Cours: Logique Formelle

Chapitre 3: Logique des prédicats Partie 1/3:

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

I. Introduction

- La logique propositionnelle qui nous a permis de mettre au point une première théorie de raisonnement mais elle ne permet pas de formuler tous les raisonnements .
- Il faut aller alors plus loin que le simple calcul des propositions.
- Nous n'allons plus contenter de simples propositions, mais nous allons introduire un nouveau type de formules logique: appelé le prédicat.

Exemples :

- {x est un entier naturel pair} n'est pas une proposition
- par contre {5 est un entier naturel pair} est une proposition fausse.

➔ À Chaque fois qu'on remplace x par un entier particulier on obtient une proposition

- {x est un entier naturel pair} est un prédicat.

I. Introduction

Définitions :

- un prédicat est une formule logique qui dépend **d'une variable libre**.
- un prédicat c'est une affirmation **qui porte sur des symboles** représentant **des éléments variables d'un ensemble fixe**.

- Puisqu'un prédicat dépend d'une variable x, nous les noterons souvent P(x);
- C'est une application qui associe une proposition P(x) à chaque élément d'un ensemble E, cette ensemble s'appelle **l'univers** du prédicat
- Dans le cas de l'exemple précédent E = N

Chapitre 3: Logique des prédicats

I. Introduction

Objectif:

- La logique des prédicats a pour but de généraliser la logique des propositions. On peut considérer un prédicat comme un énoncé général où apparaissent des variables. Par exemple:

(1) « X est la sœur de Y »

(2) « si X est le père de Y et Y le père de Z alors X est le grand père de Z »

Si l'on remplace toutes les variables d'un prédicat par des valeurs définies on obtient une proposition à la quelle on pourra associer une interprétation (vrais, faux), Par exemple

X= Rim et Y = Ali dans (1) donne « Rim est la sœur de Ali »

Un prédicat représente donc potentiellement une classe de propositions.

I. Introduction

- Le nombre des variables d'un prédicat s'appelle **poids** du prédicat.
- Exemple : p (a,b) = { le couple d'entiers naturels (a,b) tel que a+b=10}

  - si l'univers du prédicat est N^2 alors son poids est égal à 2

  - si l'univers du prédicat est N alors son poids est égal à 1

- Dans un prédicat de poids n, si l'on affecte une valeur à l'une des variables, on obtient un prédicat de poids n-1.
- Par conséquent, un prédicat de poids 0 est une proposition.
- Les prédicats qui portent sur **le même univers** peuvent être combinés entre eux à l'aide des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ pour former de nouveau prédicat.

Chapitre 3: Logique des prédicats

I. Introduction

Définitions :

- Le prédicat $\neg$ p (x) associe à x la négation du prédicat p(x)
- Le prédicat p$\wedge$q (x) associe à x la conjonction des prédicats p(x) et q(x)
  on notera aussi (p $\wedge$ q) (x)
- Le prédicat p$\vee$q (x) associe à x la disjonction des prédicats p(x) et q(x)
  on notera aussi (p $\vee$ q) (x)

• Exemple : même univers N

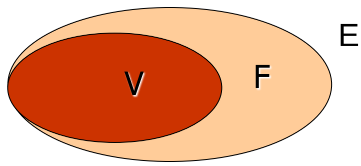
p(x) = {l'entier naturel x est pair}; q(x) = {l'entier naturel x est divisible pas 5}

- $\neg$ p(x) = {l'entier naturel x est impair}
- p$\wedge$q (x) = {l'entier naturel x est pair, et il est divisible par 5} (poids 1)
- p$\vee$q (x) = {l'entier naturel x est pair, ou il est divisible par 5} (poids 1)

Attention : si l'univers est N^2 (poids 2), il ne faut pas confondre p$\wedge$q (n) avec S (n,m) = {l'entier naturel n est pair et l'entier naturel m est divisible par 5}

II. Formalisation du langage naturel

- Soit P un prédicat de poids 1 sur l'univers E. Comme ce prédicat associe une proposition P(x) à tout élément x de E, on peut trier les élément de E en deux sous ensembles, ceux pour lesquelles P(x) est vraie et ceux pour qui elle est fausse.



- Donc soit l'application $v : E \longrightarrow \{V , F\}$

  $x \longrightarrow P(x)$

- Ce tri revient à regrouper les éléments de E pour qui v (x) est V et ceux pour qui v (x) = F

II. Formalisation du langage naturel

Les quantificateurs :

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie est E tout entier » est une proposition ; on la note $\forall x$ P(x)

  ➔ on lit : quelque soit x la proposition P(x) est vrai

  $\forall$: quantificateur universel

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie n'est pas vide » est une proposition ; on la note $\exists x$ P(x)

  ➔ on lit : il existe x tel que P(x) est vraie

  $\exists$: quantificateur existentiel

Chapitre 3: Logique des prédicats

II. Formalisation du langage naturel

Exemples :

- Soit le prédicat $P(x)$ = { l'entier naturel x est pair }

- $\forall x\ P(x)$ est une proposition fausse car on lit : « tout entier naturel est pair »

- $\exists x\ P(x)$ est une proposition vraie car on lit : « il existe un entier naturel pair »

Exercice d'application:

- Soit les prédicats : $H(x)$ = { x est un homme }

$M(x)$ = { x est méchant }

Formuler les affirmation suivantes:

- «C'est faux que tout les hommes sont méchants »: $\neg(\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x)))$
- «Seulement les hommes sont méchants » : $\forall x\ (M(x) \rightarrow H(x))$
- « Il existe un homme méchant » : $\exists x\ (H(x) \wedge M(x))$
- « Il n'existe pas d'homme méchant » : $\neg\ (\exists x\ (H(x) \wedge M(x)))$

9

Chapitre 3: Logique des prédicats

II. Formalisation du langage naturel

Remarques :

- Soit P un prédicat dont l'univers est $E = \{ e_1, e_2, e_3,\ldots, e_n\}$

  - La proposition $\forall x\ P(x)$ est vraie quand les propositions $P(e_1)$, $P(e_2),\ldots\ldots, P(e_n)$ sont toutes vraies.

    ➔ $\forall x\ P(x)$ se confond avec la proposition $P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge\ldots\ldots \wedge P(e_n)$

  - La proposition $\exists x\ P(x)$ est vraie si l'une au moins des propositions $P(e_1)$, $P(e_2),\ldots\ldots, P(e_n)$ est vraie.

    ➔ $\exists x\ P(x)$ se confond avec la proposition $P(e_1) \vee P(e_2) \vee \ldots\ldots \vee P(e_n)$

- Soit $P(x,y,z)$ un prédicat de poids 3

  - $Q(x,z) = \exists y\ P(x,y,z)$ est un prédicat de poids 2
  - $R(z) = \forall x\ Q(x,z) = \forall x\ \exists y\ P(x,y,z)$ est prédicat de poids 1

10

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Alphabet du langage du premier ordre (prédicat)

Le langage du calcul des prédicats est formé de :

--Les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

- Les quantificateurs

  $\exists$: quantificateur existentiel (« il existe » : $\exists x \; P(x)$)

  $\forall$: quantificateur universel (« pour tout ») : $\forall x \; P(x)$)

- Des constantes logiques : V et F

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Formules du langage :

– A est une formule atomique ssi A s'écrit sous la forme $P(t_1, t_2, t_3 \; .... \; t_n)$

avec: P est un symbole de prédicat de poids n ($P \in \mathcal{P}_n$)

$t_1, t_2, t_3 \; .... \; t_n$ sont des termes

– Si A est une formule, alors ($\neg$ A) est une formule.

– Si A et B sont deux formules, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des formules.

– Si A est une formule et x est une variable, alors $\exists x. \, A$ et $\forall x. \, A$ sont des formules.

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Termes du langage :

- Les termes sont construits à partir de l'ensemble des variables   et des symboles de fonctions F .
- Tout terme est engendré par l'application des lois suivantes:
    - Une constante est un terme (qui sera interprétée par un individus fixé)
    - Les symboles de fonctions ayant chacun un poids ≥ 1 sont des termes. (un nombre d'arguments fixé)
    - Une variable est un terme (qui varie dans l'ensemble des individus de l'interprétation)
    - Si f est un symbole fonctionnel d'arité (de poids) n et si t1, t2,t3 …. tn sont n termes, alors f (t1, t2,t3 …. tn) est un terme.

Un terme est dit **clos** s'il ne contient aucune variable

13

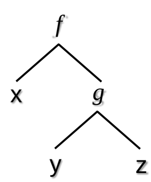
Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Termes du langage : Exemples

f (x, g (y , z)) est un terme si f et g sont des symboles de fonction de poids 2.

Arbre de décomposition :



- f (5, 3) est un terme clos
- f (x, g (y1, y2)) est un terme

14

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Revenons au deux quantificateurs (existentiel et universel) développer précédemment. Nous rappelons les définitions de chacun:

- ∃: « existe au moins un sel »
- ∃! : « existe un et un seul »
- ∀: « quelque soit, ou pour tout »
- Quantificateurs imbriqués:

Notons que l'ordre des quantificateurs est important. En effet, « tout le monde aime quelqu'un » s'écrirait ∀x.(∃y. Aime(x,y)), qui n'a pas exactement le même sens que « il y a quelqu'un qui est aimé par tout le monde » qui s'écrirait ∃y.(∀x. Aime(x,y)).

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Loi de Morgan entre les quantificateurs:

$$\neg\forall x.F(x)\equiv\exists x.\neg F(x)$$

$$\neg\exists x.F(x)\equiv\forall x.\neg F(x)$$

$$\forall x.F(x)\equiv\neg\exists x.\neg F(x)$$

$$\exists x.F(x)\equiv\neg\forall x.\neg F(x)$$

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Formules du langage :

Illustration: soit le prédicat Aime (A, B) : « A aime B »

- « Tout le monde déteste les brocolis » revient au même que « Il n'existe personne qui aime les brocolis »:

$\forall x. \neg Aime(x,brocolis) \equiv \neg \exists x. Aime(x,brocolis)$

-« Tout le monde aime les glaces » et « il n'y a personne qui n'aime pas les glaces » sont équivalentes:

$\forall x. Aime(x,glaces) \equiv \neg \exists x. \neg Aime(x,glaces)$

17

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 1: Formuler en calcul des prédicats les phrases suivantes:

1. les baleines sont des mammifères.
2. les entiers sont pairs ou impairs
3. Il existe un entier pair

Correction:

B (x) : « x est un baleine »

M (x) : « x est un mammifère »

Traduction : $\forall x. (B(x) \rightarrow M(x))$

E(x) : « x est un entier»

P(x) : « x est pair»

I(x) : « x est impair»

Traduction : $\forall x (E(x) \rightarrow (P(x) \vee I(x)))$

18

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 2: Exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

1. « Tous les lions sont féroces. »
2. « Quelques femmes ne boivent pas du café »

Correction:

Lion (x) : « x est un lion»

Feroce(x) : « x est un féroce»

Traduction : $\forall$x.(Lion(x) $\rightarrow$Feroce(x))

Femme (x) : « x est une femme»

Cafe(x) : « x boit du café»

Traduction : $\exists$x.(Femme(x)$\wedge\neg$Cafe(x))

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Utilisation des quantificateurs :

Exercice 3: Utiliser les 3 prédicats suivants pour exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

Etudiant (x) : « x est un étudiant »; **Assiste (x, y)** : « x assiste au cours y »

Interessant(y) : « y est intéressant »

1. « Certains étudiants assistent à tous les cours »:

   $\exists$x.(Etudiant(x)$\wedge$($\forall$y . Assiste(x,y)))

2. « Aucun étudiant n'assiste à un cours intéressant »:

   $\forall$ x.(Etudiant(x) $\rightarrow$(Assiste(x,y)$\wedge\neg$ Interessant(y)))

Dans la seconde formule, on constate que la variable y n'est pas quantifiée: une telle variable est dite **libre**. Une variable quantifiée est dite **liée**.

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables libres:

Soit A une formule. L'ensemble des **variables libres** de A, noté Var(A), est définie comme suit :

- Si A est un atome [formule sous la forme P(t_1, t_2,t_3 …. t_n)]alors

  Var(A) = Var(P(t_1, t_2,t_3 …. t_n)) = Var(t_1) U Var(t_2) U…….U Var(t_n)
- Si A= $\neg$ B alors Var(A) = Var($\neg$B) = Var(B)
- Si A=B # C avec # $\in$ { $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$} alors :

  Var(A) = Var(B # C) = Var(B) U Var(C)
- Si A = $\exists$x B ou A = $\forall$x B alors :

Var(A) = Var($\exists$x B) = Var($\forall$ x B) = Var(B) \ {x}

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables libres:

- Chacune des fois où une variable x apparaît dans une formule A est appelée une occurrence de x dans A.

- Toutes les occurrences des variables d'un terme sont des variables libres de *t.* c.a.d :

1/ Var(x) = {x}

2/ Var(c) = { } (c : constante)

3/ Var(*f* (t_1, t_2,t_3 …. t_n)) = Var(t_1) U Var(t_2) U…….U Var(t_n)

- Une formule de A est dite close si Var(A) = $\varnothing$ (A n'a pas de variable libre)

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables libres: **Exemples :**

- A : $\forall x \, \exists y \, P(f\,(x,y),z)$

$$
\begin{aligned}
Var(A) &= Var(\exists y \, P(f\,(x,y),z)) \setminus \{x\} \\
&= Var(P(f\,(x,y),z) \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= Var(\,(Var(f\,(x,y)) \cup Var(z)) \setminus \{y\}\,) \setminus \{x\} \\
&= ((\{x,y\} \cup \{z\}) \setminus \{y\}\,) \setminus \{x\} \\
&= (\{x,y,z\} \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= (\{x,z\}) \setminus \{x\} \\
&= \{z\}
\end{aligned}
$$

Donc A n'est pas close

- B : $\forall x \, P(x)$

$Var(B) = Var(\forall x \; P(x)) = Var(P(x)) \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \varnothing$

Donc B est close

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables libres : **Exemple :**

- A : $(\forall x \, (P(x,y) \rightarrow Q(x))) \;\; \wedge \;\; (\, \forall y \;\; (\neg \, P(x,y) \wedge (\exists z \, Q(z))\,)\,)$

- $Var(B) = Var(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \setminus \{x\} =$

  $(\{\, x,y\,\} \cup \{\, x\,\}) \setminus \{x\} \qquad = \{y\}$

- $Var(C) = Var(\neg \, P(x,y) \wedge (\exists z \, Q(z))) \setminus \{\, y\,\}$

  $Var(C) = (Var(\neg \, P(x,y)) \cup Var(Q(z) \setminus \{\, z\,\}\,)) \setminus \{\, y\,\}$

  $Var(C) = (\{\, x,y\,\} \cup (\{\, z\,\} \setminus \{\, z\,\}\,)) \setminus \{y\}$

  $Var(C) = \{\, x,y\,\} \setminus \{y\} = \{\, x\,\}$

- $\underline{Var(A) = Var(B) \cup Var(C) = \{\, x, \, y\,\}}$

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables liées :

- Soit A une formule. L'ensemble des variables liées de A, noté BVar(A) (B pour bound), est définie comme suit :

- Si A est un atome, BVar(A) = $\varnothing$
- Si A= $\neg$ C alors BVar(A) = BVar($\neg$C) = BVar(C)
- Si A=B # C avec # $\in$ { $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$} alors :

  BVar(A) = BVar(B # C) = BVar(B) U BVar(C)
- Si A = $\exists$x B ou A = $\forall$x B alors :

  BVar(A) = BVar($\exists$x B) = BVar($\forall$ x B) = BVar(B) U {x}

25

Chapitre 3: Logique des prédicats

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables liées : **Exemple :**

- A : ($\forall$x (P(x,y) $\rightarrow$ Q(x))) $\wedge$ ($\forall$y ($\neg$ P(x,y) $\wedge$ ($\exists$z Q(z))))

- BVar(B) = BVar(P(x,y) $\rightarrow$ Q(x)) U {x}

  = (BVar(P(x,y)) U BVar(Q(x))) U { x }

  = ($\varnothing$ U $\varnothing$) U { x } = { x }
- BVar(C) = BVar($\neg$ P(x,y) $\wedge$ ($\exists$z Q(z))) U { y }

  BVar(C) = (BVar($\neg$ P(x,y)) U (BVar(Q(z)) U { z })) U { y }

  BVar(C) = ($\varnothing$ U ($\varnothing$ U { z })) U {y} = { z } U {y} = { z,y }

- <u>BVar(A) = BVar(B) U BVar(C) = { x, y ,z}</u>

26

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Variables liées : **Exemple :**

- A : $(\forall x\ (P(x,y) \rightarrow Q(x))) \quad \wedge \quad (\forall y\ (\neg P(x,y) \wedge (\exists z\ Q(z))))$

➢ $BVar(B) = BVar(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \cup \{x\}$

$= (BVar(P(x,y)) \cup BVar(Q(x))) \cup \{x\}$

$= (\varnothing \cup \varnothing) \cup \{x\} = \{x\}$

➢ $BVar(C) = BVar(\neg P(x,y) \wedge (\exists z\ Q(z))) \cup \{y\}$

$BVar(C) = (BVar(\neg P(x,y)) \cup (BVar(Q(z)) \cup \{z\})) \cup \{y\}$

$BVar(C) = (\varnothing \cup (\varnothing \cup \{z\})) \cup \{y\} = \{z\} \cup \{y\} = \{z,y\}$

➢ <u>$BVar(A) = BVar(B) \cup BVar(C) = \{x, y, z\}$</u>

III. Syntaxe du calcul des prédicats

Exercice d'application :

Donner les variables libres et liées pour chacune des formules suivantes:

1/ $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x,y))$
2/ $(\exists y\ Q(x,y)) \rightarrow \forall x\ P(x)$
3/ $\exists x\ (\neg(\exists y\ P(x,y)) \rightarrow (\exists z\ Q(z) \rightarrow R(x)))$
4) $(\exists x\ (\neg(\exists y\ P(x,y))\ )) \quad \rightarrow (\exists z\ Q(z) \rightarrow R(x))$
5/ $((\forall x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y)) \rightarrow \exists z\ R(z)) \rightarrow \exists u\ S(u)$