

# Cours: Logique Formelle

## Chapitre 3: Logique des prédicats Partie 1/3:

Réalisé par:

Dr. Sakka Rouis Taoufik

1

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### I. Introduction

- La logique propositionnelle qui nous a permis de mettre au point une première théorie de raisonnement mais elle ne permet pas de formuler tous les raisonnements .
- Il faut aller alors plus loin que le simple calcul des propositions.
- Nous n'allons plus contenter de simples propositions, mais nous allons introduire un nouveau type de formules logique: appelé le prédicat.

#### Exemples :

- {n est un entier naturel pair} n'est pas une proposition
- par contre {5 est un entier naturel pair} est une proposition fausse.
- ➔ À Chaque fois qu'on remplace n par un entier particulier on obtient une proposition
- {n est un entier naturel pair} est un prédicat.

2

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### I. Introduction

#### Définitions :

- un prédicat est une formule logique qui dépend **d'une variable libre**.
- un prédicat c'est une affirmation **qui porte sur des symboles** représentant **des éléments variables d'un ensemble fixe**.
- Puisqu'un prédicat dépend d'une variable  $x$ , nous les noterons souvent  $P(x)$ ;
- C'est une application qui associe une proposition  $P(x)$  à chaque élément d'un ensemble  $E$ , cette ensemble s'appelle **l'univers** du prédicat
- Dans le cas de l'exemple précédent  $E = \mathbb{N}$

3

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### I. Introduction

#### Objectif:

- La logique des prédicats a pour but de généraliser la logique des propositions. On peut considérer un prédicat comme un énoncé général où apparaissent des variables. Par exemple:

(1) «  $X$  est la sœur de  $Y$  »

(2) « si  $X$  est le père de  $Y$  et  $Y$  le père de  $Z$  alors  $X$  est le grand père de  $Z$  »

Si l'on remplace toutes les variables d'un prédicat par des valeurs définies on obtient une proposition à la quelle on pourra associer une interprétation (vrais, faux), Par exemple

$X = \text{Rim}$  et  $Y = \text{Ali}$  dans (1) donne « Rim est la sœur de Ali »

Un prédicat représente donc potentiellement une classe de propositions.

4

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### I. Introduction

- Le nombre des variables d'un prédicat s'appelle **poids** du prédicat.
- Exemple :  $p(a,b) = \{ \text{le couple d'entiers naturels } (a,b) \text{ tel que } a+b=10 \}$ 
  - si l'univers du prédicat est  $\mathbb{N}^2$  alors son poids est égal à 2
  - si l'univers du prédicat est  $\mathbb{N}$  alors son poids est égal à 1
- Dans un prédicat de poids  $n$ , si l'on affecte une valeur à l'une des variables, on obtient un prédicat de poids  $n-1$ .
- Par conséquent, un prédicat de poids 0 est une proposition.
- Les prédicats qui portent sur **le même univers** peuvent être combinés entre eux à l'aide des connecteurs  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  pour former de nouveau prédicat.

5

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### I. Introduction

#### Définitions :

- Le prédicat  $\neg p(x)$  associe à  $x$  la négation du prédicat  $p(x)$
- Le prédicat  $p \wedge q(x)$  associe à  $x$  la conjonction des prédicats  $p(x)$  et  $q(x)$   
on notera aussi  $(p \wedge q)(x)$
- Le prédicat  $p \vee q(x)$  associe à  $x$  la disjonction des prédicats  $p(x)$  et  $q(x)$   
on notera aussi  $(p \vee q)(x)$
- Exemple : même univers  $\mathbb{N}$ 
  - $p(n) = \{ \text{l'entier naturel } n \text{ est pair} \}$ ;  $q(m) = \{ \text{l'entier naturel } m \text{ est divisible par 5} \}$ 
    - $\neg p(n) = \{ \text{l'entier naturel } n \text{ est impair} \}$
    - $p \wedge q(n) = \{ \text{l'entier naturel } n \text{ est pair, et il est divisible par 5} \}$  (poids 1)
    - $p \vee q(n) = \{ \text{l'entier naturel } n \text{ est pair, ou il est divisible par 5} \}$  (poids 1)

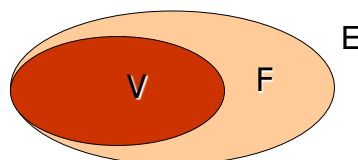
**Attention** : si l'univers est  $\mathbb{N}^2$  (poids 2), il ne faut pas confondre  $p \wedge q(n)$  avec  $S(n,m) = \{ \text{l'entier naturel } n \text{ est pair et l'entier naturel } m \text{ est divisible par 5} \}$

6

### Chapitre 3: Logique des prédicats

## II. Formalisation du langage naturel

- Soit  $P$  un prédicat de poids 1 sur l'univers  $E$ . Comme ce prédicat associe une proposition  $P(x)$  à tout élément  $x$  de  $E$ , on peut trier les éléments de  $E$  en deux sous-ensembles, ceux pour lesquels  $P(x)$  est vraie et ceux pour qui elle est fausse.



- Donc soit l'application
 
$$\begin{array}{ccc} v : E & \longrightarrow & \{V, F\} \\ x & \longrightarrow & P(x) \end{array}$$
- Ce tri revient à regrouper les éléments de  $E$  pour qui  $v(x)$  est  $V$  et ceux pour qui  $v(x) = F$

7

### Chapitre 3: Logique des prédicats

## II. Formalisation du langage naturel

### Les quantificateurs :

- L'affirmation « l'ensemble des  $x$  pour lesquels  $P(x)$  est vraie est  $E$  tout entier » est une proposition ; on la note  $\forall x P(x)$ 
  - ➔ on lit : quelque soit  $x$  la proposition  $P(x)$  est vraie
  - $\forall$  : quantificateur universel
- L'affirmation « l'ensemble des  $x$  pour lesquels  $P(x)$  est vraie n'est pas vide » est une proposition ; on la note  $\exists x P(x)$ 
  - ➔ on lit : il existe  $x$  tel que  $P(x)$  est vraie
  - $\exists$  : quantificateur existentiel

8

### Chapitre 3: Logique des prédicats

## II. Formalisation du langage naturel

### Exemples :

- Soit le prédicat  $P(n) = \{ \text{l'entier naturel } n \text{ est pair} \}$
- $\forall n P(n)$  est une proposition fausse car on lit : « tout entier naturel est pair »
- $\exists n P(n)$  est une proposition vraie car on lit : « il existe un entier naturel pair »

### Exercice d'application:

- Soit les prédicats :  $H(x) = \{ x \text{ est un homme} \}$   
 $M(x) = \{ x \text{ est méchant} \}$

Formuler les affirmations suivantes:

- « C'est faux que tous les hommes sont méchants » :  $\neg(\forall x (H(x) \rightarrow M(x)))$
- « Seulement les hommes sont méchants » :  $\forall x (M(x) \rightarrow H(x))$
- « Il existe un homme méchant » :  $\exists x (H(x) \wedge M(x))$
- « Il n'existe pas d'homme méchant » :  $\neg(\exists x (H(x) \wedge M(x)))$

9

### Chapitre 3: Logique des prédicats

## II. Formalisation du langage naturel

### Remarques :

- Soit  $P$  un prédicat dont l'univers est  $E = \{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \}$ 
  - La proposition  $\forall x P(x)$  est vraie quand les propositions  $P(e_1)$ ,  $P(e_2), \dots, P(e_n)$  sont toutes vraies.
    - ➔  $\forall x P(x)$  se confond avec la proposition  $P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \dots \wedge P(e_n)$
  - La proposition  $\exists x P(x)$  est vraie si l'une au moins des propositions  $P(e_1)$ ,  $P(e_2), \dots, P(e_n)$  est vraie.
    - ➔  $\exists x P(x)$  se confond avec la proposition  $P(e_1) \vee P(e_2) \vee \dots \vee P(e_n)$
- Soit  $P(x,y,z)$  un prédicat de poids 3
  - $Q(x,z) = \exists y P(x,y,z)$  est un prédicat de poids 2
  - $R(z) = \forall x Q(x,z) = \forall x \exists y P(x,y,z)$  est un prédicat de poids 1

10

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### III. Syntaxe du calcul des prédicats

#### *Alphabet du langage du premier ordre (prédicat)*

Le langage du calcul des prédicats est formé de :

- Les connecteurs  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  et  $\leftrightarrow$
- Les quantificateurs
  - $\exists$  : quantificateur existentiel (« il existe » :  $\exists x \ P(x)$  )
  - $\forall$  : quantificateur universel (« pour tout ») :  $\forall x \ P(x)$  )
- Des constantes logiques : V et F

11

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### III. Syntaxe du calcul des prédicats

#### *Formules du langage :*

- A est une formule atomique ssi A s'écrit sous la forme  $P(t_1, t_2, t_3 \dots t_n)$  avec: P est un symbole de prédicat de poids n ( $P \in \mathcal{P}_n$ )  
 $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$  sont des termes
- Une formule atomique (formule de poids 0) est une formule
- Si A est une formule, alors  $(\neg A)$  est une formule.
- Si A et B sont deux formules,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \rightarrow B$  et  $A \leftrightarrow B$  sont des formules.
- Si A est une formule et x est une variable, alors  $\exists x. A$  et  $\forall x. A$  sont des formules.

12

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### III. Syntaxe du calcul des prédicats

#### Termes du langage :

- Les termes sont construits à partir de l'ensemble des variables et des symboles de fonctions  $F$ .
- Tout terme est engendré par l'application des lois suivantes:
  - Une constante est un terme (qui sera interprétée par un individus fixé)
  - Les symboles de fonctions ayant chacun un poids  $\geq 1$  sont des termes. (un nombre d'arguments fixé)
  - Une variable est un terme (qui varie dans l'ensemble des individus de l'interprétation)
  - Si  $f$  est un symbole fonctionnel d'arité (de poids)  $n$  et si  $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$  sont  $n$  termes, alors  $f(t_1, t_2, t_3 \dots t_n)$  est un terme.

Un terme est dit **clos** s'il ne contient aucune variable

13

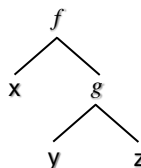
## Chapitre 3: Logique des prédicats

### III. Syntaxe du calcul des prédicats

#### Termes du langage : Exemples

$f(x, g(y, z))$  est un terme si  $f$  et  $g$  sont des symboles de fonction de poids 2.

Arbre de décomposition :



- $f(5, 3)$  est un terme clos
- $f(x, g(y_1, y_2))$  est un terme

14

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### III. Syntaxe du calcul des prédicats

#### Utilisation des quantificateurs :

Revenons au deux quantificateurs (existentiel et universel) développer précédemment. Nous rappelons les définitions de chacun:

- $\exists$ : « existe au moins un sel »
- $\exists!$ : « existe un et un seul »
- $\forall$ : « quelque soit, ou pour tout »
- Quantificateurs imbriqués:

Notons que l'ordre des quantificateurs est important. En effet, « tout le monde aime quelqu'un » s'écrirait  $\forall x.(\exists y. \text{Aime}(x,y))$ , qui n'a pas exactement le même sens que « il y a quelqu'un qui est aimé par tout le monde » qui s'écrirait  $\exists y.(\forall x. \text{Aime}(x,y))$ .

15

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### III. Syntaxe du calcul des prédicats

#### Utilisation des quantificateurs :

Loi de Morgan entre les quantificateurs:

$$\neg \forall x. F \equiv \exists x. \neg F$$

$$\neg \exists x. F \equiv \forall x. \neg F$$

$$\forall x. F \equiv \neg \exists x. \neg F$$

$$\exists x. F \equiv \neg \forall x. \neg F$$

16



### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### Formules du langage :

Illustration: soit le prédicat Aime (A, B) : « A aime B »

- « Tout le monde déteste les brocolis » revient au même que « Il n'existe personne qui aime les brocolis »:

$$\forall x. \neg \text{Aime}(x, \text{brocolis}) \equiv \neg \exists x. \text{Aime}(x, \text{brocolis})$$

- « Tout le monde aime les glaces » et « il n'y a personne qui n'aime pas les glaces » sont équivalentes:

$$\forall x. \text{Aime}(x, \text{glaces}) \equiv \neg \exists x. \neg \text{Aime}(x, \text{glaces})$$

17

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### Utilisation des quantificateurs :

**Exercice 1:** Formuler en calcul des prédicats les phrases suivantes:

1. les baleines sont des mammifères.
2. les entiers sont pairs ou impairs
3. Il existe un entier pair

**Correction:**

B (x) : « x est une baleine »

M (x) : « x est un mammifère »

**Traduction :**  $\forall x. (B(x) \rightarrow M(x))$

E(x) : « x est un entier »

P(x) : « x est pair »

I(x) : « x est impair »

**Traduction :**  $\forall x (E(x) \rightarrow (P(x) \vee I(x)))$

18

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### Utilisation des quantificateurs :

**Exercice 2:** Exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

- « Tous les lions sont féroces. »
- « Quelques femmes ne boivent pas du café »

**Correction:**

Lion (x) : « x est un lion »

Femme (x) : « x est une femme »

Feroce(x) : « x est un féroce »

Cafe(x) : « x boit du café »

Traduction :  $\forall x.(\text{Lion}(x) \rightarrow \text{Feroce}(x))$

Traduction :  $\exists x.(\text{Femme}(x) \wedge \neg \text{Cafe}(x))$

19

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### Utilisation des quantificateurs :

**Exercice 3:** Utiliser les 3 prédicats suivants pour exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

**Etudiant (x)** : « x est un étudiant »; **Assiste (x, y)** : « x assiste au cours y »

**Interessant(y)** : « y est intéressant »

- « Certains étudiants assistent à tous les cours »:

$$\exists x.(\text{Etudiant}(x) \wedge (\forall y. \text{Assiste}(x, y)))$$

- « Aucun étudiant n'assiste à un cours intéressant »:

$$\forall x.(\text{Etudiant}(x) \rightarrow (\text{Assiste}(x, y) \wedge \neg \text{Interessant}(y)))$$

Dans la seconde formule, on constate que la variable y n'est pas quantifiée: une telle variable est dite libre. Une variable quantifiée est dite liée.

20

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### III. Syntaxe du calcul des prédicats

#### *Variables libres:*

Soit A une formule. L'ensemble des **variables libres** de A, noté  $\text{Var}(A)$ , est définie comme suit :

➤ Si A est un atome, de forme  $P(t_1, t_2, t_3 \dots t_n)$  alors :

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(P(t_1, t_2, t_3 \dots t_n)) = \text{Var}(t_1) \cup \text{Var}(t_2) \cup \dots \cup \text{Var}(t_n)$$

➤ Si  $A = \neg B$  alors  $\text{Var}(A) = \text{Var}(\neg B) = \text{Var}(B)$

➤ Si  $A = B \# C$  avec  $\# \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$  alors :

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(B \# C) = \text{Var}(B) \cup \text{Var}(C)$$

➤ Si  $A = \exists x B$  ou  $A = \forall x B$  alors :

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(\exists x B) = \text{Var}(\forall x B) = \text{Var}(B) \setminus \{x\}$$

21

## Chapitre 3: Logique des prédicats

### III. Syntaxe du calcul des prédicats

#### *Variables libres:*

- Chacune des fois où une variable x apparaît dans une formule A est appelée une occurrence de x dans A.

- Toutes les occurrences des variables d'un terme sont des variables libres de t. c.a.d :

$$1/ \text{Var}(x) = \{x\}$$

$$2/ \text{Var}(c) = \{ \} \text{ ( c : constante)}$$

$$3/ \text{Var}(f(t_1, t_2, t_3 \dots t_n)) = \text{Var}(t_1) \cup \text{Var}(t_2) \cup \dots \cup \text{Var}(t_n)$$

- Une formule de A est dite close si  $\text{Var}(A) = \emptyset$  (A n'a pas de variable libre)

22

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### **Variables libres: Exemples :**

- A :  $\forall x \exists y P(f(x,y),z)$

$$\begin{aligned} \text{Var}(A) &= \text{Var}(\exists y P(f(x,y),z)) \setminus \{x\} \\ &= \text{Var}(P(f(x,y),z) \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\ &= \text{Var}((\text{Var}(f(x,y)) \cup \text{Var}(z)) \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\ &= ((\{x,y\} \cup \{z\}) \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\ &= (\{x,y,z\} \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\ &= (\{x,z\}) \setminus \{x\} \\ &= \{z\} \quad \text{Donc A n'est pas close} \end{aligned}$$

- B :  $\forall x P(x)$

$$\text{Var}(B) = \text{Var}(\forall x P(x)) = \text{Var}(P(x)) \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$$

Donc B est close

23

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### **Variables libres : Exemple :**

- A :  $(\forall x (P(x,y) \rightarrow Q(x))) \wedge (\forall y (\neg P(x,y) \wedge (\exists z Q(z)) \wedge (\exists z Q(z))))$

➤  $\text{Var}(B) = \text{Var}(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \setminus \{x\} =$

$$(\{x,y\} \cup \{x\}) \setminus \{x\} = \{y\}$$

➤  $\text{Var}(C) = \text{Var}(\neg P(x,y) \wedge (\exists z Q(z))) \setminus \{y\}$

$$\text{Var}(C) = (\text{Var}(\neg P(x,y)) \cup \text{Var}(Q(z) \setminus \{z\})) \setminus \{y\}$$

$$\text{Var}(C) = (\{x,y\} \cup (\{z\} \setminus \{z\})) \setminus \{y\}$$

$$\text{Var}(C) = \{x,y\} \setminus \{y\} = \{x\}$$

➤  $\text{Var}(A) = \text{Var}(B) \cup \text{Var}(C) = \{x, y\}$

24

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### Variables liées :

- Soit A une formule. L'ensemble des variables liées de A, noté  $BVar(A)$  (B pour bound), est définie comme suit :
- Si A est un atome,  $BVar(A) = \emptyset$
- Si  $A = \neg C$  alors  $BVar(A) = BVar(\neg C) = BVar(C)$
- Si  $A = B \# C$  avec  $\# \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$  alors :  

$$BVar(A) = BVar(B \# C) = BVar(B) \cup BVar(C)$$
- Si  $A = \exists x B$  ou  $A = \forall x B$  alors :  

$$BVar(A) = BVar(\exists x B) = BVar(\forall x B) = BVar(B) \cup \{x\}$$

25

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### Variables liées : Exemple :

- $A : (\forall x (P(x,y) \rightarrow Q(x))) \wedge (\forall y (\neg P(x,y) \wedge (\exists z Q(z)) ) )$
- $$\begin{aligned} BVar(B) &= BVar(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \cup \{x\} \\ &= (BVar(P(x,y)) \cup BVar(Q(x))) \cup \{x\} \\ &= (\emptyset \cup \emptyset) \cup \{x\} = \{x\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} BVar(C) &= BVar(\neg P(x,y) \wedge (\exists z Q(z))) \cup \{y\} \\ BVar(C) &= (BVar(\neg P(x,y)) \cup (BVar(Q(z)) \cup \{z\})) \cup \{y\} \\ BVar(C) &= (\emptyset \cup (\emptyset \cup \{z\})) \cup \{y\} = \{z\} \cup \{y\} = \{z, y\} \end{aligned}$$
- $$BVar(A) = BVar(B) \cup BVar(C) = \{x, y, z\}$$

26

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### **Variables liées :** Exemple :

$$- A : (\forall x (P(x,y) \rightarrow Q(x))) \wedge (\forall y (\neg P(x,y) \wedge (\exists z Q(z)) ))$$

$$\text{➤ } BVar(B) = BVar(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \cup \{x\}$$

$$= (BVar(P(x,y)) \cup BVar(Q(x))) \cup \{x\}$$

$$= (\emptyset \cup \emptyset) \cup \{x\} = \{x\}$$

$$\text{➤ } BVar(C) = BVar(\neg P(x,y) \wedge (\exists z Q(z))) \cup \{y\}$$

$$BVar(C) = (BVar(\neg P(x,y)) \cup (BVar(Q(z)) \cup \{z\})) \cup \{y\}$$

$$BVar(C) = (\emptyset \cup (\emptyset \cup \{z\})) \cup \{y\} = \{z\} \cup \{y\} = \{z,y\}$$

$$\text{➤ } BVar(A) = BVar(B) \cup BVar(C) = \{x, y, z\}$$

27

### Chapitre 3: Logique des prédicats

#### III. Syntaxe du calcul des prédicats

##### **Exercice d'application :**

Donner les variables libres et liées pour chacune des formules suivantes:

$$1/ \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y))$$

$$2/ (\exists y Q(x,y)) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$3/ \exists x (\neg(\exists y P(x,y)) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$$

$$4/ (\exists x (\neg(\exists y P(x,y))) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$$

$$5/ ((\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \rightarrow \exists z R(z)) \rightarrow \exists u S(u)$$

28