# Cours: Théorie des langages & Compilation

# Chapitre 3: Langages réguliers et Automates finis (partie B)

Réalisé par:

Dr. Sakka Rouis Taoufik

https://sourceforge.net/projects/tla-compilation/files/



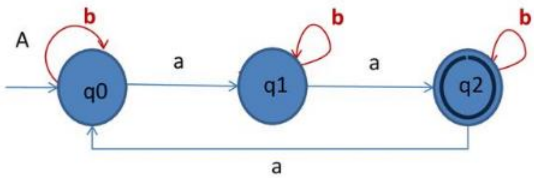


## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Définition :** Le langage reconnu par un automate est l'ensemble des chaînes qui permettent de passer de l'état initial à un état terminal.

**Définition : Une configuration** est un couple (q, ω) où q est l'état courant et ω est le reste du mot à lire.

Pour l'automate suivant, des configurations possibles sont:



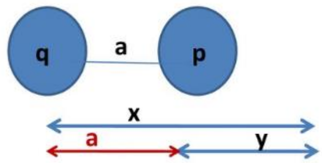

(q0, aa) (q1, a) (q2, ε)

(q0, bba) (q0, ba) (q0, a) (q1, ε)

## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Définition: Configuration successeur**
Une configuration (p, y) est successeur d'une configuration (q, x) qu'on note:
(q, x) |-- (p, y)

ssi



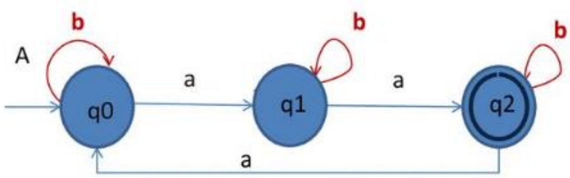

∃ un mot a / x = a y   et   δ(q, a) = {p}





## B.I. Langage accepté par un automate fini

Pour l'automate suivant, des configurations possibles sont:




(q0, aa) |-- (q1, a) |-- (q2, ε)

(q0, bba) |-- (q0, ba) |-- (q0, a) |-- (q1, ε)

## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Définition: Configuration k $^{ème}$ successeur**

Une configuration (p, y) est k $^{ème}$ successeur d'une configuration (q, x) qu'on note:

(q, x) $|\text{--}^{k}$ (p, y) ssi

(q,x) |-- (q1, x1) |-- (q2, x2) |--…(qk, xk) = (p, y)

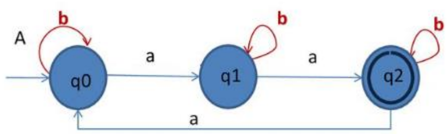
(q, x) $|\text{--}^{*}$ (p, y) ssi ∃ k >= 0 / (q,x) $|\text{--}^{k}$ (p, y)



Ch3: Langages réguliers et Automates finis

B.I. Langage accepté par un automate fini

Pour l'automate suivant, nous avons :




(q0, aa) $|\overset{*}{\text{--}}$ (q2, ε) puisque: ∃ k ≥ 0 / (q0, aa) $|\overset{k}{\text{--}}$ (q2, ε)
(q0, aa) |-- (q1, a) |-- (q2, ε) (k = 2)

(q0, bba) $|\overset{3}{\text{--}}$ (q1, ε)
En effet, (q0, bba) |-- (q0, ba) |-- (q0, a) |-- (q1, ε)

## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Définition :** Soit A = (Q, X, q0, δ, F) un automate fini.
Le langage accepté (ou reconnu par A) est noté L(A) /

$$L(A) = \{\omega / (q0, \omega) \overset{*}{\vdash} (qf, \varepsilon), qf \in F\}$$

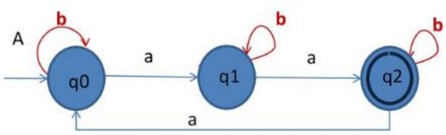
$\omega$ est accepté par A ssi $\omega \in L(A)$





## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Exercice :** Soit l'automate fini A suivant :




1) Montrer que aa ∈ L(A) et que bba ∉ L(A)

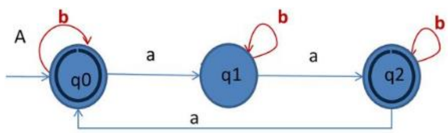
**Corrigé:**

aa ∈ L(A) par ce que : $(q0, aa) \overset{*}{\vdash} (q2, \varepsilon)$ puisque:
$(q0, aa) \vdash (q1, a) \vdash (q2, \varepsilon)$ (k = 2)

bba ∉ L(A) par ce que : $\neg\exists\, k \,/\, (q0, bba) \overset{k}{\vdash} (q2, \varepsilon)$
En effet, $(q0, bba) \vdash (q0, ba) \vdash (q0, a) \vdash (q1, \varepsilon)$

## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Exercice:** Considérons l'automate A suivant :




1) Quel est le langage reconnu par A

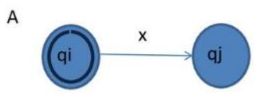
2) Est-ce que le mot ε est accepté par A





## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Lemme d'Arden 1:** Soit A un automate fini sur un vocabulaire X Avec $x \in X$




On dénote par Li, le langage reconnu par l'automate A en considérant que qi est l'état initial. Ainsi, L0 est le langage reconnu par A

**$\omega_j \in Lj \Leftrightarrow \exists\ \omega_i \in Li\ /\ \omega_i = x\ \omega_j$ en conséquence Li = xLj**

**Si qi est un état final alors Li = x Lj + {ε} par ce que si qi est un état initial et final alors le langage Li contient le mot ε**

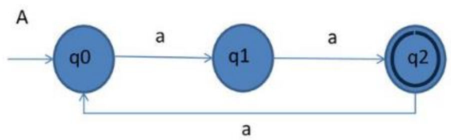
**Lemme d'Arden 2:** Soient A et B deux langages sur un vocabulaire X,

Les équations L= AL + B et L = LA + B admettent respectivement comme solution minimale L=A*B et L=BA*. Cette solution est unique si $\varepsilon \notin A$.

## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Exercice :** Soit A un automate fini sur un vocabulaire X= {a,b}.

Chercher le langage L0 reconnu par l'automate A




**Corrigé :**

L0 = {a} L1 (1)    L1 = {a} L2 (2)

L2 = {a} L0 + {ε}    (3)

(1) + (2) ⇒ L0 = {a}{a}L2 = {aa}L2    (4)

(4) + (3) ⇒ L0 = {aa} L2 = {aa}({a}L0 + {ε}) ⇒ L0 = {aaa}L0 + {aa}

⇒ L0 = {aaa}*{aa} = (aaa)*aa

D'après le lemme d'Arden





## B.I. Langage accepté par un automate fini

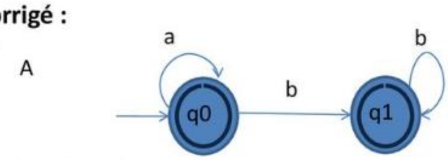
**Exercice:**

1) Construire un automate qui accepte le langage a*b*

2) Vérifier que l'automate construit reconnaît le langage a*b*

**Corrigé :**

**1)**




**2)** Calculons L0

L0 = {a} L0 + {b}L1 + {ε}    (1)

L1 = {b} L1 + {ε}    (2)

(2) ⇒ L1 = {b}*{ε} d'après le lemme d'Arden ⇒ L1 = b*    (3)

(1) + (3) ⇒ L0 = {a}L0 + {b} b* + {ε}

⇒ L0 = {a}L0 + $b^+$ + {ε}

⇒ L0 = {a}L0 + $b^*$ car $b^+$+{ε} = b*

⇒ **L0** = {a}*b* = **a*b***d'après le lemme d'Arden

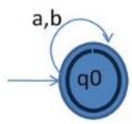
L(A) = L0 = a*b* donc l'automate A reconnaît le langage a*b*

## B.I. Langage accepté par un automate fini

**Exercice:**
**1)** Construire une automate qui accepte le langage (a+b)*
**2)** Vérifier que l'automate construit reconnaît le langage (a+b)* (L0 est le langage accepté par l'automate puisque c'est le langage où q0 est l'état initial)

**Corrigé:**
**1)**

A




**2)** $L0 = \{a\}\, L0 + \{b\}L0 + \{\varepsilon\}$ (1)

(1) $\Rightarrow L0 = \{a,b\}\, L0 + \{\varepsilon\}$

$\Rightarrow L0 = \{a,b\}^*\{\varepsilon\}$ d'après le lemme d'Arden

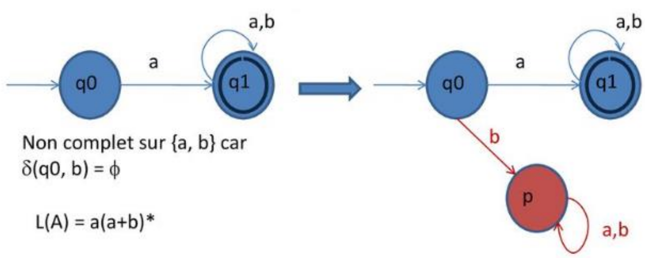
$\Rightarrow L0 = \{a,b\}^* = (a+b)^*$





## B.II. Déterminisation d'un automate à états fini

**Cas 1. Automate fini non complet**
Si l'automate fini est non déterministe par ce qu'il est non complet, alors pour le rendre déterministe, il suffit d'ajouter un état puis ajouter toutes les transitions manquantes vers cet état.




Non complet sur {a, b} car
$\delta(q0, b) = \phi$

L(A) = a(a+b)*

Complet sur {a, b}

## B.II. Déterminisation d’un automate à états fini

**Cas 2. Automate fini ambigu**

Si l’automate fini est non déterministe par ce qu’il est ambigu alors on doit construire un automate en groupant les états visités par un même symbole à partir d’un état, ces états groupés forment les nouveaux états de l’automate déterministe.

La construction de l’automate déterministe suit les étapes suivantes:

**Etape 1.** Définir les nouveaux groupes d’états

**Etape 2.** Renommer les nouveaux groupes et définir les états finaux.
Un nouvel état (Groupe d’état) est un état final ssi il contient un ancien état final.

**Etape 3.** Construire l’automate déterministe



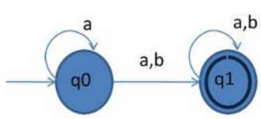
Ch3: Langages réguliers et Automates finis

## B.II. Déterminisation d’un automate à états fini

**Cas 2. Automate fini ambigu**

**Exemple1:**

**Etape 1.** Définir les nouveaux groupes d’états



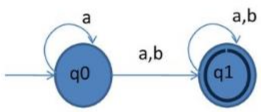

$L(A) = a^*(a+b)^+$

| | a | b |
|---|---|---|
| {q0} | {q0, q1} | {q1} |
| {q0, q1} | {q0, q1} | {q1} |
| {q1} | {q1} | {q1} |

## B.II. Déterminisation d'un automate à états fini

### Cas 2. Automate fini ambigu

**Etape 2.** Renommer les nouveaux groupes et définir les états finaux.




| | a | b |
|---|---|---|
| {q0} A | {q0, q1} B | {q1} C |
| {q0, q1} B | {q0, q1} B | {q1} C |
| {q1} C | {q1} C | {q1} C |

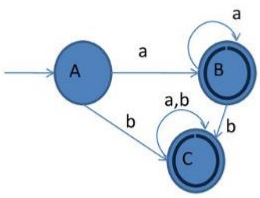




## B.II. Déterminisation d'un automate à états fini

### Cas 2. Automate fini ambigu

**Etape 3.** Construire l'automate déterministe

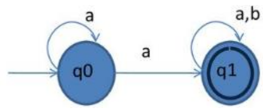



| | a | b |
|---|---|---|
| {q0} A | {q0, q1} B | {q1} C |
| {q0, q1} B | {q0, q1} B | {q1} C |
| {q1} C | {q1} C | {q1} C |

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

## B.II. Déterminisation d'un automate à états fini

**Cas 2. Automate fini ambigu**
**Exercice :** Soit l'automate A suivant.




Construire un automate fini déterministe qui reconnaît le même langage

**Correction :**
**Etape 1.** Définir les nouveaux groupes d'états

L(A) = $a^+(a+b)^*$

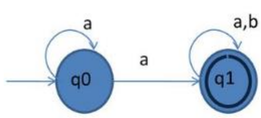
| | a | b |
|---|---|---|
| {q0} | {q0, q1} | ϕ |
| {q0, q1} | {q0, q1} | {q1} |
| {q1} | {q1} | {q1} |



Ch3: Langages réguliers et Automates finis

## B.II. Déterminisation d'un automate à états fini

**Cas 2. Automate fini ambigu**
**Etape 2.** Renommer les nouveaux groupes et définir les états finaux.

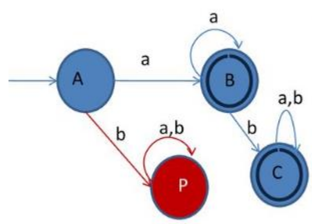



| | a | b |
|---|---|---|
| {q0} A | {q0, q1} B | ϕ P |
| {q0, q1} B | {q0, q1} B | {q1} C |
| {q1} C | {q1} C | {q1} C |

## B.II. Déterminisation d'un automate à états fini

### Cas 2. Automate fini ambigu

**Etape 3.** Construire l'automate déterministe




| | a | b |
|---|---|---|
| {q0} A | {q0, q1} B | ϕ P |
| {q0, q1} B | {q0, q1} B | {q1} C |
| {q1} C | {q1} C | {q1} C |





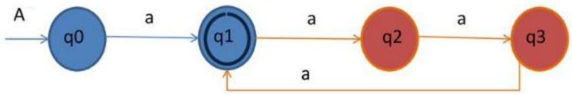
## B.III. Minimisation d'un automate fini déterministe

Soit A un automate fini déterministe A = (Q, X, q0, δ, F)
Pour obtenir un automate A minimal en nombre d'états, suivre les étapes suivantes:

1) Construire une partition initiale $\pi_0$ composée de deux groupes: Groupe des états non finaux G1et Groupe des états finaux G2
2) Répéter Jusqu'à $\pi_{i+1} = \pi_i$ / i >= 0
•Pour obtenir $\pi_{i+1}$, Partitionner chaque groupe de $\pi_i$ en mettant ensemble des états p et q si pour chaque symbole s du vocabulaire, p et q transitent vers des états d'un même groupe d'états.
•Construire les nouveaux groupes
3) Associer à chaque groupe un nom
4) Construire les transitions des groupes en utilisant les transitions des états des groupes.
5) Un groupe qui contient un état final est un état final dans l'automate minimal

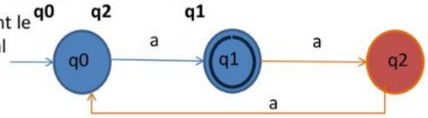
## B.III. Minimisation d'un automate fini déterministe

Exercice1 : Soit l'automate A suivant. Construire un automate minimal qui accepte le même langage (Minimiser le nombre d'états de l'automate A)




**Corrigé:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | G1 | | G2 |
| Π0 | (q0, q2, q3) | | (q1) |
| | G1 | G2 | G3 |
| Π1 | (q0, q3) | (q2) | (q1) |
| Π2 | (q0, q3) | (q2) | (q1) |
| On obtient le A minimal | q0 | q2 | q1 |



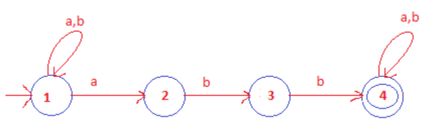

(q2, a, q0) est dans A minimal car (q2, a, q3) était dans A et que le group d'états (q0, q3) est renommé q0





## B.III. Minimisation d'un automate fini déterministe

Exercice 2 : Soit l'automate A1 suivant.

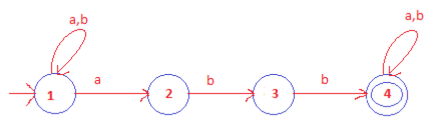



1) Construire un automate fini déterministe D qui reconnaît le même langage

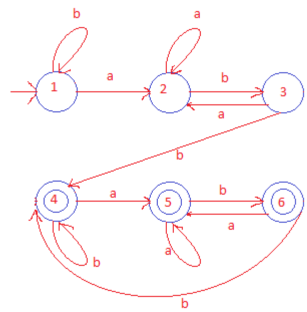
2) Construire un automate fini déterministe minimal M qui accepte le même langage (Minimiser le nombre d'états de l'automate D)

## B.III. Minimisation d’un automate fini déterministe

Correction: automate fini déterministe D



| δ | a | b |
|---|---|---|
| {1} | {1,2} | {1} |
| {1,2} | {1,2} | {1,3} |
| {1,3} | {1,2} | {1,4} |
| {1,4} | {1,2,4} | {1,4} |
| {1,2,4} | {1,2,4} | {1,3,4} |
| {1,3,4} | {1,2,4} | {1,4} |





Ch3: Langages réguliers et Automates finis

B.III. Minimisation d’un automate fini déterministe

Correction: automate fini minimal M

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_0$ | I | I | I | II | II | II |
| a | I | I | I | II | II | II |
| b | I | I | II | II | II | II |
| $\pi_1$ | I | I | II | III | III | III |
| a | I | I | I | III | III | III |
| b | I | II | III | III | III | III |
| $\pi_2$ | I | II | III | IV | IV | IV |
| a | II | II | II | IV | IV | IV |
| b | I | III | IV | IV | IV | IV |
| $\pi_3$ | I | II | III | IV | IV | IV |