Cours: Logique Formelle

Chapitre 2: Logique Propositionnelle
(Partie 3)

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

III. Sémantique propositionnelle

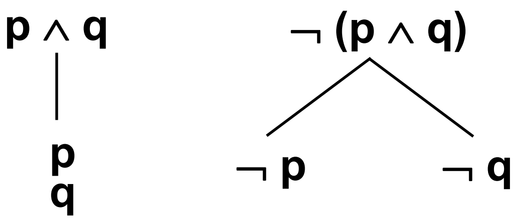
2) Formes normales disjonctives

➢ *Méthode des arbres*

- **Conjonction et sa négation**

❖ $p \wedge q$

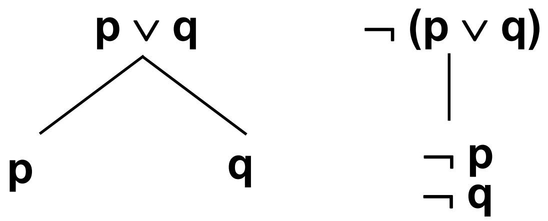
❖ $\neg (p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$



- **Disjonction et sa négation**

❖ $p \vee q$

❖ $\neg (p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$



III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

➢ *Méthode des arbres*

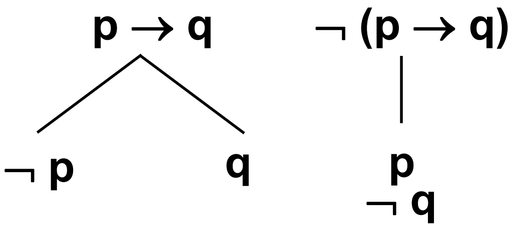
- **Implication et sa négation**

❖ $p \rightarrow q$

❖ $\neg (p \rightarrow q) = \neg((\neg p) \vee q)$

$= (\neg\neg p) \wedge (\neg q)$

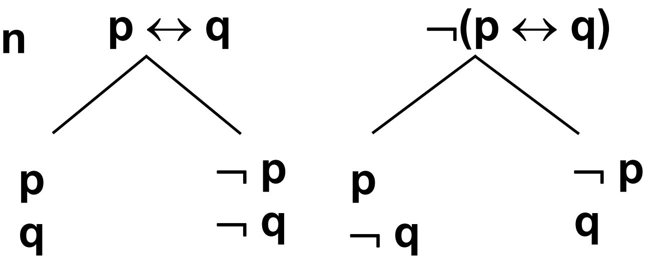
$= (p) \wedge (\neg q)$



- **Équivalence et sa négation**

❖ $p \leftrightarrow q$

❖ $\neg (p \leftrightarrow q) = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$



III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

➢ *Méthode des arbres*

- **Récapitulatif des règles**

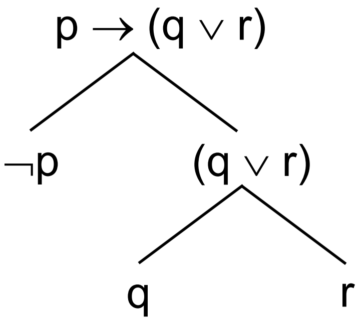
Conjonction	Disjonction	Implication	Equivalence
$p \wedge q$ p q	$p \vee q$ p q	$p \rightarrow q$ $\neg p$ q	$p \leftrightarrow q$ p $\neg p$ q $\neg q$
NON Conjonction	**NON Disjonction**	**NON Implication**	**NON Equivalence**
$\neg(p \wedge q)$ $\neg p$ $\neg q$	$\neg(p \vee q)$ $\neg p$ $\neg q$	$\neg(p \rightarrow q)$ p $\neg q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$ p $\neg p$ $\neg q$ q

III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

➢ *Méthode des arbres*

- **Exemple 1 :** En utilisant **la méthode des arbres** déterminer une formule en forme normale disjonctive équivalente à $p \to (q \lor r)$;



RQ: L'arbre est fini quand on ne trouve plus aux extrémités inférieures des branches que des formules atomiques ou des négations de formules atomiques.

$\neg p \lor q \lor r$: **forme normale disjonctive**

$p \to (q \lor r)$ est vrai soit quand: $\neg p$ est vrai ou quand q est vrai ou quand r est vrai.

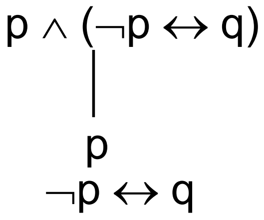
III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

➢ *Méthode des arbres*

- **Exemple 2:** En utilisant **la méthode des arbres** déterminer une formule en FND équivalente à $p \land (\neg p \leftrightarrow q)$;

Étape 2: Cet énoncé est vrai si et seulement si p est vrai **et** $(\neg p \leftrightarrow q)$ est vrai.



III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

Méthode des arbres

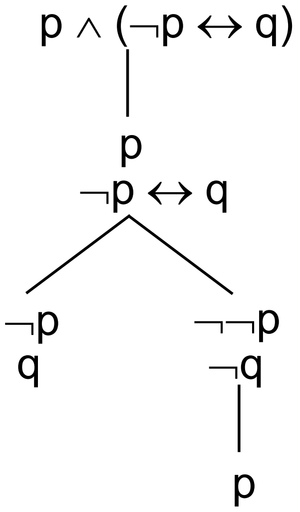
Étape 2: $(\neg p \leftrightarrow q)$ est vrai si et seulement si

$\neg p$ est vrai **et** q est vrai **ou**

$\neg p$ est faux **et** q est faux.

Remarque: $\neg$ p est faux et q est faux si et seulement si $\neg\neg p$ est vrai et $\neg q$ est vrai

Étape 3: $\neg\neg p$ est vrai si et seulement si p est vrai.



III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

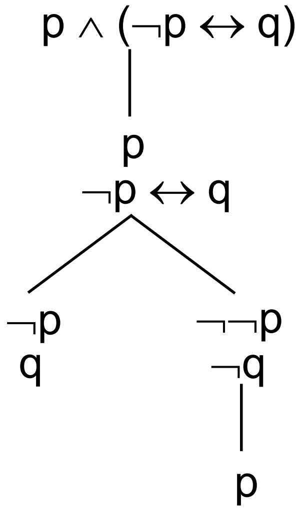
Méthode des arbres

Quand on regarde cet arbre-là, on peut le lire comme étant la disjonction de deux conjonctions : $(p \wedge \neg p \wedge q)$ avec

$(p \wedge \neg q \wedge p)$

Conclusion 1: $(p \wedge \neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

est une FND équivalente à $p \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$



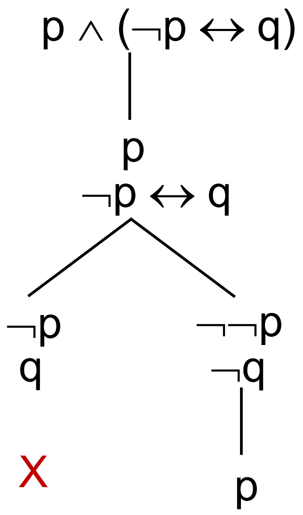
III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

➢ *Méthode des arbres*

Quand il y a une **contradiction** sur une branche **(p ∧ ¬p ∧ q)** on marque une 'X' au bout de la branche et on dit aussi que cette **branche est fermée**.

Conclusion 2: p ∧ ¬q est une FND équivalente à p ∧ (¬p ↔ q)

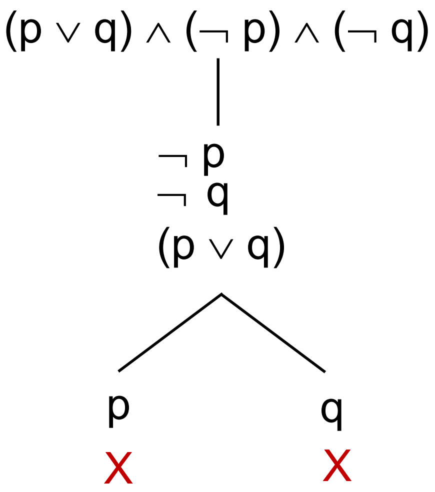


III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

➢ *Méthode des arbres*

Remarque: Si un énoncé est une contradiction, alors toutes ces branches seront fermées.



III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

- **Exercice 1:** en utilisant les **la méthode des arbres**, déterminer une formule en FND équivalente à $p \rightarrow (q \wedge r)$

- **Conclusion:**

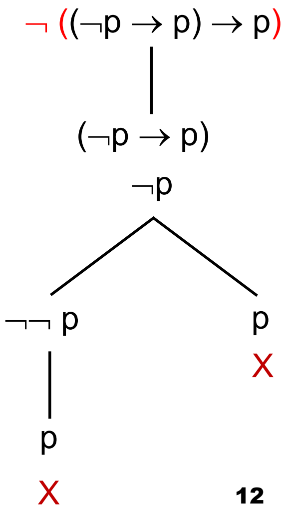
III. Sémantique propositionnelle

3) Méthode des arbres et tautologie

Remarque: Un énoncé est une **tautologie** quand sa négation est une **contradiction**

Exemple : montrer que $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$

est une tautologie ?



Conclusion : La négation de cet énoncé est bien **une contradiction** car toutes les branches sont fermées. Donc :

$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ est une **tautologie**.

III. Sémantique propositionnelle

3) Méthode des arbres et tautologie

Exercice : Utiliser la méthode des arbres pour montrer que les formules suivantes sont ou non des tautologies ?

1/ $(p\land q) \to p$
2/ $(p \lor q) \to (p \land q)$
3/ $(p \land q) \to (p \lor q)$
4/ $p \to (p \lor q)$
5/ $p \to ((\neg p) \to p)$
6/ $p \to (p \to q)$
7/ $p \to (q \to p)$
8/ $(p \to (\neg p)) \to (\neg p)$
9/ $p \to (p \to p)$
10/ $(p \lor q) \leftrightarrow ((p \to q) \to q)$
11/ $(p \land (\neg q)) \lor (p \land q)$
12/$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

III. Sémantique propositionnelle

4) Méthode des arbres et validité des arguments

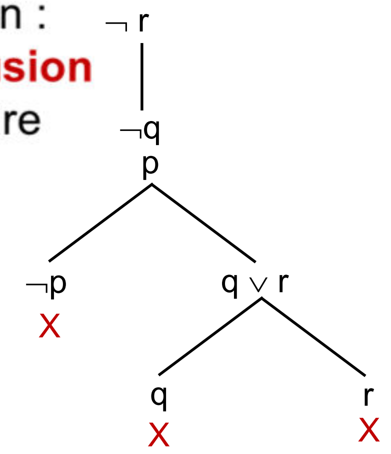
Remarque: Les arbres nous permettent de **tester la validité des arguments**.

Exemple 1: $p \to (q \lor r)$, $\neg q \land p \models r$

Pour savoir si cet argument est valide ou non :

Étape 1: On écrit **la négation de la conclusion de l'argument et les prémisses** dans l'ordre comme suit :

1/ $\neg r$
2/ $\neg q \land p$
3/ $p \to (q \lor r)$



Étape 2: On vérifier si toutes les branches de l'arbre sont fermées ou non.

Conclusion : l'argument est valide.

III. Sémantique propositionnelle

4) Méthode des arbres et validité des arguments

Remarque: Les arbres nous permettent de **tester la validité des arguments**.

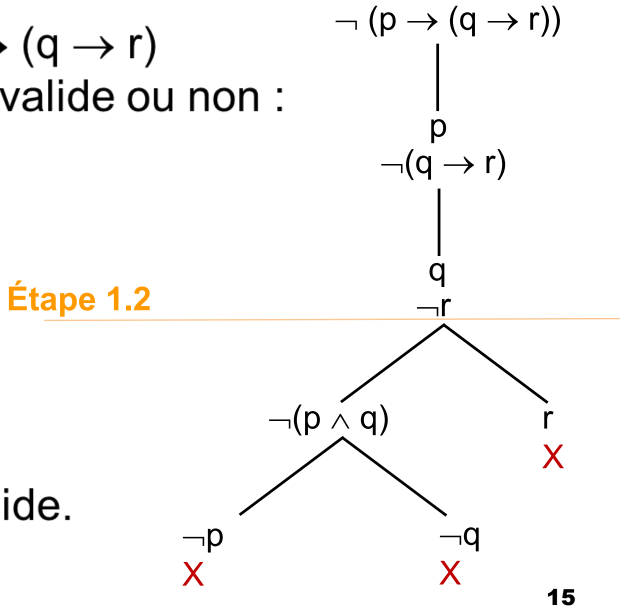
Exemple 1: $(p \wedge q) \rightarrow r \vDash \quad p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Pour savoir si cet argument est valide ou non :

Étape 1:

1/ $\neg (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

2/ $(p \wedge q) \rightarrow r$



Étape 2:

Toutes les branches de l'arbre sont fermées.

Conclusion : l'argument est valide.

III. Sémantique propositionnelle

4) Méthode des arbres et validité des arguments

Remarque: Les arbres nous permettent de **tester la validité des arguments**.

Exemple 1: $(p \rightarrow q) , (q \rightarrow r) \vDash \quad p \rightarrow r$

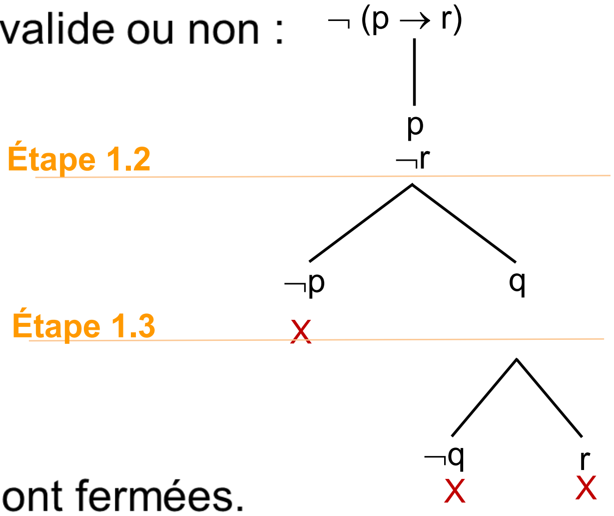
Pour savoir si cet argument est valide ou non :

Étape 1:

1/ $\neg (p \rightarrow r)$

2/ $p \rightarrow q$

3/ $q \rightarrow r$



Étape 2:

Toutes les branches de l'arbre sont fermées.

Conclusion : l'argument est valide.

III. Sémantique propositionnelle

4) Méthode des arbres et validité des arguments

Exercice : Dans chacun des cas suivants déterminer, par la méthode des arbres, si les arguments sont valides.

1/ $p \rightarrow q,\ p \rightarrow \neg q \vdash (\neg p)$

2/ $p \leftrightarrow (q \vee r) \vdash ((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$

3/ $p \rightarrow r,\ q \rightarrow r \vdash (p \rightarrow q)$

4/ $p \rightarrow (q \rightarrow r) ,\ r \vee (\neg q) \vdash (\neg p)$

5/ $p \rightarrow (q \rightarrow r) ,\ q \rightarrow (r \rightarrow p) \vdash (p \rightarrow r)$