Cours: Logique Formelle

Chapitre 2: Logique Propositionnelle

Réalisé par:
Dr. Sakka Rouis Taoufik

I. Introduction

- Une proposition est une expression qui est soit **vraie**, soit **fausse**.
- Des propositions peuvent être combinées entre elles par des connecteurs logiques.
- La signification d'une telle combinaison est déterminée par la signification des propositions impliquées.
- Le but de toute activité scientifique est de distinguer parmi les propositions celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

Exemples

- A tomato is a fruit
- An orange is a fruit
- Oranges are not the only fruit

I. Introduction

- **Raisonner** c'est déterminer la valeur de vérité de proposition construites en combinant entre des propositions dont les valeurs de vérité sont déjà connues.
- **Le calcul proportionnel** s'intéresse uniquement à la façon dont les propositions sont liées entre elles, et aux conséquences qu'on peut en tirer quant à leur valeur de vérité.

➔il ne s'intéresse *pas du tout* à leur signification

Chapitre 2: Logique Propositionnelle

II. Syntaxe

- Le vocabulaire du langage de la logique propositionnelle est composé de :

- un ensemble, fini ou dénombrable, de propositions notées: p, q, r, . . .
- deux constantes : vrai (V) et faux (F)
- un ensemble de connecteurs logiques: Non, Et, Ou, Implication et Équivalence
- des parenthèses : (,)

II. Syntaxe

➢ Connecteurs logiques

- Négation : Non (noté : $\neg$)
- Conjonction : Et (noté : $\wedge$)
- Disjonction : Ou (noté : $\vee$)
- Conditionnel : Si… Alors (noté : $\rightarrow$)
- Equivalence : Si et Seulement Si (noté : $\leftrightarrow$)

Chapitre 2: Logique Propositionnelle

II. Syntaxe

➢ Priorités des opérations

- Les connecteurs logiques ont une priorité d'opération qui diminue selon l'ordre du tableau précédent : la négation a la plus haute priorité, et l'équivalence la plus basse.
- Ainsi, la proposition :

$$\neg\, p \wedge q \vee r \Leftrightarrow q \Rightarrow p \wedge r$$

est équivalente à

$$(((\neg\, p) \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \wedge r))$$

II. Syntaxe

1) La négation : NON

Notée : ¬

Table de vérité :

p	¬ p
V	F
F	V

Exemple :

p : « 5 plus 4 font 9 »

¬ p : « il est faux que 5 plus 4 font 9 »

¬ p : « 5 plus 4 ne font pas 9 »

Chapitre 2: Logique Propositionnelle

II. Syntaxe

2) La conjonction : ET

Notée : ∧

Table de vérité :

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple :

p : « 10 est divisible par 2 »

q : « 10 est divisible par 5 »

p ∧ q : «10 est divisible par 2 et 10 est divisible par 5 »

II. Syntaxe — 3) La disjonction inclusive : OU

Notée : $\vee$

Table de vérité :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple :

p : « 10 est divisible par 2 »

q : « 10 est divisible par 5 »

$p \vee q$: «10 est divisible par 2 ou 10 est divisible par 5 »

II. Syntaxe — 4) Le conditionnel : Implication

Notée : $\rightarrow$

Table de vérité :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemples:

« p entraîne q » , « p implique q » , « si p alors q »

p appelé: antécédent et le q appelé: conséquent

Un conditionnel n' est **faux** que dans **un cas et un seul** : si son **antécédent est vrai et son conséquent faux**

➢ Démonstration : Cas où p est vraie

Exemple 1 :

- « s'il pleut, le sol est mouillé »
- p : « il pleut »
- q : « le sol est mouillé »
- on suppose que p est vraie et on essaye de prouver que q est vraie
- si la conséquence q est vraie, donc p $\rightarrow$ q est vraie
- si la conséquence q est fausse, donc p $\rightarrow$ q est fausse

➢ Démonstration : Cas où p est faux

Exemple 2 :

- P = « 2 est égal à 1 »
- Q = « Napoléon et Jules César sont une seul et même personne. »
- On obtient « Si 2 est égal à 1 alors Napoléon et Jules César sont une seul et même personne»
- « P entraîne Q» est vraie
- **Preuve** : Napoléon et Jules César sont deux personnes : mais deux personnes n'en font qu'une si 2 est égal à 1. Par conséquent, si 2 est égal à 1 alors Napoléon et Jules César sont une seule et même personne

Exemple:

Montrer que la proposition suivante est vraie

«si 1/2 est un nombre entier alors 1/2 n'est pas un nombre entier»

P = «si 1/2 est un nombre entier» est fausse

Q = «1/2 n'est pas un nombre entier» est vraie

$P \rightarrow Q$ est donc vraie

- **Théorème:** $p \rightarrow q = (\neg p) \vee q$

Démonstration:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

II. Syntaxe

4) Le conditionnel : Implication

Exercice : *Quelles* sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

1/ « la somme des angles d'un triangle vaut 180° implique que la somme des angles d'un rectangle vaut 360°»

2/ « π vaut 3.14 implique que la somme des angles d'un triangle vaut 182° »

3/ « si 7 est plus grand que 8 alors l'eau bout à 100°C »

4/ « si 3 est plus petit que 4 alors 4 est plus petit que 3 »

5/ « si 4 est plus petit que 3 alors 3 est plus petit que 4 »

6/ « 82 est divisible par 7 implique que π vaut 3.14 »

7/ «si $330^{33}+5$ est divisible par 2 alors $330^{33}+5$ est plus grand que 5 »

II. Syntaxe

5) L'équivalence

Notée : $\leftrightarrow$

Table de vérité :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

➢ **Théorème:** $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Démonstration:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

III. Forme propositionnelle

1) Définition

Une forme propositionnelle (ou formule propositionnelle) est une suite de symboles construite selon des règles, où l'on retrouve des connecteurs, des parenthèses, et des symboles de variables propositionnelles.

➤ **Remarques:**

- Une proposition est une forme propositionnelle
- Si p est une variable alors p écrit tout seul est une forme propositionnelle.
- Si p et q sont deux formes propositionnelles il en est de même de $(p \wedge q)$ et de $(p \vee q)$
- Si p est une forme propositionnelle, il en est de même de $(\neg p)$

III. Forme propositionnelle

2) Table de vérité

Dans une forme propositionnelle, quand en remplace les variables par des propositions, on obtient une proposition. La valeur de vérité de cette proposition ne dépend que des valeurs de vérité des propositions qui ont été substituées.

Exercice:

Évaluer les valeurs de vérité de l'expression : $(\neg(p \to q) \wedge r)$

p	q	r	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \wedge r$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Note : si on a n variables il faut prévoir une table contenant 2^n lignes

III. Forme propositionnelle

2) Table de vérité

- Les formes propositionnelles peuvent être combinées entre elles au moyen des connecteurs et on obtient des formes propositionnelles de plus en plus compliquées.

Exemple 1: Soient $f(p, q) = p \wedge q$ et $g(p, r) = p \wedge (\neg r)$ déterminer la table de vérité de $f \vee g$

p	q	r	$\neg r$	$f = p \wedge q$	$g = p \wedge (\neg r)$	$f \vee g = (p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg r))$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

III. Forme propositionnelle

2) Table de vérité

Exercice1:

1/ Combien de lignes contient la table de vérité d'une forme propositionnelle qui dépend de n variables ?

2/ A l'aide de deux propositions p et q on peut construire une autre, notée $p \downarrow q$, bâtie sur le modèle : « ni p , ni q ». Cette opération est elle une connexion ? Si oui quelle est sa table de vérité ?

III. Forme propositionnelle

2) Table de vérité

Exercice 2: *représenter la table de vérité de chaque forme propositionnelle :*

1/ $(\neg p) \vee q$
2/ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
3/ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
4/ $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
5/ $(p \rightarrow (\neg q)) \wedge (q \rightarrow (\neg p))$
6/ $p \rightarrow ((\neg p) \vee p)$
7/ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q))$

III. Forme propositionnelle

3) Modèle

➢ **Définition**

Un choix des valeurs de vérité des variables qui donne une proposition ***vraie*** s'appelle ***un modèle*** de la forme propositionnelle.

- Dans l'exemple précèdent, le choix de V pour p, F pour q et V pour r est un modèle pour la forme propositionnelle.
- On dit que des formes propositionnelles sont ***compatibles*** si elles ont au moins ***un modèle en commun***.
- On dit que des formes propositionnelles sont ***contradictoires*** quand elles n'ont ***aucun modèle en commun***.

➢ Définition

- Une Tautologie est une formule qui est vraie dans toutes les interprétations possibles.

  - Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne contient que de V.

  - En tant que forme propositionnelle, une proposition vraie est une tautologie.

- Une Antilogie est une formule qui n'est vraie dans aucune interprétation possible.

  - Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne comporte que des F.

  - En tant que forme propositionnelle, une proposition fausse est une antilogie.

  - on dit aussi une contradiction.

➢ Exemples

$(\neg p) \vee p$
Tautologie

p	p	$(\neg p) \vee p$
V	V	V
F	F	V

$(\neg p) \wedge p$
Antilogie

p	$\neg p$	$(\neg p) \wedge p$
V	F	F
F	V	F

III. Forme propositionnelle | 4) Tautologie

- **Exercice:** montrer que les formules suivantes sont ou non des tautologies ?

1/ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
2/ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

3/ $p \rightarrow (\neg p \vee p)$
4/ $p \rightarrow (\neg p \wedge p)$
5/ $p \rightarrow ((\neg p) \rightarrow p)$

6/ $(p \wedge (\neg q)) \vee (p \wedge q)$
7/ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q))$

III. Forme propositionnelle | 4) Tautologie

- **Définition:** Si f et g deux formes propositionnelles, on dit que g est conséquence de f, ou encore g se déduit de f si :

$f \rightarrow g$ est une tautologie

- On écrit alors : $f \vDash g$
- Le symbole $\vDash$ n'est pas un connecteur
- $\vDash$ est un symbole d'une relation (g est un conséquence de f)

III. Forme propositionnelle — 4) Tautologie

- **Théorème :** La forme propositionnelle g est une conséquence de la forme propositionnelle de f si tout modèle de f est aussi un modèle de g

- En effet : si f → g prend toujours la valeur V ce la signifie que f ne prend pas la valeur V quand g prend la valeur F

III. Forme propositionnelle — 5) Conséquence logique

- **Exemple1:** « si p implique q et si q implique r, alors p implique r », Soient $f(p,q,r) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ et $g(p,r) = p \rightarrow r$,

  Montrer que $f \vDash g$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$f = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$g = (p \rightarrow r)$	$f \rightarrow g$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

- **Exemple 2:**

  montrer que $(p \wedge (p \rightarrow q))$ à pour conséquence q

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

- **Conclusion: Modus ponens:** $(p \wedge (p \rightarrow q)) \vDash q$

Chapitre 2: Logique Propositionnelle

III. Forme propositionnelle | 5) Conséquence logique

- **Exemple 3:**

  montrer que $(\neg p)$ est une conséquence de $(\neg q) \wedge (p \rightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \wedge (p \rightarrow q)$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

- **Conclusion: Modus tollens:** $(\neg q) \wedge (p \rightarrow q) \vDash \neg p$

III. Forme propositionnelle — 5) Conséquence logique

- **Exercice:** Dans chacun des cas ci-dessous déterminer si la première forme propositionnelle à pour conséquence la forme propositionnelle qui est sur la même ligne :

1/ $(p \wedge q)$	p
2/ q	$(p \rightarrow q)$
3/ $\neg (p \rightarrow q)$	p
4/ $(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
5/ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
6/ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$
7/ $p \rightarrow (q \wedge r)$	$p \rightarrow q$
8/ $(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
9/ $p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

III. Forme propositionnelle — 6) Synonymes logique

- **Définition:** On dit que deux formes propositionnelles sont synonymes quand elles ont la même table de vérité.

- **Exemple :** $(p \rightarrow q)$ et $((\neg q) \rightarrow (\neg p))$ sont synonymes

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

- **Remarque:** La proposition $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ s'appelle la contraposée de $p \rightarrow q$

III. Forme propositionnelle

6) Synonymes logique

- **Exercice:** Dans chacun des cas suivants dire si les deux formes propositionnelles sont synonymes.

1/ $p \rightarrow q$	$(\neg p) \vee (p \wedge q)$
2/ $p \rightarrow q$	$(\neg p) \rightarrow (\neg q)$
3/ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
4/ $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$	$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$

III. Forme propositionnelle

7) Classe propositionnelle

- Il est possible de ranger les formes propositionnelles en classes d'équivalence constituées de formes propositionnelles synonymes. Chaque classe est caractérisée par la table de vérité commune à toute les formes de la classe.

- Toutes forme synonyme d'une tautologie est une tautologie. Notée : V
- Toutes forme synonyme d'une antilogie est une antilogie. Notée : F

III. Forme propositionnelle

7) Classe propositionnelle

- Soient C et D deux classes dont on présente que la dernière colonne.

$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\neg\mathcal{C}$	$\mathcal{C}\wedge\mathcal{D}$	$\mathcal{C}\vee\mathcal{D}$
V	V	F	V	V
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V

III. Forme propositionnelle

8) Propriétés propositionnelles

➢ Commutativité

- $C1 \vee C2 = C2 \vee C1$
- $C1 \wedge C2 = C2 \wedge C1$

➢ Associativité

- $C1 \vee (C2 \vee C3) = (C1 \vee C2) \vee C3$
- $C1 \wedge (C2 \wedge C3) = (C1 \wedge C2) \wedge C3$

III. Forme propositionnelle | 8) Propriétés propositionnelles

➢ Idempotence
- $C1 \vee V = V$
- $C1 \wedge V = C1$
- $C1 \vee F = C1$
- $C1 \wedge F = F$
- $C1 \vee C1 = C1$
- $C1 \wedge C1 = C1$

➢ Distributivité
- $C1 \vee (C2 \wedge C3) = (C1 \vee C2) \wedge (C1 \vee C3)$
- $C1 \wedge (C2 \vee C3) = (C1 \wedge C2) \vee (C1 \wedge C3)$
- $C1 \wedge (C5 \vee C8 \vee C1 \vee C2) = C1$
- $C1 \vee (C5 \wedge C8 \wedge C1 \wedge C2) = C1$

III. Forme propositionnelle | 8) Propriétés propositionnelles

➢ Loi de la double négation

- $C1 \vee (\neg C1) = V$
- $C1 \wedge (\neg C1) = F$
- $\neg(\neg C1) = C1$
- $\neg V = F$
- $\neg F = V$

➢ Lois de De Morgan

- $\neg(C1 \wedge C2) = (\neg C1) \vee (\neg C2)$
- $\neg(C1 \vee C2) = (\neg C1) \wedge (\neg C2)$

III. Sémantique propositionnelle

1) Règles sémantiques

- Les règles syntaxiques nous donnaient la grammaire des énoncés, elles nous donnaient les conditions pour la bonne formation des formules.
- Les règles sémantiques nous donnent les conditions dans lesquelles un énoncé du langage propositionnel est vrai.
- Les tables de vérité nous permettent d'observer ces conditions de vérité. Mais au lieu d'utiliser des tableaux, on pourrait formuler ces conditions de vérité sous formes de règles.

III. Sémantique propositionnelle

9) Règles sémantiques

- $\neg$ P est vrai si et seulement P est faux.
- p $\wedge$ q est vrai si et seulement si p est vrai et q est vrai.
- p $\vee$ q est vrai si et seulement si p est vrai ou q est vrai ou les deux sont vrais.
- p $\rightarrow$ q est vrai si et seulement si p est faux ou q est vrai.
- p $\leftrightarrow$ q est vrai soit quand p et q sont tous les deux vrais soit quand p et q sont tous les deux faux.

III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

Définitions :

- On appelle **littéral** une formule réduite à une variable ou à la négation d'une variable. Par exemple p ; ¬q sont des littéraux.

- Un **minterm** est une conjonction de littéraux, ou un littéral seul. Par exemple $p \wedge \neg q \wedge r$ est un minterm.

- Une **formule** est en **forme normale disjonctive (FND)** si elle s'écrit comme une **disjonction de minterms** (ou si elle est **réduite à un minterm**). Exemple $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (t \wedge r)$

- Toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale disjonctive.

III. Sémantique propositionnelle

2) Formes normales disjonctives

Définitions :

- On peut trouver une FND simple à l'aide :
  - de la table de vérité
  - des tableaux de Karnaugh
  - de la méthode des arbres