

FPII-Aufgabe zur Holographie

FOURIEROPTIK

Prinzip des Versuches:

Eine wichtige Methode zur Mustererkennung ist Bildung von Kreuzkorrelation eines Objektes mit einem anderen Objekt. Die Kreuzkorrelation ist folgendermaßen definiert:

Das erste Objekt habe die Form $h(x, y)$ und das zweite Objekt die Form $f(x, y)$. Die Korrelation ist

$$CORR(\xi, \eta) = \int h(x, y) f(x + \xi, y + \eta) d\xi d\eta.$$

Der Wert der Kreuzkorrelation bei gleichem Objekt wird maximal, er entspricht in diesem Fall der Autokorrelation. Die Messung ist möglich, aber mühsam, da die Objekte gegeneinander um den Versatz (ξ, η) verschoben werden müssen und die zu verschiedenen Zeitpunkten durchgeführten Messungen aufintegriert werden.

Ein entscheidend eleganterer Weg geschieht über die Fouriertransformation. Mit der Abbildung durch Linsen wird die Fouriertransformation in den Raum der Ortsfrequenzen gebildet und die Rücktransformation durch weitere Linsen erzeugt das Bild des Objektes. Das Entscheidende ist die Manipulation der Raumfrequenzen durch Filter, die geschickterweise, wie unten klar wird, durch Hologramme realisiert werden. Nach dem Faltungssatz der Fouriertransformationen ergibt sich aus dem Produkt von Amplituden oder Intensitäten nach Fouriertransformation die Kreuzkorrelation, bzw. die Faltung der Verteilungen. Der Unterschied zwischen diesen Operationen wird bei unsymmetrischen Funktionen deutlich. Die Faltung von $f(x)$ und $h(y)$ hat den Integranden $f(x) * h(y - x)$, wohingegen die Kreuzkorrelationsfunktion $f(x) * h(x + y)$. Anders ausgedrückt: Die Holographie wird zur Erzeugung des virtuellen Bildes verwendet, welches mit dem tatsächlichen "ueberlagert" wird.

In dem Aufbau wird das Beugungsbild eines Objektes $h(x)$ durch eine Linse auf die holographische Platte geworfen. "h" bezeichnet das holographisch aufgenommene Objekt. Hier wird die Fouriertransformierte $H(f_x)$ des Objektes festgehalten. In der Ebene wird der Referenzstrahl mit parallelem Licht in einem Winkel ψ überlagert. Das entstehende Hologramm entwirft ein Bild in der Richtung der Seitenbänder, nämlich bei $+\psi$ und bei $-\psi$.

Ein anderes Objekt, welches mit dem ersten verglichen werden soll, $f(x)$ in der gleichen Ebene, wie das erste Objekt angeordnet, wird als Interferenzterm (Raumfilter)

$$H(f_x)F(f_x)\exp(i\psi) \quad (1)$$

bei abgeschalteten Referenzstrahl in die Richtung des Referenzstrahles geworfen und zwar nur in den Bereichen, in denen das Beugungsbild des ersten Objektes existiert. Der Ausdruck kann wie folgt interpretiert werden: Die Fouriertransformation erzeugt von (1) durch den Exponentialterm eine δ -funktionsartige Verschiebung in der Richtung des Referenzstrahles. Die Fouriertransformierte des Produktes $H \cdot F$ ist dann in der verschobenen Ortsvariablen von Null verschieden.

Im Ortsraum, in der Brennebene der zweiten Linse nach dem Hologramm, entsteht nun die Faltung der Verteilungen $h(x) \otimes f(x)$, aber auch die Kreuzkorrelation $h(x) \times f(x)$ der beiden Verteilungen in der zum Objektstrahl symmetrischen Richtung.

Bemerkung: Eine Anwendung des Raumfilters ist das seit langem bekannte Phasenkontrastmikroskop, welches in einer Zwischenebene, wo die Strahlen parallel sind, Polarisationsfilter die Phasen verschieben, und daher Kontraste erzeugen. Die eingangs erwähnte Bildung der Korrelation über den Weg der Fouriertransformation wird auch optischer Rechner genannt.

Theoretische Ableitung:

Wir beziehen uns auf die Abbildung 1, welche zwar nicht exakt dem Aufbau entspricht, aber das Wesentliche klarer darstellt. Aus Gründen der Übereinstimmung mit der Versuchsbeschreibung "Ultraschall" werden die Raumfrequenzen nicht (u, v) genannt, sondern (f_x, f_y) .

Das Objekt $h(x, y)$ wird durch eine Linse im Abstand f_2 in die Fourierebene abgebildet. Die Transformierte $H(f_x, f_y)$ läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$h(x, y) \Rightarrow H(f_x, f_y) = |H| \exp[i\theta(f_x, f_y)]$$

Der Referenzstrahl wird erzeugt durch eine punktförmige(!) Quelle im Abstand b zum Hauptstrahl. Die Abbildung durch die gleiche Linse erzeugt eine ebene Welle in der Hologrammebene, die folgende Form hat:

$$p(x - b, y) = \delta(x - b, y) \Rightarrow P(f_x, f_y) = A_0 \exp(ibf_x)$$

letzteres ist eine ebene Welle mit einer Phase $b f_x$, oder, es ist eine ebene Welle in einem Winkel

$$\psi = \arctan(b/f) \approx b/f.$$

Die Intensität auf dem Hologramm berechnet sich nun folgendermaßen:

$$I(f_x, f_y) = |H(f_x, f_y) + P(f_x, f_y)| \cdot |H(f_x, f_y) + P(f_x, f_y)|^*$$

eingesetzt ergibt

$$I(f_x, f_y) = [|H| \exp(i\theta) + A_0 \exp(ibf_x)] \cdot [|H| \exp(-i\theta) + A_0 \exp(-ibf_x)]$$

sodann

$$I(f_x, f_y) = [|H|^2 + A_0^2] + |H| \exp(i\theta) A_0 \exp(-ibf_x) + |H| \exp(-i\theta) A_0 \exp(ibf_x)$$

Dieser Ausdruck wird nun als Raumfilter (Hologramm) gespeichert, und dann mit einem anderen Bild verglichen :

$$f(x, y) \Rightarrow F(f_x, f_y).$$

F wird durch das Hologramm proportional geändert:

$$F(f_x, f_y) * I(f_x, f_y) = F(f_x, f_y) [|H|^2 + A_0^2] + F(f_x, f_y) |H| \exp(i\theta) A_0 \exp(-ibf_x) + F(f_x, f_y) |H| \exp(-i\theta) A_0 \exp(ibf_x)$$

Die letzten beiden Summanden sind die wesentlichen Terme:

Die Rücktransformation durch eine weitere Linse ergibt das Resultat

$$F(f_x, f_y) [|H|^2 + A_0^2] \Rightarrow f(x, y) \otimes FT[|H|^2 + A_0^2]$$

$$F(f_x, f_y) |H| \exp(i\theta) A_0 \exp(-ibf_x) \Rightarrow f(x, y) \otimes h(x, y)|_{x+b}$$

$$F(f_x, f_y) |H| \exp(-i\theta) A_0 \exp(ibf_x) \Rightarrow f(x, y) \otimes h(x, y)|_{x-b}$$

Man beachte die Inversion der Vorzeichen in den Exponenten der letzten beiden Terme.

Die Interpretation der obigen Beziehungen ist folgende: Der erste Term repräsentiert die Hauptintensität in der Richtung des Hauptstrahles. Die anderen Terme sind Wellen in Richtung des Referenzstrahles ($\psi, \phi = 0^\circ$) und in der zur Hauptrichtung symmetrischen Strahl ($\psi, \phi = 180^\circ$). Wobei der Polarwinkel ψ und der Azimuth ϕ sind. Der zweite entspricht einer Faltung der Objekte f und h , während der dritte einer Kreuzkorrelation der Objekte f und h entspricht. In der Zeitdomäne interpretiert entspricht der erste Term einem DC-Term (also einem "Gleichstrom"), während die beiden anderen Terme Seitenbänder sind, welche immer entstehen, wenn eine Modulation einer Trägerfrequenz aufgeprägt wird.

In anderen Worten das Bild, welches in den Richtungen $\pm\psi$ entworfen werden, entstehen durch die Diffraktion des Gitters, welches aufgrund des Referenzstrahles entstanden ist, aus der Richtung des Hauptstrahles heraus. Der Term $\exp(ibf_x)$ stellt eine Modulation mit hoher Raumfrequenz dar, im Vergleich zur Raumfrequenz des Objektes. Dadurch entsteht durch die Rücktransformation ein Diffraktionsbild weit außerhalb des Objektbildes, nämlich in dem ersten Beugungsmaximum zur schnellen Modulation. Nicht zufällig stimmt die eine Richtung mit der Richtung des Referenzstrahles überein. Diese Situation läßt

sich direkt mit dem Versuch "Ultraschall" vergleichen, wo das Schallfeld eine "schnelle" Modulation über den Schlitz erzeugt, und damit ein erstes Beugungsmaximum in zwei Richtungen symmetrisch zum Strahl erzeugt.

Die Beobachtung ohne Linse mit dem Auge entgegen der Richtung des Referenzstrahles lässt die Korrelation der Objekte in ihrer ursprünglichen Form erkennen. Beobachtet man es durch eine Linse, so erkennt man das Diffraktionsmuster auf dem Hologramm, und zwar das gespeicherte in den Teilen, welche beleuchtet werden, und bei der Änderung des Objektes ist die Überlagerung reduziert.

Grundsätzliches zum Aufbau:

Im Objektstrahl, wie auch im Referenzstrahl werden zunächst Modenreiniger ? verwendet. Die Strahlen werden sich dann unter einem Winkel von etwa 45° kreuzen. Nach dem Raumfilter wird ein paralleler Strahl durch Linsen von 10 bzw. 15 cm Brennweite erzeugt. Im Objektstrahl ist ein drehbarer Spalt angebracht, dessen Spaltbreite etwa $3/100$ mm besitzt, die Länge des Spaltes ist etwa 9 mm. Eine weitere Linse im Abstand ihrer Brennweite bildet das Beugungsmuster in der Ebene des Hologrammes ab. In dieser Ebene ist dann das reelle Bild der Raumfilterapertur (nominell $10\mu\text{m}$, tatsächlich durch die Abbildungsfehler der Linse größer). Der Spalt entwirft also über die Linse ein zum Spalt senkrecht stehendes Beugungsbild bekannter Abhängigkeit: $\sin(\pi f_x)/(\pi f_x)$.

Der Referenzstrahl wird nach dem Raumfilter durch eine Linse mit 15 cm Brennweite parallel durch die Ebene des Hologramms geführt und mit dem Objektstrahl gekreuzt.

Aufnahme des Hologramms: Das Hologramm ist glasplattengetragen. Eine Entwicklung in situ erübrigt das Nachjustieren. Zur Belichtung ist zu beachten, dass die Flächendichten der Strahlen sich wie 1:1 betragen sollten. Überbelichtung ist zur Anhebung des Beugungsmusters in den höheren Ordnung im Prinzip günstig. Es hängt unter anderem also auch von der Breite des Spaltes ab. Notfalls ist der Referenzstrahl abzuschwächen. Das Hologramm sollte trocken belichtet werden, entwickelt und gebleicht werden, und dann nach Benetzung mit entspanntem Wasser in der Flutungsanlage getrocknet werden. Eventuell ist ein Föhn zu benutzen. ?

Nach dem Erstellen des Hologramms kann der Objektstrahl durch Einstellen des Strahlteilers auf maximale Intensität gebracht werden. Der Referenzstrahl muss natürlich abgedunkelt werden. Die Beobachtung des virtuellen Bildes kann hinter dem Hologramm entgegen der Strahlrichtung des Referenzstrahles beobachtet werden. Seine Intensität hängt nun von der Stellung des Spaltes ab: wird er aus der ursprüngliche Richtung herausgedreht, dann verringert sich die Intensität und das Bild des Spaltes wird verbreitert. In der vorliegenden Apparatur nach einem Winkel von 4.5° fällt die Intensität auf die Hälfte ab. Mit einer Linse kann auch das Bild fotografisch festgehalten werden.

Da das Objekt in einem parallelen Strahl postiert ist, wird die Beugungsstruktur unabhängig von der Position innerhalb der Brennebene der Linse immer auf

5

die achsennahe Position im Hologramm gebracht. Die Position des Bild in der Brennebene der nächsten Linse verändert sich ebenfalls.

Die Bedeutung des Resultates liegt im folgenden:

Aus einer Ansammlung von Mustern (Buchstaben) kann durch das Hologramm, welches von einem Muster (Buchstaben) hergestellt wurde, durch die Korrelationsbildung das passende Muster herausgefiltert werden (Buchstabenerkennung, Texterkennung).

Referenzen:

- 1.) G.W.Stroke , An Introduction to Coherent Optics
- 2.) Zulassungsarbeit " Aufbau eines optischen Korrelators", Wilfried Kramer, Frankfurt, Abteilung Prof. Martienssen
- 3.) Versuch des FPI " Ultraschall"

Bilder:

- 1.) Schematische Anordnung, relevant fuer die theoretische Ableitung
- 2.) Experimenteller Aufbau im Versuch Holograaphie
- 3.) Aufnahmen des Aufbaus: Sichtrichtung entgegen dem Objektstrahl
- 4.) Doppelbelichtung einer Photographie des Bildes des Spaltes in der Beobachtungsebene nach dem Hologramm entgegenger Richtung des Referenzstrahles: Unten Spalt waagerecht, oben Spalt um 4.5° verdreht.

