Cours: Logique Formelle

Chapitre 2: Logique Propositionnelle (Partie 2)

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

- **Exemple :** En utilisant **la table de vérité** déterminer une formule en forme normale disjonctive équivalente à $((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow r)$

p	q	r	$p \vee q$	$((p \vee q) \rightarrow r)$	$p \leftrightarrow r$	$((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

- **Conclusion:** $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge (\neg q) \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))$ est une formule en forme normale disjonctive équivalente à $((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow r)$

III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

➢ **Exercice :** En utilisant **la table de vérité** déterminer une formule en forme normale disjonctive équivalente à :

1/ $(p \rightarrow (\neg r)) \wedge (q \wedge (\neg r))$

2/ $q \wedge ((p \wedge r) \vee \neg(p \vee r))$

III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

➢ Tableaux de Karnaugh

Le code binaire Gray, contrairement au code binaire naturel, permet de ne faire **évoluer qu'un bit** lorsque l'on passe d'un code à son suivant ou son précédent.

À partir de 6 variables, le tableau de Karnaugh devient de plus en plus imposant. Pour le moment, on va se limiter à 4 variables.

Les variables se répartissent sur les 2 côtés.

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00				
	01				
	11				
	10				

➢ Tableaux de Karnaugh

Le but est très simple. Il faut effectuer des regroupements de 1; par paquets de 1, 2, 4 ,8, 16, ... Ces regroupements doivent être des **rectangles** ou des **carrés**, jamais de travers, et les **plus grands possible** sachant qu'un élément **déjà utilisé peut être repris**.

Attention : ne pas oublier que le tableau de Karnaugh est *écrit* sur un cylindre.

➢ Tableaux de Karnaugh

Exemple 1: parton du table 1 on peut faire ces 4 rassemblements :

F		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0	0	0	1	1
	0 1	1	1	1	1
	1 1	0	0	0	1
	1 0	0	0	1	1

F		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0	0	0	1	1
	0 1	1	1	1	1
	1 1	0	0	0	1
	1 0	0	0	1	1

F		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0	0	0	1	1
	0 1	1	1	1	1
	1 1	0	0	0	1
	1 0	0	0	1	1

NB. Le dernier tableaux est inutile puisqu'il peut être fait par les 2 de gauche au dessus

F		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0	0	0	1	1
	0 1	1	1	1	1
	1 1	0	0	0	1
	1 0	0	0	1	1

F		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0	0	0	1	1
	0 1	1	1	1	1
	1 1	0	0	0	1
	1 0	0	0	1	1

III. Sémantique propositionnelle — 2) Formes normales disjonctives

➢ Tableaux de Karnaugh

Maintenant on essaie de résoudre les rassemblements. Pour cela, il faut que les variables participant au rassemblement concerné ne changent pas.

Exemple avec le rassemblement bleu :
Dans les 4 cas possibles, la variable a est toujours à 1 et la variable d est toujours à 0
➔ La solution bleue donne : a $\wedge \neg$ d

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

III. Sémantique propositionnelle — 2) Formes normales disjonctives

➢ Tableaux de Karnaugh

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

a $\wedge \neg$ d

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

$\neg$c $\wedge$ d

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

a $\wedge \neg$ b

➢ Conclusion: F= (a $\wedge \neg$ d) v ($\neg$c $\wedge$ d) v (a $\wedge \neg$ b)

- **Exemple 2:** en utilisant les **tableaux de Karnaugh**, déterminer une formule en FND équivalente à la forme R suivante:

R		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

R		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

R		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

R		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

Rassemblement vert : $a \wedge b$
Rassemblement bleu : $c \wedge d$
Rassemblement orange : $\neg b \wedge d$

Conclusion: $R = (a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (\neg b \wedge d)$

- **Exercice 1:** en utilisant les **tableaux de Karnaugh**, déterminer une formule en FND équivalente à $p \rightarrow (q \vee r)$

- **Conclusion:**