Cours: Logique Formelle

Chapitre 3: Logique des prédicats
Partie 1/3:

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

I. Introduction

- La logique propositionnelle qui nous a permis de mettre au point une première théorie de raisonnement mais elle ne permet pas de formuler tous les raisonnements .
- Il faut aller alors plus loin que le simple calcul des propositions.
- Nous n'allons plus contenter de simples propositions, mais nous allons introduire un nouveau type de formules logique: appelé le prédicat.

Exemples :

- {n est un entier naturel pair} n'est pas une proposition
- par contre {5 est un entier naturel pair} est une proposition fausse.

➔ À Chaque fois qu'on remplace n par un entier particulier on obtient une proposition

- {n est un entier naturel pair} est un prédicat.

I. Introduction

Définitions :

- un prédicat est une formule logique qui dépend **d'une variable libre**.
- un prédicat c'est une affirmation **qui porte sur des symboles** représentant **des éléments variables d'un ensemble fixe**.

- Puisqu'un prédicat dépend d'une variable x, nous les noterons souvent P(x);

- C'est une application qui associe une proposition P(x) à chaque élément d'un ensemble E, cette ensemble s'appelle **l'univers** du prédicat

- Dans le cas de l'exemple précédent E = N

Chapitre 3: Logique des prédicats

I. Introduction

Objectif:

- La logique des prédicats a pour but de généraliser la logique des propositions. On peut considérer un prédicat comme un énoncé général où apparaissent des variables. Par exemple:

(1) « X est la sœur de Y »

(2) « si X est le père de Y et Y le père de Z alors X est le grand père de Z »

Si l'on remplace toutes les variables d'un prédicat par des valeurs définies on obtient une proposition à la quelle on pourra associer une interprétation (vrais, faux), Par exemple

X= Rim et Y = Ali dans (1) donne « Rim est la sœur de Ali »

Un prédicat représente donc potentiellement une classe de propositions.

I. Introduction

- Le nombre des variables d'un prédicat s'appelle **poids** du prédicat.
- Exemple : p (a,b) = { le couple d'entiers naturels (a,b) tel que a+b=10}

  - si l'univers du prédicat est N^2 alors son poids est égal à 2

  - si l'univers du prédicat est N alors son poids est égal à 1
- Dans un prédicat de poids n, si l'on affecte une valeur à l'une des variables, on obtient un prédicat de poids n-1.
- Par conséquent, un prédicat de poids 0 est une proposition.
- Les prédicats qui portent sur **le même univers** peuvent être combinés entre eux à l'aide des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ pour former de nouveau prédicat.

Chapitre 3: Logique des prédicats

I. Introduction

Définitions :

- Le prédicat $\neg$ p (x) associe à x la négation du prédicat p(x)
- Le prédicat p$\wedge$q (x) associe à x la conjonction des prédicats p(x) et q(x)

  on notera aussi (p $\wedge$ q) (x)
- Le prédicat p$\vee$q (x) associe à x la disjonction des prédicats p(x) et q(x)

  on notera aussi (p $\vee$ q) (x)

- Exemple : même univers N

p(n) = {l'entier naturel n est pair}; q(m) = {l'entier naturel m est divisible pas 5}

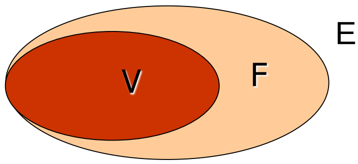
- $\neg$ p(n) = {l'entier naturel n est impair}
- p$\wedge$q (n) = {l'entier naturel n est pair, et il est divisible par 5} (poids 1)
- p$\vee$q (n) = {l'entier naturel n est pair, ou il est divisible par 5} (poids 1)

Attention : si l'univers est N^2 (poids 2), il ne faut pas confondre p$\wedge$q (n) avec S (n,m) = {l'entier naturel n est pair et l'entier naturel m est divisible par 5}

Chapitre 3: Logique des prédicats

II. Formalisation du langage naturel

- Soit P un prédicat de poids 1 sur l'univers E. Comme ce prédicat associe une proposition P(x) à tout élément x de E, on peut trier les élément de E en deux sous ensembles, ceux pour lesquelles P(x) est vraie et ceux pour qui elle est fausse.



- Donc soit l'application $v : E \longrightarrow \{V , F\}$

  $x \longrightarrow P(x)$

- Ce tri revient à regrouper les éléments de E pour qui v (x) est V et ceux pour qui v (x) = F

7

Chapitre 3: Logique des prédicats

II. Formalisation du langage naturel

Les quantificateurs :

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie est E tout entier » est une proposition ; on la note ∀x P(x)

  ➔ on lit : quelque soit x la proposition P(x) est vrai

  ∀ : quantificateur universel

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie n'est pas vide » est une proposition ; on la note ∃x P(x)

  ➔ on lit : il existe x tel que P(x) est vraie

  ∃ : quantificateur existentiel

8

II. Formalisation du langage naturel

Exemples :

- Soit le prédicat P(n) = { l'entier naturel n est pair }

- $\forall$n P(n) est une proposition fausse car on lit : « tout entier naturel est pair »

- $\exists$n P(n) est une proposition vraie car on lit : « il existe un entier naturel pair »

Exercice d'application:

- Soit les prédicats : H(x) = { x est un homme }
  M(x) = { x est méchant }

Formuler les affirmation suivantes:

- «C'est faux que tout les hommes sont méchants »: $\neg(\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x)))$
- «Seulement les hommes sont méchants » : $\forall x\ (M(x) \rightarrow H(x))$
- « Il existe un homme méchant » : $\exists x\ (H(x) \wedge M(x))$
- « Il n'existe pas d'homme méchant » : $\neg\ (\exists x\ (H(x) \wedge M(x)))$

9

Chapitre 3: Logique des prédicats

II. Formalisation du langage naturel

Remarques :

- Soit P un prédicat dont l'univers est E = { e_1, e_2, e_3,….., e_n}

  - La proposition $\forall$x P(x) est vraie quand les propositions $P(e_1)$, $P(e_2)$,……, $P(e_n)$ sont toutes vraies.

    ➔ $\forall$x P(x) se confond avec la proposition $P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \ldots\ldots \wedge P(e_n)$

  - La proposition $\exists$x P(x) est vraie si l'une au moins des propositions $P(e_1)$, $P(e_2)$,……, $P(e_n)$ est vraie.

    ➔ $\exists$x P(x) se confond avec la proposition $P(e_1) \vee P(e_2) \vee \ldots\ldots \vee P(e_n)$

- Soit P(x,y,z) un prédicat de poids 3

  - Q(x,z) = $\exists$y P(x,y,z) est un prédicat de poids 2
  - R(z) = $\forall$x Q(x,z) = $\forall$x $\exists$y P(x,y,z) est prédicat de poids 1

10

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Alphabet du langage du premier ordre (prédicat)

Le langage du calcul des prédicats est formé de :

--Les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

- Les quantificateurs

$\exists$: quantificateur existentiel (« il existe » : $\exists$x P(x))

$\forall$: quantificateur universel (« pour tout ») : $\forall$x P(x))

- Des constantes logiques : V et F

11

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Formules du langage :

- A est une formule atomique ssi A s'écrit sous la forme P(t_1, t_2,t_3 …. t_n)

avec: P est un symbole de prédicat de poids n (P $\in \mathcal{P}_n$)

t_1, t_2,t_3 …. t_n sont des termes

- Une formule atomique (formule de poid 0) est une formule
- Si A est une formule, alors ($\neg$ A) est une formule.
- Si A et B sont deux formules, A $\wedge$ B, A $\vee$ B, A $\rightarrow$ B et A $\leftrightarrow$ B sont des formules.
- Si A est une formule et x est une variable, alors $\exists$x. A et $\forall$x. A sont des formules.

12

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Termes du langage :

- Les termes sont construits à partir de l'ensemble des variables   et des symboles de fonctions F .
- Tout terme est engendré par l'application des lois suivantes:
  - ➢ Une constante est un terme (qui sera interprétée par un individus fixé)
  - ➢ Les symboles de fonctions ayant chacun un poids ≥ 1 sont des termes. (un nombre d'arguments fixé)
  - ➢ Une variable est un terme (qui varie dans l'ensemble des individus de l'interprétation)
  - ➢ Si f est un symbole fonctionnel d'arité (de poids) n et si t1, t2,t3 …. tn sont n termes, alors f (t1, t2,t3 …. tn) est un terme.

Un terme est dit **clos** s'il ne contient aucune variable

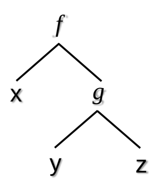
Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Termes du langage : Exemples

f (x, g (y , z)) est un terme si f et g sont des symboles de fonction de poids 2.

Arbre de décomposition :



- f (5, 3) est un terme clos
- f (x, g (y1, y2)) est un terme

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Revenons au deux quantificateurs (existentiel et universel) développer précédemment. Nous rappelons les définitions de chacun:

- $\exists$: « existe au moins un sel »
- $\exists!$: « existe un et un seul »
- $\forall$: « quelque soit, ou pour tout »
- Quantificateurs imbriqués:

Notons que l'ordre des quantificateurs est important. En effet, « tout le monde aime quelqu'un » s'écrirait $\forall x.(\exists y.\ Aime(x,y))$, qui n'a pas exactement le même sens que « il y a quelqu'un qui est aimé par tout le monde » qui s'écrirait $\exists y.(\forall x.\ Aime(x,y))$.

15

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Loi de Morgan entre les quantificateurs:

$$\rceil \forall x.F \equiv \exists x. \rceil F$$

$$\rceil \exists x.F \equiv \forall x. \rceil F$$

$$\forall x.F \equiv \rceil \exists x. \rceil F$$

$$\exists x.F \equiv \rceil \forall x. \rceil F$$

16

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Formules du langage :

Illustration: soit le prédicat Aime (A, B) : « A aime B »

- « Tout le monde déteste les brocolis » revient au même que « Il n'existe personne qui aime les brocolis »:

$\forall x.\ \neg Aime(x,brocolis) \equiv \neg \exists x.\ Aime(x,bricolis)$

-« Tout le monde aime les glaces » et « il n'y a personne qui n'aime pas les glaces » sont équivalentes:

$\forall x.\ Aime(x,glaces) \equiv \neg \exists x. \neg Aime(x,glaces)$

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 1: Formuler en calcul des prédicats les phrases suivantes:

1. les baleines sont des mammifères.
2. les entiers sont pairs ou impairs
3. Il existe un entier pair

Correction:

B (x) : « x est un baleine »

M (x) : « x est un mammifère »

Traduction : $\forall x.\ (B(x) \rightarrow M(x))$

E(x) : « x est un entier»

P(x) : « x est pair»

I(x) : « x est impair»

Traduction : $\forall x\ (E(x) \rightarrow (P(x) \vee I(x)))$

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 2: Exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

1. « Tous les lions sont féroces. »

2. « Quelques femmes ne boivent pas du café »

Correction:

Lion (x) : « x est un lion»

Feroce(x) : « x est un féroce»

Traduction : $\forall x.(Lion(x) \rightarrow Feroce(x))$

Femme (x) : « x est une femme»

Cafe(x) : « x boit du café»

Traduction : $\exists x.(Femme(x) \wedge \neg Cafe(x))$

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 3: Utiliser les 3 prédicats suivants pour exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

Etudiant (x) : « x est un étudiant »; **Assiste (x, y)** : « x assiste au cours y »

Interessant(y) : « y est intéressant »

1. « Certains étudiants assistent à tous les cours »:

$$\exists x.(Etudiant(x) \wedge (\forall y . Assiste(x,y)))$$

2. « Aucun étudiant n'assiste à un cours intéressant »:

$$\forall x.(Etudiant(x) \rightarrow (Assiste(x,y) \wedge \neg Interessant(y)))$$

Dans la seconde formule, on constate que la variable y n'est pas quantifiée: une telle variable est dite **<u>libre</u>**. Une variable quantifiée est dite **<u>liée</u>**.

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables libres:

Soit A une formule. L'ensemble des **variables libres** de A, noté Var(A), est définie comme suit :

- Si A est un atome, de forme P(t_1, t_2,t_3 …. t_n) alors :

  Var(A) = Var(P(t_1, t_2,t_3 …. t_n)) = Var(t_1) U Var(t_2) U…….U Var(t_n)
- Si A= $\neg$ B alors Var(A) = Var($\neg$B) = Var(B)
- Si A=B # C avec # $\in \{ \wedge, \vee, \rightarrow , \leftrightarrow\}$ alors :

  Var(A) = Var(B # C) = Var(B) U Var(C)
- Si A = $\exists$x B ou A = $\forall$x B alors :

  Var(A) = Var($\exists$x B) = Var($\forall$ x B) = Var(B) \ {x}

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables libres:

- Chacune des fois où une variable x apparaît dans une formule A est appelée une occurrence de x dans A.

- Toutes les occurrences des variables d'un terme sont des variables libres de *t*. c.a.d :

  1/ Var(x) = {x}

  2/ Var(c) = { } (c : constante)

  3/ Var(*f* (t_1, t_2,t_3 …. t_n)) = Var(t_1) U Var(t_2) U…….U Var(t_n)

- Une formule de A est dite close si Var(A) = $\varnothing$ (A n'a pas de variable libre)

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables libres: **Exemples :**

- A : $\forall x\ \exists y\ P(f\,(x,y),z)$

$$
\begin{aligned}
Var(A) &= Var(\exists y\ P(f\,(x,y),z)) \setminus \{x\} \\
&= Var(P(f\,(x,y),z) \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= Var(\ (Var(f\,(x,y)) \cup Var(z)) \setminus \{y\}\ ) \setminus \{x\} \\
&= ((\{x,y\} \cup \{z\}) \setminus \{y\}\ ) \setminus \{x\} \\
&= (\{x,y,z\} \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= (\{x,z\}) \setminus \{x\} \\
&= \{z\}
\end{aligned}
$$

Donc A n'est pas close

- B : $\forall x\ P(x)$

$Var(B) = Var(\forall x\ P(x)) = Var(P(x)) \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \varnothing$

Donc B est close

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables libres : **Exemple :**

- A : $(\forall x\ (P(x,y) \rightarrow Q(x))) \quad \wedge \quad (\ \forall y\ \ (\neg\ P(x,y) \wedge (\exists z\ Q(z))\ )\ )$

- $Var(B) = Var(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \setminus \{x\} = \{\ x,y,x\ \} \setminus \{x\} = \{y\}$
- $Var(C) = Var(\neg\ P(x,y) \wedge (\exists z\ Q(z))) \setminus \{\ y\ \}$

  $Var(C) = (Var(\neg\ P(x,y)) \cup Var(Q(z) \setminus \{\ z\ \}\ )) \setminus \{\ y\ \}$

  $Var(C) = (\{\ x,y\ \} \cup (\{\ z\ \} \setminus \{\ z\ \}\ )) \setminus \{y\}$

  $Var(C) = \{\ x,y\ \} \setminus \{y\} = \{\ x\ \}$

- <u>$Var(A) = Var(B) \cup Var(C) = \{\ x,\ y\ \}$</u>

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables liées :

- Soit A une formule. L'ensemble des variables liées de A, noté BVar(A) (B pour bound), est définie comme suit :

- Si A est un atome, BVar(A) = $\varnothing$
- Si A= $\neg$ C alors BVar(A) = BVar($\neg$C) = BVar(C)
- Si A=B # C avec # $\in$ { $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$} alors :

  BVar(A) = BVar(B # C) = BVar(B) U BVar(C)
- Si A = $\exists$x B ou A = $\forall$x B alors :

  BVar(A) = BVar($\exists$x B) = BVar($\forall$ x B) = BVar(B) U {x}

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables liées : **Exemple :**

- A : ($\forall$x (P(x,y) $\rightarrow$ Q(x))) $\wedge$ ($\forall$y ($\neg$ P(x,y) $\wedge$ ($\exists$z Q(z))))

- BVar(B) = BVar(P(x,y) $\rightarrow$ Q(x)) U {x}

  = (BVar(P(x,y)) U BVar(Q(x))) U { x }

  = ($\varnothing$ U $\varnothing$) U { x } = { x }
- BVar(C) = BVar($\neg$ P(x,y) $\wedge$ ($\exists$z Q(z))) U { y }

  BVar(C) = (BVar($\neg$ P(x,y)) U (BVar(Q(z)) U { z })) U { y }

  BVar(C) = ($\varnothing$ U ($\varnothing$ U { z })) U {y} = { z } U {y} = { z,y }

- <u>BVar(A) = BVar(B) U BVar(C) = { x, y ,z}</u>

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables liées : **Exemple :**

- A : $(\forall x\ (P(x,y) \rightarrow Q(x)))\quad \wedge \quad (\ \forall y\ \ (\neg\ P(x,y) \wedge (\exists z\ Q(z))\ )\ )$

➢ $BVar(B) = BVar(P(x,y) \rightarrow Q(x))\ U\ \{x\}$

$= (BVar(P(x,y))\ U\ BVar(Q(x)))\ U\ \{\ x\ \}$

$= (\ \varnothing\ U\ \varnothing\ )\ U\ \{\ x\ \} = \{\ x\ \}$

➢ $BVar(C) = BVar(\neg\ P(x,y) \wedge (\exists z\ Q(z)))\ U\ \{\ y\ \}$

$BVar(C) = (BVar(\neg\ P(x,y))\ U\ (\ BVar(Q(z))\ U\ \{\ z\ \}\ )\ )\ U\ \{\ y\ \}$

$BVar(C) = (\ \varnothing\ U\ (\ \varnothing\ U\ \{\ z\ \}\ )\ )\ U\ \{y\} = \{\ z\ \}\ U\ \{y\} = \{\ z,y\ \}$

➢ $\underline{BVar(A) = BVar(B)\ U\ BVar(C) = \{\ x,\ y\ ,z\}}$

27

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Exercice d'application :

Donner les variables libres et liées pour chacune des formules suivantes:

1/ $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x,y))$

2/ $(\ \exists y\ Q(x,y)) \rightarrow \forall x\ P(x)$

3/ $\exists x\ (\neg(\exists y\ P(x,y)) \rightarrow (\exists z\ Q(z) \rightarrow R(x)))$

4) $(\exists x\ (\neg(\exists y\ P(x,y))\ ) \quad \rightarrow (\exists z\ Q(z) \rightarrow R(x))$

5/ $((\forall x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y)) \rightarrow \exists z\ R(z)) \rightarrow \exists u\ S(u)$

28