

Cours: Théorie des langages & Compilation

Chapitre 3: Langages réguliers et Automates finis (partie C)

Réalisé par:

Dr. Sakka Rouis Taoufik

1

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

Définition: Un langage L est dit régulier s'il existe un automate fini A qui l'accepte ($L(A) = L$)

Le lemme de pompage : Soit L un langage régulier reconnu par un automate à n états.

Pour tout mot z de L , z est de longueur $\geq n$,
il existe une factorisation $z = uvw$,

où $\begin{cases} |uv| \leq n, \\ v \neq \varepsilon \text{ et,} \\ \forall i \geq 0, \end{cases} \quad \text{on a } uv^i w \in L.$

2

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

Exemple d'application : montrer que certains langages ne sont pas réguliers.

$L = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Si L est reconnu par un automate à n états, la factorisation de $0^n 1^n$ conduit à une contradiction.

$L = \{\text{écritures binaires de } p, \text{ où } p \text{ est premier}\}$ n'est pas régulier.

3

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

Propriétés des langages réguliers (LR)

- \emptyset est un langage régulier (Il existe un automate fini qui l'accepte)

- Si L_1 et L_2 sont des langages réguliers **alors**

$L_1 + L_2$ (Union), $L_1.L_2$ (Concaténation) et $L_1 \cap L_2$ (Intersection) sont des langages réguliers

- Si L est un langage régulier alors

L^* (Fermeture transitive), L^+ (Fermeture transitive réflexive), (Complément $X-L$) et L^R (Image miroir) sont des langages réguliers.

4

Ch3: Langues régulières et Automates finis

C.I. Les langues régulières

P1: Si L_1 et L_2 sont des langues régulières alors $L_1 + L_2$ (Union) est un langage régulier.

On peut toujours construire un automate fini qui accepte $L_1 + L_2$ à partir des automates finis qui acceptent respectivement L_1 et L_2

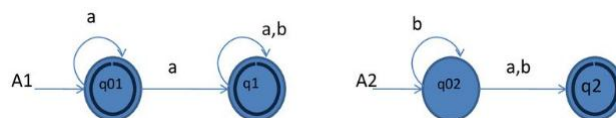
Soit $A_1 = (Q_1, X_1, \delta_1, q_{01}, F_1) / L(A_1) = L_1$
 $A_2 = (Q_2, X_2, \delta_2, q_{02}, F_2) / L(A_2) = L_2$
 On construit $A = (Q, X, \delta, q_0, F) / L(A) = L_1 + L_2$
 $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$
 $X = X_1 \cup X_2$
 $\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(q_0, x, q) / (q_{01}, x, q) \in \delta_1 \text{ ou } (q_{02}, x, q) \in \delta_2\}$
 $F = F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\} \text{ si } q_{01} \in F_1 \text{ ou } q_{02} \in F_2$
 $F_1 \cup F_2 \text{ sinon}$

5

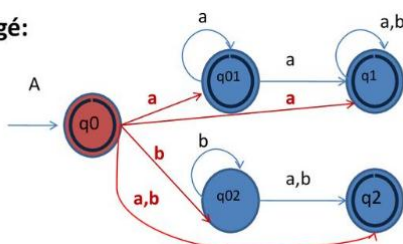
Ch3: Langues régulières et Automates finis

C.I. Les langues régulières

Exercice: Soient les automates A_1 et A_2 , construire un automate A qui reconnaît $L(A_1) + L(A_2)$ (l'union des deux langages reconnus par A_1 et A_2)



Corrigé:



6

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

P2: Si L_1 et L_2 sont des langages réguliers alors $L_1.L_2$ (concaténation) est un langage régulier.

On peut toujours construire un automate fini qui accepte $L_1.L_2$ à partir des automates finis qui acceptent respectivement L_1 et L_2

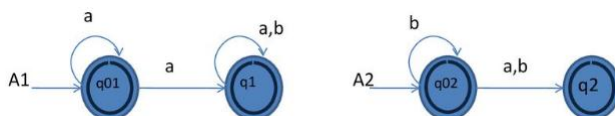
Soit $A_1 = (Q_1, X_1, \delta_1, q_{01}, F_1) / L(A_1) = L_1$
 $A_2 = (Q_2, X_2, \delta_2, q_{02}, F_2) / L(A_2) = L_2$
 On construit $A = (Q, X, \delta, q_0, F) / L(A) = L_1.L_2$
 $Q = Q_1 \cup Q_2$
 $X = X_1 \cup X_2$
 $q_0 = q_{01}$
 $\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(p, x, q) / (q_{02}, x, q) \in \delta_2 \text{ et } p \in F_1\}$
 $F = \begin{matrix} F_1 \cup F_2 & \text{si } q_{02} \in F_2 \\ F_2 & \text{sinon} \end{matrix}$

7

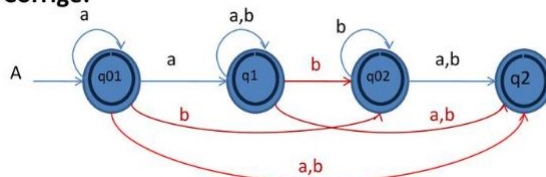
Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

Exercice: Soient les automates A_1 et A_2 suivants, construire un automate A qui accepte $L(A_1) \cdot L(A_2)$



Corrigé:

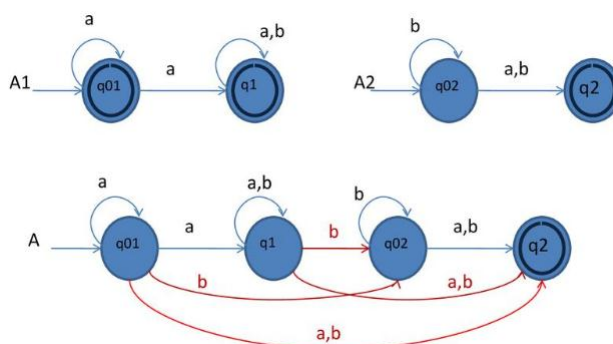


8

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

Exercice: Soient les automates A1 et A2 suivants, construire un automate A qui accepte $L(A1) \cdot L(A2)$



9

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.I. Les langages réguliers

P3: Si L est un langage régulier alors L^* est un langage régulier
On peut toujours construire un automate fini qui accepte L^* à partir de l'automate fini qui accepte L

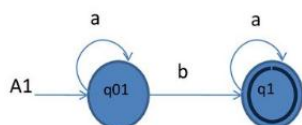
Soit $A1 = (Q1, X1, \delta1, q01, F1) / L(A1) = L1$
On construit $A = (Q, X, \delta, q0, F) / L(A) = L^*$
 $Q = Q1 \cup \{q0\}$
 $X = X1$
 $\delta = \delta1 \cup \{(q0, x, q) / (q01, x, q) \in \delta1\} \cup \{(qf, x, q) / (q01, x, q) \in \delta1 \text{ et } qf \in F1\}$
 $F = F1 \cup \{q0\}$

10

Ch3: Langues régulières et Automates finis

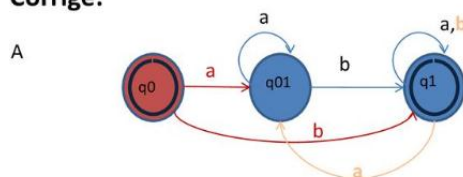
C.I. Les langues régulières

Exercice: Soit l'automate A1, construire un automate A qui accepte $(L(A1))^*$



$L(A1) = a^*ba^*$
 $L(A) = (L(A1))^* = (a^*ba^*)^*$
 Par ce que on a :
 (q01, a q01) et (q01, b, q1)
 dans δ_1 qu'on ajoute :
 (q0, a, q01) et (q0, b, q1) à δ

Corrigé:



Par ce que on a :
 (q01, a, q01) et (q01, b, q1)
 dans δ_1 qu'on ajoute :
 (q1, a, q01) et (q1, b, q1) à δ

11

Ch3: Langues régulières et Automates finis

C.I. Les langues régulières

- P4: Si L est un langage régulier alors L^+ est un langage régulier
 On peut toujours construire un automate fini qui accepte L^+ à partir de l'automate fini qui accepte L

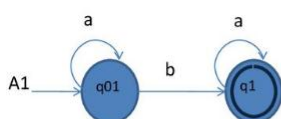
Soit $A1 = (Q1, X1, \delta1, q01, F1) / L(A1) = L1$
 On construit $A = (Q, X, \delta, q0, F) / L(A) = L1^+$
 $Q = Q1 \cup \{q0\}$
 $X = X1$
 $\delta = \delta1 \cup \{(q0, x, q) / (q01, x, q) \in \delta1\} \cup \{(qf, x, q) / (q01, x, q) \in \delta1 \text{ et } qf \in F1\}$
 $F = F1$

12

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

B.IV. Les langages réguliers

Exercice: Soit l'automate A1, construire un automate A qui accepte $(L(A1))^+$



$$L(A1) = a^*ba^*$$

$$L(A) = (L(A1))^+ = (a^*ba^*)^+$$

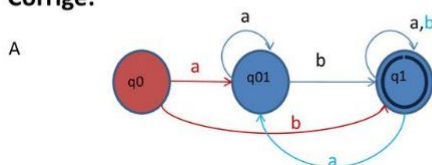
Par ce que on a :

$(q01, a, q01)$ et $(q01, b, q1)$

dans δ_1 qu'on ajoute :

$(q0, a, q01)$ et $(q0, b, q1)$ à δ

Corrigé:



Par ce que on a :

$(q01, a, q01)$ et $(q01, b, q1)$

dans δ_1 qu'on ajoute :

$(q1, a, q01)$ et $(q1, b, q1)$ à δ

13

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.II. Expressions régulières et automates finis

Une expression régulière (ER) est définie récursivement comme suit:

- ϵ est une ER
- Un symbole a de X est une ER
- Si E est une ER alors E^+ , E^* , (E) sont des ER
- Si $E1$ et $E2$ sont des ER alors $E1.E2$ et $E1+E2$ sont des ER

Lemme

$\{\text{langages réguliers}\} = \{\text{langages représentés par une expression régulière}\}$

Rq. Un langage est dit régulier s'il existe un automate fini qui l'accepte ou une expression régulière qui le représente

14

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.II. Expressions régulières et automates finis

Exemples:

a^*b^*

$(a+b)^*c^+$

$(0+1+2+\dots+9)^+$ représentations décimales des entiers

$(a+b+\dots+z+A+B+\dots+Z)(a+b+\dots+z+A+B+\dots+Z+0+1+\dots+9)^*$
les identificateurs alphanumériques qui commencent par un caractère alphabétique

$(a+b)^*aa$ mots sur $\{a, b\}$ ayant aa comme facteur droit

$(a+b+c)^*abc(a+b+c)^*$ mots sur $\{a,b,c\}$ ayant abc comme facteur

$0^*(1+2+\dots+9)(0+1+\dots+9)^*$ représentations décimales des entiers non nuls

15

Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.II. Expressions régulières et automates finis

Limites des automates finis

Exercice : Prouver que le langage L suivant n'est pas un langage régulier:

$L = \{a^i b^j, i \geq j\}$ C-a-d, il n'existe pas un automate fini qui l'accepte

Corrigé:

Supposons qu'il existe un automate fini A à n états qui accepte L ($L(A) = L$) (1)

Alors A accepte en particulier $a^n b^n$,

Considérons la séquence de configurations acceptables pour $a^n b^n$

$(q_0, a^n b^n) \vdash (q_1, a^{n-1} b^n) \vdash \dots (q_{2n-1}, b) \vdash (q_{2n}, \epsilon)$ où $q_{2n} \in F$

Cette séquence contient $2n+1$ états

Donc un état au moins doit apparaître plus qu'une fois dans les n premiers mouvements.

Soit q cet état, si $i = sj = q$ pour certaines valeurs de i et j telles que $0 \leq i \leq j \leq n$

Ceci entraîne

$(q_0, a^n b^n) \vdash (q, a^{n-i} b^n) \vdash \dots (q, a^{n-j} b^n) \vdash (q_{2n}, \epsilon)$

$(q_0, a^{n-j+i} b^n) \vdash (q, a^{n-j} b^n) \vdash \dots (q_{2n}, \epsilon)$

C-a-d $a^{n-j+i} b^n \in L(A)$

C-a-d $L \neq L(A)$ (**absurde**) avec l'hypothèse (1)

16



Ch3: Langages réguliers et Automates finis

C.II. Expressions régulières et automates finis

Solution: Les automates à piles

Les automates à piles sont une extension des automates à états finis. Ils utilisent une (et une seule) pile pour reconnaître les mots dans les langages non contextuel.

Une configuration d'un automate à pile consiste donc à définir le triplet (q, a, b) tel que q est l'état actuel, a et le symbole actuellement en lecture et b est le sommet actuel de la pile.