

# Cours: Logique Formelle

## Chapitre 1: Introduction à la Logique

Réalisé par:

Dr. Sakka Rouis Taoufik

<https://github.com/srtaoufik/cours-Logique-Formelle>

1

### Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

#### I. Définition

- La logique est la science qui enseigne à raisonner juste: Enchaînement cohérent d'idées.
- Il s'agit d'une science formelle consacrée à l'étude de procédés de raisonnement.
- Autrement dit, c'est l'étude **des méthodes** et **des principes** utilisés pour distinguer le raisonnement correct de l'incorrect.

2

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### II. Historique

- Aristote: le fondateur de la logique formelle: Il a proposé un mode de raisonnement appelé **sylogisme** qui est un raisonnement logique mettant en relations trois propositions : deux d'entre elles, appelées «prémisses», conduisent à une «conclusion».

**Exemple:**  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  donne  $A \rightarrow C$

- Buridan (XIV ème Siècle): Généralisation de la logique d'Aristote
- Boole (XIX ème Siècle): détachent la logique de la philosophie et la rattachent aux mathématiques

➔ passage de l'**implicite** à l'**explicite**.

3

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### III. Raisonnement logique

- **Les logiques** sont utilisées pour modéliser de manière **formelle** et **abstraite** des problèmes réels rencontrés par les scientifiques (informaticiens, électriciens, etc.);  
➔ effectuer des analyses (raisonnement, vérification, etc.) en se servant du modèle formel.
- **Avantages des formalismes logiques:** Modèles précis et non ambigus, démarche rigoureuse, etc. Possibilité de (semi-) automatiser l'analyse des modèles.
- **Modes de raisonnement logique:** Logique de Boole, Logique des propositions, Logique des prédicats, Logique floue, etc.

4

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### III. Raisonnement logique

#### 1) Logique de Boole

- Appelé aussi l'algèbre de Boole, ou calcul booléen.
- Initiée en 1854 par le mathématicien britannique George Boole.
- C'est la partie des mathématiques, de la logique et de l'électronique qui s'intéresse aux **opérations** et aux **fonctions** sur les **variables logiques**.
- Elle permet d'utiliser les techniques algébriques pour traiter des expressions à **deux valeurs du calcul** des propositions. Résultat: Vrai ou Faux

5

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### III. Raisonnement logique

#### 1) Logique de Boole

#### Calcul de fonction logique à quatre variables:

- Un bon élève s'interroge s'il est sage de sortir un soir. Il doit décider en fonction de quatre variables:  
a = il a assez d'argent; b = il a fini ses devoirs; c = le transport en commun est en grève; d = l'automobile de son père est disponible
- Cet élève pourra sortir si il a assez d'argent (a = vrai) **et** il a fini ses devoirs (b = vrai) **et** si le transport en commun n'est pas en grève (c = faux) **ou** si l'automobile de son père est disponible (d = vrai)
- L'expression logique de sortir en fonction de l'état des variables a, b, c et d peut donc s'écrire ainsi:

$$\text{Sortir} = a \cdot b \cdot (\text{Non}(c) + d)$$

6

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### III. Raisonnement logique

#### 2) Logique Propositionnelle

- **La logique propositionnelle** est une partie de la logique qui traite des **propositions**.
- **Les propositions** sont **des affirmations** prises "en bloc" qui ne peuvent être que **vraies** ou **fausses**.
- **Les affirmations** servent à examiner nos idées, construire des démonstrations, énoncer des résultats, transmettre des connaissances.
- **Attention:** certaines affirmations peuvent ne pas être des propositions.

7

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### III. Raisonnement logique

#### 2) Logique Propositionnelle

- **Exemples d'affirmations qui sont des propositions**
- P1: «5 plus 4 font 9»
- P2: «7,7 est compris entre 4 et 5»
- P3: «Le train numéro 51 arrive en retard»
- P4: «il pleut»
- P5: «10 est divisible par 5»

8

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### III. Raisonnement logique

#### 2) Logique Propositionnelle

#### ➤ Exemples d'affirmations qui ne sont pas des propositions

- Q1: «la présente affirmation est fausse»
  - elle serait vraie si l'affirmation est fausse
  - elle serait fausse si l'affirmation est vraie
  - **Le résultat pourrait être aussi bien V que F**
- Q2: «tout nombre strictement négatif n'est pas un carré»
  - elle serait vraie si on raisonne dans  $\mathbb{R}$
  - elle serait fausse si on raisonne dans  $\mathbb{C}$
  - **Le résultat est trop imprécis**

9

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### IV. Exercices d'application

**Exercice 1:** considérons la situation décrite par les affirmations suivantes :

1. Si le train arrive en retard et s'il n'y a pas de taxis à la gare, alors l'invité arrive en retard.
2. L'invité n'est pas en retard.
3. Le train est arrivé en retard.

**Déduction :** Donc, il y avait des taxis à la gare;

**Question :** Pourquoi peut-on déduire qu'il y avait des taxis à la gare ?

10

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### IV. Exercices d'application

➤ Pour répondre à cette question, on procède comme suit:

1. si on combine les affirmations 1 et 3, on peut affirmer que s'il n'y avait pas eu de taxis à la gare, alors l'invité serait arrivé en retard.
2. cette dernière affirmation n'est compatible avec le fait 2 que s'il y avait des taxis à la gare.
3. donc, il est consistant de déduire qu'il y avait des taxis à la gare.

11

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### IV. Exercices d'application

**Exercice 2:** considérons une autre situation décrite par les affirmations suivantes :

1. S'il pleut et l'invité a oublié son parapluie alors l'invité est trempé.
2. L'invité n'est pas trempé.
3. Il pleut.

**Déduction :** Donc, l'invité n'a pas oublié son parapluie.

**Question :** pourquoi peut-on déduire que l'invité n'a pas oublié son parapluie ?

12

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### IV. Exercices d'application

- Pour répondre à cette question, on procède de la même façon que précédent.
1. Si on combine les affirmations 1 et 3, on peut affirmer que si l'invité a oublié son parapluie alors l'invité est trempé.
  2. Cette dernière affirmation est compatible avec le fait 2 uniquement lorsque l'invité n'a pas oublié son parapluie.
  3. Donc, il est consistant de déduire que l'invité n'a pas oublié son parapluie à partir des trois faits.

13

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### IV. Exercices d'application

**Exercice 3 :** Dans chacun des cas ci-dessous dire si les affirmations sont des propositions ?

- 1/ « La présente affirmation est vraie »
- 2/ «  $\pi$  est compris entre 3 et 4 »
- 3/ « 15 plus 13 font 34 »
- 4/ « Le nombre complexe  $i$  a pour module 3 »
- 5/ « Quel temps fait-il ? »
- 6/ « L'affirmation qui suit est vraie »
- 7/ « L'affirmation qui précède est fausse »
- 8/ « Le nombre complexe  $z$  a pour module 3 »
- 9/ « Le triangle T est isocèle »
- 10/ « 30 est divisible par 7 »

14

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### IV. Exercices d'application

#### **Exercice 4** : forme symbolique

Soient  $p$  et  $q$  les deux affirmations suivantes :

$p$  : « Ali est fort en physique »

$q$  : « Ali est fort en Chimie »

Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des variables  $p$  et  $q$  et des connecteurs usuels.

- 1/ « Ali est fort en physique mais faible en chimie »
- 2/ « Ali n'est fort ni en physique ni en chimie »
- 3/ « Ali est fort en physique ou il est à la fois fort en chimie et faible en physique »
- 4/ « Ali est fort en physique s'il est fort en chimie »
- 5/ « Ali est fort en chimie et en physique ou il est fort en chimie et faible en physique »

15

## Chapitre 1: Introduction à la Logique Formelle

### IV. Exercices d'application

#### **Exercice 5** : forme symbolique

Soient  $p$ ,  $c$  et  $a$  les trois affirmations suivantes :

$p$  : « karim fait de la physique »

$c$  : « karim fait de la chimie »

$a$  : « karim fait de l'allemand »

Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des variables  $p$ ,  $c$  et  $a$  et des connecteurs usuels.

- 1/ karim fait de la physique et de l'allemand mais pas de la chimie.
- 2/ karim fait de la physique et de la chimie mais pas à la fois de la chimie et de l'allemand.
- 3/ Il est faux que karim fasse de l'allemand sans faire de la physique.
- 4/ Il est faux que karim ne fasse pas de la physique et fasse quand même de la chimie.
- 5/ Il est faux que karim fasse de l'allemand ou de la chimie sans faire de la physique
- 6/ karim ne fait ni allemand ni chimie mais il fait de la physique

16