Cours: Logique Formelle

Chapitre 3: Logique des prédicats
Partie 2/3

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

I. Règles d'inférences:

Une règle d'inférence est la représentation d'un procédé qu'à partir d'une ou plusieurs formules dériver d'autres formules.

Exemple:

1. La règle d'inférence appelée Modus Ponens, à partir de deux formules respectivement de la forme G et (G→H), dérivé la formule H.
2. La règle d'inférence spécialisation universelle, à partir d'une formule de la forme (∀X).G(X) et de n'importe quelle constante, soit : « a », dérive la formule G(a): toutes les occurrences de X dans G sont remplacées par « a ».
3. La règles d'inférence appelée Modus Tollens, à partir de deux formules respectivement de la forme (┐H) et (G→H), dérive la formule (┐G).

Les formules choisies initialement sont appelées **axiomes**. Les formules obtenus par application des règles d'inférences sont appelées **théorèmes**.

Une chaîne d'application de règles d'inférence conduisant, depuis les axiomes, à un théorème, constitue une preuve de théorème.

II. Définition d'une Interprétation :

- Une interprétation I est la donnée :
  - d'un univers non vide D éventuellement infini
  - d'une évaluation dans D de chaque variable
  - d'un ensemble P de prédicats.

- La valeur de la formule A sous l'interprétation I est notée : $[A]_I$

II. Définition d'une Interprétation :

- **Exemples:** Soient les formules suivantes:

G1: (∀x) P(X) et G2: (∀x) (∃Y) Q(X,Y)

Soit une interprétation de I1 de G1:

I1: D1 ={1,2}
PI1={2}
où
I1[(P(1)]=F
I1[(P(2)]=V

Donc on peut conclure que:
$[G1]_{I1}$ =F
Car c'est faux que ∀X dans D1 on a P(X)=V

Soit une interprétation de I2 de G2:

I2: D2={1,3}; QI2={(1,3), (3,3)}
I2[Q(1,1)]=F
I2[Q(1,3)]=V
I2[Q(3,1)]=F
I2[Q(3,3)]=V

Donc on peut conclure que:
$[G2]_{I2}$ =V
Car ∀X dans D2, on peut trouver un Y dans D tq Q(X,Y) =V

Chapitre 3: Logique des prédicats

II. Définition d'une Interprétation :

Exemple : $A : \forall x\ (P(x) \to (Q(f(x), a))$

soit l'interprétation I1 définie comme suite:

$D_{I1} = \{1,2\}$

$a_{I1} = 1$ (l'interprétation de la constante a dans I1 est égale 1)

$P_{I1}=\{2\}$ (sig seulement P(2)= V)

$Q_{I1}=\{(1,1),(1,2)\}$

(sig seulement Q(1,1)= vrai et Q(1,2)= vrai)

$f_{I1} : 1 \to 2$

$2 \to 1$

$[A]_{I1\ (x=1)} = P_{I1}(1) \to Q_I(2,1) = F \to F = V$

$[A]_{I1\ (x=2)} = P_{I1}(2) \to Q_I(1,1) = V \to V = V$

Donc pour x = 1 et x = 2, la formule est vraie, **donc $[A]_{I1}$ = V**

5

Chapitre 3: Logique des prédicats

II. Définition d'une Interprétation :

Exemple : $A : \forall x\ (P(x) \to (Q(f(x), a))$

$D_{I2} = \{1,2,3\}$

$I2 : a_{I2} = 1$

$P_{I2}=\{2\}$ (sig seulement P(2)= V)

$Q_{I2}=\{(1,1),(1,2), (1,3)\}$

(sig seulement Q(1,1)= vrai, Q(1,2)= vrai et Q(1,3)= vrai)

$f_{I2} : 1 \to 2$

$2 \to 1$

$3 \to 1$

$[A]_{I2\ (x=1)} = P_I(1) \to Q_I(2,1) = F \to F = V$

$[A]_{I2\ (x=2)} = P_I(2) \to Q_I(1,1) = V \to V = V$

$[A]_{I2\ (x=3)} = P_I(3) \to Q_I(1,1) = F \to V = V$

Donc pour x = 1, x = 2 et x=3, la formule est toujours vraie, **donc $[A]_{I2}$ = V**

6

II. Définition d'une Interprétation :

Exercice: Soit l'interprétation suivante du calcul des prédicats :
- Constantes : *a* : Adel ; *b* : Basma; *c* : Chahira
- Prédicat : P(x,y) = {<a, b>, <a, c>, <b, c>, <c, c>, <c, a>}

Nous dirons que la relation « P(x,y) = *x* voit *y* ».

1/ Est-ce que Chahira voit Adel ?
2/ Est-ce que Chahira voit Basma ?
3/ Dites si les formules suivantes sont vraies dans cette interprétation :

a/ $P(b,a)$
b/ $P(c,b) \vee P(c,c)$
c/ $P(b,a) \rightarrow P(c,c)$
d/ $(P(a,b) \rightarrow (P(b,a) \vee \neg P(c,b))) \rightarrow P(b,c)$
e/ $\exists x\, P(x,x)$
f/ $\forall x\, P(x,c)$
g/ $\forall x\, P(a,x)$
h/ $\exists x\, \forall y\, P(y,x)$
i/ $\exists x\, \forall y\, P(x,y)$
j/ $\forall x\, (P(x,x) \rightarrow \exists y\, \neg P(x,y))$

III. Satisfiable – Valide :

<u>Définition : Cas d'une formule Close</u> (Var(A) = $\varnothing$) (pas de variable libre)

- A est **satisfaite** (ou satisfiable) par ($\mathcal{D}$,$\mathcal{I}$) ssi $[A]_{\mathcal{I}}$ = V , noté ($\mathcal{D}$,$\mathcal{I}$) $\models$ A

($\mathcal{D}$, $\mathcal{I}$) est appelée un modèle de A

- Une formule A est satisfiable ssi elle admet un modèle
- Elle est **insatisfiable** dans le cas contraire (aucun modèle).
- Une formule A est dite **valide** (tautologie) ssi elle est satisfiable pour tout (D,I)

Notation : $\models$ A

- Elle est **invalide** dans le cas contraire (antilogie).

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Satisfiable – Valide :

Définition : Cas d'une formule non Close

Soient :

- A une formule non close
- $Var(A) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ les variables libres de A

- On appelle clôture universelle de A, la formule :

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \ldots\ldots \forall x_n \, A$$

- On appelle clôture existentielle de A, la formule :

$$\exists x_1 \, \exists x_2 \ldots\ldots \exists x_n \, A$$

9

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Satisfiable – Valide :

Définition : Cas d'une formule non Close

soit A une formule non close

- A est satisfiable ssi sa clôture existentielle est satisfiable
- A est valide dans (D,I) ssi sa clôture universelle est satisfaite par (D,I)

  Notation : $(D,I) \models A$
- A est valide universellement (tautologie) ssi sa clôture universelle est valide. Notation : $\models A$

10

III. Satisfiable – Validité :

	formule Close $Var(A) = \varnothing$	formule non Close $Var(A) = \{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$
Satisfiable	Il existe (D,I) : I[A] = V	Il existe (D,I) : $I[\exists x_1 \ldots \exists x_n A] = V$
		Valide dans / satisfiable par (D,I) Il existe (D,I) : $I[\forall x_1 \ldots \forall x_n A] = V$
Valide	Pour tout (D,I) : I[A] = V	Valide universellement Pout tout (D,I) = $I[\forall x_1 \ldots \forall x_n A] = V$

IV. Equivalence et conséquence sémantique:

Définition :

- A est une conséquence de B ssi tout modèle de B est un modèle de A ,
  $B \models A$
- Dans le cas des formules non closes, on passe par la clôture universelle :
  $B \models A$ ssi $(\forall\, Var(B)\, B) \models (\forall\, Var(A)\, A)$

- On appelle équivalence sémantiquement la congruence associé au pré-ordre
  c.a.d $A = B$ ssi $A \models B$ et $B \models A$

Propositions :

- $B \models A$ ssi $\models (B \rightarrow A)$ (signifie $B \rightarrow A$ est une Tautologie)
- $B = A$ ssi $\models (B \leftrightarrow A)$) (signifie $B \leftrightarrow A$ est une Tautologie)

Chapitre 3: Logique des prédicats

IV. Equivalence et conséquence sémantique:

Propriétés : Equivalence

- $\neg (\forall x\ A) = \exists x\ (\neg A)$
- $\forall x\ A = \neg (\exists x\ (\neg A))$
- $\neg (\exists x\ A) = \forall x\ (\neg A)$
- $\exists x\ A = \neg (\forall x\ (\neg A))$
- $\forall x\ (A \wedge B) = (\forall x\ (A)) \wedge (\forall x\ (B))$
- $\exists x\ (A \vee B) = (\exists x\ (A)) \vee (\exists x\ (B))$
- $\forall x\ \forall y\ A = \forall y\ \forall x\ A$
- $\exists x\ \exists y\ A = \exists y\ \exists x\ A$
- $\exists x\ (A \rightarrow B) = (\forall x\ A) \rightarrow (\exists x\ B)$

13

Chapitre 3: Logique des prédicats

IV. Equivalence et conséquence sémantique:

Propriétés : Conséquence

- $\exists x\ \forall y\ A(x,y) \vDash \forall y\ \exists x\ A(x,y)$ (pas le contraire)
- $\exists y\ \forall x\ A(x,y) \vDash \forall x\ \exists y\ A(x,y)$ (pas le contraire)
- $\exists x\ (A \wedge B) \vDash (\exists x\ (A)) \wedge (\exists x\ (B))$ (pas le contraire)
- $\forall x\ (A \vee B) \vDash (\forall x\ (A)) \vee (\forall x\ (B))$ (pas le contraire)

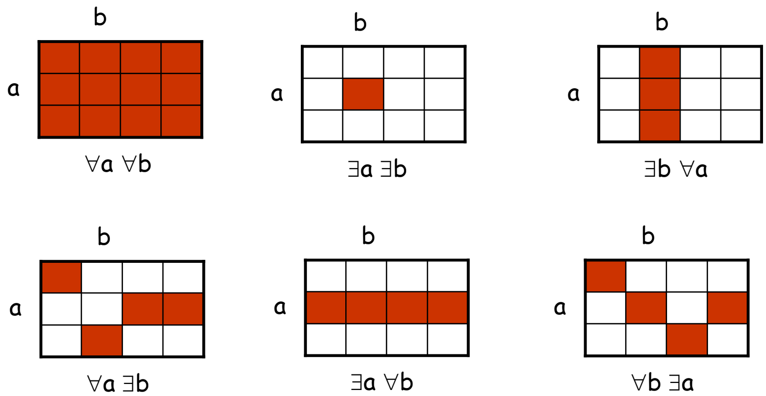
Exemple 1 : P(a,b) = { le couple d'entiers relatifs (a,b) est tel que a + b = 5 }

$\forall a\ \forall b\ P(a,b)$	{Tout couple d'entiers relatifs (a,b) vérifie : a + b = 5 }	F
$\exists a\ \exists b\ P(a,b)$	{Il existe un couple d'entiers relatifs (a,b) tel que : a + b = 5 }	V
$\exists b\ \forall a\ P(a,b)$	{Il existe un entier relatif b tel que pour tout entier relatif a on ait : a + b = 5 }	F
$\forall a\ \exists b\ P(a,b)$	{Quelque soit l'entier relatif a il existe un entier relatif b tel que : a + b = 5 }	V
$\exists a\ \forall b\ P(a,b)$	{Il existe un entier relatif a tel que pour tout entier relatif b on ait : a + b = 5 }	F
$\forall b\ \exists a\ P(a,b)$	{Quelque soit l'entier relatif b il existe un entier relatif a tel que : a + b = 5 }	V

14

IV. Equivalence et conséquence sémantique:

Exemple 2:



IV. Equivalence et conséquence sémantique:

Propriétés : Equivalence lorsque $x \notin Var(A)$

- $\forall x \; A = \exists x \; A = A$
- $\forall x \; (A \wedge B) = A \wedge (\forall x (B))$
- $\exists x \; (A \wedge B) = A \wedge (\exists x (B))$
- $\forall x \; (A \vee B) = A \vee (\forall x (B))$
- $\exists x \; (A \vee B) = A \vee (\exists x (B))$
- $\exists x \; (A \rightarrow B) = A \rightarrow (\exists x \, B)$
- $\forall x \; (A \rightarrow B) = A \rightarrow (\forall x \, B)$
- $\exists x \; (B \rightarrow A) = (\forall x \, B) \rightarrow A$
- $\forall x \; (B \rightarrow A) = (\exists x \, B) \rightarrow A$

Chapitre 3: Logique des prédicats

V. Méthodes des arbres:

La méthode des arbres permet de vérifier des tautologies ou des arguments valides en calcul des prédicats.

1) pour vérifier une tautologie on vérifie que l'arbre de sa négation se ferme

2) Pour vérifier un argument, on aligne ses prémisses, et la négation de la conclusion, et on vérifie que l'arbre qui en résulte se ferme.

Règles de ∃ et ¬∀

Règle de ∃

$$\begin{array}{c} \exists x\ P(x) \\ | \\ P(c) \end{array}$$

Règle de ¬∀

$$\begin{array}{c} \neg\forall x\ P(x) \\ | \\ \neg P(c) \end{array}$$

Où **c** est une constante nouvelle qui **n'a pas été utilisée** jusqu'à présent dans **cette branche**.

Règles de ∀ et ¬ ∃

Règle de ∀

$$\begin{array}{c} \forall x\ P(x) \\ | \\ P(a) \\ P(b) \end{array}$$

Règle de ¬∃

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\ P(x) \\ | \\ \neg P(a) \\ \neg P(b) \end{array}$$

Où **a et b sont toutes** les constantes utilisées dans cette branche

Chapitre 3: Logique des prédicats

V. Méthodes des arbres:

Exemple : $\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x))$

$$\begin{array}{c} \neg(\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x))) \\ | \\ \exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \neg(\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)) \\ | \\ \forall x\ P(x) \\ \neg \exists x\ Q(x) \\ | \\ P(a) \rightarrow Q(a) \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \begin{array}{cc} \neg P(a) & Q(a) \\ P(a) & P(a) \\ \neg Q(a) & \neg Q(a) \\ X & X \end{array} \end{array}$$

Sens:
"S'il y a quelqu'un qui, quand il mange, il boit, alors si tout le monde mange, quelqu'un boit."