Cours: Logique Formelle

Chapitre 3: Logique des prédicats
Partie 3/3:

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

V. Les formes normales — 1) Forme Prénexe

- Une formule A est dite sous forme normale *prénexe* ou symplement forme prénexe, ssi
  - A est de la forme $\#x_1\ \#x_2\ \#x_3 \ldots\ldots\ldots \#x_n$ B $\quad \# \in \{\forall, \exists\}$
  - et la forme B ne contient aucun quantificateur.
- Toute formule admet une forme prénexe qui lui est équivalente

Exemples : 1/ $\forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge P(y))$ est sous forme prénexe

2/ $(\forall x\ P(x)) \wedge (\exists y\ P(y))$ n'est pas sous forme prénexe

3/ $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ Q(y))$ n'est pas sous forme prénexe
➔par contre sa forme prénexe est $\forall x\ \exists y\ (\neg P(x) \vee Q(y))$

Chapitre 3: Logique des prédicats

V. Les formes normales — 2) Forme Skolem

- A partir d'une formule sous forme prénexe, on construit une formule sous forme de *Skolem* en éliminant les quantificateurs existentiels et en introduisant des symboles de fonctions et de constantes dites de *Skolem.*
- Soit A une formule sous forme prénexe

$$\#x_1\ \#x_2\ \#x_3\ \ldots\ldots\ldots\ \#x_n\ \ B \qquad \# \in \{\forall, \exists\}$$

Une forme Skolem de A est obtenue en appliquant le processus suivant en commençant par la gauche de la formule jusqu'à l'élimination de tous les quantificateurs existentiels.

3

Chapitre 3: Logique des prédicats

V. Les formes normales — 2) Forme Skolem

Cas 1: Si A est de la forme $\exists x_i \ldots\ldots\ldots \#x_n\ \ B$ avec $\# \in \{\forall, \exists\}$

c-à-d à gauche de $\exists x_i$ il n' y a aucun quantificateur universel, alors :

- On supprime $\exists x_i$
- On introduit un symbole de constante c_i (constante de Skolem)
- On remplace partout dans la formule de B, la variable x_i par la constante c_i

Exemple :

$$\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w \quad P(x,y,z) \wedge Q(u,x,v,w)$$

$$\forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w \quad P(a,y,z) \wedge Q(u,a,v,w)$$

4

V. Les formes normales

2) Forme Skolem

Cas 2: Si A est de la forme $\forall x_1 \ldots\ldots \forall x_m\ \exists x_i \ldots\ldots.\#x_n$ B $\quad \# \in \{\forall, \exists\}$

c-à-d à gauche de $\exists x_i$ il y a m quantificateurs universels, alors :

- On supprime $\exists x_i$
- On introduit un symbole de fonction f_i ayant m arguments (fonction de Skolem)
- On remplace partout dans la formule de B, la variable x_i par la fonction $f_i(x_1, \ldots\ldots, x_m)$

Exemple :

$\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w \quad P(x,y,z) \wedge Q(u,x,v,w)$

- $\forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w \quad P(a,y,z) \wedge Q(u,a,v,w)$
- $\forall y\ \forall z\ \forall v\ \exists w \quad P(a,y,z) \wedge Q(f(y,z), a, v, w)$
- $\forall y\ \forall z\ \forall v \quad P(a,y,z) \wedge Q(f(y,z), a, v, g(y,z,v))$

➔forme skolem de A : $\forall y\ \forall z\ \forall v\ \ P(a,y,z) \wedge Q(f(y,z),a,v,g(y,z,v))$

Chapitre 3: Logique des prédicats

V. Les formes normales

2) Forme Skolem

Propriété

Soient A_p une formule sous forme de prénexe et A_s sa forme de skolem

alors A_p est insatisfiable SSi A_s est insatisfiable

Chapitre 3: Logique des prédicats

V. Les formes normales

2) Forme Clausale

- La forme clausale (ou Standard) d'une formule A est obtenue comme suit :

  1/ Mise de forme prénexe de A (on obtient A_p)

  2/ Mise de forme de Skolem de A_p (on obtient A_s)

  3/ Suppression des quantificateurs universels

  4/ Mise sous forme normale conjonctive de la formule restante

  (on obtient A_c : $B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge B_m$ Chaque B_i est une clause)

On note la formule A_c ainsi obtenue sous forme d'un ensemble de clauses $\{B_1 , B_2 , \ldots\ldots\ldots , B_m \}$ 7

Chapitre 3: Logique des prédicats

V. Les formes normales

2) Forme Clausale

Exemple :

A_p : $\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w \quad P(x,y,z) \rightarrow (Q(u,x,v,w) \wedge R(w,x))$

$\rightarrow \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w \quad P(a,y,z) \rightarrow (Q(u,a,v,w) \wedge R(w,a))$

$\rightarrow \forall y \forall z \forall v \exists w \quad P(a,y,z) \rightarrow (Q(f(y,z), a, v, w) \wedge R(w,a))$

A_s : $\forall y \forall z \forall v \quad P(a,y,z) \rightarrow (Q(f(y, z), a, v , g(y,z,v)) \wedge R(g(y,z,v),a))$

$\rightarrow$Suppression des quantificateurs universelles, (soit substituer y, z et v par des des nouvelles constantes (b,c et d) soit supprimer les quantificateur univ et considerer y, z et v comme des nouvelles constantes)

$P(a,y,z) \rightarrow (Q(f(y,z), a, v , g(y,z,v)) \wedge R(g(y,z,v),a))$

$= \quad \neg P(a,y,z) \vee (Q(f(y,z), a, v , g(y,z,v)) \wedge R(g(y,z,v),a))$

$A_{c=}$

$(\neg P(a,y,z) \vee Q(f(y,z), a, v , g(y,z,v))) \wedge (\neg P(a,y,z) \vee R(g(y,z,v),a))$ 8

V. Les formes normales

4) Théorèmes

Soient A une formule, A_p une forme prénexe équivalente a A, A_s sa forme de skolem et A_c sa forme clausale, alors

A est insatisfiable SSi A_p est insatisfiable

A_p est insatisfiable SSi A_s est insatisfiable

A_s est insatisfiable SSi A_c est insatisfiable

➔ A est insatisfiable SSi A_c est insatisfiable