



Fortgeschrittenen Praktikum II:

Holographie

Jessica Schäper
Moritz Bültmann

Durchgeführt von 14.03.2016 bis 18.03.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Abstract	1
2 Aufgabenstellung	2
3 Theoretische Grundlagen	3
3.1 Wellenformen	3
3.2 Interferenz	3
3.2.1 Zwei Ebene Wellen	4
3.2.2 Eine Ebene Welle und eine Kugelwelle	4
3.3 Kohärenz	5
3.4 Beugung	5
3.5 Fourier-Optik	5
3.6 Das Hologramm	6
3.7 Hologramm eines Punktes	7
3.8 Verschiedene Arten von Hologrammen	8
3.8.1 Flächen- und Volumenhologramm	8
3.8.2 Amplituden- und Phasenhologramm	8
3.8.3 Reflexions- und Transmissionshologramm	9
3.8.4 Im Versuch verwendetes Hologramm	9
3.9 Holographische Interferometrie	10
3.9.1 Doppelbelichtungsholographie	10
3.9.2 Echtzeitholographie	10
3.9.3 Echtzeitmittelungsholographie	10
3.10 Biegung eines Balkens	10
3.11 Eigenschwingungen einer runden eingespannten Platte	12
4 Aufbau	13
4.1 Verwendete Geräte	13
4.1.1 Helium-Neon-Laser	13
4.1.2 Laser-Modulator	13
4.1.3 Raumfilter	13
4.2 Michelson-Interferometer	13
4.3 Doppelbelichtungshologramm	15
4.4 Echtzeithologramm	16
4.5 Fourier-Interferometrie	17
5 Durchführung	18
5.1 Michelson-Interferometer	18
5.2 Doppelbelichtungshologramm	18
5.3 Echtzeithologramm	19
5.4 Fourier-Interferometrie	20
6 Auswertung	21
6.1 Michelson-Interferometer	21
6.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls verschiedener Metallbalken	21
6.3 Identifikation der Eigenmoden der Aluminiumplatte	25

7 Zusammenfassung und Diskussion	30
7.1 Michelson-Interferometer	30
7.2 Elastizitätsmodul der Metallbalken	30
7.3 Eigenmoden der Aluminiumplatte	30
8 Anhang	32
8.1 Grafiken	33
8.2 Laborheft	34
8.3 Quelltext (R)	36

1 Abstract

Seit Denis Gabor 1947 die theoretische Grundlage der Holographie gelegt hatte und mit Erfindung des Lasers 1963 als kohärente Lichtquelle und damit der Möglichkeit zur effektiven Umsetzung, hat sich eine Vielzahl an Anwendungen gefunden, in denen holographische Aufnahmen von äußerstem Nutzen sind. Das Aufdrucken von Hologrammen auf Geldscheine zum Fälschungsschutz und die holographische Aufnahme von archäologischen Fundstücken zur dreidimensionalen Untersuchung am Computer bei gleichzeitiger Schonung der Originale sind nur zwei von vielen Beispielen, bei denen sich die Holographie als Methode der Wahl durchsetzen konnte.

Dieser Versuch bietet einen kleinen Einblick in die Möglichkeit der Holographie als äußerst genaue Messmethode. Dabei wird einerseits mit der Doppelbelichtungsholographie die Verbiegung von drei Metallbalken (Stahl, Messing und Aluminium) bei Belastung durch ein Gewicht gemessen, wodurch das Elastizitätsmodul der Metalle berechnet werden kann.

Weiterhin werden mithilfe der Echtzeitmittelungstechnik die Eigenschwingungen einer eingespannten Aluminiumplatte bestimmt.

Die erhaltenen Werte für die Elastizitätsmodule sind:

Balken	Stahl	Messing	Aluminium
gemessenes E [GPa]	197 ± 12	99 ± 6	81 ± 5

Die gefundenen Eigenmoden sind:

Mode	gemessene Frequenz [Hz]
$m = 0, \nu = 0$	458 ± 5
$m = 1, \nu = 0$	1057 ± 10
$m = 2, \nu = 0$	1714 ± 15
$m = 2, \nu = 1$	2060 ± 20
$m = 1, \nu = 1$	2870 ± 25

Leider konnte der dritte Teil des Versuchs, die Untersuchung der Kreuzkorrelation zweier Spalte durch Fourier-Interferometrie, aufgrund schlechter Chemikalien und Zeitmangel nicht durchgeführt werden.

2 Aufgabenstellung

1. Aufbau eines Michelson-Interferometers, Prüfung der Empfindlichkeit des Aufbaus auf äußere Einflüsse (an den Tisch stoßen, Wärme, etc.) und Untersuchung der Kohärenzlänge des Lasers.
2. Messung der Durchbiegung von 3 Metallbalken durch Aufnahme eines Doppelbelichtungshologramms.
3. Untersuchung der Eigenschwingungen einer Aluminiumplatte mit Hilfe der Echtzeitholographie.
4. Untersuchung der Kreuzkorrelation zweier gegeneinander um variable Winkel verdrehter Spalte.

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Wellenformen

Die Quellfreien Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen haben die Form

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0 \quad \Delta B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B = 0$$

Für diese Gleichungen gibt es mehrere Lösungen. Die einfachste ist die **ebene Welle**.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)}$$

Der Wellenvektor \vec{k} zeigt in Ausbreitungsrichtung der Welle, ω ist die Winkelgeschwindigkeit mit der die Welle oszilliert und δ ist eine konstante Phasenverschiebung. Bei der komplexen Darstellung der ebenen Welle hat nur der Realteil physikalische Relevanz. Man kann die Lösung zudem in einen ortsabhängigen und einen zeitabhängigen Teil separieren.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}(r) e^{-i\omega t}$$

mit

$$\vec{A}(r) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta)}$$

Eine weitere Lösung ist die **Kugelwelle**.

$$\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{E}_0}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

Kugelwellen breiten sich gleichmäßig um einen Ursprung in alle Richtungen aus, sodass r nun einen Radius darstellt. Auch diese Lösung lässt sich analog zur ebenen Welle in einen ortsabhängigen und einen zeitabhängigen Teil separieren.

3.2 Interferenz

Wenn sich zwei Wellen überlagern, addieren sich ihre elektrischen Felder. Dabei ist die Phasenbeziehung und der Frequzunterschied zwischen den Wellen entscheidend für das Interferenzmuster. Treffen beispielsweise zwei Wellenberge (oder Wellentäler) aufeinander, so interferieren sie konstruktiv, die Gesamtauslenkung wird maximal und es kommt zu einem Interferenzmaximum. Interferieren ein Wellental und ein Wellenberg miteinander, so heben sie sich komplett (bei gleicher Amplitude) oder fast (bei unterschiedlicher Amplitude) auf, es kommt zu einem Interferenzminimum.

Licht hat eine Frequenz in der Größenordnung von 10^{14} Hz. Diese ist deutlich zu hoch um sie mit herkömmlichen Kameras oder gar dem menschlichen Auge auflösen zu können. Man erkennt also nur eine zeitliche Mittelung einer Lichtwelle. Das heißt, dass nur der räumliche Anteil $A(r)$ eine Rolle bei der Interferenz spielt.

Die für das Auge sichtbare Intensität berechnet sich durch:

$$I = AA^*$$

3.2.1 Zwei Ebene Wellen

Treffen zwei ebene Wellen mit den Intensitäten I_1, I_2 , den Phasen δ_1, δ_2 und den Wellenvektoren k_1, k_2 auf einem Schirm zusammen, so zeigt sich folgendes Interferenzmuster:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(r(k_1 - k_2) + (\delta_1 - \delta_2))$$

Geschieht dies unter dem Winkel θ und ohne Phasendifferenz, so ergibt sich¹ :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(kx \sin \theta)$$

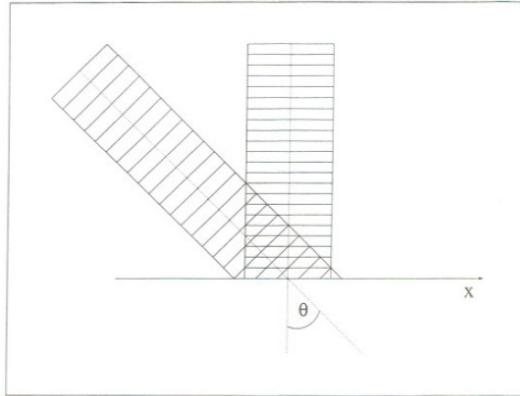


Abbildung 1: Interferenz von zwei ebenen Wellen[Unm95]

3.2.2 Eine Ebene Welle und eine Kugelwelle

Bei der Hologrammerstellung interferieren eine oder mehrere Kugelwellen (Objektwellen) mit einer ebenen Welle (Referenzwelle). Diese Form der Interferenz ist für den Versuch also von besonderer Bedeutung.

Es zeigt sich, dass das Interferenzmuster folgende Form hat:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(r - x \sin \theta))$$

Die $\frac{1}{r}$ -Abhängigkeit der Kugelwelle wurde dabei nicht berücksichtigt.

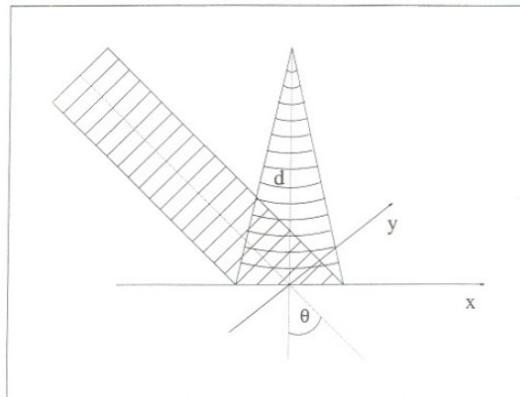


Abbildung 2: Interferenz einer ebenen und einer Kugelwelle[Unm95]

¹Herleitung siehe: [Unm95] S.5

3.3 Kohärenz

Um überhaupt ein stabiles Interferenzmuster zu erhalten, benötigt man möglichst kohärente Lichtquellen. Diese sind heutzutage in Form von Lasern verfügbar. Kohärente Lichtquellen emittieren nur monochromatische Wellenpakete der gleichen Phasenlage oder konstanter Phasendifferenz. In der Realität gibt es kein komplett kohärentes Licht, weshalb man eine Größe einführt, die angibt, wie kohärent das Licht ist.

Diese Größe ist die Kohärenzlänge. Sie gibt an bis zu welcher Weglängendifferenz eines geteilten Strahls noch Interferenz zwischen den Strahlteilen auftreten kann. Bei Lasern hat man üblicherweise eine Kohärenzlänge von mehreren Metern.

3.4 Beugung

Da Hologramme als Beugungsgitter dienen und im Experiment außerdem Pinholes (kleine Lochblenden) verwendet werden, ist der Beugungseffekt von zentraler Bedeutung.

Nach der linearen Wellenoptik würde man erwarten, dass ein Lichtstrahl nach einer Blende die Form der Blende annimmt (sofern diese komplett ausgeleuchtet ist). Doch nach dem Huygenschen Prinzip ist jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt einer Kugelwelle. Diese Tatsache führt bei kohärentem Licht zur Interferenz 'mit sich selbst' und damit zu einem klar erkennbaren Beugungsmuster hinter der Blende.

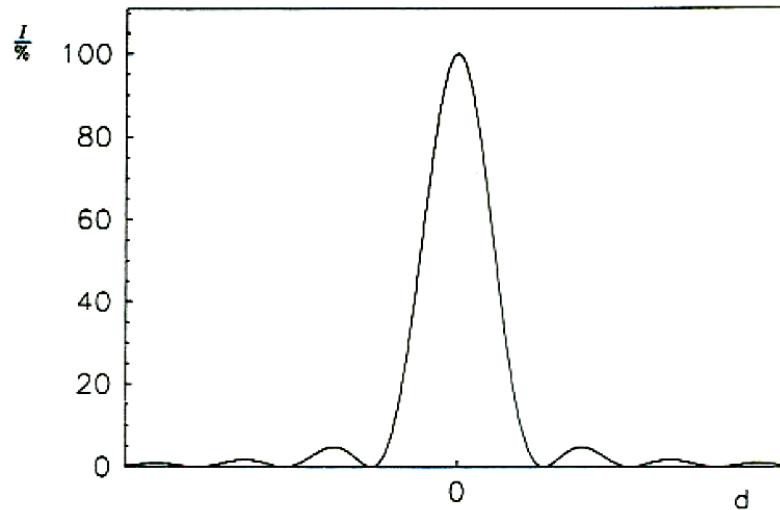


Abbildung 3: Die Intensitätsverteilung hinter einem Spalt:*Neben dem Intensitätsmaximum in der Mitte (0. Ordnung) finden sich wesentlich schwächere Maxima auf beiden Seiten.* [Unm95]

3.5 Fourier-Optik

Beugung an Blenden, Linsen und anderen optischen Elementen kann man durch die Fouriertransformation der Aperturfunktion des jeweiligen optischen Elements beschrieben werden. Die Aperturfunktion $g(x, y)$ gibt im wesentlichen Aufschluss über die Form des optischen Elements. So ist z.B. die Aperturfunktion eines Spaltes eine Rechteckfunktion und die Aperturfunktion einer Linse eine komplexe Funktion, die nur eine Phasenmodulation vornimmt. Im Fernfeld $z \gg 1$ gilt die Amplitudenverteilung

$$A(x, y) = \frac{D}{z\lambda} \mathcal{F}\{g(x, y)\} = \frac{D}{z\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x', y') e^{-i2\pi \frac{(xx'+yy')}{z\lambda}} dx' dy'$$

mit dem konstanten Phasenfaktor D ($DD^* = 1$), der Wellenlänge λ und dem Abstand z von der beugenden Struktur. Die Intensität berechnet sich auch hier mit

$$I = AA^*$$

Eine Faltung (oder Kreuzkorrelation) zweier Funktionen f, g hat die Form

$$\mathcal{K}\{f, g\} = f * g = g * f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau$$

Es gilt dass die Fouriertransformation einer Faltung das gleiche ist, wie das Produkt der Fouriertransformationen der zwei einzelnen Funktionen.

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$$
²

Beim Versuchsteil der Kreuzkorrelation kann sich diese Tatsache zu Nutze gemacht werden, um eine Kreuzkorrelation zwischen zwei zu einander verdrehten Spalten mithilfe geschickter Fourier-Transformation durch Linsen direkt auf einem Schirm zu beobachten.

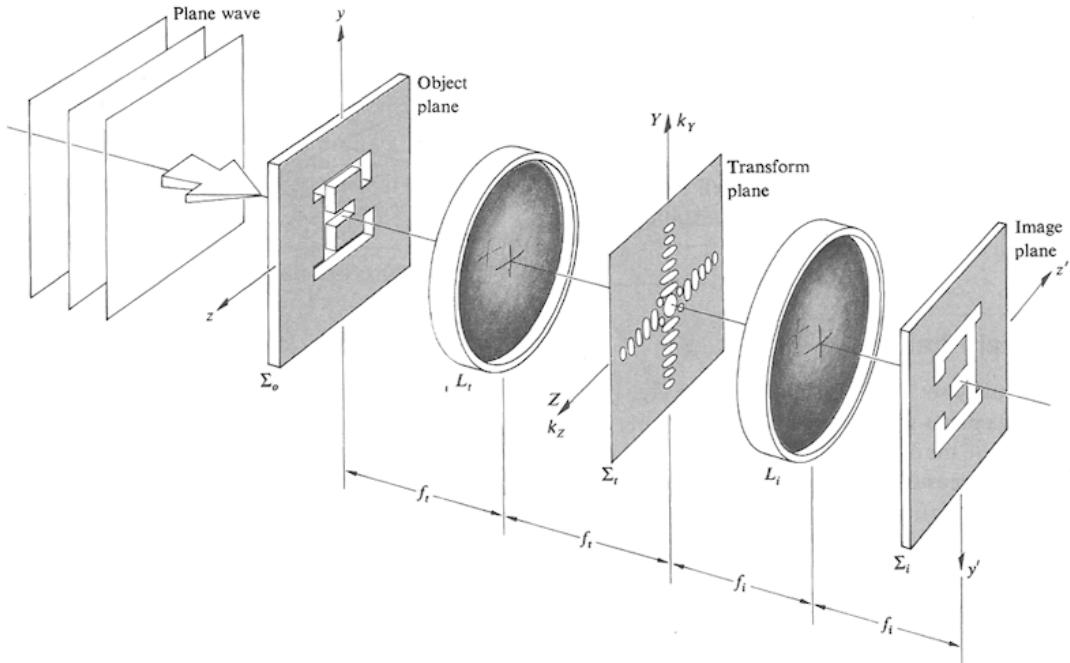


Abbildung 4: Schematischer Aufbau[3]: Links trifft eine ebene Welle auf den ersten Spalt. Danach wird das Signal in der ersten Linse fouriertransformiert. Die mittlere Platte ist das Hologramm des Signals des zweiten Spalts. Auf der Hologrammebene werden die Fouriertransformierten Signale multipliziert. Durch die zweite Linse wird dieses Signal zurücktransformiert, sodass durch die oben genannte Identität die Faltung übrig bleibt. Diese ist dann auf dem rechten Schirm zu sehen.

3.6 Das Hologramm

Auf gewöhnlichen Photos wird nur die Lichtintensität gespeichert, die Phaseninformation geht verloren und damit erhält man nur ein 2-dimensionales Bild. Bei der Aufnahme von Hologrammen wird ein Laserstrahl mit einem Strahleiter aufgeteilt und durch Linsen aufgeweitet. Der eine Strahl dient als Referenzwelle, die direkt auf die photoaktive Platte trifft. Der andere trifft auf ein Objekt, welches

²Beiweis siehe: [2]

dadurch Streulicht an die photoaktive Platte abstrahlt. Dort interferieren Streulicht und Referenzstrahl miteinander, wodurch die Phaseninformation erhalten bleibt. Die Intensitäten werden auf der photoaktiven Platte durch den Entwicklungsprozess gespeichert.

Durch die Entwicklung hat man eine Art komplexes Gitter erschaffen. Wenn man es mit der Referenzwelle beleuchtet, kann man in der ersten Beugungsordnung die Objektwelle vollständig rekonstruieren und erhält ein dreidimensionales Bild.

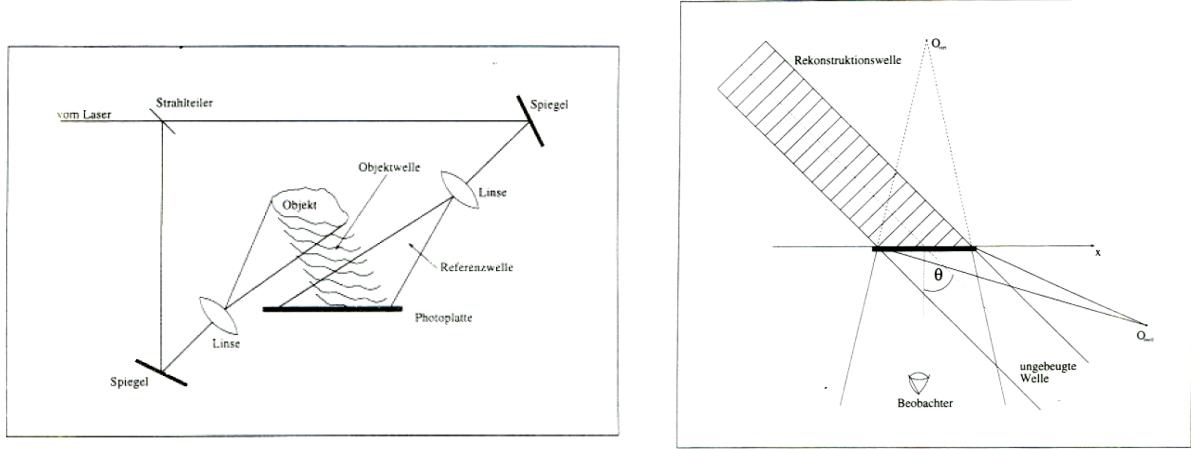


Abbildung 5: Schematischer Aufbau einer Hologrammerstellung (links) und Hologrammnutzung (rechts); *Im linken Bild wird ein Hologramm erstellt. Beide Strahlteile kommen an die Photoplatte. Im rechten Bild wird eine entwickelte Photoplatte nur mit dem Referenzstrahl beleuchtet und es entsteht ein reelles Bild, das man auf einem Schirm beobachten kann und ein virtuelles Bild, was man der Stelle des Objektes durch die Photoplatte hindurch sehen kann.*

3.7 Hologramm eines Punktes

Man kann sich in der Holographie ein reelles Objekt (mit 3-dim. Ausdehnung) als Zusammensetzung vieler kleiner Punkte vorstellen. Deshalb soll nun das Hologramm eines Punktes diskutiert werden.

Die Objektwelle ist eine Kugelwelle, die als Ursprung den o.g. Punkt hat.

$$A_1(r) = E_1(r) e^{ikr}$$

Die Referenzwelle ist eine ebene Welle der Form:

$$A_2(r) = E_2 e^{ikx \sin \theta}$$

Die Überlagerung von ebener Welle und Kugelwelle ergibt, wie in 3.2.2 berechnet, die Intensität:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(r - x \sin \theta))$$

Für $\theta = 0^\circ$ erhält man ein aus vielen kreisförmigen Ringen bestehendes Interferenzmuster. Andernfalls ist das Interferenzmuster verzerrt und somit sind die Ringe nicht mehr kreisrund.

Wird auf das so entstandene Hologramm die Rekonstruktionswelle gerichtet,

$$A_R(r) = A_R e^{ikx \sin \theta}$$

so berechnet sich der Anteil des elektrischen Feldes, der zeitunabhängig ist und somit die Bildinformation trägt, durch:

$$A(r) = T_A A_R(r)$$

T_A ist hierbei die Amplitudentransmission der Photoplatte. Die Amplitudentransmission erhält man mit:

$$T_A = T_0 - Ct_B I$$

T_0 und C sind Konstanten. t_B ist die Belichtungszeit und I ist die Intensität. Damit erhält man folgende Formel:

$$A(r) = \underbrace{[T_0 - Ct_B(I_1 + I_2)]A_R e^{ikx \sin \theta}}_{\text{keine Information}} - \underbrace{\sqrt{I_1 I_2} A_R C t_B e^{ikr}}_{\text{virtuelles Bild}} - \underbrace{\sqrt{I_1 I_2} A_R C t_B e^{-ikr} e^{2ikx \sin \theta}}_{\text{reelles Bild}}$$

- Der erste Term ist wieder eine ebene Welle und enthält keinerlei Information über das Objekt.
- Der zweite Term beschreibt das virtuelle Bild, da er bis auf die Intensität der Objektwelle entspricht. Betrachtet man das virtuelle Bild durch das Hologramm hindurch, so befindet dieses sich am Ort des Objektpunktes.
- Der dritte Term stellt das reelle Bild dar.

3.8 Verschiedene Arten von Hologrammen

3.8.1 Flächen- und Volumenhologramm

Da die Photoplatte auf der das Gitter für das Hologramm gebildet wird, nicht unendlich dünn ist, dringen die Wellen in das Medium ein und interferieren dort. Das Gitter ist also nicht auf die Oberfläche beschränkt, sondern es wird dreidimensional. Ganz ähnlich zur Bragg-Reflexion an Kristallgittern, wird damit nur eine bestimmte Wellenlänge, wenn der Strahl im richtigen Winkel auf das Gitter trifft, zu einem Intensitätsmaximum reflektiert.

Da bei der Holographie Laser mit bestimmter Wellenlänge verwendet werden, muss das Hologramm bei der Rekonstruktion im gleichen Winkel zur Rekonstruktionswelle stehen, wie zur Referenzwelle bei der Aufnahme.

Liegt die Dicke der Photoplatte im Bereich der Wellenlänge des Lasers, handelt es sich um ein Flächen-, ist sie deutlich größer (Vielfaches der Wellenlänge), um ein Volumenhologramm.

3.8.2 Amplituden- und Phasenhologramm

Beugungsgitter können in zwei Arten unterteilt werden: Amplituden- und Phasengitter. Bei Amplitudengittern gibt es Stellen, an denen Licht durchkommt und solche, an denen es nicht durchkommt. Dies sorgt dafür dass die Amplitude und somit die Intensität der Welle geschwächt wird.

Phasengitter haben an unterschiedlichen Stellen unterschiedliche optische Dichten bzw. Brechungsindizes. Dies sorgt für eine Phasenmodulation der Welle. Die Intensität wird dabei kaum geschwächt. Bei Hologrammen können die beiden Arten durch unterschiedliche Entwicklung der Photoplatten erzeugt werden. Für ein Amplitudenhologramm wird das bei der Entwicklung entstandene Silber nur fixiert, wird jedoch ein Bleichmittel verwendet, wird das Silber in lichtdurchlässiges Silberhalogenid verwandelt, was zu einem Phasenhologramm führt.

3.8.3 Reflexions- und Transmissionshologramm

Beim Belichten der Photoplatte ist es sowohl möglich, den Objekt- und den Referenzstrahl von der selben Seite einfallen zu lassen, als auch von verschiedenen Seiten zu bestrahlen. Die Ausrichtung der Strahlen bei der Belichtung legt damit auch gleich fest, von welcher Seite das Hologramm später betrachtet werden muss.

Treffen die beiden Strahlen von der gleichen Seite auf die Platte, spricht man von einem Transmissionshologramm, denn es muss im transmittiertem Licht, also von der dem Referenzstrahl abgewandten Seite der Photoplatte betrachtet werden. Wurde die Photoplatte bei der Belichtung von verschiedenen Seiten bestrahlt, handelt es sich um ein Reflexionshologramm und muss im reflektierten Licht betrachtet werden.

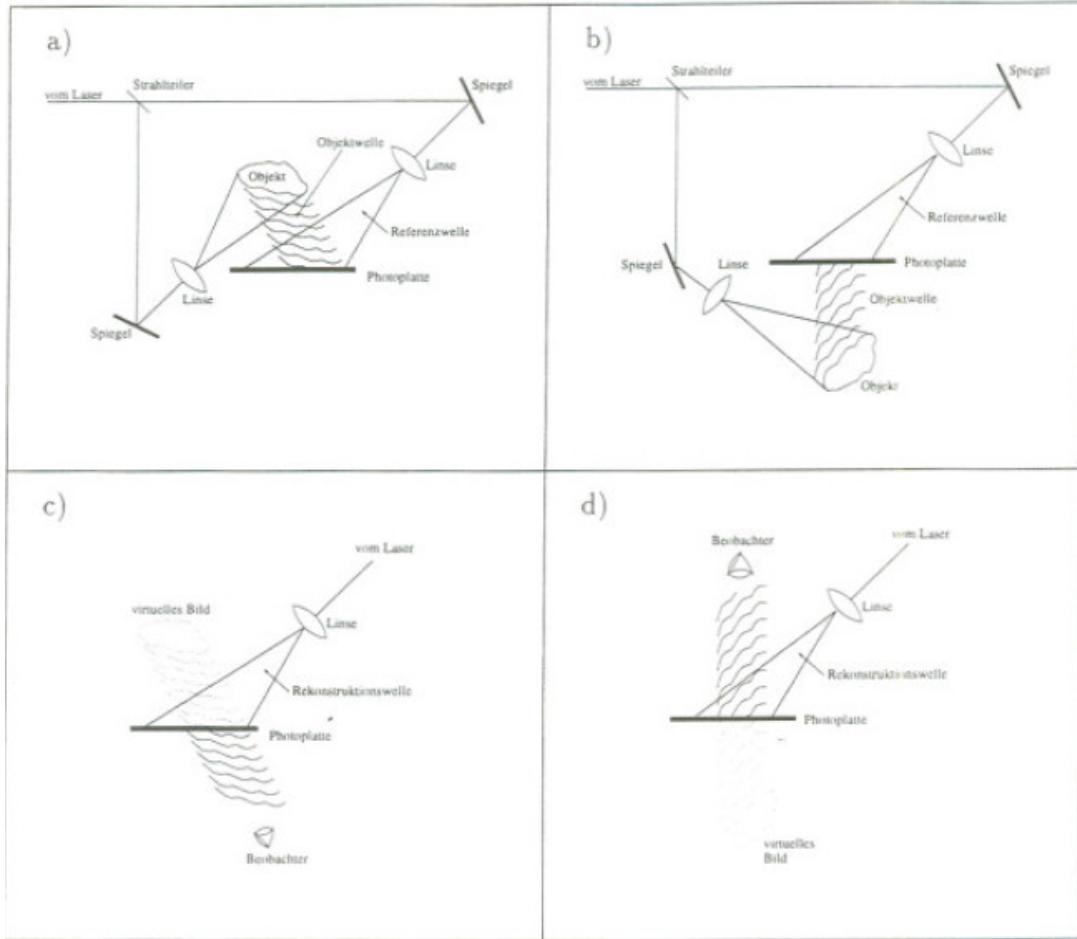


Abbildung 6: Vergleich von Reflexions- und Transmissionshologramm: *Das Transmissionshologramm wird bei der Aufnahme mit beiden Strahlen von der gleichen Seite beleuchtet (a) und im transmittierten Licht beobachtet (c). Das Reflexionshologramm wird bei der Aufnahme von unterschiedlichen Seiten beleuchtet (b) und im reflektierten Licht betrachtet (d). Die Beobachtung geschieht also beide Male von der entgegengesetzten Seite des Objekts.* [Unm95]

3.8.4 Im Versuch verwendetes Hologramm

In den meisten Fällen ist es sinnvoll, bei der Holographie einen möglichst hohen Beugungswirkungsgrad (Verhältnis von eingestrahlter Intensität zur Intensität bei der ersten Beugungsordnung) anzustreben. Wie in Tabelle 1 zu sehen ist, bietet sich hier ein Phasen- und Volumenhologramm an, welches im transmittierten Licht betrachtet wird. Außerdem hat ein Transmissionshologramm den Vorteil, dass es aufbautechnisch etwas einfacher zu bewerkstelligen ist, als ein Reflexionshologramm.

Es wird eine Zwischenstufe von Flächen- und Volumenhologramm verwendet, denn Flächenhologramme haben den großen Vorteil dass sie nicht unter absolut gleichem Einfallwinkel betrachtet werden müssen, den sie bei der Aufnahme hatten.

	Flächenhologramm		Volumenhologramm			
	Transmission		Transmission		Reflexion	
	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase
max. Beugungswirkungsgrad in %						
theoretisch	6,25	33,9	3,7	100	7,2	100
experimentell erreicht	6,0	32,6	3,0	90	3,8	80

Tabelle 1: Vergleich des Beugungswirkungsgrades von verschiedenen Hologrammartarten:*Es zeigt sich, dass Phasen- und Volumenhologramme einen deutlich höheren Beugungswirkungsgrad haben wie Amplituden- und Flächenhologramme. [Unm95]*

3.9 Holographische Interferometrie

Eine äußerst genaue Methode, kleine Veränderungen von Objekten sichtbar zu machen und zu messen, stellt die holographische Interferometrie dar. Das Grundprinzip beruht darauf, das Hologramm eines Objekts mit einem Hologramm des Objekts in einem anderen Zustand oder mit dem Objekt selbst zu vergleichen.

3.9.1 Doppelbelichtungsholographie

Bei der Doppelbelichtungsholographie wird das Objekt in zwei Zuständen auf der gleichen Photoplatte aufgenommen. Dabei sollte die Belichtungszeit gleich lang sein. Bei der Betrachtung des Hologramms sieht man dann das Interferenzmuster, welches durch die Überlagerung der beiden Wellenfelder der zwei Hologramme der unterschiedlichen Zustände des Objekts hervorruft wird. Aus diesem Muster kann dann beispielsweise die Verbiegung des Objekts vermessen werden.

3.9.2 Echtzeitholographie

Hier wird ein Hologramm des ruhenden Objekts aufgenommen, welches dann in 'Echtzeit' mit dem wirklichen Objekt überlagert wird. Bewegungen des Objekts können damit anhand des Interferenzmusters sichtbar gemacht und rekonstruiert werden.

3.9.3 Echtzeitmittelungsholographie

Die Echtzeitmittelungsholographie entspricht vom Prinzip her der Echtzeitholographie: Das Hologramm eines ruhenden Objekts wird mit dem Objekt selbst überlagert und erzeugt Interferenz. Hierbei werden allerdings Prozesse betrachtet, welche für das menschliche Auge und Kameras deutlich zu schnell sind, als dass sie aufgelöst werden könnten (z.B. Schwingungen einer Platte). Man sieht also lediglich eine zeitliche Mittelung, von Bedeutung ist nur der räumliche Anteil der Bewegung.

3.10 Biegung eines Balkens

Man betrachtet einen horizontal einseitig eingespannten Balken als dünne übereinanderliegende Schichten. Wird dieser Balken durch eine Kraft verbogen, so gibt es eine Schicht in der Mitte des Bal-

kens, deren Länge sich nicht ändert. Alle anderen Schichten werden entweder gestreckt oder gestaucht.

Der Balken habe die Länge a , die Breite b und die Tiefe c . Man führt ein Koordinatensystem ein, indem die x-Achse in Richtung der Länge des Balkens ist und die Kraft in negative z-Richtung wirkt.

Bei der Verbiegung entsteht ein Winkel $d\alpha$ zwischen zwei Querschnitten im Abstand dx . Damit gilt für die Länge l einer Schicht im Abstand z zur neutralen Schicht.

$$l = (r + z)d\alpha$$

Für die relative Längenänderung gilt also:

$$\frac{(r + z)d\alpha - rd\alpha}{dx} = z \frac{d\alpha}{dx} = \frac{z}{r}$$

Andererseits gilt für das Elastizitätsmodul E :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{dF}{dzdy}$$

Setzt man die zwei Beziehungen gleich erhält man:

$$dF = \frac{zE}{r} dz dy$$

Diese Kraft erzeugt ein Drehmoment was die Kraft am Balkenende $x = a$ gerade Kompensiert. Für kleine Krümmungen erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{12F}{Ebc^3}(a - x)$$

Durch zweifache Integration erhält man schlussendlich:

$$z = -\frac{12F}{Ebc^3} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

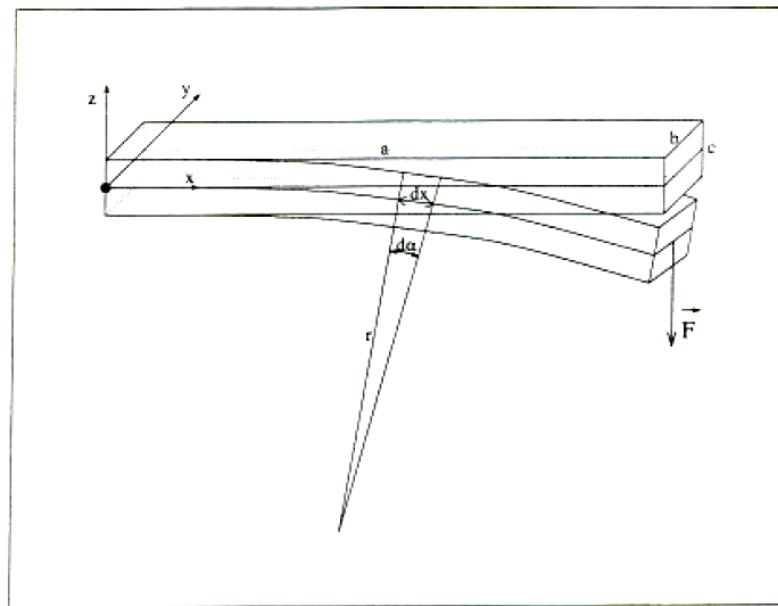


Abbildung 7: Schematische Darstellung eines gebogenen Balkens [Unm95]

3.11 Eigenschwingungen einer runden eingespannten Platte

Der Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2 E}{12\rho(1-\mu^2)} \Delta \Delta u = 0$$

Δ ist der Laplace-Operator, h ist die Dicke der Platte, ρ ist die Dichte der Platte, μ ist die Poissonzahl der Platte und E ist das Elastizitätsmodul der Platte.

Nach der Durchführung mehrerer Separationsansätze, Einführung von Polarkoordinaten und einem numerischen Lösungsansatz erhält man schließlich³ :

$$f_{m\nu} = \frac{x_{m\nu}^2 h}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\mu^2)}}$$

³Genaue Herleitung: siehe [Unm95], Anhang

4 Aufbau

4.1 Verwendete Geräte

4.1.1 Helium-Neon-Laser

In einer Gasröhre, an deren Enden sich halbdurchlässige Spiegel befinden (Resonator) werden durch Gasentladung mit Hochspannungs Helium-Atome (Pump-Medium) angeregt. Diese geben ihre Energie strahlungslos durch Stöße an Neon-Atome (Laser-Medium) ab, welche dadurch in einen angeregten Zustand gelangen der aufgrund verbotener Dipolübergänge relativ langlebig ist, was eine Besetzungs-inversion (mehr angeregte Atome als Atome im Grundzustand) erzeugt. Die Helium-Atome geben durch stimulierte Emission (durch ein Photon) jeweils zwei Photonen ab und gehen in den Grundzustand über. Die spontane Emission ist durch die Langlebigkeit des angeregten Zustands unterdrückt, ist aber wichtig um beim Anschalten des Lasers die ersten stimulierten Emissionen zu erzeugen.

4.1.2 Laser-Modulator

Hinter dem Laser befindet sich ein elektrooptischer Modulator. Das polarisierte Licht wird in diesem spannungsabhängig gedreht und tritt anschließend durch einen Polarisationsfilter wieder aus. So kann die Intensität des Strahls beeinflusst werden, indem die Spannung z.B. so eingestellt wird, dass das Licht im Modulator gerade in die gleiche Richtung gedreht wird, wie der Polarisator steht. Dann kann das gesamte Laserlicht den Polarisator passieren. Dreht der Modulator das Licht im 90°-Winkel zum Polarisator, kommt kein Licht hindurch.

4.1.3 Raumfilter

Raumfilter werden dazu verwendet, Laserlicht zu filtern. Indem der Strahl durch eine Linse mit sehr kleiner Brennweite (mm-Bereich) und anschließend durch eine winzige Blende (Pinhole, Durchmesser im μm -Bereich) geleitet wird, können bei richtiger Justage ungewünschte Interferenzerscheinungen, welche durch verschmutzte Bauteile und Staubpartikel in der Luft, hervorgerufen werden, beseitigt werden.

4.2 Michelson-Interferometer

Bei einem Michelson-Interferometer wird ein Laserstrahl mit einem halbdurchlässigen Spiegel (hier wird eine Scheibe verwendet, deren Durchlässigkeit durch Drehen verändert werden kann) in zwei Teilstrahlen aufgeteilt, indem ein Teil des Strahls zur Seite reflektiert wird und der andere geradeaus durch den Spiegel durchtritt. Beide Strahlen treffen jeweils auf einen weiteren Spiegel, der sie zurück zum Strahlteiler reflektiert. Dort wird wiederum ein Teil der Strahlen reflektiert und ein anderer transmittiert (dabei wird auch Licht in Richtung des Lasers reflektiert/transmittiert). Die beiden Strahlen werden also überlagert wodurch es zu Interferenz kommen kann, welche im vierten Arm des Interferometers beobachtet werden kann.

Da in diesem Aufbau mit unaufgeweiteten Strahlen gearbeitet wird, müssen die beiden Strahlen sehr genau zur Deckung gebracht werden, damit Interferenz zu sehen ist. Zur Feinjustierung werden die Schrauben an den Spiegel verwendet.

Der Aufbau wird so auf dem Tisch platziert, dass viel Platz zur Verfügung steht um die beiden Weg-längen der Teilstrahlen für die Untersuchung der Kohärenzlänge des Lasers möglichst unterschiedlich zu wählen.

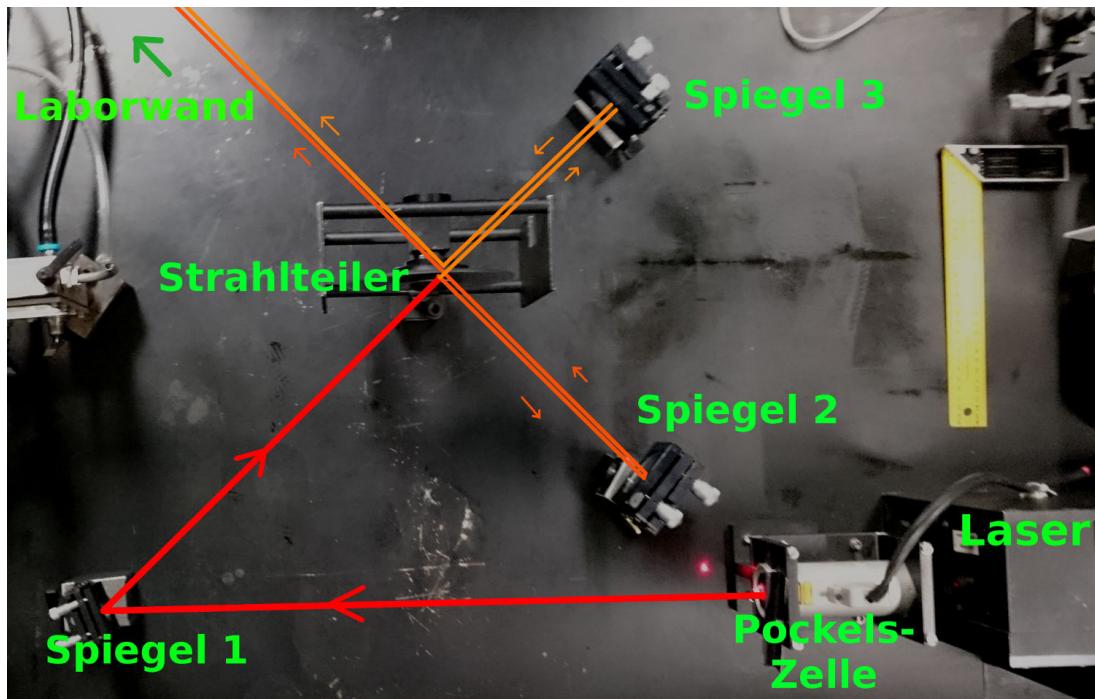


Abbildung 8: Aufbau des Michelson-Interferometers: Der Laserstrahl wird zunächst über Spiegel 1 auf den Strahlteiler reflektiert, dort in zwei Teilstrahlen aufgeteilt, an Spiegel 2 und 3 reflektiert und dann vom Strahlteiler wieder überlagert. Das Interferenzmuster wird auf die Laborwand abgebildet.

4.3 Doppelbelichtungshologramm

Für die Doppelbelichtungsholographie wird der Laserstrahl mit dem Strahlteiler in einen Objekt- und einen Referenzstrahl aufgeteilt. Das Intensitätsverhältnis der beiden Strahlen kann mit der drehbaren Scheibe verändert werden. Das Verhältnis von Referenz- zu Objektstrahl sollte ca. 20/1 betragen. Der Referenzstrahl wird mit Spiegel 1 auf die Photoplatte ausgerichtet. Anschließend wird Raumfilter 1 so justiert wie in [Unm95] S.39 beschrieben. Ebenso wird der Objektstrahl über Spiegel 2 und Raumfilter 2 auf das Objekt (3 Balken) ausgerichtet. Das Objekt und die Photoplatte werden so zueinander ausgerichtet, dass beide Lichtkegel möglichst übereinander und mittig auf der Photoplatte liegen. Dabei wird die Photoplatte so ausgerichtet dass der Referenzstrahl ungefähr im Brewsterwinkel (56°) auf diesen trifft. So werden Störungen durch Reflexionen möglichst gering gehalten.

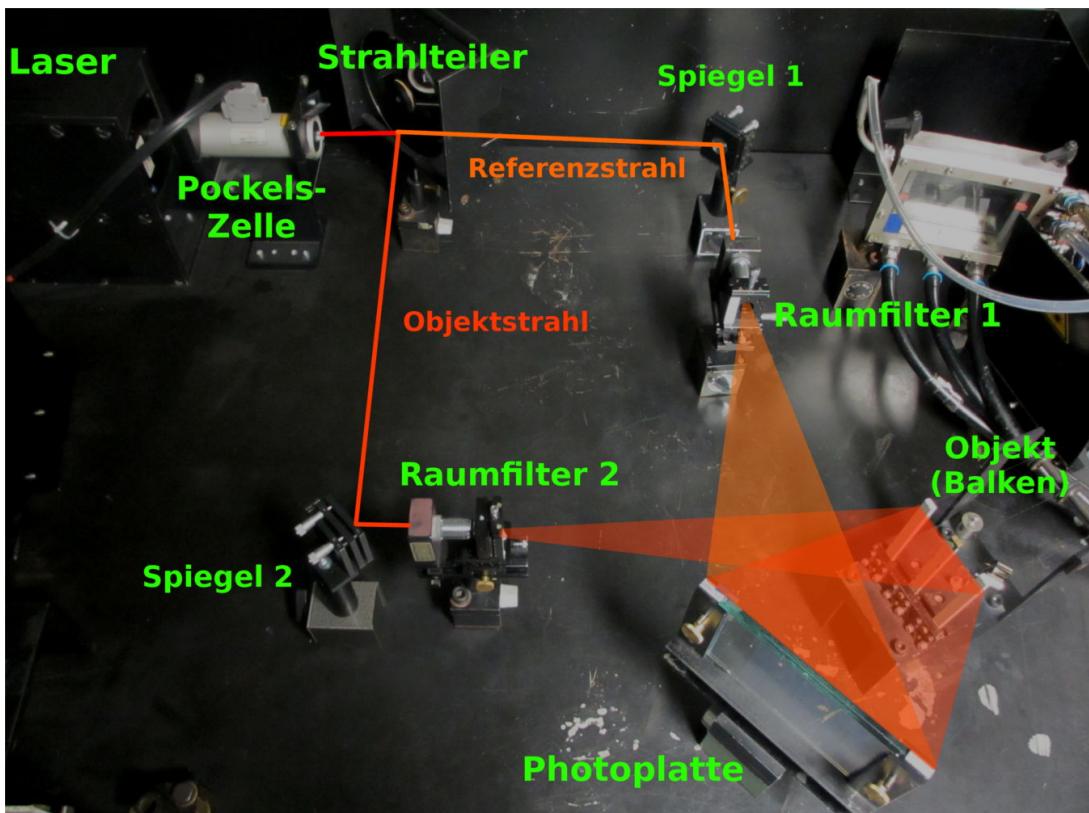


Abbildung 9: Aufbau zur Aufnahme eines Doppelbelichtungshologramms: *Der Laserstrahl wird über einen Strahlteiler in Objekt- und Referenzstrahl aufgeteilt welche über Spiegel, Raumfilter und das Objekt auf die Photoplatte fallen.*

4.4 Echtzeithologramm

Der Aufbau für die Echtzeitholographie ist der gleiche wie bei der Doppelbelichtungsholographie. Als Objekt wird hier eine eingespannte, runde Aluminiumplatte verwendet, hinter der ein Lautsprecher steht, welcher an einen Frequenzgenerator angeschlossen ist. Als Photoplattenhalter dient eine Flutungsanlage, damit die Platte direkt am Ort der Belichtung entwickelt werden kann. Dies stellt sicher, dass sich das Hologramm bei der Betrachtung an der selben Stelle befindet wie bei seiner Entstehung.

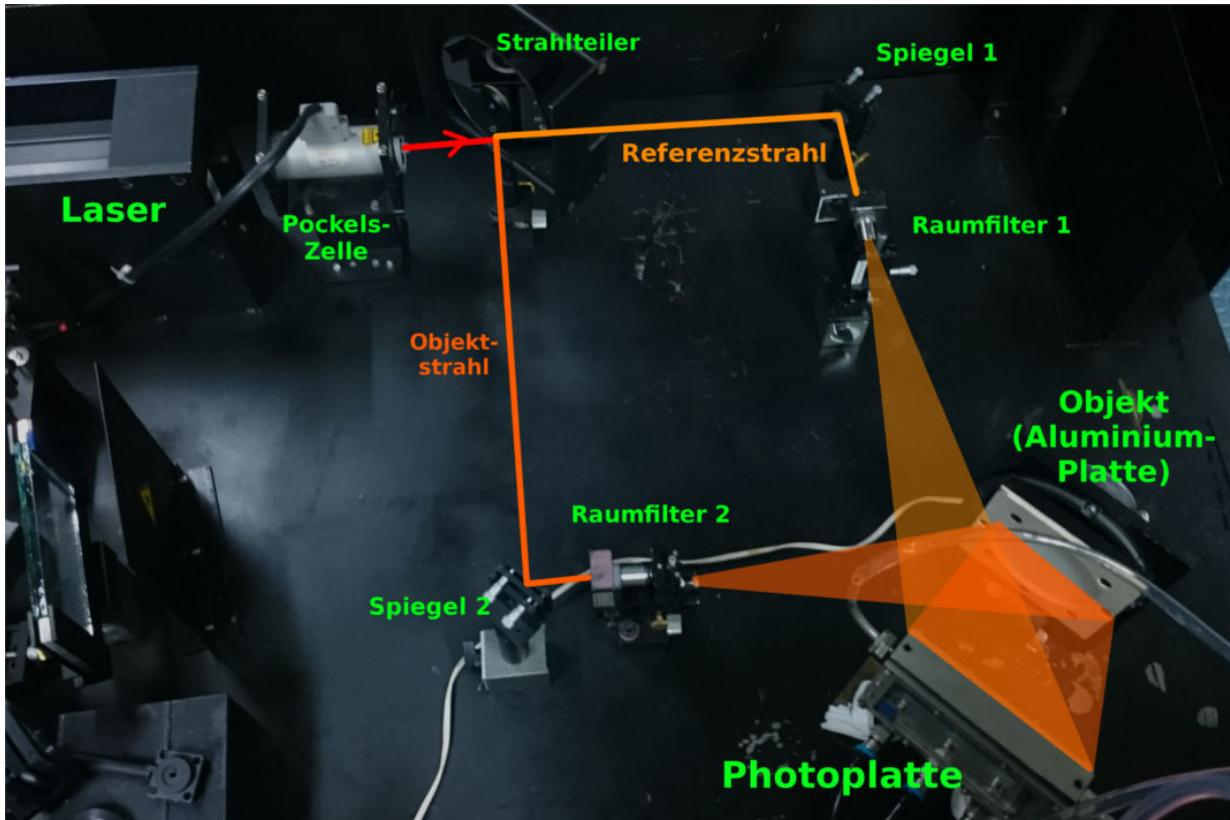


Abbildung 10: Aufbau zur Aufnahme eines Echtzeithologramms:*Der Aufbau der Doppelbelichtungsholographie wird beibehalten, es wird lediglich das Objekt und die Photoplattenhalterung ausgetauscht. Die Entwicklung der Platte geschieht mit einer Durchflutungsanlage direkt am Aufbau.*

4.5 Fourier-Interferometrie

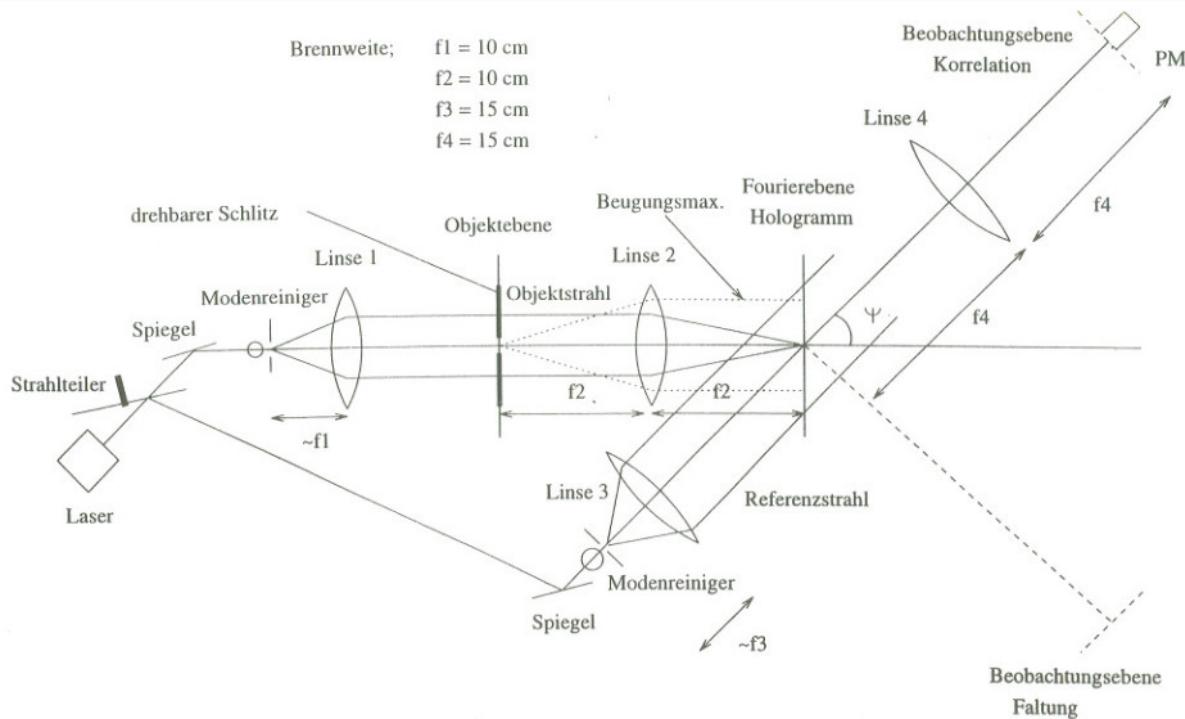


Abbildung 11: Aufbau zur Fourier-Interferometrie: In diesem Aufbau befinden sich zusätzliche Linsen, die als Fourier-Transformatoren dienen. [Bam96]

Der Aufbau zur Durchführung der Fourier-Interferometrie ist etwas komplizierter als die anderen beiden. Auch hier wird der Laserstrahl direkt hinter dem Modulator in zwei Teile aufgeteilt. Der Objektstrahl wird hinter dem Raumfilter durch eine Linse parallelisiert und tritt durch den Spalt (das Objekt) hindurch über eine zweite Linse mit gleicher Brennweite auf die Photoplatte. Der Referenzstrahl wird hinter dem Raumfilter ebenfalls durch eine Linse parallelisiert und direkt auf die Photoplatte gerichtet. Auf der Photoplatte wird also die Fouriertransformation des Beugungsbildes des Spaltes aufgenommen.

Zur Beobachtung wird hinter der Photoplatte eine weitere Linse aufgestellt, die das Licht in eine Kamera fokussiert, auf der die Kreuzkorrelation zu sehen sein sollte. Zusätzlich kann in senkrechter Richtung zum Referenzstrahl hinter der Photoplatte auf einem Schirm die Faltung beobachtet werden.

5 Durchführung

5.1 Michelson-Interferometer

Nach Aufbau des Strahlengangs wird das Interferenzmuster an der Wand beobachtet. Dabei wird knapp vor der Wand eine Linse in den Strahl gehalten damit das Muster an der Wand größer und deutlicher zu erkennen ist.

Dann wird der Aufbau auf unterschiedliche Weisen "gestört":

- an den Tisch stoßen
- auf dem Boden neben dem Tisch hüpfen
- Türe zuknallen
- eines der Bauteile mit dem Lautsprecher beschallen
- Feuerzeug in den Strahlengang halten

Zusätzlich wird die Weglängendifferenz der beiden Strahlen so weit vergrößert, wie es die Größe des Tisches zulässt um die Kohärenzlänge zu untersuchen.

5.2 Doppelbelichtungshologramm

Für die Doppelbelichtungsholographie werden zunächst im Abzug drei Bäder mit Entwickler, Bleicher und Wasser vorbereitet. Außerdem werden Gewichte von 20g an Stab 2 & 3 bzw. 50g an Stab 1 (dieser war wesentlich steifer als die anderen beiden) gehängt.

Zur groben Orientierung für die Dauer der Belichtung wird die Leistung des Objekt- und des Referenzstrahls am Ort der Photoplatte mit einer Photodiode gemessen. Gemäß Verpackungsangabe muss die Platte mit $100\mu J/cm^2$ belichtet werden. Aus der Gesamtleistung der beiden Strahlen P_{ges} und der Fläche der Photodiode A kann damit die theoretische Belichtungsdauer berechnet werden:

$$T_{bel} = \frac{A \cdot 100\mu J/cm^2}{P_{ges}}$$

Mit $A \approx 0.0625\mu m$ und $P_{ges} = 5\mu W$ ergibt sich ein Wert von $T_{bel} = 1.25s$. Auf Anweisung des Assistenten sollte mindestens das Zehnfache der errechneten Zeit verwendet werden. Bei der Endgültigen Wahl der Belichtungszeit wurde sich zusätzlich an [1], S.11 orientiert.

Bei komplett abgedunkeltem Raum und verdecktem Laser wird die Photoplatte aus der Verpackung genommen und in die Halterung eingespannt. Dann wird mit dem Laser belichtet. Dabei muss darauf geachtet werden dass möglichst keine Störung auftritt, es wird also während der Belichtung weder geredet noch geläufen. Nach der Hälfte der Zeit werden die an den Balken hängenden Gewichte auf die Ablagefläche der Balkenhalterung gestellt.

Nach Ende der Belichtungszeit wird der Laser wieder verdeckt und die Platte aus ihrer Halterung genommen. Mit den vorbereiteten Chemikalien wird die Platte nun entwickelt. Die genauen Zeiten sind Tabelle 2 zu finden. Das Wässern der Photoplatte geschieht unter laufendem Wasser am Waschbecken. Damit keine Chemikalien in den Abfluss geraten, muss vorher im Wasserbad kurz vorgewässert werden.

Arbeitsschritt	Dauer
Belichtungszeit pro Zustand	40s
Entwickeln	4min
Wässern	2min
Bleichen	2min
Wässern	10min

Tabelle 2: Verwendete Zeiten für die Erstellung des Doppelbelichtungshologramms der (verbogenen) Balken

Nachdem die Photoplatte trocken ist, wird sie wieder in die Halterung am Aufbau eingespannt und nur mit dem Referenzstrahl beleuchtet. Blickt man nun durch die Photoplatte auf die Balken, sieht man auf diesen das Interferenzmuster der beiden Hologramme: Horizontale Streifen. Mit einem Lineal kann nun für jeden Balken der Abstand der einzelnen Striche zum Einspannpunkt bestimmt werden.

5.3 Echtzeithologramm

Die Photoplatte wird bei absoluter Dunkelheit aus der Verpackung genommen und zunächst in der Durchflutungsanlage 10 Minuten lang eingeweicht, bevor mit der Belichtung begonnen werden kann. Zur Entwicklung bleibt die Platte in der Durchflutungsanlage in welche die Chemikalien nacheinander eingelassen werden. Es hat sich als äußers hilfreich erwiesen, dabei am Überlaufschlauch zu horchen, wann die Anlage voll ist (leises Gluckern).

Die genauen Zeiten sind in Tabelle 3 zu finden. Hier wurde das Licht im Raum bereits beim Bleichen angemacht, um unnötiges Überlaufen beim Befüllen zu vermeiden. Geblichen wurde bis zur Durchsichtigkeit (teilweise milchig) der Platte.

Arbeitsschritt	Dauer
Belichtungszeit	40s
Entwickeln	3min
Wässern	2min
Bleichen	ca.10-15s
Wässern	3x30s

Tabelle 3: Verwendete Zeiten für die Erstellung des Echtzeithologramms der Aluminium-Platte

Nach dem Entwicklungsprozess wird der hinter der Aluminiumplatte angebrachte Lautsprecher mit einem **Frequenzgenerator**, der an einen **Verstärker** angeschlossen ist, betrieben. Die Verstärkung, und damit die Lautstärke des Lautsprechers, kann stufenlos eingestellt werden. Der Frequenzgenerator ist weiterhin mit einem **Pulsgenerator** Input verbunden. Der Pulsgenerator erzeugt periodische Rechtecksignale mit gleicher Frequenz wie der Frequenzgenerator. Die Länge und Phasenlage der Rechteckpulse können variiert werden. Der Pulsgenerator gibt dieses Signal an den Laser-Modulator weiter, der dann periodisch den Laser blockt und durchlässt.

An einem Oszilloskop werden das Frequenzgeneratorsignal und das Pulsgeneratorsignal sichtbar gemacht. Das Rechtecksignal wird durch Einstellen des Pulsgenerators möglichst mittig auf die Maxima des Sinussignals des Frequenzgenerators ausgerichtet ('Delay'). Danach wird es möglichst schmal eingestellt ('Duration'), um einen hohen Kontrast im Hologramm zu erzielen.

Nun können die Eigenschwingungen der Aluminiumplatte durch variieren der Frequenz am Frequenzgenerator gefunden werden. Diese sind als virtuelle Bilder durch die Photoplatte hindurch an der Stelle der Aluminiumplatte zu sehen. Die Frequenzen können an einem Frequenzmessgerät abgelesen werden, das durch den Pulsgenerator betrieben wird.

5.4 Fourier-Interferometrie

Da die Zeit knapp wurde und dieser Teil des Versuchs für einwöchige Gruppen eher als Zusatz gedacht ist, wurde nach Aufbau des Strahlengangs zum Ausprobieren eine Photoplatte angefertigt, indem die Zeiten aus der Echtzeittechnik übernommen wurden. Da inzwischen neues (schlechteres) Bleichmittel verwendet werden musste, dauerte der Bleichvorgang ca. 1-2 Stunden. Auf dem Hologramm war nichts zu sehen und die geringe Motivation bei Aussicht auf die ewige Bleichzeit führte zu der Entscheidung, diesen Versuchsteil nicht erneut durchzuführen.

6 Auswertung

6.1 Michelson-Interferometer

Die genauen Armlängen des Interferometers wurden nicht ermittelt, jedoch reichte die gegebene optische Bank nicht aus, um das Interferenzmuster zu zerstören. Der maximal erreichte Weglängenunterschied betrug ca. 50 cm. Daraus lässt sich schließen, dass der Laser eine Kohärenzlänge hat, die länger ist, als die in der Staatsexamensarbeit [Unm95] angegebene Kohärenzlänge von 30 cm.

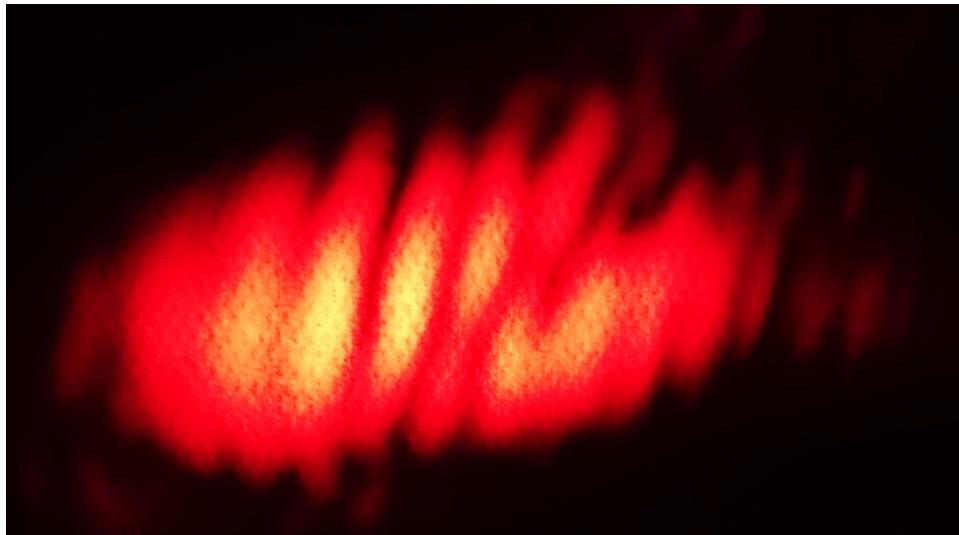


Abbildung 12: Das Interferenzmuster der beiden überlagerten Strahlen aus dem Michelson-Interferometer ist nach Vergrößerung mit einer Linse deutlich an der Laborwand zu erkennen

Bei allen angewandten Störungen war eine Veränderung des Interferenzmusters deutlich zu erkennen. Zudem wurde entdeckt, dass das Interferenzmuster auch zittert, wenn man nicht aktiv den Aufbau stört. Dieses Zittern kann durch die Lüftung und durch die Tätigkeiten anderer Personen im Gebäude entstehen.

Es zeigt sich also, dass die erfolgreiche Aufnahme eines Hologramms zumindest teilweise Glückssache ist. Zur Minimierung der Störungen könnte man Messungen nachts oder in Mittagspausen durchführen, wenn sich möglichst wenig Personen im Gebäude befinden.

6.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls verschiedener Metallbalken

Bei der Rekonstruktion des Hologramms wurde mit einem Lineal neben den Balken der Abstand der Helligkeitsmaxima zur Einspannstelle der Balken abgelesen und notiert. Es erschien jedoch sinnvoller, eine Auswertung am Computer vorzunehmen da mit dieser die Abstände deutlich genauer bestimmt werden können. Dazu wurden die durch die Doppelbelichtungstechnik erstellten Interferenzmuster auf den Metallbalken mithilfe einer Digitalkamera photographiert. Zudem wurden drei weitere Bilder erstellt, auf denen an jeweils einem Balken ein Lineal angebracht ist. Die Bilder wurden alle aus der selben Position geschossen und können deshalb ohne weiteres mit einem Bildbearbeitungsprogramm übereinandergelegt werden.

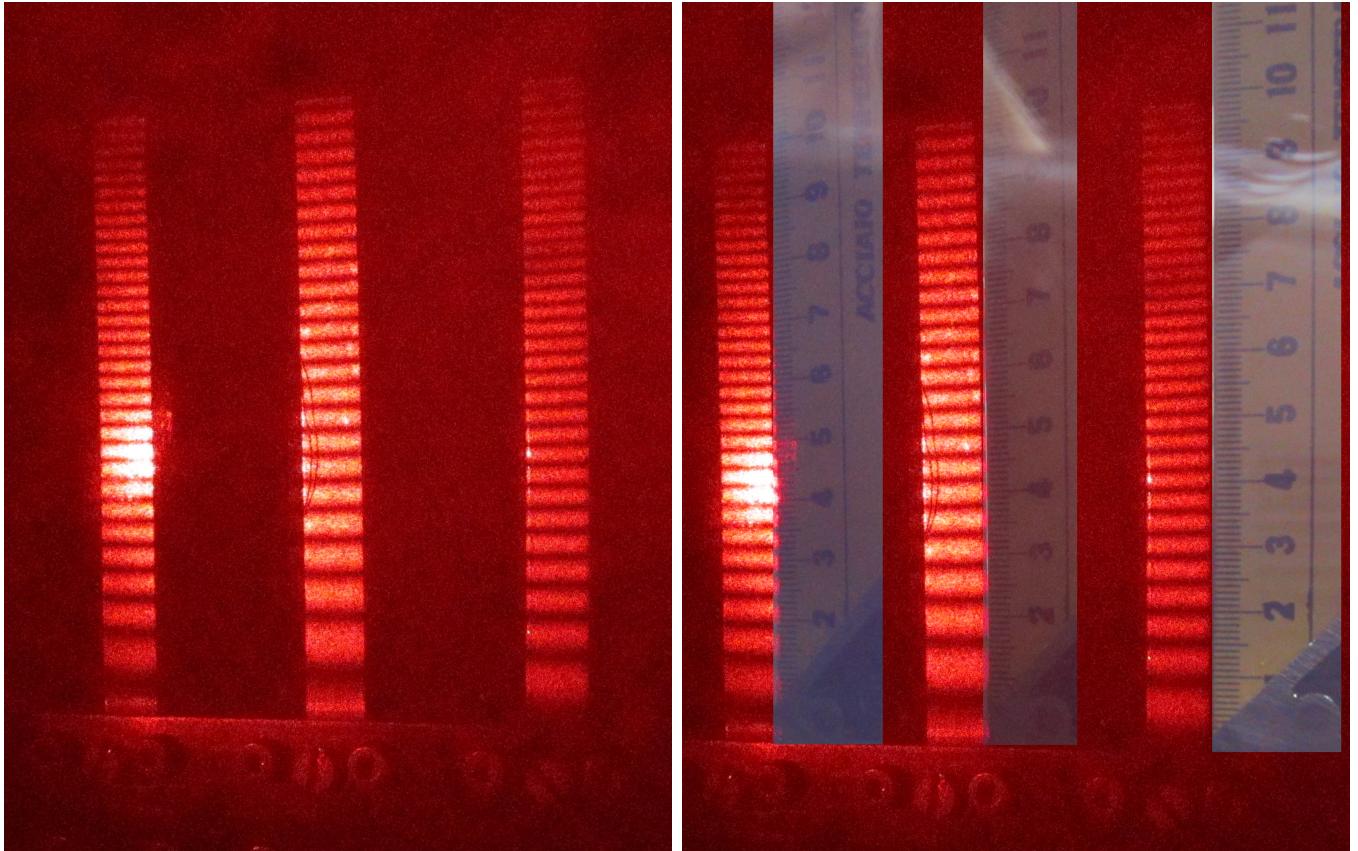


Abbildung 13: Interferenzmuster des Hologramms mit (rechts) und ohne (links) eingefügtem Lineal: Die Balken bestehen aus Stahl, Messing und Aluminium (von links nach rechts).

Zur weiteren Auswertung wurde das Programm **Gwyddion 2.34 für Ubuntu 14.04** verwendet.

- Durch Anlegen eines virtuellen Lineals können die Pixel in cm umgerechnet werden.
- Die Farbinformation des Bildes wird verworfen und in eine reine Helligkeitsinformation umgewandelt (schwarz-weiß-Bild).
- Die Helligkeit des Bildes wird invertiert, damit die schärferen Minima zu Maxima werden.
- Mit einer Gaußfunktion der Breite $\sigma = 5\text{px}$ wird jedes einzelne Pixel gefaltet um Rauscheffekte zu minimieren. Somit wird das Profil glatter.
- Das Helligkeitsprofil entlang des Balkens wird als Text-Datei (Liste) exportiert.
- Die Maxima der Helligkeitsprofile werden mit R ermittelt.

Ein Helligkeitsprofil sei hier als Beispiel angegeben. Die restlichen Profile findet man im Anhang 8.1.

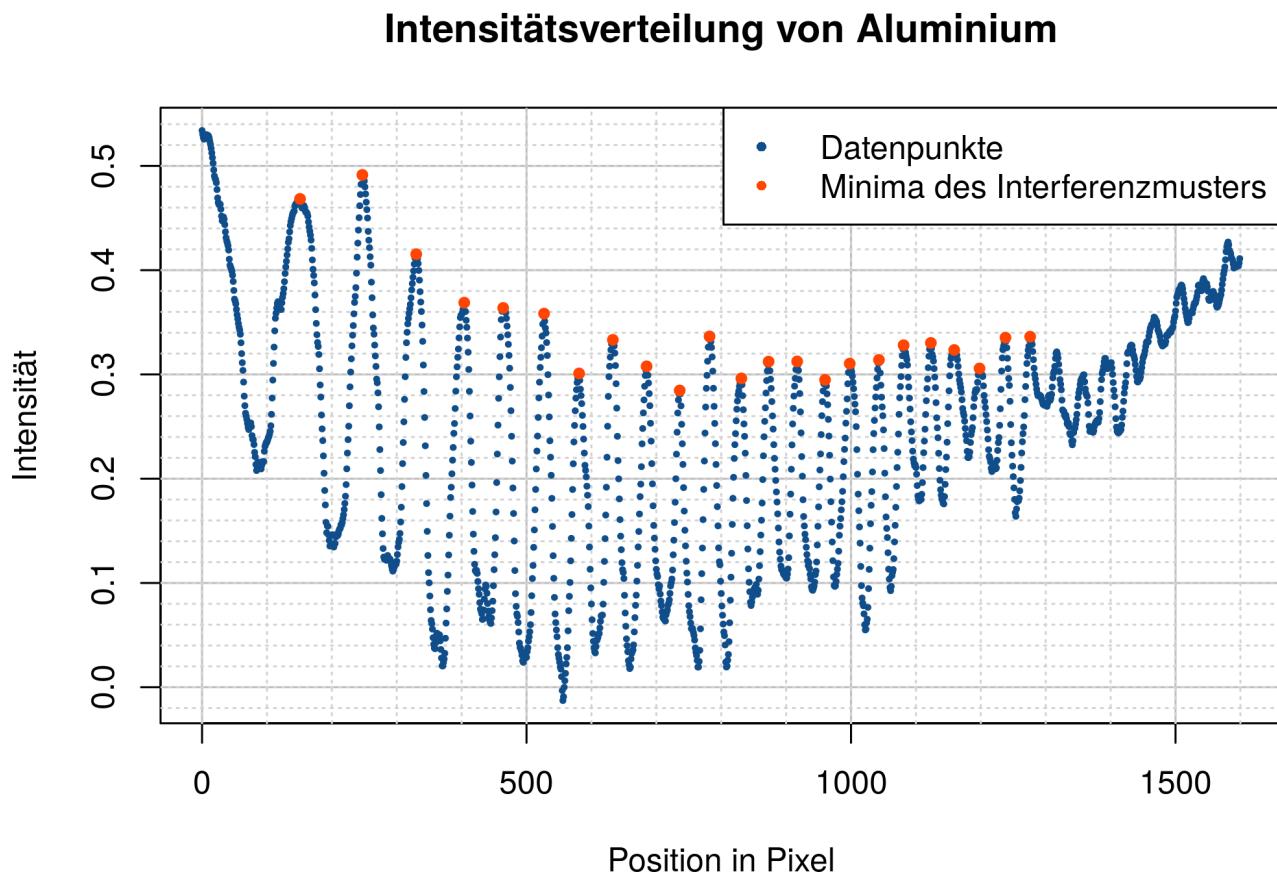


Abbildung 14: Helligkeitsprofil des Aluminiumbalkens: Die Intensität wurde von Gwyddion einheitlos angegeben. Bei der Bestimmung der Maxima (Minima des Interferenzmusters) ist die Einheit der Intensität unerheblich.

Die Fehler der Positionen der Maxima wurden je nach Breite der Peaks auf 3 bis 10 px abgeschätzt und sind im Quelltext 8.3 als Variable 'sx' zu finden. Die drei Werte zum Umrechnen der Pixel in cm sind

Position des Balkens	links	mitte	rechts
Faktor [px/cm]	150.4 ± 1.7	156.3 ± 1.6	162.8 ± 1.6

Um diese Faktoren u zu ermitteln wurde die Länge l der photographierten Lineale in cm mit ihrer Länge x in px verglichen.

$$u = \frac{x}{l}$$

Die Fehler auf u wurden mit der Abschätzung des Fehlers von $s_l = 1\text{mm}$ durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung errechnet.

Minima im Interferenzmuster tauchen bei der Phasenverschiebung von

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}(2n + 1) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

auf, da das Interferenzmuster proportional zu $\cos^2(\Delta\varphi)$ ist. Das heißt, dass sich der Balken am Minimum n um y

$$y = \frac{\lambda}{4}(2n + 1) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

durchgebogen hat. Daher werden x und y gegeneinander aufgetragen und gefittet. Die Wellenlänge des Lasers $\lambda = 632.8$ ist zusammen mit dem Fit-Modell in der Staatsexamensarbeit [Unm95] zu finden:

$$y(x) = A \cdot \left(5x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + Bx + C$$

Ein Fit sei hier als Beispiel angegeben. Die restlichen Fits findet man im Anhang 8.1.

Biegungsverhalten von Aluminium

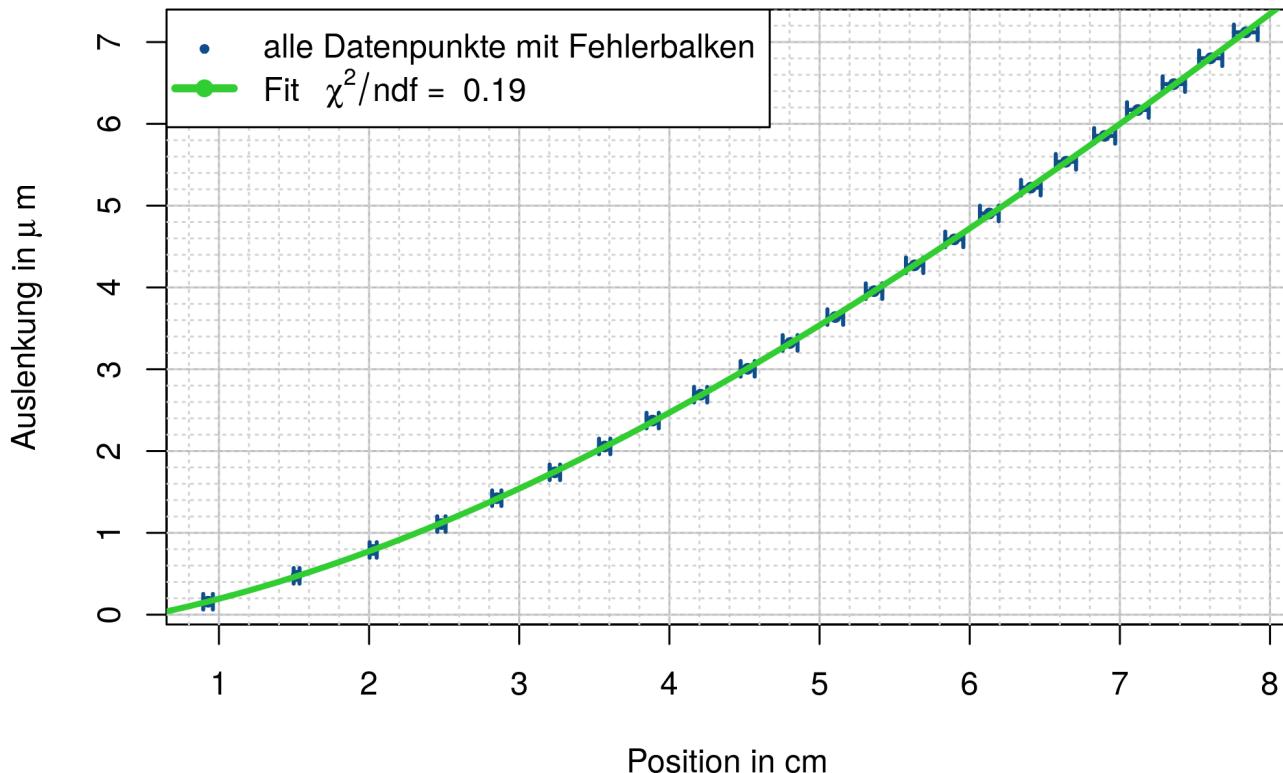


Abbildung 15: Biegungsverhalten des Aluminiumbalkens: An $\chi^2/ndf < 1$ kann man erkennen, dass die Fehler zu großzügig abgeschätzt sind.

$$A = (0.02321 \pm 0.00017), B = (0.259 \pm 0.005), C = (-0.17767 \pm 0.005) \mu\text{m}$$

Mit der Breite $b = (1.00 \pm 0.01)\text{cm}$ und der Tiefe $c = (0.50 \pm 0.01)\text{cm}$ der Balken, dem Ortsfaktor $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und den Massen zur Belastung der Balken berechnet sich das Elastizitätsmodul zu:

$$E = \frac{12mg}{Abc^3}$$

Die Masse für den Stahlbalken wurde in weiser Voraussicht größer gewählt als in der Staatsexamensarbeit angegeben [Unm95] ($m = 50\text{g}$ anstatt $m = 20\text{g}$), da sonst durch das große Elastizitätsmodul

von Stahl zu wenige Interferenzminima zu sehen sind und man weniger Datenpunkte zum fitten hat. Die Fehler auf das Elastizitätsmodul E ergeben sich aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung.

Balken	Stahl (links)	Messing (mitte)	Aluminium (rechts)
gemessenes E [GPa]	197 ± 12	99 ± 6	81 ± 5
rel. Fehler s_E/E	6%	6%	6%
Literaturwert [Unm95] E_{lit} [GPa]	195	100	72

Die gemessenen Werte stimmen alle innerhalb von 2σ mit den Literaturwerten überein. Der relative Fehler ist bei allen drei Ergebnissen fast gleich. Das Elastizitätsmodul von Stahl hat den größten Fehler.

6.3 Identifikation der Eigenmoden der Aluminiumplatte

Die während der Suche gefundenen Bilder der Eigenmoden wurden skizziert (siehe 8.2), fotografiert und es wurde die Frequenz notiert. Diese (linke Bilder) werden nun mit den aus der Theorie hervorgehenden Eigenfrequenzen verglichen (rechte Bilder)[Unm95].

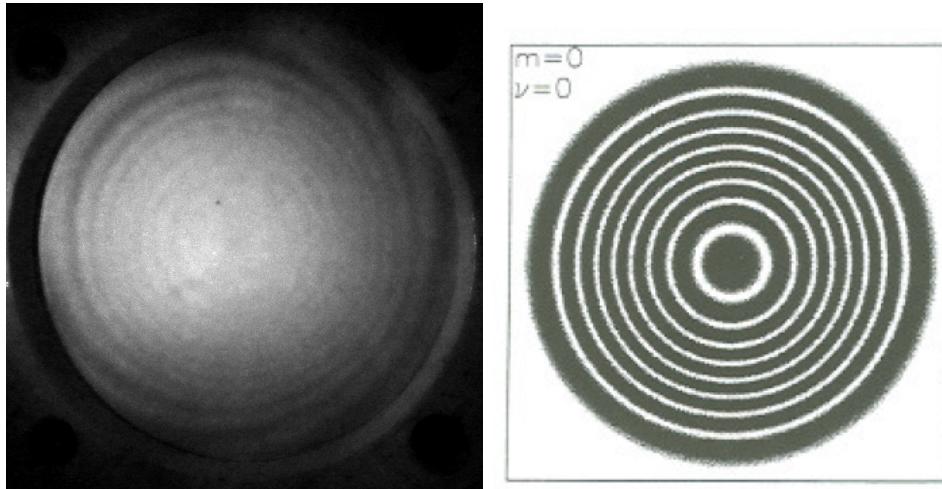


Abbildung 16: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{00} = (458 \pm 5)$ Hz, $f_{00,lit} = 448$ Hz

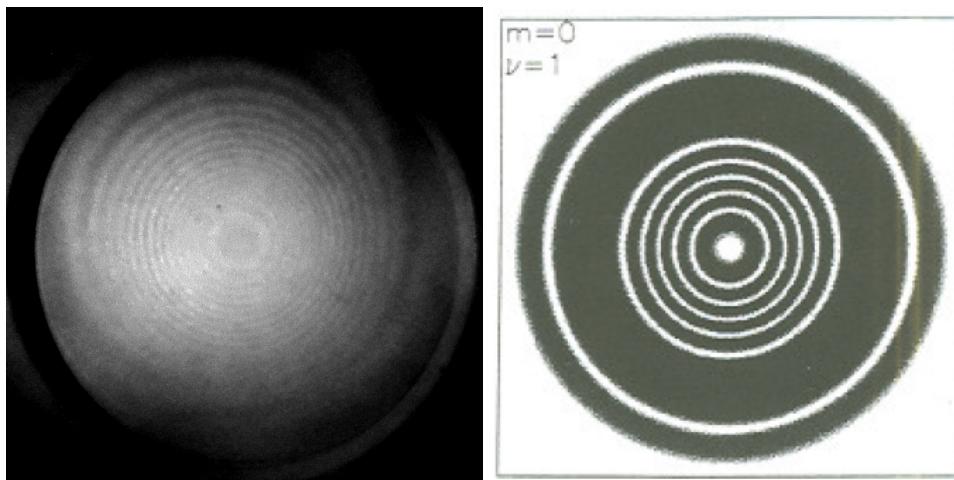


Abbildung 17: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{01} = (957 \pm 10)$ Hz

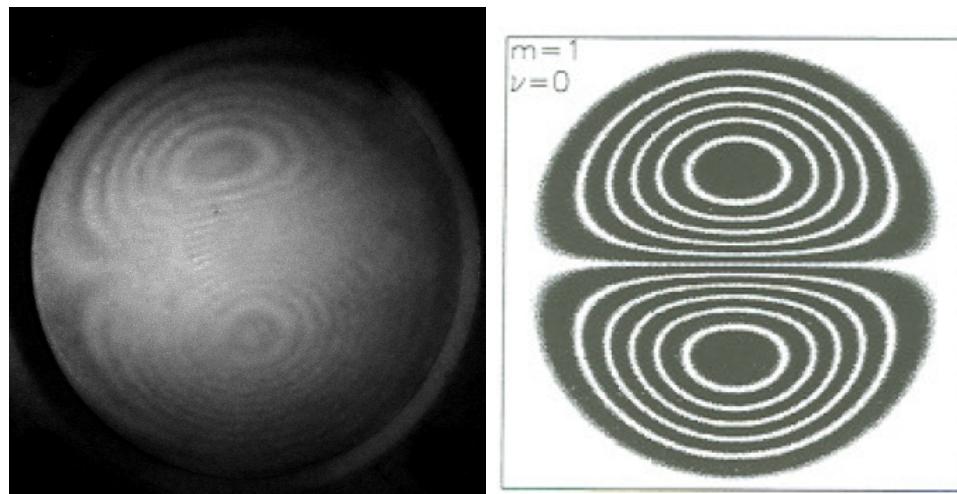


Abbildung 18: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{10} = (1057 \pm 10)$ Hz, $f_{10,lit} = 983$ Hz

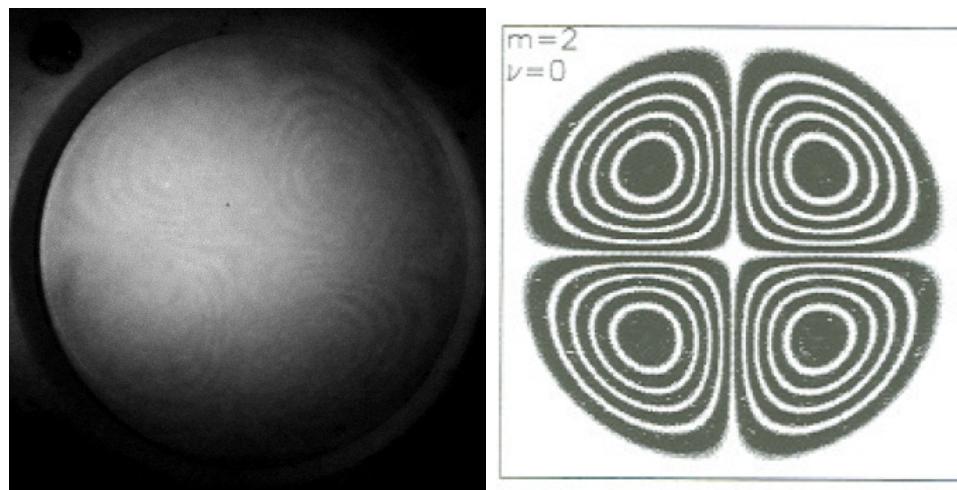


Abbildung 19: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{20} = (1714 \pm 15)$ Hz, $f_{20,lit} = 1592$ Hz

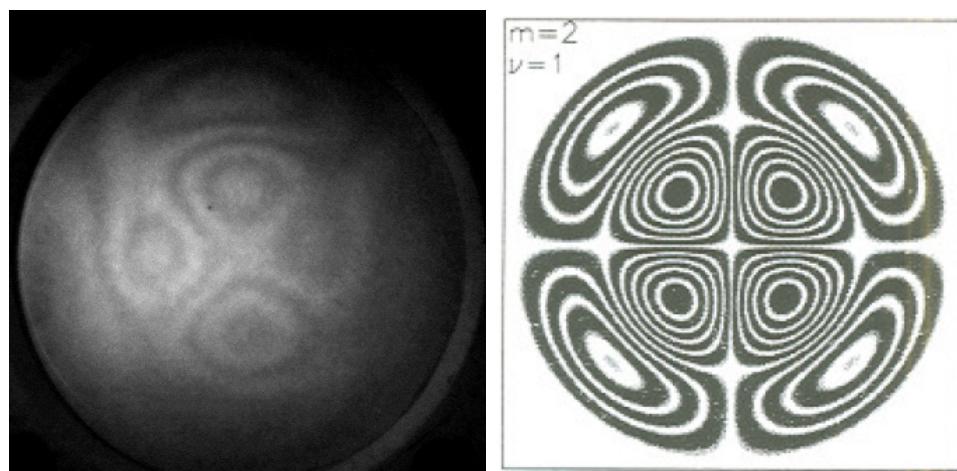


Abbildung 20: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{21} = (2060 \pm 20)$ Hz, $f_{21,lit} = 4090$ Hz

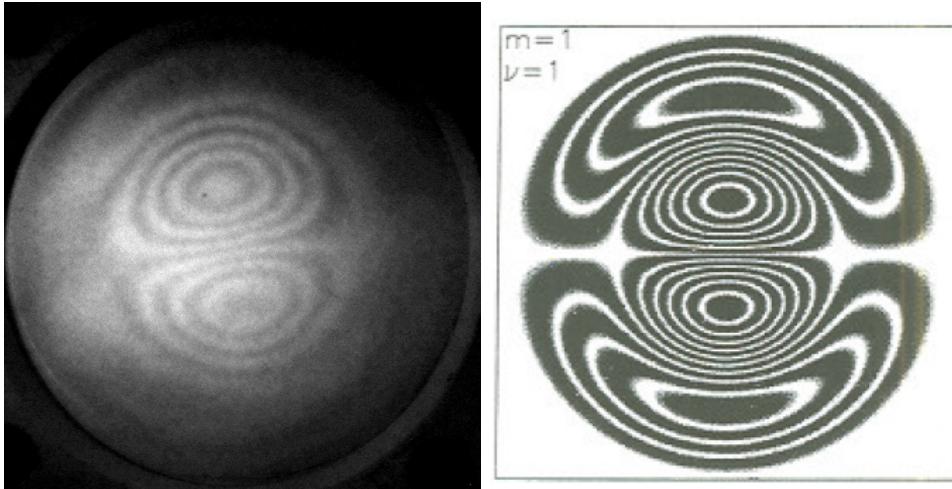


Abbildung 21: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{11} = (2870 \pm 25)$ Hz, $f_{11,lit} = 2854$ Hz

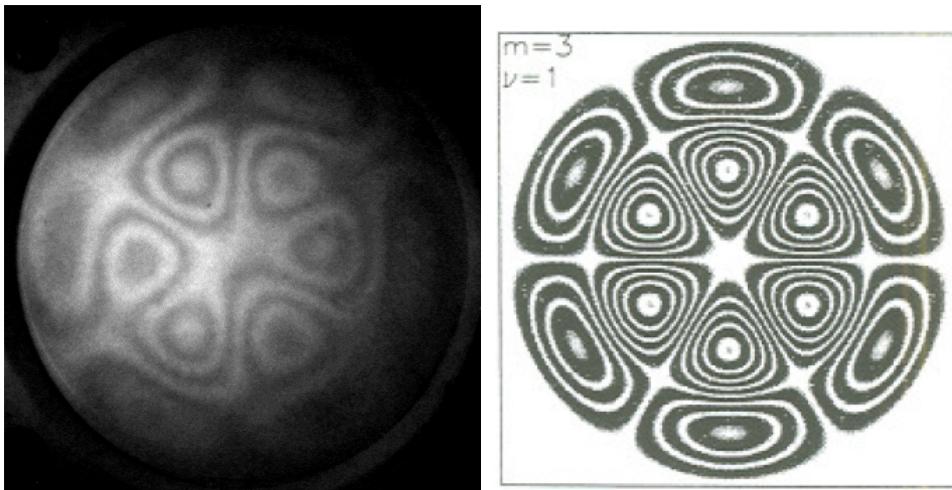


Abbildung 22: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{31} = (5377 \pm 50)$ Hz

Glaubt man den Bildern und der Zuordnung, die in [Unm95] vorgenommen wurden, zeigt sich für $m = 2, \nu = 1$ eine starke Abweichung der Frequenz vom Literaturwert, sodass das entstandene Bild eventuell eine Überlagerung mehrerer anderer Moden sein könnte, die fälschlicherweise auf $m = 2, \nu = 1$ führt

Es wurden auch Eigenmoden gefunden, die nicht in [Unm95] zu finden waren:

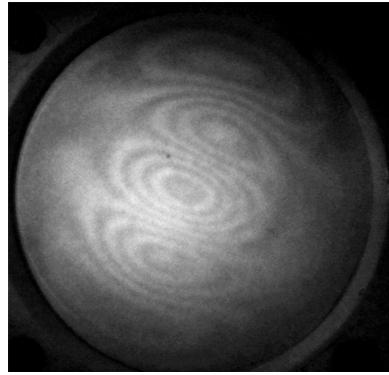


Abbildung 23: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f = (4100 \pm 40)$ Hz

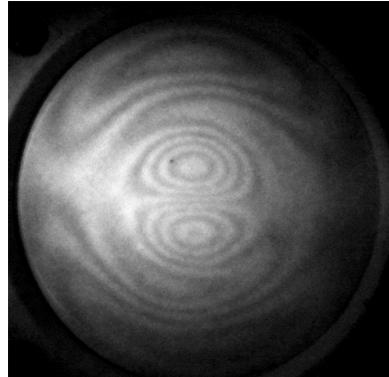


Abbildung 24: Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f = (5824 \pm 50)$ Hz

Die Frequenz der ersten unbekannten Eigenmode passt zwar zum Literaturwert von $m = 2, \nu = 1$, aber nicht zur angegebenen Graphik. Die zweite unbekannte Eigenmode konnte garnicht zugeordnet werden. Es könnte sich bei diesen Bildern tatsächlich um Überlagerungen mehrerer Eigenmoden handeln. Bei $f=5824$ könnte es sich auch um eine höhere Eigenschwingung der Platte handeln.

Die voll identifizierten Eigenmoden im Überblick:

Mode	gemessene Frequenz [Hz]	Literaturwert [Hz]
$m = 0, \nu = 0$	458 ± 5	448
$m = 1, \nu = 0$	1057 ± 10	983
$m = 2, \nu = 0$	1714 ± 15	1592
$m = 2, \nu = 1$	2060 ± 20	4090
$m = 1, \nu = 1$	2870 ± 25	2854

Wenn man annimmt, dass die $m = 2, \nu = 1$ Mode nicht bei (2060 ± 20) Hz, sondern bei (4100 ± 40) Hz gefunden wurde, kann man überprüfen, ob sich eine systematische Abweichung der gemessenen Frequenzen von den Theoriewerten ergibt. Dafür werden die gemessenen Werte gegen die Theorie-werte geplottet und durch eine Gerade gefittet:

$$f(x) = m \cdot x + c$$

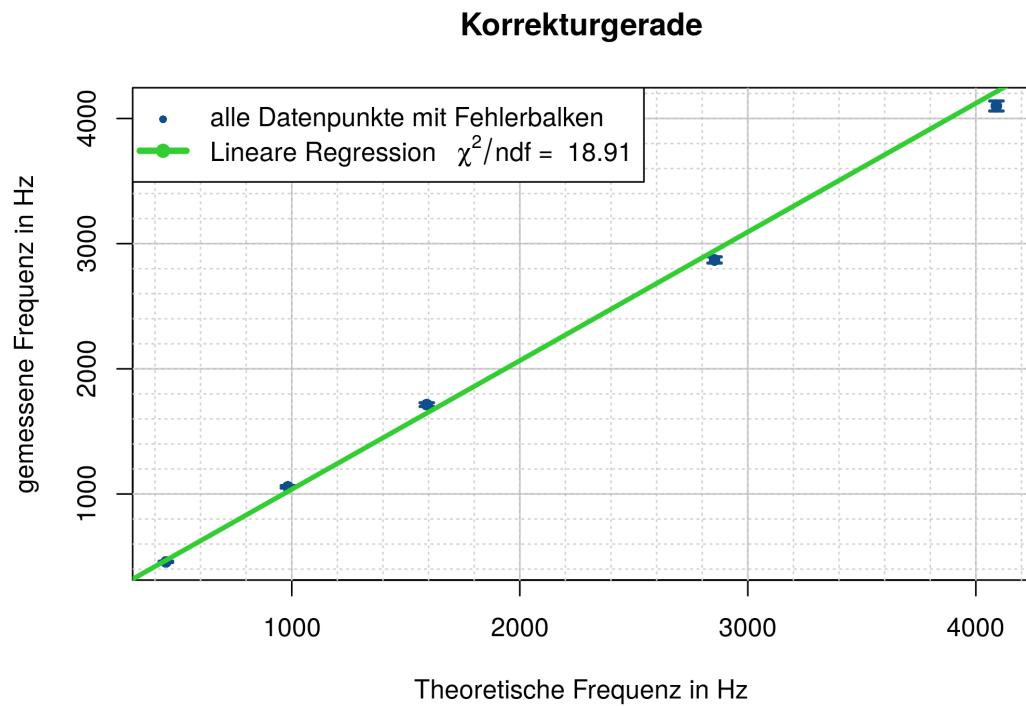


Abbildung 25: Lineare Regression zur Überprüfung systematischer Fehler: $m = 1.03 \pm 0.03$, $c = (9 \pm 30)Hz$

Es zeigt sich folglich kein signifikanter Systematischer Fehler, der linear skliert.

7 Zusammenfassung und Diskussion

7.1 Michelson-Interferometer

Es zeigte sich dass das Michelson-Interferometer so empfindlich ist, dass selbst ohne aktive Störung eine Änderung im Interferenzmuster erkennbar ist. Die Variation der Weglänge eines Laserstrahls zeigte, dass die Kohärenzlänge größer als die einstellbare Weglängendifferenz ist und sich der Laser sehr gut für den Aufbau eignet.

7.2 Elastizitätsmodul der Metallbalken

Durch die Doppelbelichtungstechnik wurden die Elastizitätsmodule der drei vorliegenden Metalle bestimmt.

Balken	Stahl	Messing	Aluminium
gemessenes E [GPa]	197 ± 12	99 ± 6	81 ± 5
Literaturwert [Unm95] E_{lit} [GPa]	195	100	72

Die Elastizitätsmodule von Stahl und Messing stimmen innerhalb von einer Standardabweichung mit dem Literaturwert überein und das Elastizitätsmodul von Aluminium stimmt innerhalb von zwei Standardabweichungen mit dem Literaturwert überein. Die darauf berechneten Fehler sind für das Verfahren, mit 6% rel. Fehler, angemessen groß ausgefallen.

Nur bei dem Elastizitätsmodul von Aluminium lässt sich ein systematischer Fehler vermuten. Durch unvorsichtige Studenten kann der Block durch herunterfallen von der optischen Bank oder ähnliches verbiegen und eine leichte Torsion erleiden, sodass die effektive Tiefe c etwas größer ist, als der von uns gemessene Wert. Aluminium ist von inelastischen Veränderungen am ehesten betroffen, da es das weichste der drei Metalle ist.

Durch die inhomogene Ausleuchtung der Metallbalken kam es beim Photo des Interferenzbildes beim Stahlbalken zur Übersteuerung der Kamera, sodass hier die Auswertung etwas schwerer fiel. Jedoch zeigte sich das nicht im Endergebnis oder im Fit.

7.3 Eigenmoden der Aluminiumplatte

Es wurden folgende Eigenschwingungen der Aluminiumplatte gefunden:

Mode	gemessene Frequenz [Hz]	Literaturwert [Hz]
$m = 0, \nu = 0$	458 ± 5	448
$m = 1, \nu = 0$	1057 ± 10	983
$m = 2, \nu = 0$	1714 ± 15	1592
$m = 2, \nu = 1$	2060 ± 20	4090
$m = 1, \nu = 1$	2870 ± 25	2854

Es ist leicht zu erkennen, dass die $m = 2, \nu = 1$ Mode bei der falschen Frequenz zu finden war. Geht man allerdings davon aus, dass Abbildung 23 diese Mode zeigt, so passt die Frequenz (4100 ± 40) Hz gut zu dem theoretischen Wert. Bei den Moden $m = 1, \nu = 0$ und $m = 2, \nu = 0$ ist eine Abweichung von den theoretischen Werten zu erkennen, die sich nicht mit dem abgeschätzten Fehler begründen

lässt.

Die Abweichungen können zum einen an falsch berechneten theoretischen Werten liegen, da diese von den Abmessungen der Aluminiumplatte abhängen, die falsch gemessen sein können. Auch Unreinheiten in der Aluminiumplatte könnten eine Rolle spielen.

Das Interferenzmuster, das bei der falschen Frequenz aufgetaucht ist, kann durch Überlagerung zweier anderer Eigenmoden entstanden sein.

Zudem konnte kein linearer oder konstanter systematischer Fehler gefunden werden, da ansonsten die Steigung der Linearen Regression signifikant $\neq 1$ oder der Achsenabschnitt signifikant $\neq 0$ gewesen wäre.

8 Anhang

8.1 Grafiken

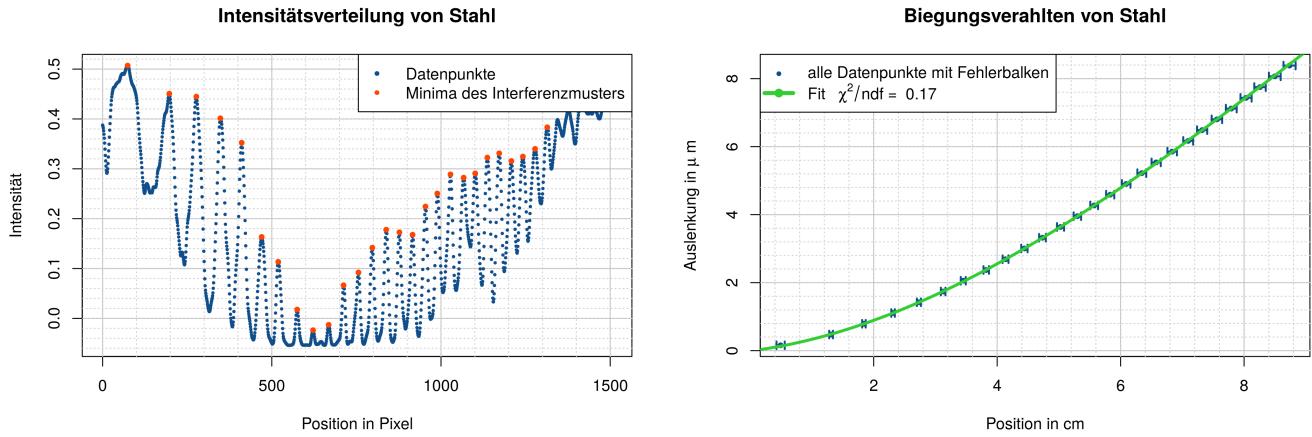


Abbildung 26: Fitparameter: $A = (0.0238 \pm 0.0002)$, $B = (0.227 \pm 0.005)$, $C = (-0.008 \pm 0.008)\mu\text{m}$

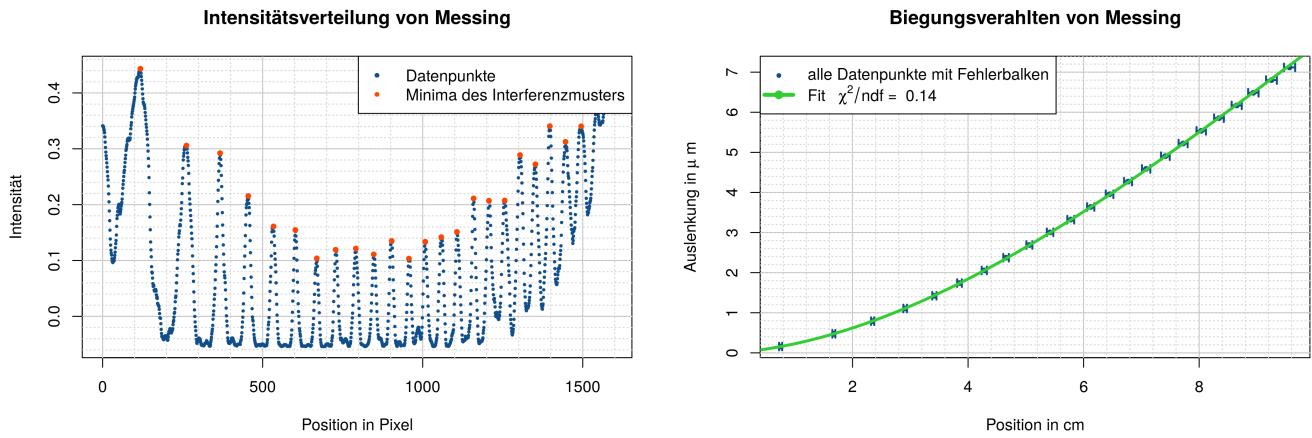


Abbildung 27: Fitparameter: $A = (0.019 \pm 0.00010)$, $B = (0.130 \pm 0.003)$, $C = (0.006 \pm 0.003)\mu\text{m}$

8.2 Laborheft

Holographie

14.3.16

Fläche Photodioden: $2,5 \text{ mm} \times 2,5 \text{ mm} = 6,25 \text{ mm}^2 = 0,0625 \text{ cm}^2$

Intensität Referenzstabl. ~~112 μW~~, ~~ABBA~~
Intensität Objektstabl. ~~0,23 μW~~, ~~XXXXXX~~

→ Belichtungszeit: $\approx 6,65$
~~μm²~~

Wert Reflens	Wert Objekt	Belichtungszeit erreicht	verwendet
1,12 μW	0,23 μW	6,65	Finals 30s → hat nicht funktioniert
112 μW	0,38 μW	7,25 s	Finals 40s → 2 Hologramme, beim ersten war Stab 1 nicht gut zu sehen Entwicklungszeit: 4min Bleichzeit: 2min

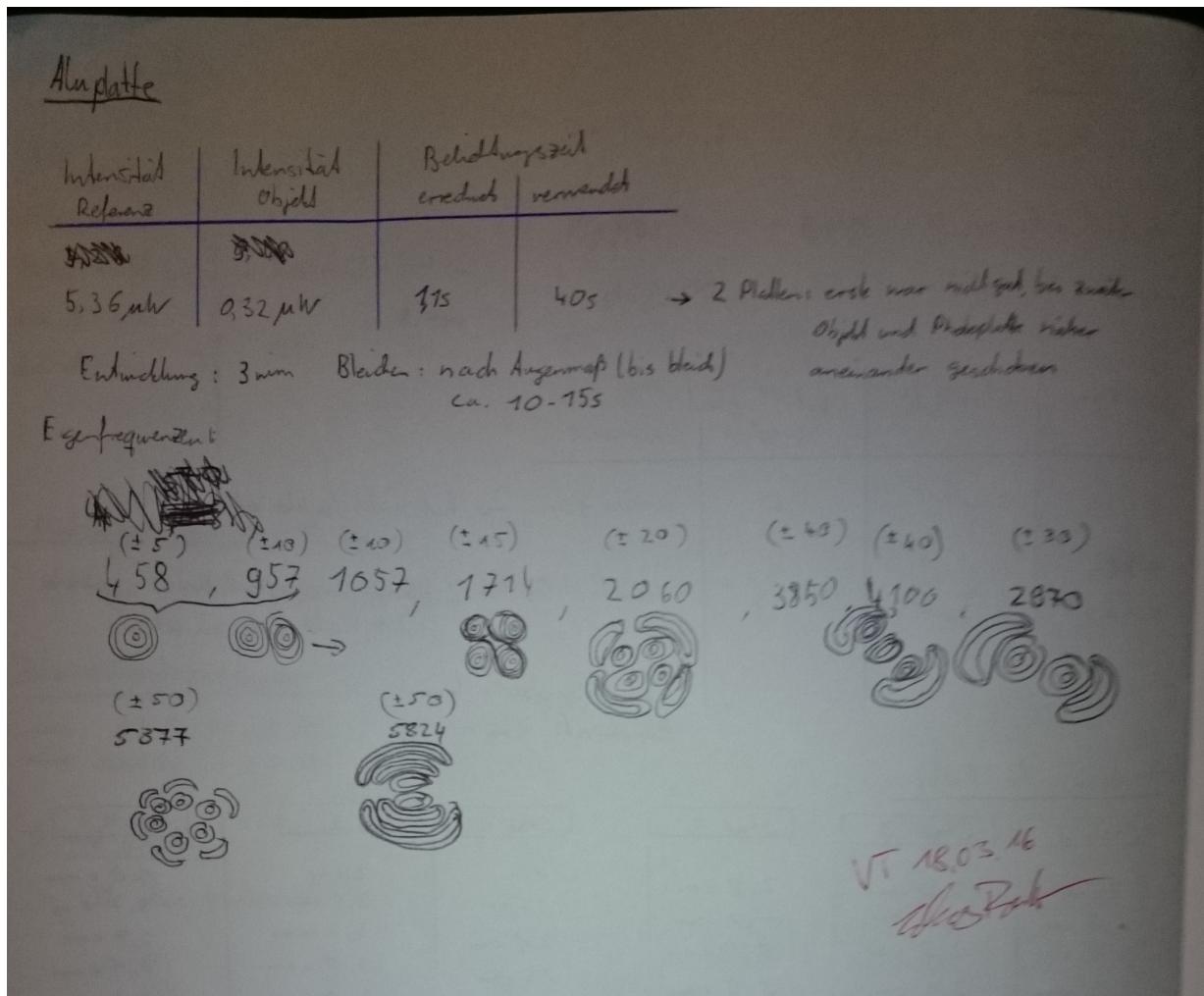
Vermessung der Balken:

Stab 2 :	Stab 3 :	Stab 1 :	Stab 1 :	Stab 2 :	Stab 3 :
2 cm	2,0 cm	2,8 cm	1 cm	2 cm	1,9 cm
2,8 cm	2,4 cm	4,0 cm	1,5 cm	2,6 cm	2,3 cm
3,6 cm	2,8 cm	5,0 cm	2,1 cm	3,2 cm	2,7 cm
4,3 cm	3,1 cm	5,9 cm	2,6 cm	3,6 cm	3,1 cm
5,0 cm	3,4 cm	6,8 cm	3,0 cm	4,0 cm	3,4 cm
5,6 cm	3,7 cm	7,7 cm	3,3 cm	4,4 cm	3,7 cm
6,3 cm	4,1 cm		3,7 cm	5,2 cm	4,1 cm
6,8 cm	4,3 cm		4,0 cm	5,4 cm	4,4 cm
7,4 cm	4,6 cm		4,3 cm	5,7 cm	4,6 cm
8,0 cm	4,9 cm		4,9 cm	6,1 cm	4,9 cm
	5,1 cm		5,1 cm	6,5 cm	5,2 cm
	5,4 cm		5,4 cm	6,7 cm	5,4 cm
Masse: 20g			5,7 cm	7,0 cm	5,6 cm
			5,9 cm	7,3 cm	5,9 cm
			6,1 cm	7,6 cm	6,1 cm
Masse: 20g				7,8 cm	6,4 cm
				8,1 cm	6,6 cm
				8,5 cm	6,9 cm
					7,1 cm
					7,3 cm
			Balken:		
			Breite: $(1,00 \pm 0,01) \text{ cm}$		
			Tiefe: $(0,50 \pm 0,01) \text{ cm}$	Masse: 20 g	

Winkel am Aufbau:

$\alpha = 66^\circ$

$\beta = 66^\circ$



8.3 Quelltext (R)

```

#KOVARIANZ: summary(fit)[6]
#COEFF+ERR: summary(fit)[11]
#DoF: summary(fit)[[4]][[2]]
#Residuen: summary(fit)[[2]]

library(tcltk)
library(onls) #ODR
library(Hmisc) #Errorbars
library(RcppFaddeeva) #Voigtfunktion
library(minpack.lm) #Levenberg-Marquardt
library(rootSolve) #Nullstellen
library(Bessel) #Besselfunktionen

graphics.off()
dev.new()
setwd('/home/moritz/')

c_light=2.998*10^8#Lichtgeschwindigkeit
hbar=1.055*10^(-34)
e=1.602*10^(-19)
lambda=.6328 #num Wellenlaenge Laser
g=9.81

#####
#horizontal errorbars
errbarh <- function(x,y,xplus,xminus,lwd=2,add=TRUE,col='black',cex=1,pch=20){
  arrows(xminus, y, xplus, y, code=3, angle=90, length=2/50, col=col,lwd=lwd)
  points(x,y,col=col,cex=cex,pch=pch)
}
#grid + minor grid
gridfn <- function(){
  by=c((axTicks(1)[[2]] - axTicks(1)[[1]])/5, (axTicks(2)[[2]] - axTicks(2)[[1]])/5)
  start=c(axTicks(1)[[1]]-5*by[1], axTicks(2)[[1]]-5*by[2])
  end=c(start[1]+50*by[1], start[2]+50*by[2])
  abline(v=axTicks(1), col='grey')#Gitter
  abline(v=seq(from = start[1], to = end[1], by = by[1]), lty=3, col='lightgrey')#Gitter
  abline(h=axTicks(2), col='grey')#Gitter
  abline(h=seq(from = start[2], to = end[2], by = by[2]), lty=3, col='lightgrey')#Gitter
}
#####

balken_r_file=list.files(path='/home/moritz/Dropbox/Praktika/FP/II/Holographie/Rohdaten', all.files =
  FALSE, pattern = 'balken_rechts.csv', full.names=TRUE)
balken_m_file=list.files(path='/home/moritz/Dropbox/Praktika/FP/II/Holographie/Rohdaten', all.files =
  FALSE, pattern = 'balken_mitte.csv', full.names=TRUE)
balken_l_file=list.files(path='/home/moritz/Dropbox/Praktika/FP/II/Holographie/Rohdaten', all.files =
  FALSE, pattern = 'balken_links.csv', full.names=TRUE)

balken_rechts=read.csv(balken_r_file, sep = "\t", dec = ".", skip = 0, header = FALSE, as.is = TRUE)
balken_mitte=read.csv(balken_m_file, sep = "\u00c3", dec = ",", skip = 0, header = FALSE, as.is = TRUE)
balken_links=read.csv(balken_l_file, sep = "\u00c3", dec = ",", skip = 0, header = FALSE, as.is = TRUE)

pxtocm=c(162.79,156.30,150.40) # r-m-l
spxtocm=c(1.6279,1.5630,1.6711)

#####

###rechter Balken###
ela=c()
sela=c()

selectionmin=c(
  (100,200,300,370,430,500,550,600,650,700,750,800,850,900,950,990,1030,1065,1100,1135,1170,1205,1250))

selectionmax=c(
  (200,300,370,430,500,550,600,650,700,750,800,850,900,950,990,1030,1065,1100,1135,1170,1205,1250,1290))

maxima=c()
Y=c()
for(i in 1:length(selectionmin)){

```



```
png(file = paste0('Dropbox/Praktika/FP/II/Holographie/figures/lin.png'), width=7, height=5, res=300,
  unit='in')#Bild exportieren
plot(X,Y,col='white',xlab='Theoretische Frequenz in Hz',ylab='gemessene Frequenz in Hz',main='
Korrekturgerade')
gridfn()
errbar(X,Y,Y+sY,Y-sY,lwd=2,add=TRUE, errbar.col='dodgerblue4', col='dodgerblue4', cex=1)
curve(fitlinfun, from=0, to=10000, n=10000, col='limegreen', lwd=3, add=TRUE)

chi2=round(sum(summary(fitlin)[[2]]^2)/summary(fitlin)[[4]][[2]],2)
legend('topleft',c('alle Datenpunkte mit Fehlerbalken',as.expression(bquote('Lineare Regression' ~
chi^2/ndf~'='~.(chi2)))),lty=c(0,1),lwd=c(0,4),pch=c(20,20),col=c('dodgerblue4','limegreen',
))#Legende

dev.off()

print(summary(fitlin))

#####
#OUTPUT#####
cat('Aluminium:',ela[1],'\n',sela[1],'\n')
cat('Messing:',ela[2],'\n',sela[2],'\n')
cat('Stahl:',ela[3],'\n',sela[3],'\n')
```

Abbildungsverzeichnis

1	Interferenz von zwei ebenen Wellen[Unm95]	4
2	Interferenz einer ebenen und einer Kugelwelle[Unm95]	4
3	Die Intensitätsverteilung hinter einem Spalt: <i>Neben dem Intensitätsmaximum in der Mitte (0. Ordnung) finden sich wesentlich schwächere Maxima auf beiden Seiten.</i> [Unm95]	5
4	<i>Schematischer Aufbau[3]: Links trifft eine ebene Welle auf den ersten Spalt. Danach wird das Signal in der ersten Linse fouriertransformiert. Die mittlere Platte ist das Hologramm des Signals des zweiten Spalts. Auf der Hologrammebene werden die Fouriertransformierten Signale multipliziert. Durch die zweite Linse wird dieses Signal zurücktransformiert, sodass durch die oben genannte Identität die Faltung übrig bleibt. Diese ist dann auf dem rechten Schirm zu sehen.</i>	6
5	Schematischer Aufbau einer Hologrammerstellung (links) und Hologrammnutzung (rechts): <i>Im linken Bild wird ein Hologramm erstellt. Beide Strahlteile kommen an die Photoplatte. Im rechten Bild wird eine entwickelte Photoplatte nur mit dem Referenzstrahl beleuchtet und es entsteht ein reelles Bild, das man auf einem Schirm beobachten kann und ein virtuelles Bild, was man der Stelle des Objektes durch die Photoplatte hindurch sehen kann.</i>	7
6	Vergleich von Reflexions- und Transmissionshologramm: <i>Das Transmissionshologramm wird im bei der Aufnahme mit beiden Strahlen von der gleichen Seite beleuchtet (a) und im transmittierten Licht beobachtet (c). Das Reflexionshologramm wird bei der Aufnahme von unterschiedlichen Seiten beleuchtet (b) und im reflektierten Licht betrachtet (d). Die Beobachtung geschieht also beide Male von der entgegengesetzten Seite des Objekts.</i> [Unm95]	9
7	Schematische Darstellung eines gebogenen Balkens [Unm95]	11
8	Aufbau des Michelson-Interferometers: <i>Der Laserstrahl wird zunächst über Spiegel 1 auf den Strahlteiler reflektiert, dort in zwei Teilstrahlen aufgeteilt, an Spiegel 2 und 3 reflektiert und dann vom Strahlteiler wieder überlagert. Das Interferenzmuster wird auf die Laborwand abgebildet.</i>	14
9	Aufbau zur Aufnahme eines Doppelbelichtungshologramms: <i>Der Laserstrahl wird über einen Strahlteiler in Objekt- und Referenzstrahl aufgeteilt welche über Spiegel, Raumfilter und das Objekt auf die Photoplatte fallen.</i>	15
10	Aufbau zur Aufnahme eines Echtzeithologramms: <i>Der Aufbau der Doppelbelichtungsholographie wird beibehalten, es wird lediglich das Objekt und die Photoplattenhalterung ausgetauscht. Die Entwicklung der Platte geschieht mit einer Durchflutungsanlage direkt am Aufbau.</i>	16
11	Aufbau zur Fourier-Interferometrie: <i>In diesem Aufbau befinden sich zusätzliche Linsen, die als Fourier-Transformatoren dienen.</i> [Bam96]	17
12	<i>Das Interferenzmuster der beiden überlagerten Strahlen aus dem Michelson-Interferometer ist nach Vergrößerung mit einer Linse deutlich an der Laborwand zu erkennen</i>	21
13	Interferenzmuster des Hologramms mit (rechts) und ohne (links) eingefügtem Lineal: <i>Die Balken bestehen aus Stahl, Messing und Aluminium (von links nach rechts).</i>	22
14	Helligkeitsprofil des Aluminiumbalkens: <i>Die Intensität wurde von Gwyddion einheitlos angegeben. Bei der Bestimmung der Maxima (Minima des Interferenzmusters) ist die Einheit der Intensität unerheblich.</i>	23
15	Biegungsverhalten des Aluminiumbalkens: <i>An $\chi^2/ndf < 1$ kann man erkennen, dass die Fehler zu großzügig abgeschätzt sind. A = (0.02321 ± 0.00017), B = (0.259 ± 0.005), C = (-0.17767 ± 0.005) μm</i>	24

16	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{00} = (458 \pm 5)$ Hz, $f_{00,lit} = 448$ Hz	25
17	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{01} = (957 \pm 10)$ Hz	25
18	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{10} = (1057 \pm 10)$ Hz, $f_{10,lit} = 983$ Hz	26
19	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{20} = (1714 \pm 15)$ Hz, $f_{20,lit} = 1592$ Hz	26
20	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{21} = (2060 \pm 20)$ Hz, $f_{21,lit} = 4090$ Hz	26
21	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{11} = (2870 \pm 25)$ Hz, $f_{11,lit} = 2854$ Hz	27
22	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f_{31} = (5377 \pm 50)$ Hz	27
23	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f = (4100 \pm 40)$ Hz	28
24	Eigenschwingung der Aluminiumplatte: $f = (5824 \pm 50)$ Hz	28
25	Lineare Regression zur Überprüfung systematischer Fehler: $m = 1.03 \pm 0.03$, $c = (9 \pm 30)$ Hz	29
26	Fitparameter: $A = (0.0238 \pm 0.0002)$, $B = (0.227 \pm 0.005)$, $C = (-0.008 \pm 0.008)\mu\text{m}$. .	33
27	Fitparameter: $A = (0.019 \pm 0.00010)$, $B = (0.130 \pm 0.003)$, $C = (0.006 \pm 0.003)\mu\text{m}$. .	33

Literatur

- [Unm95] Stefan Unmüßig, *Ein Versuch zur holographischen Interferometrie*, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1995
- [1] M.Köhli, *Versuchsanleitung Holographie*, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2012
- [Bam96] A.Bamberger, *FP2-Aufgabe zur Holographie - Fourieroptik*, Albert-Ludwig-Universität, Freiburg, 1996
- [2] Universität Stuttgart, Mathematik-Online-Lexikon, <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/erlaeuterung/erlaeuterung420/>, Stand: 30.03.16
- [3] <http://www4.uwsp.edu/physastr/kmenning/images/Hecht4.13.F.31.png>