:

Supposons qu'il existe un automate fini A à n états qui accepte L (L(A) = L) (1)

Alors A accepte en particulier $a^n b^n$,

Considérons la séquence de configurations aceptables pour $a^n b^n$

$(q0, a^n b^n) \mid\text{--} (q1, a^{n-1} b^n) \mid\text{--}\ldots..(q_{2n-1}, b) \mid\text{--} (q_{2n}, \varepsilon)$ **où** $q_{2n} \in F$

Cette séquence contient 2n+1 états

Donc un état au moins doit apparaître plus qu'une fois dans les n premiers mouvements.

Soit q cet état, si = sj = q pour certaines valeurs de i et j telles que $0 \leq i \leq j \leq n$

Ceci entraine

$$(q0, a^n b^n) \overset{+}{\mid\text{--}} (q, a^{n-i} b^n) \overset{+}{\mid\text{--}}\ldots..(q, a^{n-j} b^n) \overset{+}{\mid\text{--}} (q_{2n}, \varepsilon)$$

$$(q0, a^{n-j+i} b^n) \overset{+}{\mid\text{--}} (q, a^{n-j} b^n) \overset{+}{\mid\text{--}}\ldots..(q_{2n}, \varepsilon)$$

C-a-d $a^{n-j+i} b^n \in L(A)$

C-a-d $L \neq L(A)$ (absurde) avec l'hypothèse (1)

C.II. Expressions régulières et automates finis

Solution: Les automates à piles

Les automates à piles sont une extension des automates à états finis. Ils utilisent une (et une seule) pile pour reconnaître les mots dans les langages non contextuel.

Une configuration d'un automate à pile consiste donc à définir le triplet (q, a, b) tel que q est l'état actuel, a et le symbole actuellement en lecture et b est le sommet actuel de la pile.