

TD N°4

Sémantique du calcul des prédicats

Exercice 1 :

Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes (les variables représentent toutes des nombres réels).

- 1/ $\forall x \exists y \langle x^2 + y < 0 \rangle$
- 2/ $\exists y \forall x \langle x^2 + y < 0 \rangle$
- 3/ $\forall y \exists x \langle x^2 + y < 0 \rangle$
- 4/ $\forall x \forall y \langle \text{si } x < y \text{ alors } \sin(x) < \sin(y) \rangle$
- 5/ $\forall x > 0 \exists y > 0 \forall z \langle \text{si } |z - 2| < y \text{ alors } |z^2 - 4| < x \rangle$

Exercice 2 :

Soit l'interprétation suivante du calcul des prédicats :

- Constantes :

a : Adel

b : Basma

c : Chahira

- Prédicat : $P(x,y) = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, a \rangle \}$

Nous dirons que la relation « $P(x,y) = x \text{ voit } y$ ».

- 1/ Est-ce que Chahira voit Adel ?
- 2/ Est-ce que Chahira voit Basma ?
- 3/ Dites si les formules suivantes sont vraies dans cette interprétation :

a/ $P(b,a)$

b/ $P(c,b) \vee P(c,c)$

c/ $P(b,a) \rightarrow P(c,c)$

d/ $(P(a,b) \rightarrow (P(b,a) \vee \neg P(c,b))) \rightarrow P(b,c)$

e/ $\exists x P(x,x)$

f/ $\forall x P(x,c)$

g/ $\forall x P(a,x)$

h/ $\exists x \forall y P(y,x)$

i/ $\exists x \forall y P(x,y)$

j/ $\forall x (P(x,x) \rightarrow \exists y \neg P(x,y))$

Exercice 3 :

Utiliser la méthode des arbres pour montrer que les formules suivantes sont ou non des tautologies ?

- 1/ $\forall x (R(x,x) \rightarrow \exists y R(x,y))$
- 2/ $\exists x \forall y R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x R(x,y)$
- 3/ $\forall x (\neg P(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
- 4/ $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$
- 5/ $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \neg \forall x (Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
- 6/ $\exists x \forall y (P(y) \rightarrow R(x,y)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x R(x,x))$

Exercice 4 :

Soient les formules suivantes :

- 1/ $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y))$
- 2/ $\exists x (\neg(\exists y P(x,y)) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$
- 3/ $((\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \rightarrow \exists z R(z)) \rightarrow \exists u S(u)$

- a/ Donner les variables libres et liées pour chacune des formules précédentes
- b/ Mettre chacune des formules précédentes sous forme normale prénexe
- c/ Mettre chacune des formules précédentes sous forme de Skolem
- d/ Mettre chacune des formules précédentes sous forme normale conjonctive