

# **Experimentalphysik V - Kern- und Teilchenphysik Vorlesungsmitschrift**

Dozent: Prof. K. Jakobs

Verfasser: R. Gugel, L.Diehl

18. Februar 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung und Grundbegriffe</b>	<b>5</b>
1.1 Zielsetzung der Teilchenphysik . . . . .	5
1.2 Gegenstand der Kernphysik . . . . .	6
1.3 Einheitensystem der Teilchenphysik . . . . .	7
1.4 Wirkungsquerschnitte (cross section) . . . . .	13
1.5 Relativistische Kinematik . . . . .	19
1.5.1 Lorentz-Transformation . . . . .	19
1.5.2 Vierervektoren . . . . .	21
1.5.3 Tensoren . . . . .	23
1.5.4 Energie-Impuls Vektor . . . . .	23
<b>2 Eigenschaften stabiler Atomkerne</b>	<b>25</b>
2.1 Nomenklatur . . . . .	25
2.2 Ausdehnung von Atomkernen . . . . .	28
2.2.1 Rutherford'sches Streuexperiment . . . . .	28
2.2.2 Streuung von $\alpha$ -Teilchen höherer Energie . . . . .	35
2.2.3 Streuexperimente mit Elektronen . . . . .	36
2.2.4 Kernradien . . . . .	43
2.3 Masse der Atomkerne . . . . .	46
2.4 Tröpfchenmodell des Kerns . . . . .	52
2.5 Spin und Magnetische Momente . . . . .	60
2.5.1 Spin und Magnetische Momente . . . . .	60
2.5.2 Hyperfeinstruktur . . . . .	61
2.5.3 Hyperfeinstruktur in äußeren Magnetfeldern . . . . .	62
2.5.4 Experimentelle Methoden zu Bestimmung von $\mu_I$ und $I$ . . . . .	66
2.5.5 Experimentelle Ergebnisse . . . . .	70
<b>3 Zerfälle instabiler Kerne</b>	<b>76</b>
3.1 Das Zerfallsgesetz . . . . .	76
3.2 Der $\alpha$ -Zerfall . . . . .	80
3.3 Der $\beta$ -Zerfall . . . . .	86
3.3.1 Zerfallsarten . . . . .	86
3.3.2 Die Form des $\beta$ -Spektrums . . . . .	88
3.3.3 Struktur der Wechselwirkung, Kopplungsstärke . . . . .	93
3.3.4 Paritätsverletzung im $\beta$ -Zerfall . . . . .	96
3.4 $\gamma$ -Zerfälle . . . . .	100
3.4.1 $\gamma$ -Übergänge, Multipolstrahlung . . . . .	101
3.4.2 Konversionsprozesse . . . . .	105
3.4.3 $\gamma$ -Spektroskopie . . . . .	108

3.4.4	Mößbauer-Effekt . . . . .	110
3.5	Kernspaltung . . . . .	115
<b>4</b>	<b>Das Schalenmodell des Kerns</b>	<b>128</b>
<b>5</b>	<b>Einführung in die Teilchenphysik</b>	<b>137</b>
5.1	Neue Teilchen und Antiteilchen . . . . .	137
5.1.1	Die ersten Elementarteilchen . . . . .	137
5.1.2	Antimaterie . . . . .	137
5.1.3	Weitere Teilchen in der kosmischen Strahlung . . . . .	138
5.1.4	Weitere, sogenannte seltsame Teilchen . . . . .	139
5.1.5	Entdeckte Teilchen . . . . .	143
5.2	Additive Quantenzahlen . . . . .	146
5.3	Teilchen-Antiteilchen Reaktionen . . . . .	147
5.4	Leptonen . . . . .	152
5.4.1	Geladene Leptonen . . . . .	152
5.4.2	Neutrinos . . . . .	154
5.5	Das Quarkmodell . . . . .	157
5.6	Neue, schwerere Quarks . . . . .	160
5.6.1	Entdeckung des $c$ -Quarks . . . . .	160
5.6.2	Entdeckung des $b$ -Quarks . . . . .	162
5.6.3	Entdeckung des $t$ -Quarks . . . . .	163
<b>6</b>	<b>Überblick über die fundamentalen Wechselwirkungen</b>	<b>164</b>
6.1	Quantenelektrodynamik . . . . .	164
6.2	QCD - Quanten-Chromo-Dynamik . . . . .	166
6.3	Schwache Wechselwirkung . . . . .	171
6.3.1	Lepton-Sektor . . . . .	171
6.3.2	Quark-Sektor . . . . .	173
6.4	Entdeckung der $W^\pm$ - und $Z^0$ -Teilchen . . . . .	177
<b>7</b>	<b>Symmetrien und Erhaltungssätze</b>	<b>180</b>
7.1	Symmetrien und Gruppen, Einleitung, SO(3), SU(2) . . . . .	180
7.2	Parität, Symmetrie unter räumlicher Spiegelung . . . . .	186
7.3	Ladungskonjugation . . . . .	188
7.4	Physik neutraler Kaonen, CP-Verletzung . . . . .	190
7.5	Teilchen-Antiteilchen Oszillationen . . . . .	192
<b>8</b>	<b>Gebundene Zustände</b>	<b>195</b>
8.1	Mesonen aus leichten Quarks . . . . .	195
8.2	Charmonium Zustände . . . . .	202
8.3	$b\bar{b}$ -Zustände . . . . .	207
<b>9</b>	<b>Experimentelle Tests der Quantenelektrodynamik bei hohen Energien</b>	<b>211</b>
9.1	Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	211
9.2	Weitere QED Streuprozesse . . . . .	214
9.3	$e^+e^-$ -Annihilation in Hadronen . . . . .	216

9.4	Elastische $ep$ -Streuung, Formfaktoren . . . . .	217
9.5	Inelastische Lepton-Nukleon-Streuung . . . . .	221
9.6	Das Quark-Parton-Modell . . . . .	222
<b>10</b>	<b>Experimentelle Tests der Quantenchromodynamik</b>	<b>225</b>
10.1	QCD-Effekte in $e + e^-$ -Kollisionen . . . . .	225
10.2	QCD-Effekte in der tief-inelastischen Lepton-Nukleon- Streuung . . . . .	229
10.3	QCD-Tests in Proton-(Anti)Proton-Kollisionen . . . . .	233
10.3.1	Berechnung von Wirkungsquerschnitten . . . . .	233
10.3.2	Produktion von Jets mit hohen Transversalimpulsen . . . . .	235
10.3.3	$W/Z$ -Produktion . . . . .	238
10.3.4	Produktion von Top-Quarks . . . . .	239
10.4	Experimentelle Bestimmung der starken Kopplungsstärke $\alpha_S$ . . . . .	240
<b>11</b>	<b>Experimentelle Tests der elektroschwachen Wechselwirkung</b>	<b>244</b>
11.1	Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung in Grenzfall nieriger Energien . . . . .	244
11.2	Elektroschwache Vereinheitlichung . . . . .	246
11.3	Vorhersagen der GSW-Theorie . . . . .	248
11.4	Test der elektroschwachen Theorie bei LEP . . . . .	249

## **Organisatorisches**

**Vorlesungen** Di. und Mi., 10:15-12:00 Uhr, Hörsaal II

**Dozent** • Prof. K. Jakobs

- Gustav-Mie-Haus, 3. Stock, Zi. 03-021
- Tel: 203-5713
- Sekretariat: Frau Christina Skorek, Tel. 203-5715 Fr. 11:00-12:00 Uhr

**Vorkenntnisse** Experimentalphysik I-IV, Quantenmechanik

**Übungen** 5 Gruppen, Einteilung in der ersten Vorlesung

**A** Di., 16-18 Uhr, Dr. Susanne Kühn

**B** Mi., 14-16 Uhr, Hannah Arnold

**C** Mi., 14-16 Uhr, Daniel Büscher

**D** Do., 10-12 Uhr, Christian Lüdke

**E** Do., 13-15 Uhr, Dr. Suzana Rurikova

Die Übungsleitung wird von Dr. Karsten Könecke, Westbau, Raum 03-024, Tel: 0761 203 5753

Die Übungsaufgaben müssen wöchentlich gelöst werden, Ausgabe Dienstags in der Vorlesung, Abgabe bis Di, 10:00 Uhr in die Briefkästen im Gustav-Mie-Haus (Eingangshalle). Es können maximal zwei Personen zusammen arbeiten. Wer die Aufgaben richtig gelöst hat, muss in der Lage sein, diese vorzurechnen!

**Prüfungsleistung/Klausur** Die Modulnote setzt sich zusammen aus 25% der Übungspunkte und 75% der Klausur am Ende des Semesters:

- Klausurtermin: Fr., 20. Februar 2015, in der ersten Woche nach Semesterende
- Nachklausur: Do., 02. April 2015

**Homepage** <https://portal.uni-freiburg.de/jakobs/Lehre/ws-14-15/physik-v>

## Inhalt der Vorlesung

In dieser Vorlesung werden die Grundlagen der Kern- und Elementarteilchenphysik behandelt:

- Eigenschaften stabiler Atomkerne
- Zerfälle instabiler Kerne
- Kernmodelle
- Von den Kernen zu den Elementarteilchen
- Symmetrien und Wechselwirkungen
- Das Quarks-Modell
- Elektromagnetische Wechselwirkung
- Quantenchromodynamik
- Elektroschwache Wechselwirkung (Higgs Mechanismus,...)
- Wo steht die Teilchenphysik heute?

Mögliche Vertiefung sind im Master-Studium möglich mit den Vorlesungen:

- Elementarteilchenphysik II (WS),
- Physics at Hadron Collider (SS),

sowie entsprechende Vorlesungen in theoretischer Physik.

# 1 Einleitung und Grundbegriffe

## 1.1 Zielsetzung der Teilchenphysik

Elementarteilchenphysik ist ein Teilgebiet der Modernen Physik, das sich der „Untersuchung des Aufbaus der Materie und der fundamentalen Wechselwirkungen“ widmet. Grundlegende Fragen sind

- (i) Woraus besteht die Materie, die uns umgibt? Ist sie teilbar? Wenn ja, wie weit? Gibt es elementare Bausteine, sog. Elementarteilchen?  $\Rightarrow$  Bausteine
- (ii) Welche Kräfte wirken zwischen den Elementarteilchen? Wie wechselwirken Elementarteilchen untereinander? Welche Struktur haben die Wechselwirkungen? Lassen sie sich vereinheitlichen?  $\rightarrow$  Übergeordnete Theorie, Wechselwirkung?  $\Rightarrow$  Kräfte

Nach aktuellen Stand der Teilchenphysik ist keine Substruktur mehr zu finden für Elektronen und Quarks, wobei die Auflösung bereits vor Beginn der Experimente am LHC bei  $\Delta x < 10^{-18}$  m lag. Um Substrukturen von Atomkernen und kleineren Strukturen untersuchen zu können sind hohe Teilchenimpulse (Energien) notwendig:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{p} \quad (1.1)$$

Zur theoretischen Beschreibung werden sowohl Quantentheorie als auch Relativitätstheorie benötigt: Dies findet man in der relativistischen Quantentheorie (Dirac, 1929), welche die Dirac Gleichung enthält.

- Als Lösung der Dirac-Gleichung treten negative Energiezustände auf
- Diese werden als Energiezustände von *Antiteilchen* interpretiert
- Der Spin  $1/2$  für Elektronenfelder ist enthalten.

Die elektromagnetische, starke und schwache Wechselwirkung werden heute durch Quantentheorien beschrieben. Der Prototyp der Quantenfeldtheorien ist die Quantenelektrodynamik (QED).

Glashow, Salam und Weinberg vereinigten 1962-1973 die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung zur elektroschwachen Wechselwirkung (Vorhersage von W- und Z-Teilchen). Diese Theorien wurden experimentell bestätigt, wobei sich die Massen

$$\begin{aligned} m_\gamma &= 0 \\ M_W &= 80.426 \pm 0.034 \text{ GeV}/c^2 \\ M_Z &= 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV}/c^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

aus den Experimenten ergaben. Das Problem der Theorie ist jedoch, dass diese nur funktioniert, wenn alle Teilchen als masselos angenommen werden. Ein Ausweg stellt ein zusätzliches Feld dar, das sog. *Higgsfeld* bzw. das Higgsteilchen, vorgeschlagen von Prof. P. Higgs (Universität Edinburgh) und anderen Theoretischen Physikern (R. Brout, F. Englert, G. Guralnik, C. Hagen, P. Higgs, T. Kibble)

Wichtige offene Fragen der Teilchenphysik sind

1. Masse: Was ist der Ursprung der Masse? Existiert das Higgs Teilchen?
2. Vereinheitlichung
  - Können die Wechselwirkungen vereinheitlicht werden?
  - Gibt es neue Materiezustände, z.B. in Form von supersymmetrischen Teilchen? Stellen diese die Dunkle Materie im Universum dar?
3. Generationenproblem
  - Warum gibt es drei Familien von Teilchen?
  - Was ist die Ursache der Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie?

## 1.2 Gegenstand der Kernphysik

Gegenstand der Kernphysik sind

- Studium der stabilen und angeregten Atomkerne
- Wechselwirkung der Atomkerne untereinander
- Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen und Atomkernen

Ziel ist die Zurückführung auf die elementaren Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen. Schwierigkeiten hierbei sind

- Es handelt sich um ein Vielteilchensystem
- Überlagerung dreier Wechselwirkungen (starke, elektromagnetische und schwache Wechselwirkung)
- Eine störungstheoretische Berechnung der starken Wechselwirkung ist bei Abständen der Atomkerne ( $\sim 10^{-15}$ m) nicht möglich

→ Einen Ausweg stellen Parametrisierungen (effektive Theorien) und Kernmodelle (Vielteilchensysteme, Näherungsverfahren) dar.

Technische Bedeutung findet die Kernphysik unter anderem in

- Energiegewinnung
- Medizinische Diagnostik und Therapie
- Spurenelementanalysen
- Spurenelementanalysen

- Geologische und archäologische Datierung
- Entwicklung experimenteller Methoden (Beschleuniger, Detektoren, ns-Elektronik, Koinzidenzmessungen,...)
- ...

### 1.3 Einheitensystem der Teilchenphysik

Das MKS-System (SI-EInheiten) mit den Basiseinheiten m, kg, s ist in der Teilchenphysik ungeeignet → Es wird das eV als Energieeinheit verwendet. Dabei ist

$$\begin{aligned}
 1 \text{ eV} &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
 10^3 \text{ eV} &= 1 \text{ keV} \text{ (Atomphysik)} \\
 10^6 \text{ eV} &= 1 \text{ MeV} \text{ (Kernphysik)} \\
 10^9 \text{ eV} &= 1 \text{ GeV} \text{ (Teilchenphysik)} \\
 10^{12} \text{ eV} &= 1 \text{ TeV} \text{ (LHC)}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{1.4}$$

, wobei  $p$  der Impuls und  $m$  die Ruhemasse eines Teilchens sind. Im Grenzfall eines ruhenden Teilchens bzw. eines masselosen Teilchens ergibt sich

$$\begin{aligned}
 p = 0 : E &= mc^2 \\
 m = 0 : E &= pc
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Somit lässt sich die Einheit der Masse und des Impulses festlegen als

$$\begin{aligned}
 [m] &= \frac{\text{eV}}{c^2} \\
 [p] &= \frac{\text{eV}}{c}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Die zwei fundamentalen Konstanten, die hier regelmäßig auftauchen sind

$$\begin{aligned}
 c &= 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\
 \hbar &= 6.5822 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \\
 \Rightarrow \hbar c &= 197.33 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \\
 1 \text{ fm} &= 10^{-15} \text{ m}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Meist geht man zu sog. *natürlichen Einheiten* über, d.h. man setzt

$$\hbar = c = 1 \tag{1.8}$$

## Formulas and Constants

### Particle Data

Mass in  $\text{MeV}/c^2$ , lifetime in seconds, charge in units of the proton charge.

#### Leptons (spin 1/2)

Generation	Flavor	Charge	Mass*	Lifetime	Principal Decays
first	$e$ (electron)	-1	0.510999	$\infty$	-
	$\nu_e$ ( $e$ neutrino)	0	0	$\infty$	-
second	$\mu$ (muon)	-1	105.659	$2.19703 \times 10^{-6}$	$e\nu_\mu\bar{\nu}_e$
	$\nu_\mu$ ( $\mu$ neutrino)	0	0	$\infty$	-
third	$\tau$ (tau)	-1	1776.99	$2.91 \times 10^{-13}$	$e\nu_\tau\bar{\nu}_e, \mu\nu_\tau\bar{\nu}_\mu, \pi^-\nu_\tau$
	$\nu_\tau$ ( $\tau$ neutrino)	0	0	$\infty$	-

\*Neutrino masses are extremely small, and for most purposes can be taken to be zero; for details see Chapter 11.

#### Quarks (spin 1/2)

Generation	Flavor	Charge	Mass*
first	$d$ (down)	-1/3	7
	$u$ (up)	2/3	3
second	$s$ (strange)	-1/3	120
	$c$ (charm)	2/3	1200
third	$b$ (bottom)	-1/3	4300
	$t$ (top)	2/3	174000

\*Light quark masses are imprecise and speculative; for effective masses in mesons and baryons, see Chapter 5.

#### Mediators (spin 1)

Force	Mediator	Charge	Mass*	Lifetime	Principal Decays
Strong	$g$ (8 gluons)	0	0	$\infty$	-
Electromagnetic	$\gamma$ (photon)	0	0	$\infty$	-
Weak	$W^\pm$ (charged)	$\pm 1$	80,420	$3.11 \times 10^{-25}$	$e^+\nu_e, \mu^+\nu_\mu, \tau^+\nu_\tau, cX \rightarrow \text{hadrons}$
	$Z^0$ (neutral)	0	91,190	$2.64 \times 10^{-25}$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-, q\bar{q} \rightarrow \text{hadrons}$

Abbildung 1.1: aus Ref. [6]

### Baryons (spin 1/2)

Baryon	Quark Content	Charge	Mass	Lifetime	Principal Decays
$N \begin{cases} p \\ n \end{cases}$	$uud, udd$	1, 0	938.272, 939.565	$\infty, 885.7$	—, $p e \bar{\nu}_e$
$\Lambda$	$uds$	0	1115.68	$2.63 \times 10^{-10}$	$p\pi^-, n\pi^0$
$\Sigma^+$	$uus$	1	1189.37	$8.02 \times 10^{-11}$	$p\pi^0, n\pi^+$
$\Sigma^0$	$uds$	0	1192.64	$7.4 \times 10^{-20}$	$\Lambda\gamma$
$\Sigma^-$	$dds$	-1	1197.45	$1.48 \times 10^{-10}$	$n\pi^-$
$\Xi^0$	$uss$	0	1314.8	$2.90 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$
$\Xi^-$	$dss$	-1	1321.3	$1.64 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$
$\Lambda_c^+$	$udc$	1	2286.5	$2.00 \times 10^{-13}$	$pK\pi, \Lambda\pi\pi, \Sigma\pi\pi$

### Baryons (spin 3/2)

Baryon	Quark Content	Charge	Mass	Lifetime	Principal Decays
$\Delta$	$uuu, uud, udd, ddd$	2, 1, 0, -1	1232	$5.6 \times 10^{-24}$	$N\pi$
$\Sigma^*$	$uus, uds, dds$	1, 0, -1	1385	$1.8 \times 10^{-23}$	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
$\Xi^*$	$uss, dss$	0, -1	1533	$6.9 \times 10^{-23}$	$\Xi\pi$
$\Omega^-$	$sss$	-1	1672	$8.2 \times 10^{-11}$	$\Lambda K^-, \Xi\pi$

### Pseudoscalar Mesons (spin 0)

Meson	Quark Content	Charge	Mass	Lifetime	Principal Decays
$\pi^\pm$	$u\bar{d}, d\bar{u}$	1, -1	139.570	$2.60 \times 10^{-8}$	$\mu\nu_\mu$
$\pi^0$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	134.977	$8.4 \times 10^{-17}$	$\gamma\gamma$
$K^\pm$	$u\bar{s}, s\bar{u}$	1, -1	493.68	$1.24 \times 10^{-8}$	$\mu\nu_\mu, \pi\pi, \pi\pi\pi$
$K^0, \bar{K}^0$	$d\bar{s}, s\bar{d}$	0	497.65	$\begin{cases} K_S^0 : 8.95 \times 10^{-11} \\ K_L^0 : 5.11 \times 10^{-8} \end{cases}$	$\pi\pi, \pi e \nu_e, \pi \mu \nu_\mu, \pi\pi\pi$
$\eta$	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0	547.51	$5.1 \times 10^{-19}$	$\gamma\gamma, \pi\pi\pi$
$\eta'$	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	0	957.78	$3.2 \times 10^{-21}$	$\eta\pi\pi, \rho\gamma$
$D^\pm$	$c\bar{d}, d\bar{c}$	1, -1	1869.3	$1.04 \times 10^{-12}$	$K\pi\pi, K\mu\nu_\mu, K e \nu_e$
$D^0, \bar{D}^0$	$c\bar{u}, u\bar{c}$	0	1864.5	$4.1 \times 10^{-13}$	$K\pi\pi, K e \nu_e, K\mu\nu_\mu$
$D_s^\pm$	$c\bar{s}, s\bar{c}$	1, -1	1968.2	$5.0 \times 10^{-13}$	$\eta\rho, \phi\pi\pi, \phi\rho$
$B^\pm$	$u\bar{b}, b\bar{u}$	1, -1	5279.0	$1.6 \times 10^{-12}$	$D^* \ell v_\ell, D \ell v_\ell, D^* \pi\pi\pi$
$B^0, \bar{B}^0$	$d\bar{b}, b\bar{d}$	0	5279.4	$1.5 \times 10^{-12}$	$D^* \ell v_\ell, D \ell v_\ell, D^* \pi\pi$

### Vector Mesons (spin 1)

Meson	Quark Content	Charge	Mass	Lifetime	Principal Decays
$\rho$	$u\bar{d}, (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}, d\bar{u}$	1, 0, -1	775.5	$4 \times 10^{-24}$	$\pi\pi$
$K^*$	$u\bar{s}, d\bar{s}, s\bar{d}, s\bar{u}$	1, 0, -1	894	$1 \times 10^{-23}$	$K\pi$
$\omega$	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	782.6	$8 \times 10^{-23}$	$\pi\pi\pi, \pi\gamma$
$\psi$	$c\bar{c}$	0	3097	$7 \times 10^{-21}$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, 5\pi, 7\pi$
$D^*$	$c\bar{d}, c\bar{u}, u\bar{c}, d\bar{c}$	1, 0, -1	2008	$3 \times 10^{-21}$	$D\pi, D\gamma$
$\Upsilon$	$b\bar{b}$	0	9460	$1 \times 10^{-20}$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-$

Abbildung 1.2: aus Ref. [6]

Somit werden die Einheiten zu:

- Energie, Impuls, Masse: eV

$$\begin{aligned} m(p) &= 0.938 \text{ GeV} \\ m(e) &= 0.511 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (1.9)$$

- Länge

$$\begin{aligned} \hbar c &= 0.1973 \text{ GeV} \cdot \text{fm} \\ 1 \text{ fm} &\hat{=} \frac{1}{0.1973} \text{ GeV}^{-1} = 5.07 \text{ GeV}^{-1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

- Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  (im Folgenden auch W'querschnitt genannt): Grundeinheit ist 1b (barn)

$$\begin{aligned} 1 \text{ b} &= 10^{-24} \text{ cm}^2 \\ (\hbar c)^2 &= (0.1973)^2 \text{ GeV}^2 \text{ fm}^2 \\ \Rightarrow 1 \text{ GeV}^{-2} &= 0.389 \cdot 10^{-31} \text{ m}^2 = 0.389 \text{ mb} \\ \boxed{1 \text{ GeV}^{-2} = 0.389 \text{ mb}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

- Zeit:

$$\begin{aligned} \hbar &= 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ GeV} \cdot \text{s} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow 1 \text{ s} &= 1.52 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Zum Vergleich: Im SI-System ist das Kraftgesetz für elektrische Ladungen

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \quad (1.13)$$

im Heaviside-Lorentz System

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \quad q_{\text{HL}} = \frac{q_{\text{SI}}}{\sqrt{\epsilon_0}}, \quad (1.14)$$

und im Gauß'schen System

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \quad q_{\text{G}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} q_{\text{SI}}. \quad (1.15)$$

Die Feinstrukturkonstante:

$$\alpha := \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.036} \quad (1.16)$$

ist in allen Systemen gleich!

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{SI}} &= \frac{e_{\text{SI}}^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar c} \\ \alpha_{\text{HL}} &= \frac{e_{\text{HL}}^2}{4\pi \cdot \hbar c} = \frac{e_{\text{SI}}^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar c} \\ \alpha_{\text{G}} &= \frac{e_G^2}{\hbar c} = \frac{e_{\text{SI}}^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar c} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\text{Spin 1: } \begin{cases} \text{Incoming: } \epsilon_\mu \\ \text{Outgoing: } \epsilon_\mu^* \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Massless: } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \\ \text{Massive: } \frac{-i[g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / (mc)^2]}{q^2 - (mc)^2} \end{cases}$$

(For vertex factors see Appendix D.)

## Fundamental Constants

Planck's constant:	$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ J s}$
	$= 6.58212 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$
Speed of light:	$c = 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s}$
Mass of electron:	$m_e = 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.510999 \text{ MeV}/c^2$
Mass of proton:	$m_p = 1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938.272 \text{ MeV}/c^2$
Electron charge (magnitude):	$e = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ C}$
	$= 4.80320 \times 10^{-10} \text{ esu}$
Fine structure constant:	$\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.036$
Bohr radius:	$a = \hbar^2/m_e e^2 = 5.29177 \times 10^{-11} \text{ m}$
Bohr energies:	$E_n = -m_e e^4/2\hbar^2 n^2 = -13.6057/n^2 \text{ eV}$
Classical electron radius:	$r_e = e^2/m_e c^2 = 2.81794 \times 10^{-15} \text{ m}$
QED coupling constant:	$g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = 0.302822$
Weak coupling constants:	$g_w = g_e / \sin \theta_w = 0.6295;$
	$g_z = g_w / \cos \theta_w = 0.7180$
Weak mixing angle:	$\theta_w = 28.76^\circ \quad (\sin^2 \theta_w = 0.2314)$
Strong coupling constant:	$g_s = 1.214$

## Conversion Factors

1 Å	$= 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$
1 fm	$= 10^{-15} \text{ m}$
1 barn	$= 10^{-28} \text{ m}^2$
1 eV	$= 1.60218 \times 10^{-19} \text{ J}$
1 MeV/c <sup>2</sup>	$= 1.78266 \times 10^{-30} \text{ kg}$
1 Coulomb	$= 2.99792 \times 10^{-9} \text{ esu}$

Abbildung 1.3: aus Ref. [6]

**TABLE 1.2a**

Conventional Mass, Length, Time Units, and Positron Charge in Terms of  
 $\hbar = c = 1$  Energy Units

Conversion Factor	$\hbar = c = 1$ Units	Actual Dimension
$1 \text{ kg} = 5.61 \times 10^{26} \text{ GeV}$	GeV	$\frac{\text{GeV}}{c^2}$
$1 \text{ m} = 5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$	$\text{GeV}^{-1}$	$\frac{\hbar c}{\text{GeV}}$
$1 \text{ sec} = 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$	$\text{GeV}^{-1}$	$\frac{\hbar}{\text{GeV}}$
$e = \sqrt{4\pi\alpha}$	—	$(\hbar c)^{1/2}$

**TABLE 1.2b**

Some Useful Conversion Factors

$$1 \text{ TeV} = 10^3 \text{ GeV} = 10^6 \text{ MeV} = 10^9 \text{ KeV} = 10^{12} \text{ eV}$$

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ F} = 10^{-13} \text{ cm} = 5.07 \text{ GeV}^{-1}$$

$$(1 \text{ F})^2 = 10 \text{ mb} = 10^4 \mu\text{b} = 10^7 \text{ nb} = 10^{10} \text{ pb}$$

$$(1 \text{ GeV})^{-2} = 0.389 \text{ mb}$$

Abbildung 1.4: aus Ref. [6]

## 1.4 Wirkungsquerschnitte (cross section)

Bei einem Streuprozess trifft ein Strahl  $a$  auf ein Target  $b$ , woraus  $c$  und  $d$  resultieren:

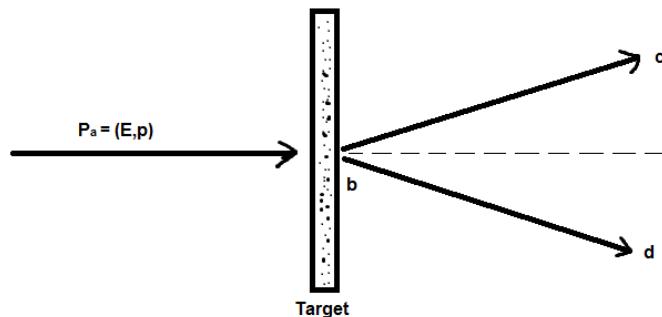
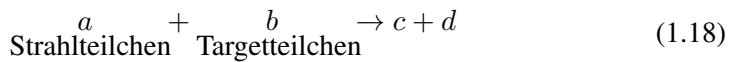
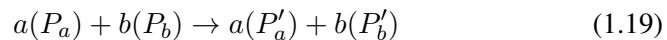


Abbildung 1.5: Streuung von Strahlteilchen  $a$  an Targetteilchen  $b$ .

Man unterscheidet zwischen *elastischen* und *inelastischen* Reaktionen:

- (i) Elastische Streuung: Die Teilchen vor und nach dem Stoß sind identisch, lediglich Energie und Impuls werden umverteilt, d.h. es findet ein Rückstoß bzw. ein Impulsübertrag auf Teilchen  $b$  statt:



- Energie/Impuls der einzelnen Teilchen sind geändert, die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls bleiben jedoch erhalten:

$$P_a + P_b = P'_a + P'_b \quad (1.20)$$

- Es gibt einen festen Zusammenhang zwischen Streuwinkel  $\theta$  und Energie  $E'_a$  des gestreuten Teilchens

Aus der Variation der Streuraten mit der Einfallsenergie und dem Streuwinkel können Rückschlüsse auf die räumliche Gestalt des streuenden Objekts gemacht werden (vgl. Optik). Das Auflösungsvermögen ist durch die Wellenlänge des einlaufenden Teilchens festgelegt.

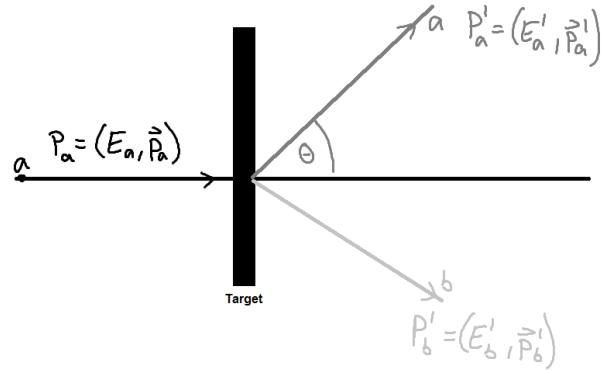


Abbildung 1.6: Elastischer Stoß eines Teilchens  $a$  mit Viererimpuls  $P_a = (E_a, \vec{p}_a)$  an einem Target.  
Die Auslaufenden Teilchen besitzen die Viererimpulse  $P'_a$  und  $P'_b$

- (ii) Inelastische Streuung: Die Teilchen vor und nach dem Stoß sind verschieden, es können neue Teilchen entstehen, z.B. über Anregungsprozesse oder Vernichtungsreaktionen. Beispiele:

$$\begin{aligned} a + b &\rightarrow a' + b^* \xrightarrow{\rightarrow c+d} \\ a + b &\rightarrow c + d + e + \dots \\ a + \bar{a} &\rightarrow b + \bar{b} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Neue Teilchen entstehen, z.B. angeregte Teilchenzustände ( $b^*$ , Kernphysik), neue Teilchen ( $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ ) oder auch Vernichtungsreaktionen  $a + \bar{a} \rightarrow b + \bar{b}$  können stattfinden.

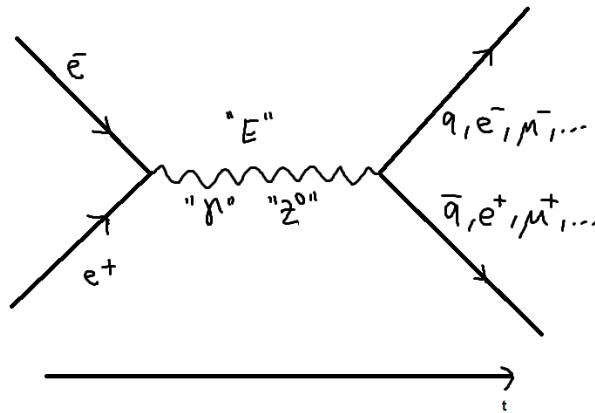


Abbildung 1.7: Feynman Diagramm der Vernichtung von Elektron und Positron (inelastische Streuung)

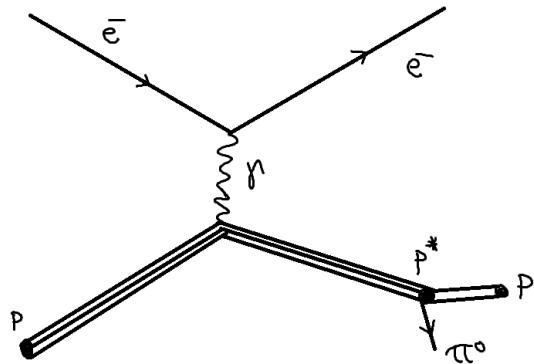


Abbildung 1.8: Feynman Diagramm einer inelastischen Elektron-Proton-Streuung

Wichtige Parameter zur Berechnung der Reaktionsrate  $\dot{N} = \frac{dN}{dt}$ , d.h. der stattfindenden Streuprozesse pro Zeiteinheit, sind:

- (i) Fluss der einlaufenden Teilchen  $\phi_a$ : Der Fluss entspricht der Zahl der Strahlteilchen, die pro Flächeneinheit und Zeiteinheit auf das Target treffen.

$$\phi_a = n_a \cdot v_a \quad (1.22)$$

wobei  $n_a$  die Dichte und  $v_a$  die Geschwindigkeit der Strahlteilchen ist.

$$[\phi_a] = \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.23)$$

- (ii) Die Anzahl der Streuzentren  $N_b$  (Stoßpartner) im Target, innerhalb der Fläche  $A$ , die vom Strahl getroffen wird.

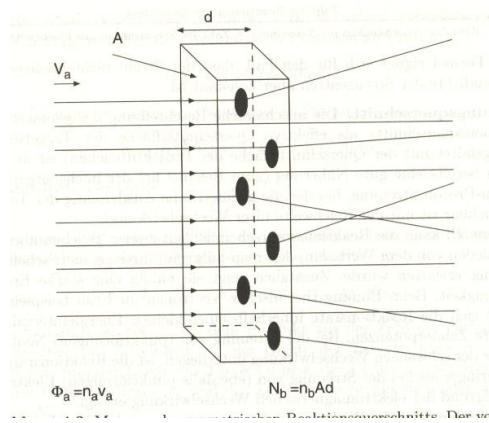


Abbildung 1.9: Skizze zur Messung des geometrischen Reaktionsquerschnitts (aus Ref. [3])

- (iii) *Wirkungsquerschnitt*  $\sigma$ : Der Wirkungsquerschnitt wird durch die Physik, d.h. durch die zu Grunde liegende Wechselwirkung bestimmt. Für vorgegebene Flussgrößen ( $\phi_a, N_b$ ) ist die Reaktionsrate proportional zum Wirkungsquerschnitt:

$$\boxed{\dot{N} = \phi_a \cdot N_b \cdot \sigma} \quad (1.24)$$

woraus sich für  $\sigma$  ergibt, dass

$$\boxed{\sigma = \frac{\dot{N}}{\phi_a N_b}} \quad (1.25)$$

und damit die Einheit des Wirkungsquerschnitts

$$[\sigma] = \frac{1}{\text{s}} \text{cm}^2 \cdot \text{s} = \text{cm}^2 \quad (1.26)$$

Die Grundeinheit ist das barn  $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Dabei reichen die üblichen Größen von  $1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2$  in der Kernphysik über  $1 \text{ nb} = 10^{-33} \text{ cm}^2$  bei der starken Wechselwirkung bis hin zu  $1 \text{ fb} = 10^{-39} \text{ cm}^2$  bei der schwachen Wechselwirkung und Higgs-Produktion.

$\sigma, \phi_a$  und  $N_b$  besitzen grundlegend verschiedene Eigenschaften:

- $\phi_a$  und  $N_b$  sind von außen durch den experimentellen Aufbau kontrollierbar
- $\sigma$  ist eine intrinsische Größe, die durch die Stärke der zu Grunde liegenden Wechselwirkung charakterisiert ist. Zudem hängt  $\sigma$  von der Energie der Teilchen ab.

Beispiele:

- (i) Proton-Proton-Streuung bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$

$$\sigma_{pp}(10 \text{ GeV}) \approx 40 \text{ mb} \quad (1.27)$$

Die zu Grunde liegende Wechselwirkung ist die starke Wechselwirkung.

- (ii) Neutrino-Proton-Streuung:

$$\sigma_{\nu p}(10 \text{ GeV}) \approx 10^{-42} \text{ cm}^2 = 10^{-15} \text{ mb} \quad (1.28)$$

Die zu Grunde liegende Wechselwirkung ist die schwache Wechselwirkung.

Klassisch kann der Wirkungsquerschnitt als „Fläche“ veranschaulicht werden, quantenmechanisch spielt die „Fläche“ keine Rolle. Man betrachtet dabei Streureaktionen von „punktformigen“ Teilchen aneinander oder die Streuung von punktförmigen Teilchen am Coulomb-Potential  $V(r) \sim \frac{Ze^2}{r}$ .

- Das Produkt  $\phi_a \cdot N_b$  wird häufig als *Luminosität*  $\mathcal{L}$  bezeichnet (insbesondere bei Speicherringexperimenten). Die Luminosität besitzt die Dimension  $[\mathcal{L}] = \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

$$\Rightarrow \dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma \quad (1.29)$$

Sei  $n$  die Zahl der Teilchenpakete (bunches),  $N_a, N_b$  die Zahl der Teilchen in den Paketen,  $f$  die Umlauffrequenz und  $s_a, s_b$  die Standardabweichungen des Strahlprofils bei der Kollision unter Annahme gaußförmiger Strahlprofile. Dann ist

$$\mathcal{L} = f \cdot n \frac{N_a \cdot N_b}{4\pi \cdot s_a \cdot s_b} \quad (1.30)$$

Typische Werte sind  $\mathcal{L}(e^+e^-) \sim 10^{31} - 10^{32} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  und  $\mathcal{L}(pp) \sim 10^{32}$  (Tevatron) –  $10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  (LHC). Zum Vergleich: Trifft ein Strahl von  $2 \cdot 10^{12}$  Protonen/s auf ein Flüssig-Wasserstoff-Target mit einer Länge von 1 m, so ist die Luminosität  $\mathcal{L} = 10^{37} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ .

Bislang wurde der totale Wirkungsquerschnitt betrachtet, der die Gesamtzahl aller Reaktionen, ohne Differenzierung nach weiteren Ereigniseigenschaften, wie z.B. Streuwinkel  $\theta$  oder Energie der auslaufenden Teilchen erfasst. → Man betrachtet einen *differentialen Wirkungsquerschnitt*, beispielsweise

- (i) Wirkungsquerschnitt für die Streuung in den Raumwinkelbereich  $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$

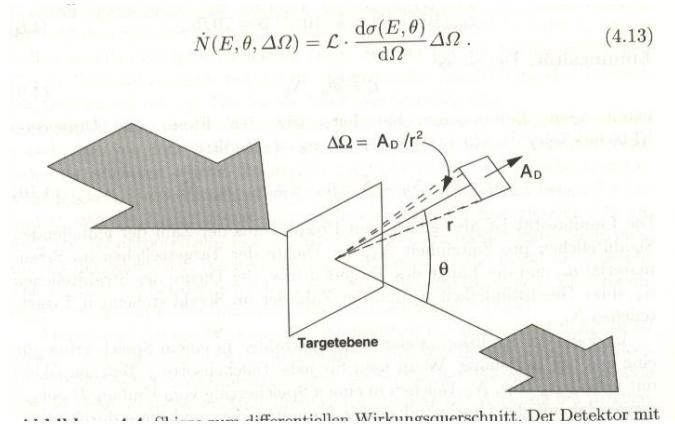


Abbildung 1.10: Skizze zur Illustration des differentiellen Wirkungsquerschnitts (aus Ref. [3])

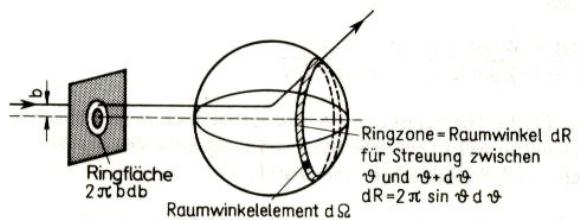


Abbildung 1.11: Skizze zur Illustration des differentiellen Wirkungsquerschnitts, Beziehung zwischen Stoßparameter und Streuwinkel (aus Ref. [1])

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\dot{N}_\Omega}{\phi_a \cdot N_b} \quad (1.31)$$

wobei  $\dot{N}_\Omega$  = Anzahl der pro Zeiteinheit nach  $d\Omega$  gestreuten Teilchen ist.

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (1.32)$$

Oftmals ist das Streuproblem axialsymmetrisch und es wird der differentielle Wirkungsquerschnitt  $\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)$  für die Streuung unter einem Winkel  $\theta$  betrachtet, bzw. in den Streuwinkelbereich zwischen  $\theta$  und  $(\theta + d\theta)$ . In diesem Fall kann über den Winkel  $\varphi$  integriert werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} \cdot d\theta &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\varphi \\ &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta \cdot 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \end{aligned} \quad (1.33)$$

Dabei ist  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta$  der differentielle Wirkungsquerschnitt für  $\theta = \text{const.}$  (festgehalten). Hieraus ergibt sich

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi \cdot \sin \theta \cdot \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta} \quad (1.34)$$

Bei einem klassischen Streuprozess besteht eine feste Beziehung zwischen dem Abstand (Stoßparameter)  $b$ , unter welchem die Teilchen auf das Streuzentrum einlaufen und Streuwinkel  $\theta$ . Der Streuwinkel  $\theta$  ist eine Funktion von  $b$  und der Energie  $E$ :  $\theta = \theta(b, E)$ : Auf Grund der Unitarität (Erhaltung der Teilchenzahl) werden Teilchen im Kreisring zwischen  $b$  und  $(b + db)$  in das Raumwinkellement  $dR$  gestreut.

$$\Rightarrow 2\pi \cdot b \cdot db \rightarrow dR = 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (1.35)$$

Die Zahl der einlaufenden Teilchen pro Zeiteinheit

$$\dot{N}_{\text{in}} = \phi_a \cdot 2\pi \cdot b \cdot db \quad (1.36)$$

muss gleich der Zahl der pro Zeiteinheit in den Winkelbereich  $[\theta, \theta + d\theta]$  gestreuten Teilchen

$$\dot{N}_{\text{out}} = \phi_a \cdot 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta \quad (1.37)$$

sein:  $\dot{N}_{\text{in}} = \dot{N}_{\text{out}}$ .

$$\Rightarrow \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (1.38)$$

In der klassischen Mechanik ist der differentielle Wirkungsquerschnitt also bekannt, sobald die Funktion  $b(\theta)$  bekannt ist.

- (ii) Verallgemeinerung auf *doppelt-differentielle* Wirkungsquerschnitte (relevant für inelastische Streuprozesse)

$$\frac{d^2\sigma(E, E', \theta)}{d\Omega \cdot dE'} \quad (1.39)$$

Beschreibt eine Streuung in den Raumwinkelement  $d\Omega$  bzw.  $(\theta, \theta + d\theta)$  mit der Energie des auslaufenden Teilchens im Intervall  $[E', E' + dE']$ . Dabei bezeichnet  $E$  die Energie des einlaufenden Teilchens,  $E'$  die des auslaufenden Teilchens und  $\theta$  den Streuwinkel.

$$\sigma = \int_0^{E'_{\max}} \int \Omega \frac{d^2\sigma(E, E', \theta)}{d\Omega \cdot dE'} \cdot d\Omega \cdot dE' \quad (1.40)$$

## 1.5 Relativistische Kinematik

### 1.5.1 Lorentz-Transformation

Grundlage bildet die spezielle Relativitätstheorie → In jedem Inertialsystem gelten die gleichen physikalischen Gesetze. Ein Inertialsystem ist ein System, in welchem das 1. Newtonsche Gesetz (Trägheitsgesetz) gilt.

Wir betrachten zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$ , die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  zueinander bewegen. O.B.d.A. sei diese Bewegung in  $x$ -Richtung. Der Übergang zwischen diesen Systemen wird durch die Lorentz-Transformation beschrieben:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - v \cdot t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} \cdot x \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

, wobei  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ . Die inverse Transformation lautet

$$\begin{aligned} x &= \gamma \cdot (x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} \cdot x' \right) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Die Konsequenzen der Lorentz-Transformation umfassen

(i) Relativität der Gleichzeitigkeit:

- *Gleichzeitigkeit* hängt von der Bewegung der Bezugssysteme ab
- Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, sind im anderen Bezugssystem nicht gleichzeitig.
- Zwei gleichzeitige Ereignisse in  $S$  seien gekennzeichnet durch:  $t, x_A, y, z$  und  $t, x_B, y, z$ ,
- Für die Zeiten  $t'$  der Ereignisse  $A$  und  $B$  ergibt sich im System  $S'$ :

$$\begin{aligned} t'_A &= \gamma \cdot \left( t - \frac{v}{c^2} \cdot x_A \right) \\ t'_B &= \gamma \cdot \left( t - \frac{v}{c^2} \cdot x_B \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

- Hieraus ergibt sich:

$$t'_A = t'_B + \gamma \cdot \frac{v}{c^2} \cdot (x_B - x_A) \quad (1.44)$$

(ii) Längenkontraktion

- Betrachte einen Stab der Länge  $L'$  im System  $S'$  ( $S'$  sei das Ruhesystem des Stabes)
- $L' = x'_2 - x'_1$
- Betrachte die Koordinaten, und damit die Länge des Stabes im System  $S$ :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - v \cdot t) \Rightarrow x'_1 = \gamma x_1 - \gamma v \cdot t \\ x'_2 &= \gamma x_2 - \gamma v \cdot t \end{aligned} \quad (1.45)$$

- Hieraus ergibt sich

$$L = x_2 - x_1 = \frac{x'_2}{\gamma} - \frac{x'_1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} (x'_2 - x'_1) = \frac{L'}{\gamma} \quad (1.46)$$

→ Das bewegte Objekt erscheint um einen Faktor  $\gamma$  in der Länge verkürzt, bezogen auf das Ruhesystem des Objekts.

(iii) Zeitdilatation

- Eine Uhr in dem bewegten System laufe für einen Zeitraum  $T'$ ; welches Zeitintervall ergibt die Messung im System  $S$ ?
- o.B.d.A. sei  $t'_1 = 0$  bis  $t'_2 = T'$ ,  $\Delta t' = T'$ . Die Uhr sei im Ursprung von  $S'$ , d.h.  $x' = 0$

- Lorentztransformation:

$$t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x \right) \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_1 &= \gamma \cdot \left( 0 + \frac{v}{c^2} \cdot 0 \right) = 0 \\ \Rightarrow t_2 &= \gamma \cdot \left( T' + \frac{v}{c^2} \cdot 0 \right) = \gamma \cdot T' \\ \Rightarrow \Delta t &= t_2 - t_1 = \gamma T' \end{aligned} \quad (1.48)$$

→ Die Uhr im System  $S$  durchläuft ein um den Faktor  $\gamma$  längeres Zeitintervall, oder: „bewegte Uhren gehen langsamer“.

Wichtig für die Teilchenphysik: Zeitdilatation relativistischer Teilchen (→ Lebensdauer)

#### (iv) nicht-lineare Addition von Geschwindigkeiten

- Ein Teilchen bewege sich mit der Geschwindigkeit  $u'$  relativ zu  $S'$  in  $x'$ -Richtung; Welche Geschwindigkeit  $u$  hat es im Bezugssystem  $S$ ?

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u = \frac{\gamma (\Delta x' + v \cdot \Delta t)}{\gamma (\Delta t' + \frac{v}{c^2} \cdot \Delta x')} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\Delta x'}{\Delta t}} \quad (1.49)$$

$$\Rightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} \quad (1.50)$$

klassisch ist  $u = u' + v$ , d.h. die relativistische Korrektur ist  $k := \frac{1}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}}$

- Spezialfälle:

$$\begin{aligned} u' = c \rightarrow u &= \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c \cdot \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} = c \\ v = c = u' \rightarrow u &= c \cdot \frac{2}{2} = c \end{aligned} \quad (1.51)$$

→ Die Lichtgeschwindigkeit stellt in allen Inertialsystemen die maximale Geschwindigkeit dar.

### 1.5.2 Vierervektoren

Orts- und Zeit-Vektor: Die Lorentz-Transformation koppelt Orts- und Zeitkoordinaten, Zusammenfassung der vier Koordinaten in einen Raum-Zeit-Vektor, einem sog. *Vierervektor*:

$$x^\mu := \begin{pmatrix} c \cdot t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x^0 &= c \cdot t \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \quad (1.52)$$

Transformation:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma \left( x^0 - \beta \cdot x^1 \right) \\ x^{1'} &= \gamma \left( x^1 - \beta \cdot x^0 \right) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \tag{1.53}$$

wobei  $\beta := \frac{v}{c}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . In Einstein'scher Summenkonvention lässt sich dies kompakt schreiben als

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} \cdot x^{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} \cdot x^{\nu}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{1.54}$$

wobei

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

Allgemein bezeichnet man als *Vierervektoren*  $a^{\mu}$  vier-komponentige Objekte, welche sich wie  $x^{\mu}$  transformieren:

$$a^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} a^{\nu} \tag{1.56}$$

wobei  $\Lambda$  die Lorentz-Transformationsmatrix wie oben darstellt. Das Skalarprodukt von Vierervektoren unterscheidet sich von dem bei Dreiverktoren bekannten Skalarprodukt:

$$a^{\mu} \cdot b_{\mu} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \Leftrightarrow a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, \tag{1.57}$$

und entsprechend ist das Quadrat des Betrags eines Vierervektors

$$a^2 := a \cdot a = \left( a^0 \right)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a} \tag{1.58}$$

Je nach Wert von  $a^2$  spricht man davon, dass  $a$

- *zeitartig* ist, falls  $a^2 > 0$ ,
- *raumartig* ist, falls  $a^2 < 0$ ,
- *lichtartig* ist, falls  $a^2 = 0$ .

Als *Lorentz-Invarianten* bezeichnet man Kombination von Koordinaten, die invariant unter Lorentz-Transformationen sind, z.B.

$$\begin{aligned} I &= \left( x^0 \right)^2 - \left( x^1 \right)^2 - \left( x^2 \right)^2 - \left( x^3 \right)^2 \\ &= \left( x^{0'} \right)^2 - \left( x^{1'} \right)^2 - \left( x^{2'} \right)^2 - \left( x^{3'} \right)^2 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Mit der Metrik

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

ergibt sich

$$I = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\nu x^\nu \quad (1.61)$$

wobei

$$x_\mu := g_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.62)$$

ein *kovarianter Vektor* ist.  $x^\nu$  wird als *kontravarianter Vektor* bezeichnet. Die Metrik bildet den Übergang zwischen kontravarianten und kovarianten Vektoren:

$$\begin{aligned} \text{kontravariant: } & (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ \text{kovariant: } & (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \end{aligned} \quad (1.63)$$

Auf Grund der Diagonalform ist

$$g^{\mu\nu} = (G)^{-1} = g_{\mu\nu} \quad (1.64)$$

### 1.5.3 Tensoren

Tensoren stellen eine Verallgemeinerung von Vierervektoren dar. Ein Tensor  $n$ -ter Stufe  $S^{\mu\nu\dots}$  (mit  $n$  Indices) transformiert sich mit  $n$   $\Lambda$ -Matrizen:

$$S^{\mu\nu\dots} = \lambda_k^\mu \cdot \Lambda_\sigma^\nu \cdot S^{k\dots} \quad (1.65)$$

Für einen Tensor zweiter Stufe (16 komponentiges Objekt). Tensoren 0. Stufe sind Skalare, Tensoren 1. Stufe Vierervektoren. Mit Hilfe der Metrik  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$  (Gleichheit gilt nur in der speziellen Relativitätstheorie!) lassen sich *kovariante* und *gemischte* Tensoren konstruieren:

$$\begin{aligned} S_\nu^\mu &:= g_{\nu\lambda} \cdot S^{\mu\lambda} \\ S_{\mu\nu} &:= g_{\mu k} \cdot g_{\nu\lambda} \cdot S^{k\lambda} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Das Produkt von Tensoren ist ebenfalls ein Tensor.

### 1.5.4 Energie-Impuls Vektor

Die relativistische Energie und der Dreierimpuls bilden einen Vierervektor

$$P^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot m \cdot c \\ \gamma \cdot m \cdot \vec{v} \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

Relativistisch invariant ist das Produkt zweier Vierervektoren und somit speziell auch

$$\begin{aligned}
 P_\mu \cdot P^\mu &= \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2 \\
 &= \gamma^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
 &= \gamma^2 m^2 c^2 \frac{1}{\gamma^2} = m^2 c^2 \\
 \Rightarrow E^2 &= m^2 c^4 + p^2 c^2
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

Der Energieterm des Impuls-Vierer-Vektors ist

$$E = \gamma \cdot mc^2 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \tag{1.69}$$

und für kleine Werte von  $\frac{v}{c}$ :

$$\begin{aligned}
 E &= mc^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right\} \\
 &= mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots
 \end{aligned} \tag{1.70}$$

Relativistisch sind die Energie- und Impulsbeziehungen

$$\begin{aligned}
 \vec{p} &= \gamma \cdot m \cdot \vec{v} \\
 E &= \gamma \cdot m \cdot c^2
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

und somit

$$\gamma = \frac{E}{E_0}, \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{p \cdot c}{E} \tag{1.72}$$

Beispiel: Für ein Proton mit  $E = 10$  GeV sind

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{10 \text{ GeV}}{0.938 \text{ GeV}} = 10.66 \\
 \beta &= \frac{\sqrt{10^2 - 0.938^2}}{10} = 0.996
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

## 2 Eigenschaften stabiler Atomkerne

### 2.1 Nomenklatur

Die Kenngrößen von Kernen, die im Periodensystem der Elemente als Symbol  $X$  zu finden sind, sind

- Protonenzahl  $Z$  (auch Ladungszahl genannt)
- Neutronenzahl  $N$
- Massenzahl (Nukleonenzahl)  $A = N + Z$

Ein Isotop des chemischen Elements  $X$  wird dann bezeichnet durch

$$\begin{array}{c} A \\ Z \end{array} X_N, \quad (2.1)$$

, beispielsweise  $^{238}_{92}U_{146}$ . Sowohl Protonen ( $p$ ) als auch Neutronen ( $n$ ) werden Nukleonen genannt,  $A$  entsprechend als Nukleonenzahl. Die elektrische Ladung des Kerns ist  $Q = +Ze$ , wobei  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  die Elementarladung bezeichnet.

Das chemische Element und seine chemischen Eigenschaften werden durch die Ladungszahl beziehungsweise die Elektronenkonfiguration festgelegt. Atome sind elektrisch neutral, was bedeutet, dass

$$Q(Z \cdot e) = -Q(\text{Elektronen}) \quad (2.2)$$

gilt. Zur Bestimmung der Ladungszahl des Kerns kann neben Streuexperimenten (vgl. 2.2) beispielsweise eine Vermessung der charakteristischen Röntgenstrahlung durchgeführt werden. Nach dem Mosley'schen Gesetz gilt

$$E(K_\alpha) \sim (Z - 1)^2 \quad (2.3)$$

Als Nuklide bezeichnet man verschiedene Kombinationen von  $Z$  und  $N$ . Dabei unterteilt man in

**Isotone** Hier ist die Neutronenzahl  $N$  konstant, das chemische Element kann sich ändern

**Isotope** Hier ist die Protonenzahl  $Z$  konstant, sodass das chemische Element unverändert bleibt (z.B.  $^{12}_6C_6$ ,  $^{13}_6C_7$ ,  $^{14}_6C_8$ ).

**Isobare** Hier ist die Massenzahl  $A$  konstant, was zum Beispiel bei allen  $\beta$ -Zerfällen der Fall ist.

Alle bekannten Kerne sind in der sogenannten *Nuklidkarte* oder *Isotopen-tafel* erfasst.

Es gibt etwa 2700 bekannte Nuklide, d.h. 2700 Isotope der bislang bekannten 112 chemischen Elemente. Der weitaus größte Teil ist instabil und zerfällt nach kurzer Lebensdauer. Der Bereich in der  $(N, Z)$ -Ebene in der Kerne existieren können wird durch Stabilitätslinien gekennzeichnet.

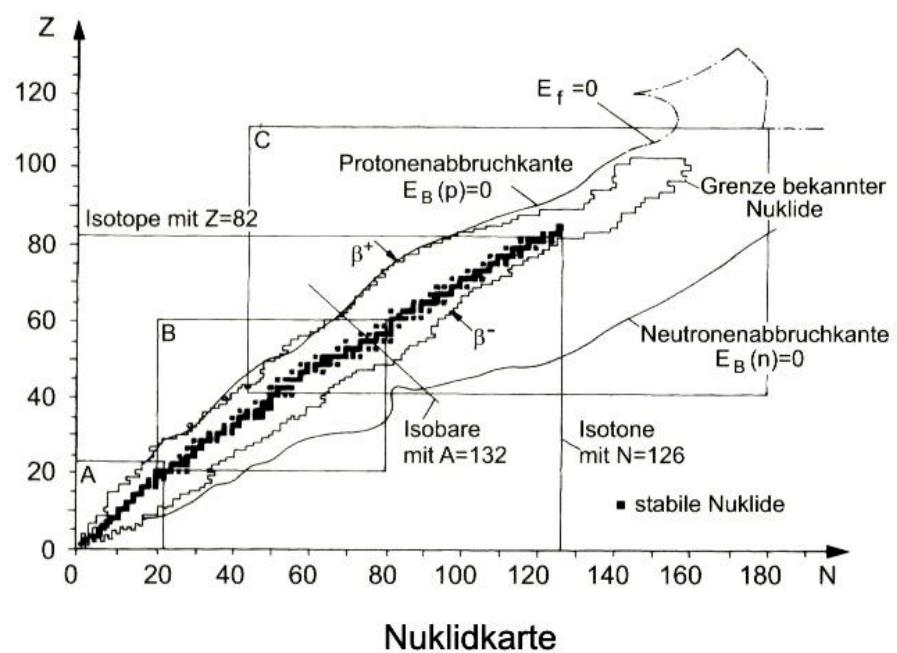


Abbildung 2.1: *Nuklidkarte (aus Ref. [?])*

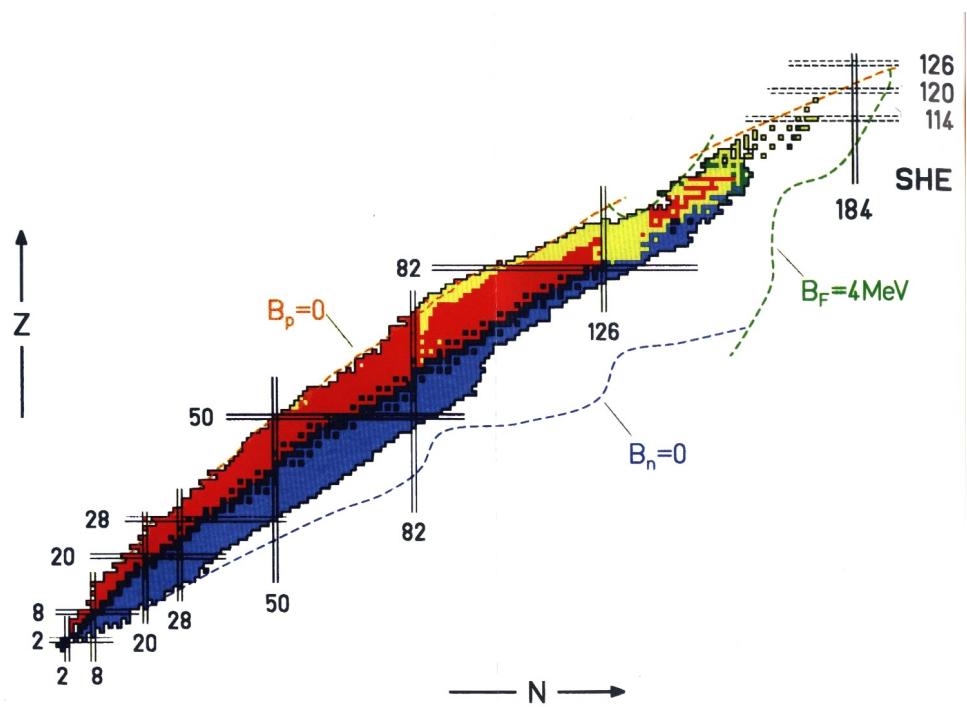


Abbildung 2.2: Nuklidkarte. Stabile Kerne sind schwarz markiert, farbige Punkte kennzeichnen instabile Kerne. (aus Ref. [?])

## 2.2 Ausdehnung von Atomkernen

### 2.2.1 Rutherford'sches Streuexperiment

Rutherford (1911), sowie Geiger und Marsden (1913) führten Experimente zur Streuung eines kollimierten  $\alpha$ -Strahls an einer dünnen Goldfolie durch und untersuchten dabei die Winkelverteilung der gestreuten  $\alpha$ -Teilchen.

Die Ergebnisse des Versuches waren

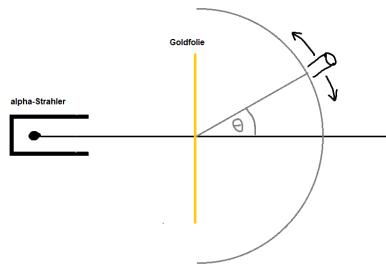


Abbildung 2.3: Aufbau des Rutherford-Experiments

- Die Intensität der gestreuten  $\alpha$ -Teilchen nimmt mit zunehmendem Winkel ab.
- Streuung auch mit kleiner Rate unter hohen Winkeln ( $\theta > 90^\circ$ , Rückstreuung).

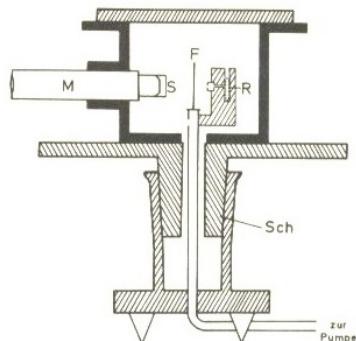


Abbildung 2.4: Anordnung von Geiger und Marsden zur Beobachtung der Rutherford-Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie. Das Emanationsröhrrchen R befindet sich in einem Bleiklotz, der nach links austretende kollimierte  $\alpha$ -Strahl passiert die Goldfolie F. Die  $\alpha$ -Teilchen, die nach einer Streuung auf den Szintillator Sch gelangen werden durch das Mikroskop M betrachtet. (aus Ref. [11])

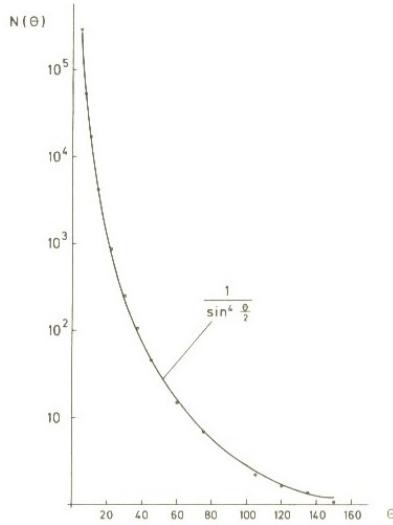


Abbildung 2.5: Graphische Darstellung der Messergebnisse von Geiger und Marsden für die Streuung von  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie. Die ausgezogene Linie stellt den theoretischen Verlauf für reine Coulomb-Streuung im elektrischen Feld einer Punktladung dar. Der gestrichelte Verlauf wäre bei homogener Massenverteilung im Atom (Thomson-Modell) zu erwarten. (aus Ref. [11])

### Klassische Rechnung

Die Kraft auf Grund der Coulomb-Abstoßung ist

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \cdot \vec{r}_0 = m \vec{a} \quad (2.4)$$

Dies stellt ein klassisches Zwei-Körperproblem dar, die Streuung am Zentralkraftfeld. Die klassische Mechanik (siehe z.B. Goldstein) liefert einen Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$ , dem Ablenkwinkel  $\theta$  und dem Stoßparameter  $b$ :

$$\boxed{\cot \frac{\theta}{2} = 2 \cdot E_{\text{kin}} \cdot b \cdot \left( \frac{4\pi\varepsilon_0}{zZe^2} \right)} \quad (2.5)$$

, wobei  $q_1 = ze$  ( $\alpha$ ) sowie  $q_2 = Z \cdot e$ . Es folgt hieraus sofort der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\Rightarrow \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (2.6)$$

Aus 2.5 erhält man für den Stoßparameter

$$b(\theta) = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2E_{\text{kin}}} \cot \frac{\theta}{2} \quad (2.7)$$

, sodass man die Rutherford'sche Streuformel in SI-Einheiten

$$\boxed{\Rightarrow \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{(4\pi\varepsilon_0) \cdot 4 \cdot E_{\text{kin}}^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}} \quad (2.8)$$

erhält. In natürlichen Einheiten<sup>1)</sup> entspricht dies

$$\Rightarrow \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{4 \cdot E_{\text{kin}}^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2.9)$$

Es ergeben sich somit die wichtigen Abhängigkeiten  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} \sim \frac{1}{E_{\text{kin}}^2}, \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$  des Streuquerschnitts.

Die Winkelabhängigkeit hängt mit dem Impulsübertrag zusammen.  $\vec{p}, \vec{p}' \rightarrow \vec{q} := \vec{p} - \vec{p}'$ . Da ein zeitunabhängiges Potential nur eine elastische Streuung bewirken kann, sind die kinetischen Energien vor und nach der Streuung identisch. Dies bedeutet, dass  $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$  und es ergibt sich, dass

$$|\vec{q}| = 2 \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{q}|}{2|\vec{p}|} \quad (2.10)$$

Mit  $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$  (nicht-relativistisch) ergibt sich

$$\Rightarrow \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} = \left( \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot (2m)^2 \cdot \frac{1}{q^4} \quad (2.11)$$

Der Streuquerschnitt ist also proportional zu  $\left( \frac{1}{q} \right)^4$ . Dieser Zusammenhang gilt auch quantenmechanisch:  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta} \sim \left( \frac{1}{\text{Impulsübertrag}} \right)^4$ . Er ist charakteristisch für die Streuung an Coulomb-Potentialen.

Interpretation des Rutherford-Experiments (und weiterer Experimente):

- Das Atom enthält einen geladenen Atomkern der Größe  $R < \sim 10^{-14}$  m, der fast die gesamte Masse des Atoms enthält;
- Die Ladung beträgt  $+Z$  Elementarladungen, wobei  $Z$  die Ordnungszahl im periodischen System der Elemente bedeutet;
- Die Atomhülle enthält die entsprechende negative Ladung, sodass das Atom insgesamt elektrisch neutral ist. Diese Ladung ist an sehr viel kleinere Partikel gebunden.

---

<sup>1)</sup>Der Term  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  kann in der Definition der Ladung absorbiert werden.

## Experimente zur natürlichen Radioaktivität

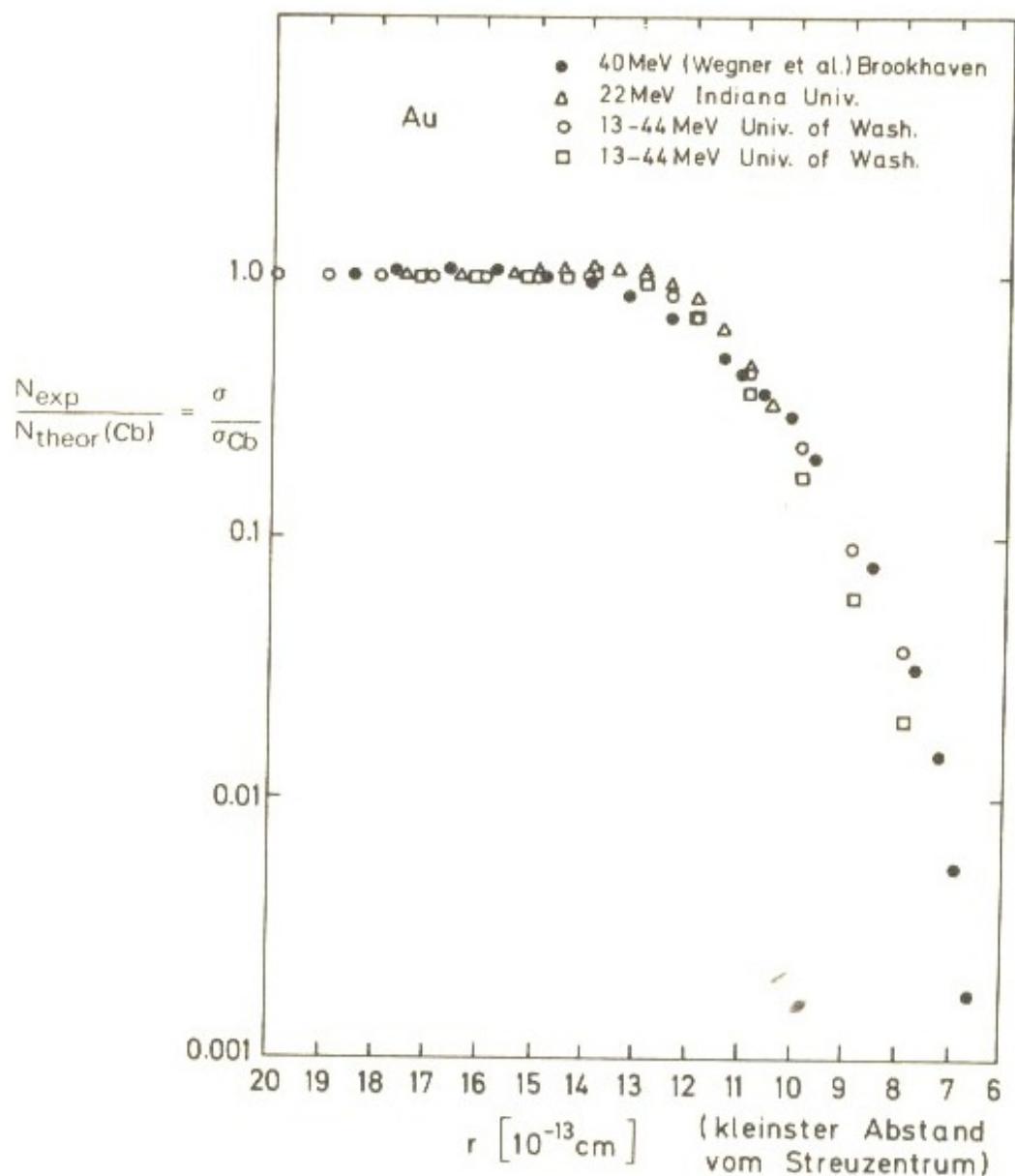


Abbildung 2.6: Verhältnis des gemessenen Wirkungsquerschnitts zum Coulombquerschnitt, dargestellt als Funktion des kleinsten Abstands der klassisch berechneten Bahn der  $\alpha$ -Teilchen vom Streuzentrum (aus Ref. [11])

### Quantenmechanische Herleitung der Rutherford-Formel

Siehe auch Literatur, z.B. H. Rollnik, Kapitel 2.12

Zu berechnen ist die elastische Streuung von nicht-relativistischen Spin-0 Teilchen unter dem Einfluss eines asymptotisch freien<sup>2</sup> Coulomb-Potentials. Unter Annahme einer einlaufenden, ebenen Welle eines Teilchens mit Impuls  $\vec{p}$  und Energie  $E$  erhält man als Lösung für große Abstände eine Superposition von (einlaufender) ebener Welle und auslaufender Kugelwelle mit Impuls  $\vec{p}'$

$$\psi_p(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \underbrace{f(\vec{p}, \vec{p}') \cdot \frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{auslaufende Kugelwelle}} \quad (2.12)$$

wobei  $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ .  $f(\vec{p}, \vec{p}')$  wird dabei als Streuamplitude bezeichnet. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann gegeben durch

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = |f(\vec{p}, \vec{p}')|^2 \quad (2.13)$$

### Störungstheorie

In der Born-Näherung (nach M. Born) sind die Terme der führenden (niedrigsten) Ordnung gegeben durch

$$f^1(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3r, \quad \vec{q} := \vec{p} - \vec{p}' \quad (2.14)$$

Man führt üblicher Weise zusätzlich ein Potential

$$\tilde{V}(\vec{q}) := \int e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) \cdot d^3r \quad (2.15)$$

ein, d.h. die Fourier-Transformierte des Potentials bzgl. des Impulsübertrags. Somit erhalten wir

$$f^1(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \cdot \tilde{V}(\vec{q}) \quad (2.16)$$

Angewandt auf das Coulomb-Potential

$$V(\vec{r}) = -\frac{zZe^2}{r} \quad (2.17)$$

erhält man, mit der Poisson-Gleichung für eine punktförmige Ladungsverteilung

$$\Delta V(r) = 4\pi \cdot Z \cdot Z \cdot e^2 \cdot \delta^3(\vec{r}) \quad (2.18)$$

, dass

$$f^1(\vec{p}, \vec{p}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \cdot \tilde{V}(q) = \frac{2m \cdot zZe^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^1(\vec{p}, \vec{p}')|^2 = (zZe^2)^2 \cdot (2m)^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

(2.19)

Es ergibt sich ein Ergebnis, das identisch zur klassischen Rechnung ist, die Planck'sche Konstante  $\hbar$  fällt heraus.

---

<sup>2</sup>d.h.  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(\vec{r}) = 0$

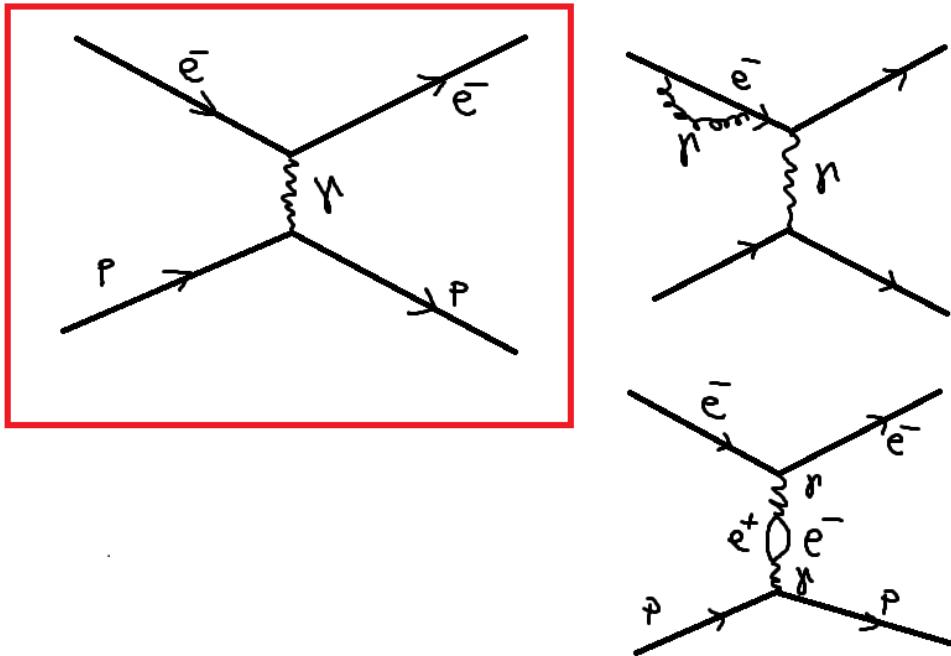


Abbildung 2.7: Mögliche Wechselwirkungen beim Stoß von Elektron und Proton. Der Hauptteil der Wechselwirkung findet wie im rot markierten Diagramm dargestellt statt. Die weiteren Diagramme stellen beispielhaft weitere mögliche Wechselwirkungsarten dar.

Die Ergebnisse des Rutherford-Experiments zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen experimentellen Daten und den Rechnungen mit einem punktförmigen Coulomb-Potential, die Theorie ist in erster Näherung in Ordnung, d.h. die  $\alpha$ -Teilchen bewegen sich in einem „ungestörten“ Coulomb-Feld und spüren noch nichts von einer stärkeren Kernkraft, die offensichtlich die Protonen und Neutronen gegen die Coulomb-Abstoßung zusammen halten muss.

Die Abschätzung der Größe des Atoms durch die dichteste (kleinste) Annäherung ist klassisch:

$$b = 0, \theta = 180^\circ, E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}, \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{z Z e^2}{r_{\min}} \quad (2.20)$$

Mit  $z = 2$ ,  $Z = 79$  (Gold) und  $E_{\text{kin}} = 5.5 \text{ MeV}$  folgt

$$\rightarrow r_{\min} = 4.1 \cdot 10^{-14} \text{ m} \quad (2.21)$$

Aus der Beobachtung der reinen Coulomb-Streuung ergibt sich, dass der Radius des Goldkerns kleiner als  $4.1 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  ist.

### DeBroglie-Wellenlänge von Teilchen

$$\lambda := \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{pc} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{p \cdot c} \quad (2.22)$$

- (i) Für  $\alpha$ -Teilchen mit kinetischer Energie  $E_{\text{kin}} = 5 \text{ MeV}$  wie im Rutherford-Experiment gilt in relativistischer Rechnung

$$\begin{aligned} E^2 &= (p \cdot c)^2 + (mc^2)^2 = \left( E_{\text{kin}} + mc^2 \right)^2 = E_{\text{kin}}^2 + (mc^2)^2 + 2E_{\text{kin}}mc^2 \\ \Rightarrow p \cdot c &= \sqrt{E_{\text{kin}}(E_{\text{kin}} + 2mc^2)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Für eine kinetische Energie von 5 MeV und  $m_\alpha \approx 4 \cdot m_p \approx 3750 \text{ MeV}/c^2$  ist der Impuls komplett durch den Massenterm bestimmt:

$$\Rightarrow \lambda \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\sqrt{5(5 + 7500)} \text{ MeV}} \approx 1 \text{ fm} \quad (2.24)$$

- (ii) Elektronen: Für Elektronen ist im Allgemeinen der Massenterm vernachlässigbar. Es ergibt sich somit für Elektronen der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}} = 100 \text{ MeV}$ :

$$\lambda \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\sqrt{100(100 + 2 \cdot 0.511)} \text{ MeV}} \approx 2 \text{ fm} \quad (2.25)$$

Für  $E_{\text{kin}} = 500 \text{ MeV}$  bzw.  $E_{\text{kin}} = 1 \text{ GeV}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_{500 \text{ MeV}} &\approx 0.4 \text{ fm} \\ \lambda_{1 \text{ GeV}} &\approx 0.2 \text{ fm} \end{aligned} \quad (2.26)$$

## 2.2.2 Streuung von $\alpha$ -Teilchen höherer Energie

Nach Beginn der Beschleunigerentwicklung in den 1950er Jahren konnte die  $\alpha$ -Energie kontrolliert erhöht werden und es wurde 1955 die Streuung von 40 MeV  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie untersucht. Zum Vergleich erinnern wir uns an die Größenordnung der natürlichen Radioaktivität, die bei  $E_{\text{kin}} \approx O(1 - 10 \text{ MeV})$  liegt.

Ergebnis: Für große Winkel  $\theta \gtrsim 40^\circ$  wird eine starke Abweichung von der Rutherford-

Formel festgestellt, d.h. eine Abweichung vom reinen Coulomb-Potential. Dies ist zurückzuführen auf den Einfluss der Kernkräfte (starke Wechselwirkung), die das ursprüngliche Coulomb-Potential verändern.

Bei der Streuung von hochenergetischen  $\alpha$ -Teilchen kann somit eine Abweichung von der Coulomb-Streuung festgestellt werden, womit ein Radius von  $\sim 13 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  (Au)  $\approx 13 \text{ fm}$  bestimmt werden kann<sup>3</sup>. Grenzen der Anwendbarkeit der Rutherford-

Streuformel:

- Vernachlässigung der starken Kernkraft (sie gilt nur für Coulomb-Potentiale)
- Die Ladungsverteilung im Kern wird als punktförmig angenommen,  $\rho(\vec{r})$  über Kernvolumen ist nicht berücksichtigt.
- Sie gilt nur für Spin-0 Teilchen, Spin-Effekte führen zu Korrekturen. Für  $\alpha$ -Teilchen ist die Annahme von Spin-0 Teilchen richtig, für Spin- $1/2$ -Teilchen wie z.B.  $e^-$  gilt jedoch beispielsweise die sog. *Mott-Streuung* für die Streuung am spinlosen Target:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left( 2 \cdot z \cdot Z \cdot e^2 \right)^2 \frac{E^2}{(qc)^4} \left\{ 1 - \underbrace{\left( \frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}_{\substack{\text{Beiträge} \\ \text{durch} \\ \text{Spin-Effekte}}} \right\} \quad (2.27)$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2.28)$$

, wobei  $E$  die relativistische Gesamtenergie  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  und  $v$  die Geschwindigkeit des Elektrons sind. Es ist hier also eine relativistische Rechnung erforderlich und der Mott-Querschnitt fällt für große Winkel noch stärker ab als der Rutherford-Streuerquerschnitt.

---

<sup>3</sup>Streng genommen handelt es sich hierbei um  $R_{\text{Au}} + R_\alpha + R_{\text{Kernkraft}}$

### 2.2.3 Streuexperimente mit Elektronen

Experimente mit Elektronen sind motiviert durch:

- $\alpha$ -Teilchen unterliegen der starken Kernkraft, d.h. es ist unmöglich mit  $\alpha$ -Teilchen Informationen über die Verteilung der elektrischen Ladung im Kern zu erhalten.
- Elektronen sind nicht sensitiv auf die Kernkraft (starke Wechselwirkung), sondern nur elektromagnetisch und schwach wechselwirkend, d.h. es kann die Verteilung der elektrischen Ladung im Kern untersucht werden:
  - Ist der Kern punktförmig?
  - Ist die Ladung (annähernd) homogen über ein größeres Volumen, z.B. eine Kugel mit Radius  $R_0$ ?
- $R(\text{el. Ladung}) \approx R(\text{starke WW, } \alpha)$ , d.h. fällt der Ladungsradius mit dem Radius der starken Kernkraft zusammen?
- Elektronen sind punktförmig ( $r_e < 10^{-18}\text{m}$ )
- Die Wellenlänge der Elektronen kann durch ihre Energie (Beschleuniger) festgelegt werden

Experimente in den 1950er Jahren:

R. Hofstädter, Standford University Californien am SLAC (Stanford Linear Accelerator Centre) führte Experimente mit Elektronen durch, deren Wellenlänge

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar c}{pc} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{pc} \quad (2.29)$$

bei einer Energie von  $E(e^-) = 100 \text{ MeV}$   $\lambda_e = 2 \text{ fm}$  und bei  $E = 1 \text{ GeV}$  rund  $\lambda_e = 0.02 \text{ fm}$  beträgt. Elektronenstreuung an Kernen:

Für einen Kern der Ladung  $+Ze$  mir der Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ ,  $\int \rho(\vec{r}) \cdot d^3r = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \rho(r) r^2 dr d\phi d(\cos \theta) = 1$  ist

$$Z \cdot e = \int Z \cdot e \cdot \rho(\vec{r}) d^3r \quad (2.30)$$

Die Quantenmechanische Streuamplitude (vgl. 2.2.1) erhält man nun durch

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\vec{q}) &= -\frac{4\pi Z \cdot e^2 \cdot \hbar^2}{q^2} \cdot \int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) \cdot d^3r \\ &= -\frac{4\pi Z e^2 \hbar^2}{q^2} \cdot F(\vec{q}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Größe

$$F(\vec{q}) := \boxed{\int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot d^3r} \quad (2.32)$$

wird dabei als *Formfaktor* bezeichnet. Für die Streuamplitude ergibt sich

$$f(\vec{p}, \vec{p}') = f(\vec{q}) = -\frac{2m \cdot Z \cdot e^2}{q^2} \cdot F(\vec{q}) \quad (2.33)$$

sodass für den Wirkungsquerschnitt folgt:

$$\Rightarrow \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{4m^2 \cdot Z^2 \cdot e^4}{q^4} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\delta(r)} \cdot |F(\vec{q})|^2$

(2.34)

, wobei  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\delta(r)}$  der differentielle Streuquerschnitt eines Punktteilchens ist (Delta-Distribution). Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung ergibt sich als Produkt aus dem Wirkungsquerschnitt der Streuung an einer Punktladung und dem Quadrat des Formfaktors. Der Formfaktor ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung. Aus dem theoretischen Wirkungsquerschnitt für eine Punktladung und dem experimentell bestimmten Wirkungsquerschnitt erhält man

$$|F(q)|^2 = \frac{\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}}}{\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Punkt}}} \quad (2.35)$$

und somit die Ladungsverteilung als (invers) Fouriertransformierte des Formfaktors:

$$\rho(r) = \text{FT}^{-1}(F(q)) \quad (2.36)$$

Für punktförmige Ladungsverteilungen wird  $F = 1$ .  $F$  beschreibt die Abweichung von der Punktförmigkeit. Allgemein gilt

$$|F(\vec{q})| \leq \int |\rho(r)| \cdot d^3r = \int \rho(r) d^3r = 1 \quad (2.37)$$

$\Rightarrow$  Der Wirkungsquerschnitt der Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung ist stets kleiner als 1.

Einige Beispiele für  $\rho(r) \leftrightarrow |F(q)|$  sind in den folgenden Abbildungen 2.8 und 2.9 dargestellt.

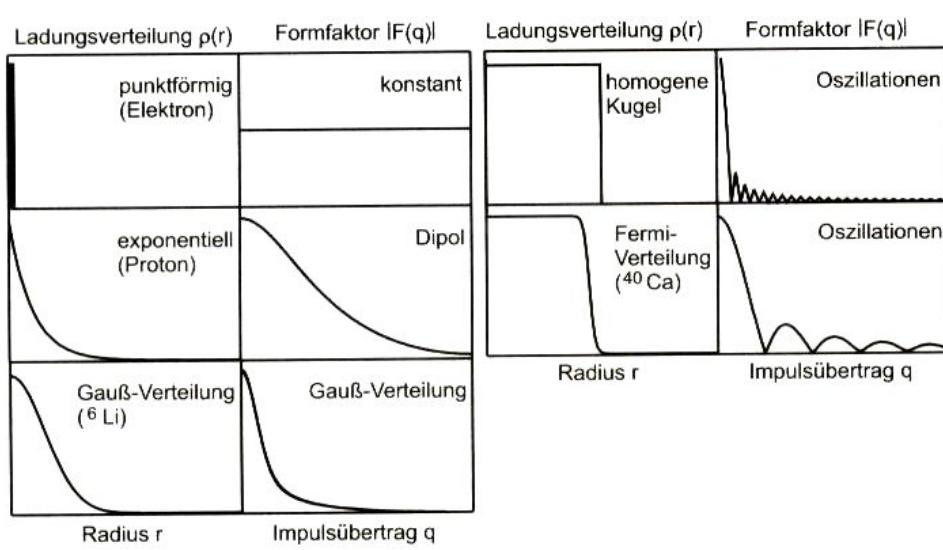


Abbildung 2.8: Einige Beispiele für Ladungsverteilungen und zugehörige Formfaktoren (aus Ref. [12])

Ladungsverteilung $f(r)$	Formfaktor $F(q)$
Punkt	$\frac{1}{4\pi} \delta(r)$
exponentiell	$\left(\frac{a^3}{8\pi}\right) e^{-ar}$
Gauß	$\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-a^2 r^2/2}$
homogene Kugel	$\begin{cases} C & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$
	$\left(\frac{1+q^2}{a^2 \hbar^2}\right)^{-2}$
	$\exp\left(-\frac{q^2}{2a^2 \hbar^2}\right)$
	$3\alpha^{-3} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ mit $\alpha =  \mathbf{q} R/\hbar$
	konstant
	Dipol
	Gauß
	oszillierend

Abbildung 2.9: Einige Beispiele für Ladungsverteilungen und zugehörige Formfaktoren (aus Ref. [12])

Die Oszillationen entstehen durch die Überlagerung von Streuwellen, die von Streuzentren an verschiedenen Volumenelementen entstehen.

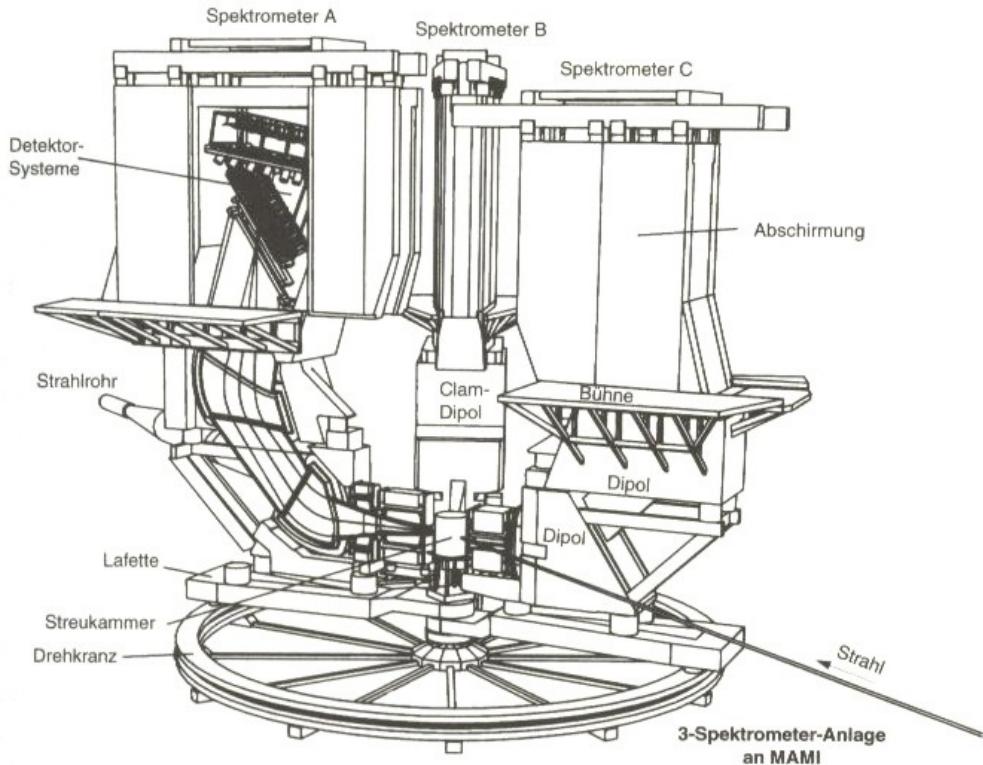


Abbildung 2.10: „Experimenteller Aufbau zur Messung der Elektronenstreuung an Protonen und Kernen am Elektronenbeschleuniger MAMI-B (Mainzer Mikrotron). Die höchste erreichbare Elektronenenergie beträgt 820MeV. In diesem Bild sind drei Magnetspektrometer gezeigt, die separat zum Nachweis elastischer Streuung und in Koinzidenz zum detaillierten Studium der inelastischen Kanäle dienen. Das Spektrometer A ist aufgeschnitten gezeigt. Die gestreuten Elektronen werden durch zwei Dipolmagnete und mit Hilfe eines aus Drahtkammern und Szintillationszählern bestehenden Detektorsystems impulsanalysiert. Zum Großenmaßstab: der Durchmesser des Drehkrandes beträgt ca. 12m.“ (aus Ref. [4]).

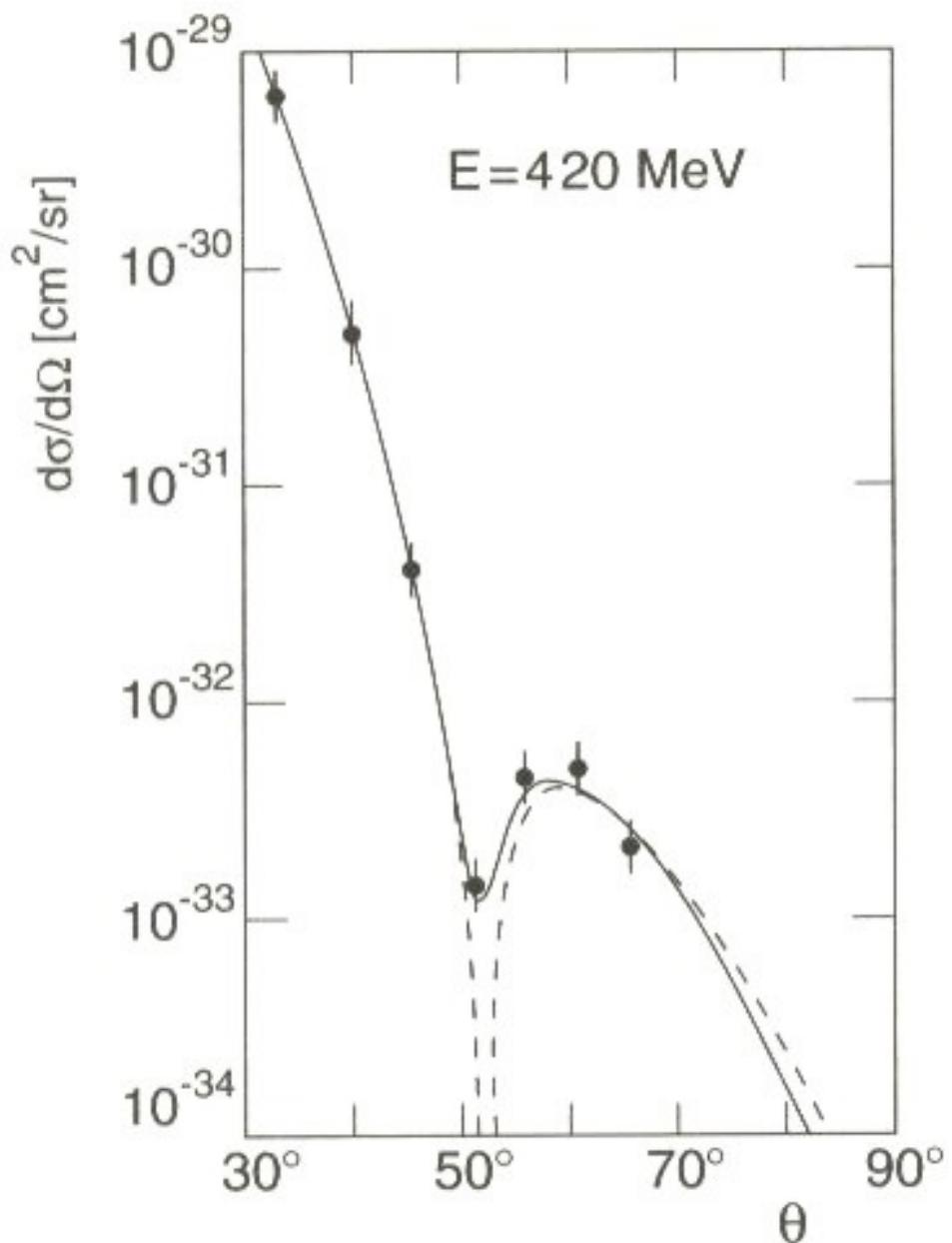
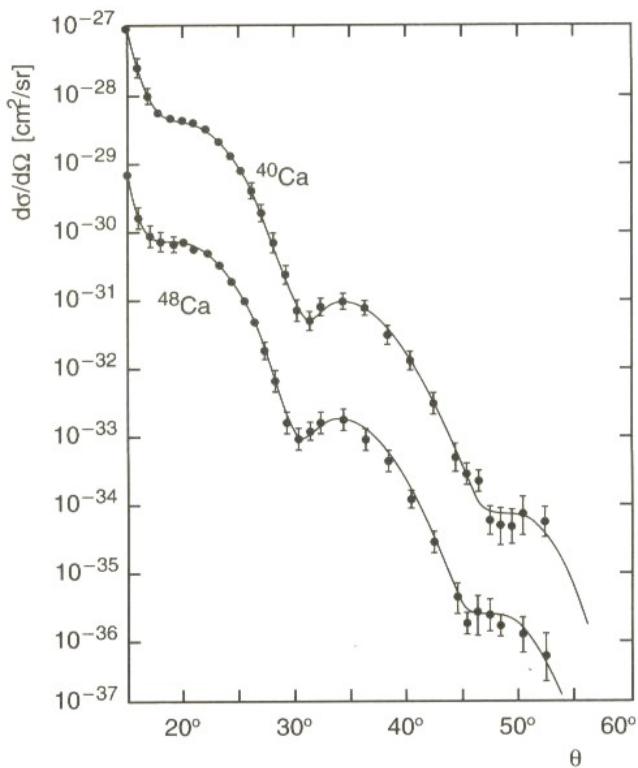
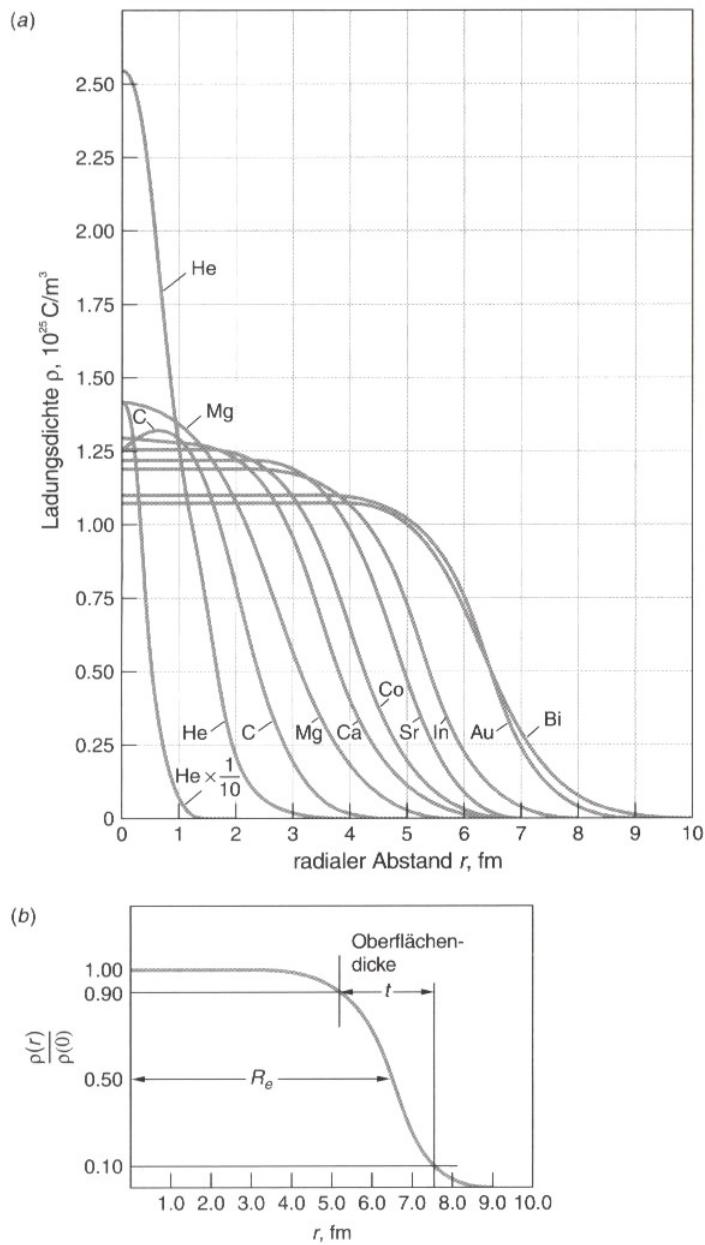


Abbildung 2.11: Messung des Formfaktors von  $^{12}\text{C}$  durch Elektronenstreuung. Gezeigt ist der differentielle Wirkungsquerschnitt, der bei einer festen Strahlenergie von 420 MeV unter 7 verschiedenen Streuwinkeln gemessen wurde. Die gestrichelte Kurve entspricht dem Verlauf, der sich ergibt, wenn eine ebene Welle an einer homogenen Kugel mit diffusem Rand gestreut wird (Born'sche Näherung); die durchgezogene Kurve entspricht einer exakten Streuphasenanalyse, die an die Messdaten angepasst wurde. (aus Ref. [12])



Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Elektronen an den Kalziumisotopen  $^{40}\text{Ca}$  und  $^{48}\text{Ca}$  [Be67]. Zur besseren Darstellung wurde der Wirkungsquerschnitt für  $^{40}\text{Ca}$  und  $^{48}\text{Ca}$  mit 10 bzw.  $10^{-1}$  multipliziert. Die durchgezogenen Linien entsprechen Ladungsverteilungen, die man an die Daten angepasst hat. Aus der Lage der Minima kann man sehen, dass der Radius von  $^{48}\text{Ca}$  größer ist als der von  $^{40}\text{Ca}$ .

Abbildung 2.12: (aus Ref. [12])



- (a) Ladungsverteilung verschiedener Kerne aus Streuexperimenten mit schnellen Elektronen.  
 (b) Definitionen der Parameter  $R$  und  $t$ , die zur Beschreibung der Kernladungsdichte verwendet werden. Die Oberflächendicke  $t$  wird zwischen 10 und 90 Prozent der Ladungsdichte in der Mitte des Kerns gemessen. (Aus R. Hofstadter, *Annual Review of Nuclear Science* 7, 231 (1957).)

Abbildung 2.13: (aus Ref. [12])

## 2.2.4 Kernradien

- Rutherfordstreuung-ähnliche Streuexperimente zeigen, dass der Kernradius  $R$  definiert durch Abweichungen von einer punktförmigen Coulomb-Streuung (Einsetzen der Kernkraft), mit der Nukleonenanzahl anwächst wie:

$$R = r_0 \cdot A^{1/3}, \quad r_0 = (1.3 \pm 0.1) \text{ fm} \quad (2.38)$$

Für ein Goldatom ( $A = 197$ ) ergibt sich  $R \approx (7.6 \pm 0.6) \text{ fm}$ . Zu beachten ist hierbei jedoch, dass eine genauere Definition für die sinnvolle Angabe eines Kernradius nötig ist.

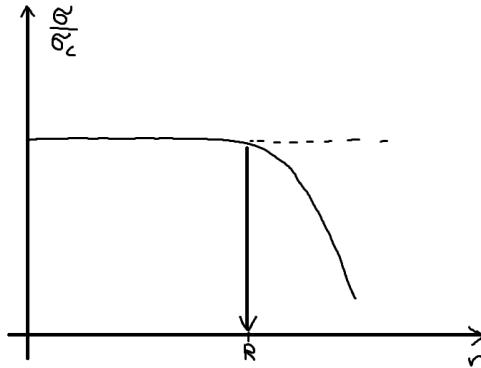


Abbildung 2.14: zur Berechnung des Kernradius aus der Streuung von  $\alpha$ -Teilchen

- Elektron-Streuung: (Ladungsverteilung, elektromagnetische Wechselwirkung)  
Wie bereits beschrieben kann der Formfaktor aus den Wirkungsquerschnitten bestimmt werden. Die gemessenen Winkelverteilungen lassen sich häufig durch die Annahme einer Fermi-Verteilung (für schwere Kerne,  $A \gtrsim 20$ ) für  $\rho(r)$  beschreiben:

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{r - R_{1/2}}{d}}}, \quad \rho(R_{1/2}) = \frac{1}{2} \rho_0 \quad (2.39)$$

Dabei ist  $d$  ein Maß für die Randdicke.

Experimentell ergibt sich (konsistent mit dem Radius der starken Wechselwirkung)

$$R_{1/2} = 1.07 A^{1/3} \text{ fm} \quad (2.40)$$

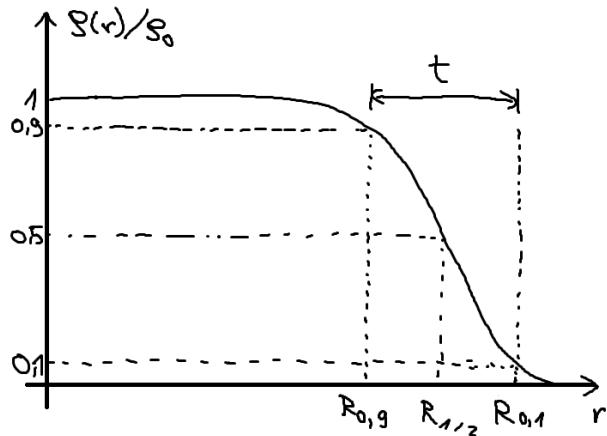


Abbildung 2.15: Als Fermi-Verteilung mit  $R_{1/2}$  angenommene Ladungsverteilung

Weiter kann die Randdicke definiert werden als

$$\begin{aligned} t &:= R_{0.1} - R_{0.9} \\ \rho(R_{0.1}) &= 0.1\rho_0 \\ \rho(R_{0.9}) &= 0.9 \cdot \rho_0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Für Calcium ist beispielsweise

$$\begin{aligned} t &= 4.4 \cdot d \\ t &= 2.4 \text{ fm} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Weiter ergibt sich für Kerne mit  $A > 20$  die Ladungsdichte im Inneren, da  $Z/A \approx \text{const.}$  für die weiteren stabilen Kerne:

$$\rho_0 = 0.17 \cdot \frac{Ze}{A} \cdot \text{fm}^{-3} \quad (2.43)$$

d.h. jedes Nukleon (Protonen und Neutronen) nimmt ein Volumen von etwa  $6 \text{ fm}^3$  ein, da  $\frac{Z}{A} \approx \frac{1}{2} = \text{const.}$  ist.

- Die Kugelgestalt gilt für Kerne mit  $A$  im Bereich zwischen 20 – 60.
- Es ergeben sich stärkere Abweichungen bei Lanthanoiden (seltene Erden), diese sind elliptisch deformiert.
- Leichtere Kerne wie  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Be}$  sind Sonderfälle und weisen gaußförmige Ladungsverteilungen auf oder folgen einem exponentiellen Abfall.

#### Mittlerer quadratischer Ladungsradius

Der mittlere quadratische Radius kann aus der Steigung des gemessenen Formfaktors bei kleinen  $q^2$  bestimmt werden, sofern die Ladungsverteilung nur von  $r$

abhängt. Die Normierungsbedingung der Ladungsdichte liefert:

$$\begin{aligned}
1 &= \int \rho(r) \cdot d^3r \\
&= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r) \cdot r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \\
&= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \cdot r^2 \cdot dr
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Für den mittleren quadratischen Radius gilt dann per Definition:

$$\langle r^2 \rangle := 4\pi \cdot \int_0^\infty r^2 \cdot \rho(r) \cdot r^2 \cdot dr \tag{2.45}$$

Eine Taylor-Entwicklung von  $F(q^2)$  für kleine  $q^2$  liefert:

$$\begin{aligned}
F(q^2) &= 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{q \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots \\
&= 1 + q^2 \cdot \frac{dF(q^2)}{dq^2} + \dots
\end{aligned} \tag{2.46}$$

und somit

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \cdot \frac{dF(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} \tag{2.47}$$

Für mittlere und schwere Kerne findet man wieder eine  $A^{1/3}$  Abhängigkeit:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 \cdot A^{1/3} \text{ mit } r_0 = 0.94 \text{ fm} \tag{2.48}$$

Auch hier ergibt sich ein  $r_0$ -Wert, der konsistent ist mit den oben angegebenen Werten.

Die  $A^{1/3}$ -Abhängigkeit wird auch hier bestätigt und wie zu erwarten war ist für „kugelförmige“ Kerne

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V \sim A \Rightarrow r \sim A^{1/3} \tag{2.49}$$

## 2.3 Masse der Atomkerne

Zur Bestimmung von Kernmassen werden Massenspektrographen bzw. Massenspektrometer verwendet. Die ersten derartigen Geräte wurden entwickelt in den Jahren

**1912** durch J.J. Thomson, sowie

**1919** durch F. Aston.

Gemessen wird dabei  $\frac{Q}{m}$  aus der Ablenkung von Ionen in kombinierten elektrischen und magnetischen Feldern<sup>4</sup>.

- (i) Der Impuls  $p = mv \Rightarrow$  wird über das magnetische Feld bzw. die Lorentzkraft bestimmt.
- (ii) Die Energie:  $E = \frac{1}{2}mv^2$  wird über das elektrische Feld bestimmt.

Man erhält hieraus die Masse mithilfe der Beziehung

$$m = \frac{p^2}{2E} \quad (2.50)$$

durch gleichzeitiges Messen von Energie und Impuls.

- (i) Ablenkung im elektrischen Feld:

Im elektrischen Feld (Kondensator) gilt

$$|\vec{F}_{\text{el}}| = |Q \cdot \vec{E}| = m \cdot a = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.51)$$

Der Ablenkwinkel  $\theta$  ist durch  $\tan \theta = \frac{\Delta v}{v} \approx \theta$  bestimmt. Aus Gleichung 2.51 ergibt sich

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \Delta v = \frac{Q|\vec{E}|\Delta t}{v} \\ & \text{mit } \Delta t = \frac{L}{v} \\ & \Rightarrow \theta = \frac{Q|\vec{E}|}{mv^2} L = \frac{Q|\vec{E}|}{2E_{\text{kin}}} L \\ & \Rightarrow 2E = Q|\vec{E}| \cdot \rho_E \end{aligned} \quad (2.52)$$

, wobei eine kleine Krümmung der Bahn mit Radius  $\rho_0$  angenommen wird.

- (ii) Ablenkung im magnetischen Feld:

Im magnetischen Feld gilt auf Grund der Lorentzkraft:

$$|\vec{F}_L| = |Q\vec{v} \times \vec{B}| = Q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| = \frac{mv^2}{\rho_M} \quad (2.53)$$

$$\Rightarrow p = m \cdot v = Q \cdot |\vec{B}| \cdot \rho_M \quad (2.54)$$

---

<sup>4</sup>Prinzipiell genügt ein reines Magnetfeld oder ein reines elektrisches Feld, jedoch ist es dann nötig, die Geschwindigkeit der Ionen zu kennen

Im Experiment nutzt man nun fest eingestellte Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und registriert die Ablenkung im Detektor (Photoplatte, Szintillationszähler). Der Detektor ist dabei ortsfest, sodass über die Position nun die Masse bestimmbar ist. Somit ist die Masse durch

$$m = \frac{p^2}{2E} = Q \cdot \frac{B^2 \rho_M^2}{E \rho_E} \quad (2.55)$$

gegeben. Man unterscheidet zwei Arten von Messapparaturen:

**Massenspektrograph** Es werden fest eingestellte Feldstärken verwendet, sodass die Registrierung aller Massen eines bestimmten Bereichs gleichzeitig auf einer Nachweisfläche (z.B. Photoplatte, Detektor) erfolgt.

**Massenspektrometer** Hier wird ein ortsfester Detektor verwendet und die Massen werden durch Variation der Felder selektiert.

Bei der Konstruktion von Massenspektrographen ist darauf zu achten, dass neben einer hohen Massenauflösung auch eine hohe Transmission erreicht wird. Die Massenauflösung ist teilweise begrenzt durch die Richtungsstreuung von  $\vec{v}_{in}$ , d.h. dem Beitrag von Geschwindigkeit und Winkel der einlaufenden Ionen.

F. Aston (1919) verwendete deshalb richtungsfokussierende Felder, die dafür sorgen, dass auch solche Ionen auf den Detektor fokussiert werden, die die Quelle unter einem nicht zu großen Winkel zur Mittelebene (Nominalbahn des Teilchens/Ions) verlassen.

Präzisionsspektroskopie wurde in den 1930er Jahren erreicht mittels doppelt-fokussierendem Spektrometer nach Mattauch, die erreichte Auflösung liegt bei  $\frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-5}$ .

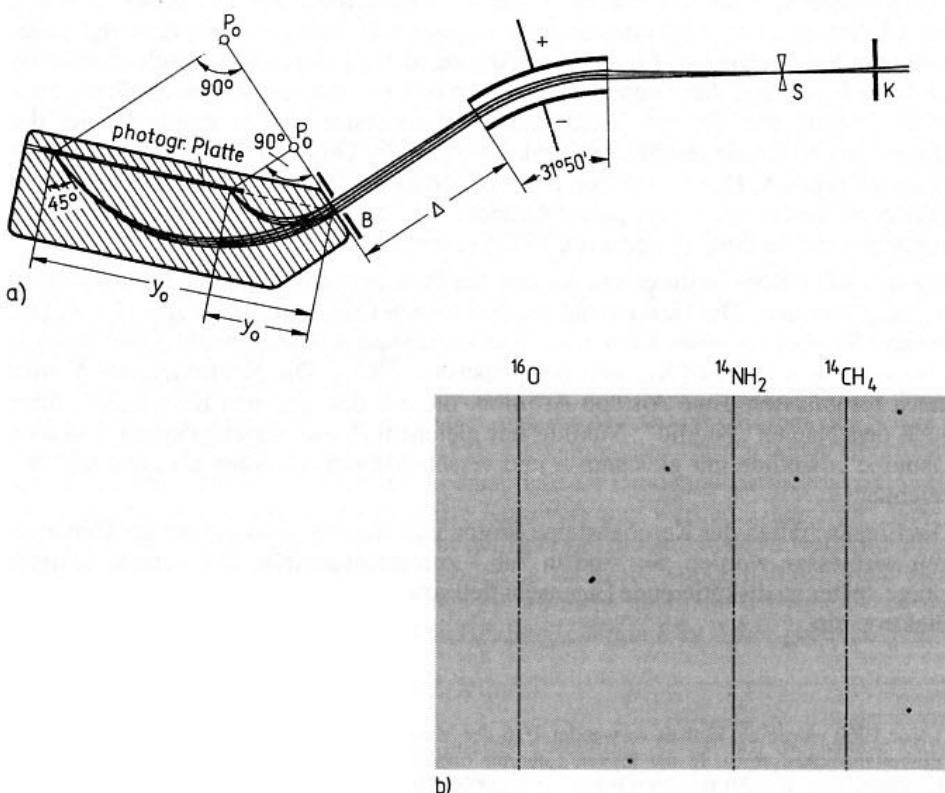


Abbildung 2.16: Zum Mattauch'schen Spektrometer (aus Ref. [1])

Wichtige Ergebnisse aus systematischen Untersuchungen (1910-1950) umfassen:

- Auch wenn zwei verschiedene Nuklide dieselbe Massenzahl besitzen, unterscheiden sie sich in ihren Kernmassen.
- Alle zusammengesetzten Kerne sind leichter als die Summe der Massen von  $Z$  Protonen und  $N$  Neutronen. Dies entspricht dem Massendefekt  $\Delta m$ .

#### Massenstandard

Als *Atomare Masseneinheit* wird 1 u bezeichnet, definiert durch die Masse des Kohlenstoffisotops  $^{12}\text{C}_6$  (inklusive Elektronenhülle):

$$1\text{u} := \frac{1}{12} M\left(^{12}\text{C}\right) = 1.66054 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 931.494 \text{ MeV}/c^2 \quad (2.56)$$

bzw. mit der Avogadro/Loschmidt Zahl  $N_a$  und der Molmasse  $M_m$  (12 g für  $^{12}\text{C}$ ).

$$\begin{aligned} 1\text{u} &= \frac{1}{N_a} \cdot \frac{1}{12} \cdot M_m(^{12}\text{C}) = \frac{1}{N_a} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{12\text{g}}{\text{mol}} = \frac{1\text{g}}{6.0221367 \cdot 10^{23}} \\ &= 1.66054 \cdot 10^{-24} \text{ g} \end{aligned} \quad (2.57)$$

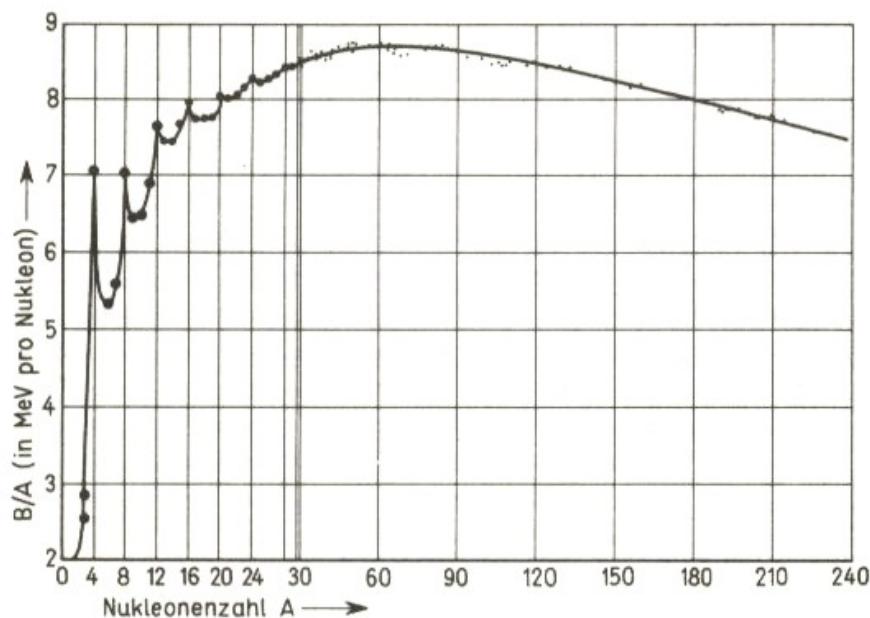
Die fehlende Masse, welche sich als Massendefekt bemerkbar macht, ist äquivalent zu einer Energie

$$\Delta E = c^2 \cdot \Delta m \quad (2.58)$$

, die als Bindungsenergie  $E_B$  interpretiert wird.

Mit der Protonenmasse  $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2$ , der Neutronenmasse  $m_n = 939.566 \text{ MeV}/c^2$  und der Elektronenmasse  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$  ergibt sich für  ${}_{\text{6}}^{12}\text{C}$  der Massendefekt

$$\Delta m = 6m_p + 6m_n - 12m_e = 92.166 \text{ MeV}/c^2 \quad (2.59)$$



Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion von A für stabile Kerne;  
nach [Eva 55]. Abszisse bis A = 30 gespreizt

Abbildung 2.17: (aus Ref. [1])

Bindungsenergie pro Nukleon für die leichtesten Kerne.

Kern	$^2_1H_1$ (d)	$^3_1H_2$ (t)	$^3_2He_1$ ( $\alpha$ )	$^4_2He_2$	$^6_3Li_3$	$^7_3Li_4$	$^8_4Be_4$ ( $\rightarrow 2\alpha$ )	$^9_4Be_5$	$^{10}_5B_5$	$^{11}_5B_6$	$^{12}_6C_6$
B	2,225	8,482	7,718	28,29	31,99	39,24	56,49	58,16	64,75	76,20	92,16
B/A	1,11	2,83	2,57	7,07	5,33	5,60	7,06	6,46	6,47	6,93	7,67
$S_n$	2,22	6,25	—	20,6	5,66	7,25	18,9	1,67	8,44	11,4	18,7
$S_p$	2,22	—	5,49	19,8	4,65	9,98	17,2	16,9	6,59	11,2	15,9
$\delta_n$	—	4,0	—	—	—	1,6	—	—	—	3	—
$\delta_p$	—	—	3,3	—	—	—	7,22	14,9	—	—	4,7

Alle Energien in MeV; B,  $S_n$  und  $S_p$  nach [Eve 61]

Abbildung 2.18: Bindungsenergien  $B$ , Bindungsenergien pro Nukleon  $B/A$  sowie Separationsenergien für Neutronen  $S_n$  und Protonen  $S_p$ . (aus Ref. [1])

Die Bindungsenergie  $E_B(Z, N) = E_B(Z, A)$  lässt sich allgemein schreiben als

$$\begin{aligned} E_B(Z, N) &= [Z \cdot m_p + N \cdot m_n + Z \cdot m_e - m(Z, N)] \cdot c^2 \\ &= [Z \cdot m_H + N \cdot n_m - m(Z, N)] \cdot c^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

, wobei  $m_H$  die Masse des Wasserstoff-Atoms mit Elektron ist, das keine Kernbindung besitzt.

- Zur Charakterisierung der Bindungsstärke von Kernen wird häufig die Bindungsenergie pro Nukleon betrachtet:

$$\left( \frac{E_B(Z, N)}{A} \right)_{^{12}C} = \left( \frac{\Delta m}{A} \right)_{^{12}C} = 7.68 \text{ MeV}/c^2 \quad (2.61)$$

- Die Bindungsenergie  $E_B$  wird frei, wenn Nukleonen zu Kernen vereinigt werden
- $E_B$  muss aufgebracht werden, um den Kern in einzelne Nukleonen zu zerlegen.

Experimentelle Messungen der Massendefekte liefern für  $\frac{E_B(A)}{A}$ , dass

- Für  $A \gtrsim 30$ :  $E_B \sim A$ , d.h.  $\left( \frac{E_B(A)}{A} \approx const. \right)$
- Für kleine  $A$  treten große Schwankungen auf:
  - (i)  $\alpha$ -Teilchen:  $\frac{E_B}{A} = 7.07 \text{ MeV}/c^2$
  - (ii) Deuterium:  $\frac{E_B}{A} = 1.01 \text{ MeV}/c^2$
- $E_B$  scheint besonders groß für Kerne mit gepaarten Nukleonen (p und n) zu sein, d.h. für jeweils gleicher, gerader Protonen- und Neutronenzahl:

$$^4_2He_2, ^8_4Be_4, ^{12}_6C_6, ^{16}_8O_8, ^{20}_{10}Ne_{10} \quad (2.62)$$

- Das Maximum für  $\frac{E_B}{A}$  wird für  $A \sim 60$  (Eisen) erreicht

- Der Kurvenverlauf hat *enorme* Bedeutung für die Energiegewinnung aus Kernumwandlungen. Energiegewinnung ist möglich durch
  - die Fusion leichter Kerne (Energiegewinnung in Sternen, prinzipiell:  $4^1_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He}_2 + 2e^+ + 2\nu_e$ )
  - die Spaltung schwerer Kerne ( $A \gtrsim 230$ ), bei der zwei näherungsweise gleich schwere Bruchstücke entstehen, allerdings ist dies ein statistischer Prozess,  $\Delta E \approx 200 \text{ MeV}$ ,  $\frac{\Delta B}{A} \sim 1 \text{ MeV}$

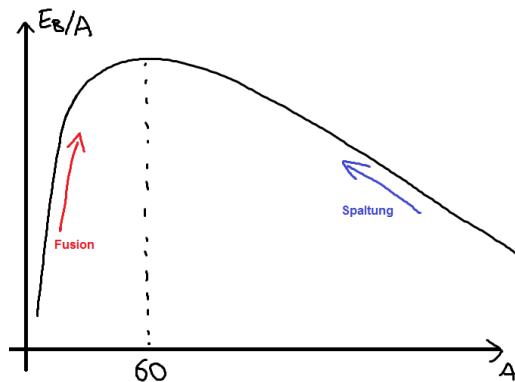


Abbildung 2.19: Energiegewinnung ist prinzipiell möglich durch Spaltung schwerer Kerne und durch Fusion leichter Kerne. Schwere Elemente nur mit Energieaufwand produziert werden können, sind diese nicht direkt in Sternen entstanden, sondern in Supernova-Explosionen, in denen ausreichend hohe Energien auftreten.

- Wichtige Konsequenzen für die Kernkraft:  
Kernkräfte sind Zweikörperkräfte, die Wechselwirkung findet mit dem nächsten Nachbarn statt (vgl. Tröpfchenmodell, Kap. 2.4). Dies impliziert eine kurze Reichweite auf der Skala von fm, der Nukleongröße.

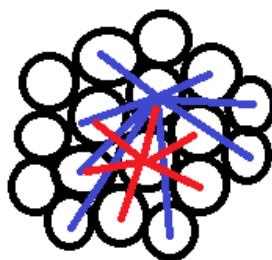


Abbildung 2.20: Wäre die für die Bindung der Nukleonen zu Kernen verantwortliche Wechselwirkung langreichweitig (blau), so müsste die Bindungsenergie  $\sim A^2$  verlaufen. Eine kurzreichweitige Wechselwirkung (rot) führt zu einem Verlauf  $\sim A$ , wie experimentell beobachtet.

- Separationsenergien, d.h. die Energie, die zum Ablösen eines Nukleons hinzugefügt werden muss, ist stark  $(Z, N)$ -abhängig. Beispiele:

$$E_s(n) = \begin{cases} 7.367 \text{ MeV} & \text{für } {}^{208}\text{Pb} \\ 3.937 \text{ MeV} & \text{für } {}^{209}\text{Pb} \end{cases} \quad (2.63)$$

$$E_s(p) = \begin{cases} 8.007 \text{ MeV} & \text{für } {}^{208}\text{Pb} \\ 3.799 \text{ MeV} & \text{für } {}^{209}\text{Bi} \end{cases}$$

⇒ Analogie zur Ionisationsenergie im Atomen  
→ Lässt dies auf eine *Schalenstruktur* im Kern schließen?

## 2.4 Tröpfchenmodell des Kerns

Die Reichweite der Kernkraft liegt in der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-15}\text{m})$ , das Volumen der Atomkerne skaliert annähernd mit der Anzahl der Nukleonen und die Bindungsenergie pro Nukleon ist annähernd konstant (für größere Kerne). Würde die Kernkraft nicht nur auf den nächsten Nachbarn wirken, so müsste sie skalieren wie  $A(A - 1)$ , d.h. quadratisch mit der Zahl der Nukleonen steigen. Lässt man nur Bindungen zu den nächsten Nachbarn zu, so ist  $E_B \sim A$ .

In einem Flüssigkeitstropfen ist die Verdampfungswärme, um ein Molekül aus dem Tropfen zu entfernen, ebenfalls unabhängig von der Größe des Tropfens und die Van-der-Waals Kraft greift ebenfalls nur an den jeweils nächsten Nachbarn an.

C.F. von Weizsäcker und A. Bethe stellten ein erstes parametrisches Modell (keine Theorie!) der Atomkerne auf, analog zu einem Flüssigkeitstropfen:

- Volumenterm: Die Kernbindungsenergie wird proportional zum Volumen  $V$  des Kerns angenommen:

$$E_{B,V} \sim A \Rightarrow E_{B,V} = a_V \cdot A, \quad 0 < a_V \hat{=} \text{Parameter} \quad (2.64)$$

- Oberflächenterm: Nukleonen an der Oberfläche sind schwächer gebunden. Aus der Oberfläche  $F = 4\pi R^2$  und  $R = r_0 A^{1/3}$  ergibt sich

$$E_{B,O} = -a_O A^{2/3} \quad (2.65)$$

, wobei auch  $a_O$  wieder ein Parameter des Modells ist, der experimentell zu bestimmen ist.

- Coulomb-Term: Die Protonen-Abstoßung verringert die Bindungsenergie  $E_B$ :

$$E_{B,C} = -a'_C \cdot \frac{Z^2}{R} = -a_C \cdot \frac{Z}{A^{1/3}} \quad (2.66)$$

Ab  $A \gtrsim 60$  überwiegt der Coulomb-Term gegenüber dem Oberflächenterm und führt zu einem Abfall der Bindungsenergie.

Für die potentielle Energie einer homogen geladenen Kugel mit  $Q = Ze$  gilt

$$E_C = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R} = \underbrace{\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0}}_{a_C} \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2.67)$$

$$r_0 = 1.2 \text{ fm} \Rightarrow a_C = 0.71 \text{ MeV}$$

Im Tröpfchenmodell wird  $a_C$  aus einem Fit an die Messdaten bestimmt.

(iv) Asymmetrie-Term:

Bei großen Nukleonenzahlen  $A$  findet man bei stabilen Kernen einen Neutronenüberschuss  $N > Z$ , z.B.  $N - Z(^{208}\text{Pb}) = 44$ . Diese Asymmetrie ist im Rahmen des Tröpfchenmodells nicht erklärbar. Deswegen wird eine Korrektur, motiviert durch die Quatenmechanik, eingeführt: Es wird ein Fermi-Gas-Modell der Protonen und Neutronen im Kern verwendet, bei dem die Protonen und Neutronen im Potentialtopf von der Größe des Kerns gefangen sind. Auf Grund der halbzahligen Spins gilt für Protonen und Neutronen das Pauli-Verbot. Die Wechselwirkung untereinander wird in erster Näherung vernachlässigt.

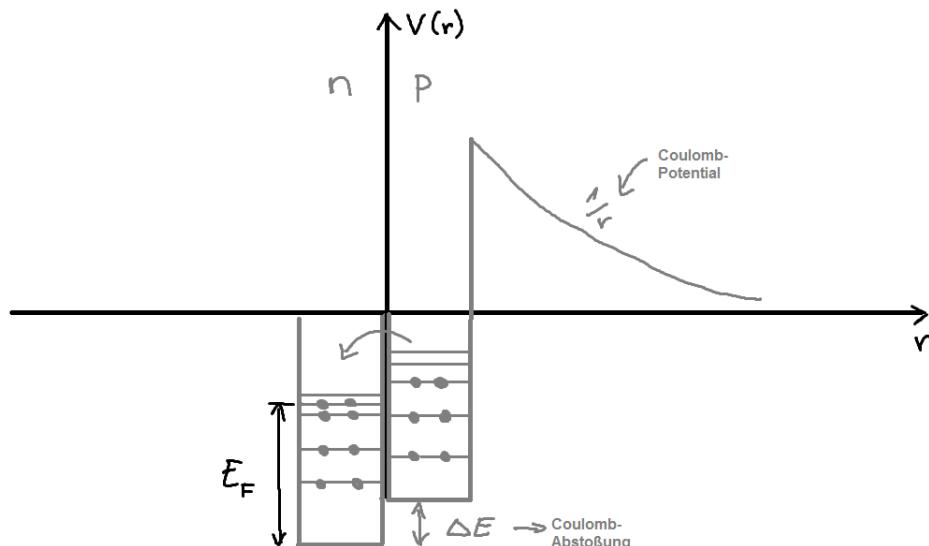


Abbildung 2.21: Zur Motivation des Asymmetrieterms

Aufgrund der Coulomb-Abstoerung der Protonen besitzen diese eine schwächere Bindung, d.h. der Potentialtopf der Protonen ist angehoben. Bei stabilen Kernen müssen die Fermi-Energien von Protonen und Neutronen in etwa gleich sein, sonst treten  $\beta$ -Zerfälle auf (Übergang von  $n \rightarrow p$  oder  $p \rightarrow n$ ), bis sich die Energien hinreichend weit angeglichen haben. Dies bedeutet für den Einfluss der Asymmetrie auf die Bindungsenergie des Kerns, dass ein Kern mit Neutronenüberschuss eine geringere Bindungsenergie besitzt als ein Kern mit gleicher Nukleonenzahl, aber  $N = Z$ . Die Ursache liegt darin, dass bei höher liegenden  $E_F$  die Niveaus dichter liegen als bei niedrigen  $E_F$ . Da die Verschiebung der Bindungsenergie der Protonen durch die Coulomb-Abstoerung verursacht wird,

die für kleine Kerne gering ist, ist für diese Kerne  $N = Z = \frac{A}{2}$ . Für größere Kerne ist die Coulomb-Anhebung größer und somit  $N > Z$ . Dieser Effekt ist bislang im Tröpfchenmodell noch nicht berücksichtigt.

Eine quantenmechanische Rechnung liefert für die Differenz der Bindungsenergien, dass

$$\Delta E \sim (Z - N)^2 \quad (2.68)$$

Dies führt somit zu dem weiteren Korrekturterm für das Tröpfchenmodell, der als

$$\begin{aligned} E_{B,A} &= -a_A \frac{(Z - N)^2}{A} = -a_A \frac{4(Z - A/2)^2}{A} \\ &= a'_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \end{aligned} \quad (2.69)$$

eingeführt wird.<sup>5</sup>

(v) Paarungsenergie:

Empirisch zeigt sich, dass für gg-Kerne (gerade  $Z$ , gerade  $N$ ) eine starke Bindung auftritt, während für uu-Kerne (ungerade  $Z$ , ungerade  $N$ ) eine schwächere Bindung auftritt. Dies ist im Tröpfchenmodell nicht erklärbar, d.h. es wird eine empirische Korrektur angebracht:

$$E_{B,P} = \begin{cases} +\delta & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug-Kerne} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne} \end{cases} \quad (2.70)$$

Für diese findet man, ebenfalls empirisch:

$$\delta \approx a_p \cdot A^{-1/2} \quad (2.71)$$

Beachte: Dies ist schwer verständlich (siehe Kommentar auf Seite 48, Mayer-Kuckuck), es gibt beispielsweise weder ein Di-Proton noch ein Di-Neutron.

Mit all diesen Beiträgen erhält man schließlich die Weizsäcker-Bethe'sche Massenformel:

$$E_B = a_V \cdot A - a_O A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3} - a_A \frac{4(Z - A/2)^2}{A} + E_{B,P} \quad (2.72)$$

Die Parameter  $a_i$  können aus Anpassungen an experimentelle Messdaten gewonnen werden. Werte hierfür sind

$$\begin{aligned} a_V &= 15.67 \text{ MeV} \\ a_O &= 17.23 \text{ MeV} \\ a_C &= 0.71 \text{ MeV} \\ a'_A &= 93.15 \text{ MeV}, \quad a_A = 23.3 \text{ MeV} \\ a_P &= 11.2 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (2.73)$$

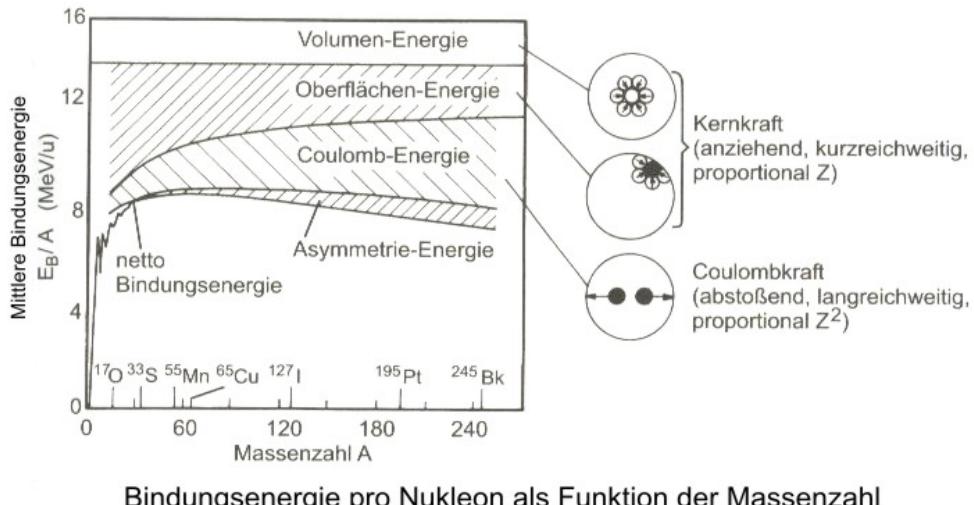


Abbildung 2.22: (aus Ref. [11])

Dieses Modell gibt nach Anpassung den  $E_B$ -Kurvenverlauf grob wieder, für ein derart naives Modell sogar erstaunlich gut. Die Feinstruktur (besonders bei kleinen  $A$ ) wird jedoch nicht beschrieben. Starke Abweichungen treten auf für  $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  (sog. *magische Zahlen*). Kerne, bei denen solche Abweichungen auftreten, sind beispielsweise  ${}^4_2\text{He}_2$ ,  ${}^{16}_8\text{O}_8$  und  ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ . Diese Kerne besitzen besonders hohe Bindungsenergien, die erst mit dem Schalenmodell des Atomkerns zu verstehen sind.

Die Masse eines Kerns ist somit gegeben durch

$$m(Z, A) = Z \cdot m_H + (A - Z)m_n - E_B(Z, A) \quad (2.74)$$

Für  $A = \text{const.}$  lassen sich durch Minimieren

$$\frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} \Big|_{A=\text{const.}} = 0 \quad (2.75)$$

die stabilen Kerne finden. Für das Minimum  $Z = Z_0$  ist

$$Z_0 = \frac{A}{1.98 + 0.015A^{2/3}}$$

Tal der stabilen Kerne (2.76)

<sup>5</sup>Beachte:  $2(Z - A/2) = 2Z - A = (2Z - Z - N) = (Z - N)$ . Der Faktor 4 wird in manchen Büchern vergessen (z.B. Bleck-Neuhaus)

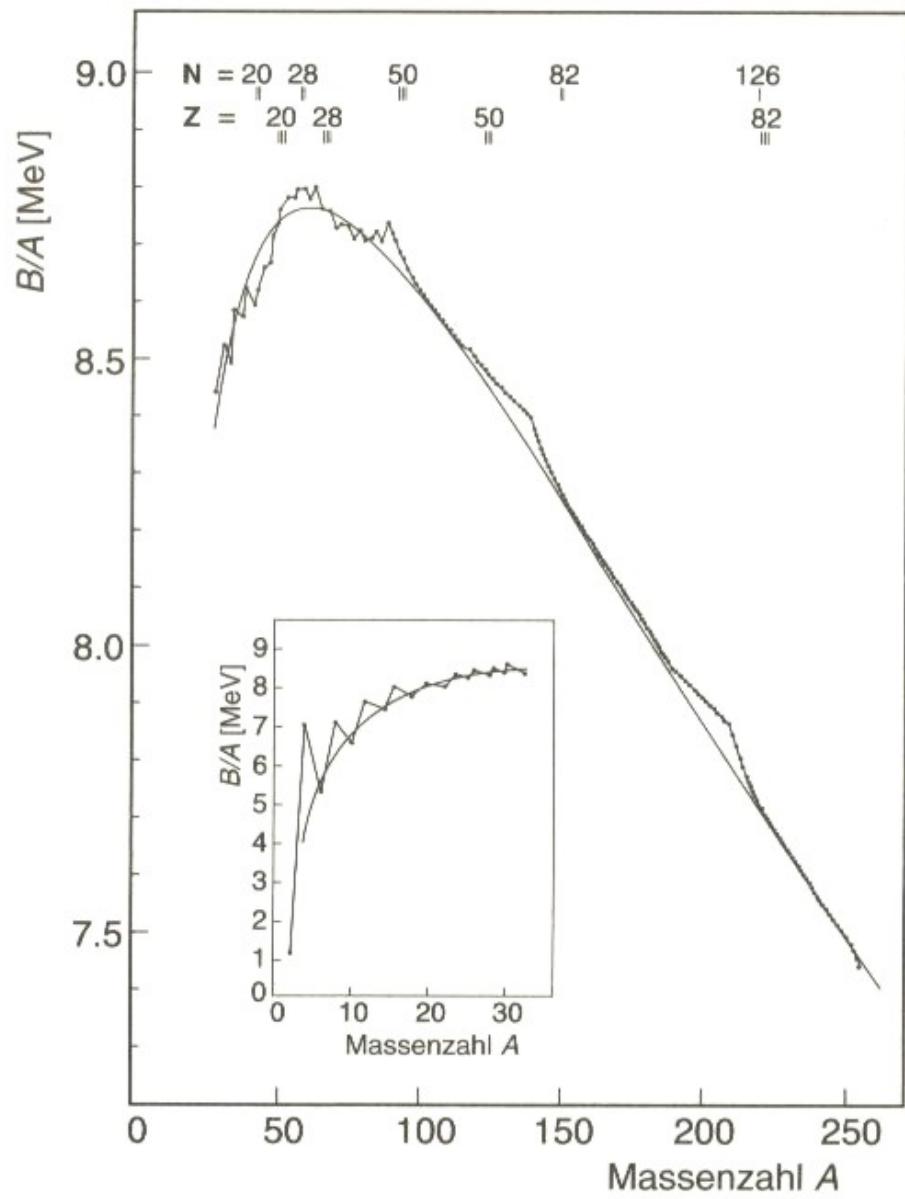


Abbildung 2.23: (aus Ref. [11])

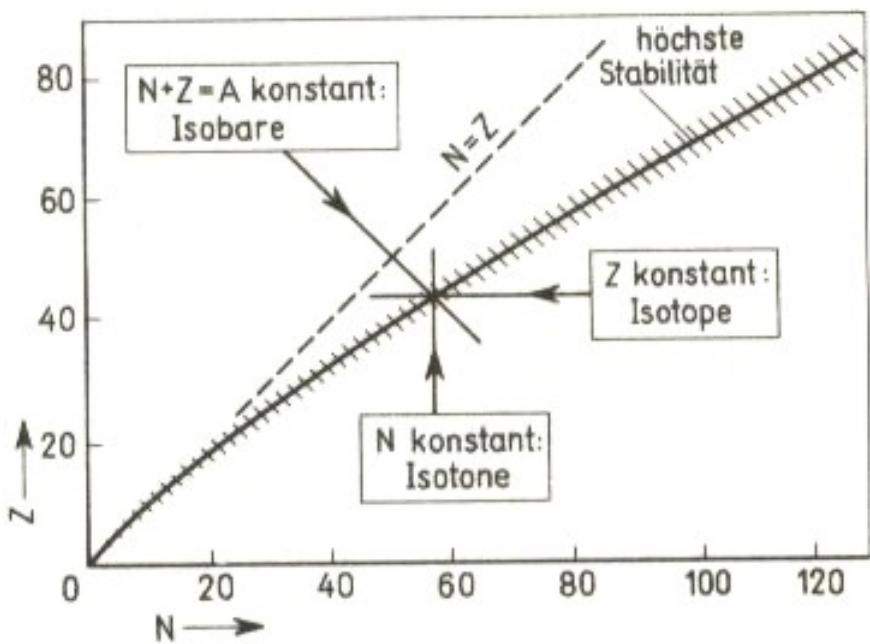


Abbildung 2.24: (aus Ref. [1])

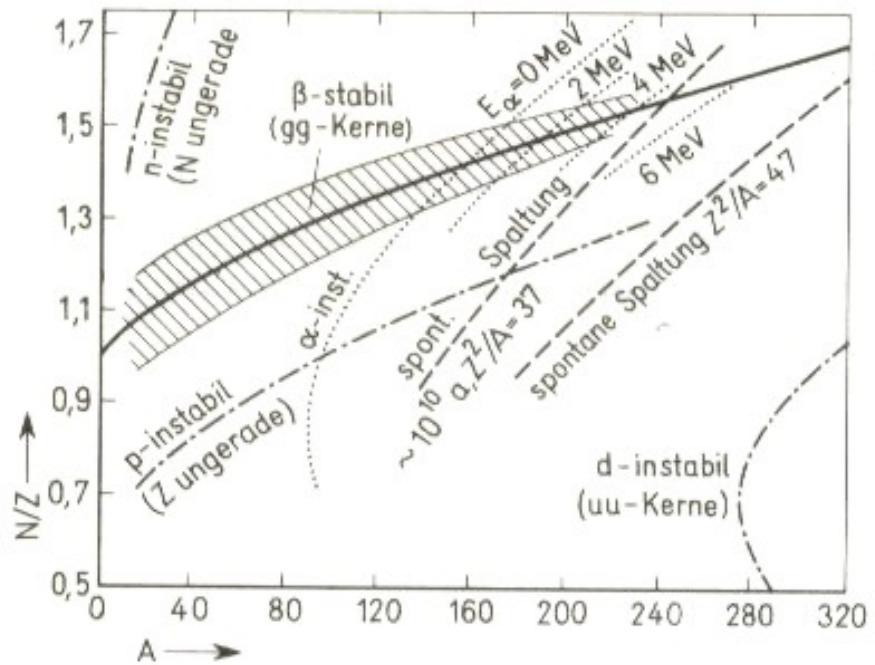


Abbildung 2.25: (aus Ref. [1])

Konsequenzen aus der Massenformel:

(i) Die minimale Masse für  $A = const.$  als Funktion von  $Z$

(ii) Variation der Kernmasse innerhalb einer Isobarenreihe:

- quadratisch in  $Z$
- symmetrisch um  $Z_0$

Ist  $A$  ungerade, so ist die Paarungsenergie = 0 und somit ergibt sich der in Abb. 2.26 dargestellte Verlauf. Für ug bzw. gu-Kerne ergibt sich somit 1 stabiles Isobar.

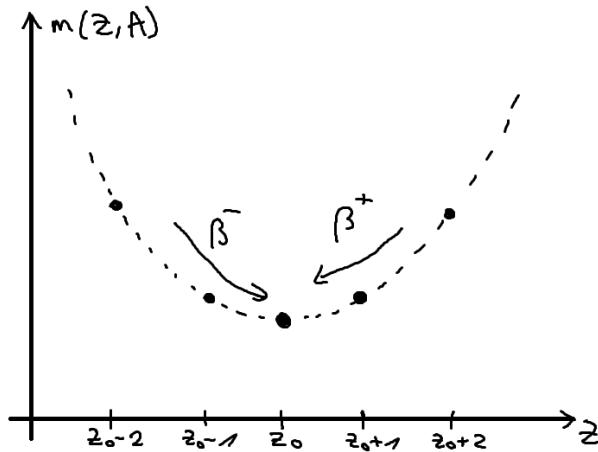


Abbildung 2.26: Kernmasse als Funktion der Kernladungszahl bei Kernen mit ungeradem  $A$

Für gerades  $A$  ist die Energie um  $\pm\delta$  verschoben, so dass sich der Verlauf aus Abb. 2.27 ergibt. Die beiden energetisch eigentlich ungünstiger liegenden Kerne links und rechts auf der selben Parabel sind stabil, da bei einem Zerfall ein  $\Delta Z = 2$  überwunden werden müsste, dies ist im  $\beta$ -Zerfall jedoch nicht möglich!. Man erhält also drei ( $\beta$ )-stabile Isobare.

Falls  $A < 14$  gerade ist und nicht durch 4 teilbar, d.h für Kerne mit den Ordnungszahlen 3, 5, 7 ist die Paarungsenergie

$$-\delta = \left( \frac{a_p}{\sqrt{A}} \right) \cdot A = a_p \sqrt{A} \quad (2.77)$$

klein, d.h die Differenz der (uu) und (gg)-Parabel ist klein. Somit ist sind (uu)-Kerne stärker gebunden als ihre benachbarten (gg)-Kerne mit  $Z = Z_0 + 1$  ( $^2_1H$ ,  $^6_3Li$ ,  $^{10}_5B$ ,  $^{14}_7N$ ). Für gerade  $A \geq 16$  sind nur (gg)-Kerne nahe des Minimums stabil.

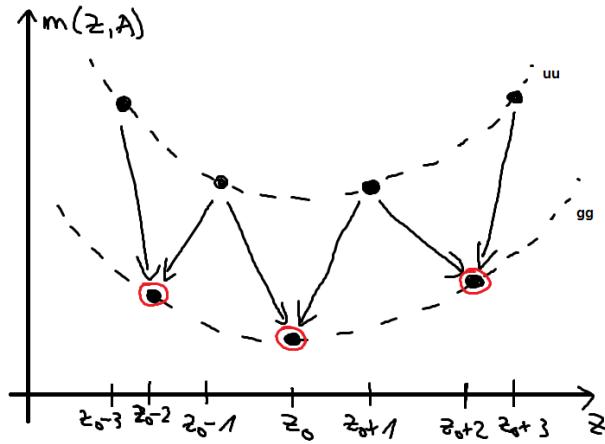


Abbildung 2.27: Kernmasse als Funktion der Kernladungszahl bei uu- und gg-Kernen

(iii) Motivation für  $\alpha$ -Zerfall:

Die Bindungsenergie pro Nukleon bei einem  $\alpha$ -Teilchen ist

$$\frac{E_B(\alpha)}{A} = 7.07 \text{ MeV}. \quad (2.78)$$

Die Emission von  $\alpha$ -Teilchen ist möglich, wenn  $E_\alpha > 0$ :

$$E_\alpha = [m(Z, A) - m(Z - 2, A - 4) - m_\alpha] c^2 \quad (2.79)$$

Das Tröpfchenmodell liefert, dass  $E_\alpha > 0$  für  $A \gtrsim 150$ .  $\alpha$ -Zerfall ist möglichst nahe diesem Limit, der leichteste  $\alpha$ -Strahler ist  $^{144}\text{Nd}$  mit einer Halbwertszeit von  $T_{1/2} = 2 \cdot 10^{15} \text{ a}$ . Für  $Z > 84$  sind alle Kerne  $\alpha$ -instabil,  $E_\alpha > 0, 2, 4, 6$

(iv) Energiegewinnung durch Spaltung schwerer Kerne:

Im Falle einer symmetrischen Spaltung ist die frei werdende Energie

$$E_{\text{sp}} = [m(Z, A) - 2 \cdot m(Z/2, A/2)] c^2 \quad (2.80)$$

Die relevanten Terme im Tröpfchenmodell sind hierbei

- Oberflächenterm
- Coulombterm

Spaltung mit Energiegewinn ist prinzipiell möglich für  $A > 90$ , jedoch ist hier die Tunnelwahrscheinlichkeit noch nicht berücksichtigt. Spontane Spaltung ( $\tau < 1 \text{ ns}$ ) findet man ab  $\frac{Z^2}{A} > 50$  vor, in der Praxis findet man dies jedoch nur sehr selten, beispielsweise ist für  $^{238}\text{U}$ :  $\frac{Z^2}{A} = 36$ . Der leichteste Kern, bei dem spontane Spaltung beobachtet werden kann, ist  $^{232}\text{Th}$ . Im Bereich  $Z > 84$ , in welchem alle Kerne instabil sind, sind die längsten Halbwertszeiten

$$\begin{aligned} T_{1/2}(^{232}_{90}\text{Th}) &= 1.4 \cdot 10^{10} \text{ a} \\ T_{1/2}(^{238}_{92}\text{U}) &= 4.5 \cdot 10^9 \text{ a} \end{aligned} \quad (2.81)$$

In Folge dieser langen Halbwertszeiten ist Uran das schwerste natürlich vorkommende Element auf der Erde.

## Schwerere Kerne als $^{238}\text{U}$ ?

Derartige Kerne wurden künstlich produziert in Dubna und bei der GSI in Darmstadt:

**107** Bohrium

**108** Hassium

**109** Meitnerium

**110** Darmstadtium

**111** Roentgenium

**112** Copernicium

...

Die Extrapolation des Schalenmodells des Kerns (vgl. Kapitel 5) lässt sich auf stabile Inseln schließen bei  $N = 184, 196, 318, Z = 114, 164$ .

## 2.5 Spin und Magnetische Momente

### 2.5.1 Spin und Magnetische Momente

- Proton und Neutron sind Spin- $1/2$  Teilchen (Fermionen)
- Aus der Hyperfeinstruktur der Energieniveaus vieler Atomkerne kann man schließen, dass Atomkerne ein magnetisches Moment besitzen. Dieses ist mit einem Drehimpuls verbunden:

$$\vec{I} = \text{Kernspin } I = \text{Kernspinquantenzahl} \quad (2.82)$$

- Man nimmt an, dass sich der Kernspin zusammensetzt aus der Vektorsumme der Nukleonenspins und der Bahndrehimpulse der Nukleonen:

$$\vec{I} = \sum_i (\vec{I}_i + \vec{L}_i) \quad \text{Summe über alle Nukleonen} \quad (2.83)$$

- Das magnetische Moment  $\mu_I$  ist proportional zum Kernspin  $I$  und wird wie folgt geschrieben:

$$\vec{\mu}_I = g_k \mu_k \frac{\vec{I}}{\hbar},$$

(2.84)

, wobei

$$\mu_k = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3152 \cdot 10^{-8} \text{ eV/T} \quad (2.85)$$

als Kernmagneton bezeichnet wird.

- Man beachte, dass das Kernmagneton im Vergleich zum Bohr'schen Magneton um einen Faktor  $\frac{m_p}{m_e} = 1836$  kleiner ist.

- Der Faktor  $g_K$  ist der sogenannte Kern- $g$ -Faktor und über das folgende Verhältnis definiert:

$$g_K = \frac{|\vec{\mu}_I|}{|I|} = \frac{\mu_I}{I} \quad (2.86)$$

Dieser Faktor gibt an, um welchen Faktor sich das magnetische Moment des Kerns von demjenigen unterscheidet, das man für einen Drehimpuls  $I$  klassisch erwarten würde.

### 2.5.2 Hyperfeinstruktur

Die Hyperfeinstruktur-Aufspaltung kann benutzt werden, um den Kernspin  $I$  und auch die magnetischen Momente zu bestimmen. Es existiert eine zusätzliche Wechselwirkungsenergie  $V_{\text{HFS}} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_0$ , wobei  $\vec{B}_0$  das von der Elektronenhülle generierte Magnetfeld am Ort des Kerns ist. Es wird eine Kopplung von  $\vec{I}$  mit  $\vec{J}$  durchgeführt und  $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$  definiert. Mit der Addition von Drehimpulsen gilt

$$|I - J| \leq F \leq I + J \quad (2.87)$$

, das bedeutet, dass  $\vec{F}(2I + 1)$  mögliche Werte für  $I < J$  und  $(2J + 1)$  Möglichkeiten für  $J < I$  besitzt. Bei einer zeitlichen Mittelung der Präzession von  $\vec{S}$  und  $\vec{L}$  steht das  $\vec{B}$ -Feld in Richtung von  $\vec{J}$ :

$$\vec{B}_0 = \bar{B}_0 \cdot \frac{\vec{J}}{J \cdot \hbar} \quad (2.88)$$

Die Wechselwirkungsenergie ist somit gegeben als

$$V_{\text{HFS}} = -\frac{\mu_I \mu_K \bar{B}_0}{\hbar^2 I J} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{J}) \quad (2.89)$$

Dabei ist  $\vec{I} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2}(\vec{F}^2 - \vec{I}^2 - \vec{J}^2)$ , da  $\vec{F} = (\vec{I} + \vec{J})^2$  ist. Für die Energieniveaus folgt somit

$$\Delta E_{\text{HFS}} = -\frac{\mu_I \mu_K \bar{B}_0}{2 I J} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)] \quad (2.90)$$

Der Intervallfaktor

$$A = \frac{\mu_I \cdot \mu_K \cdot \bar{B}_0}{I \cdot J} \quad (2.91)$$

gibt dabei die absolute Größe der Aufspaltung an. Der Abstand zweier Energieniveaus ergibt sich zu

$$\Delta E_{F+1} - \Delta E_F = -A(F+1) \quad (2.92)$$

Somit sind die Energieniveaus  $(2F+1)$ -fach nach  $m_F$  entartet.

Das von der Hülle erzeugte Magnetfeld am Kernort  $B_0$  ist nicht präzise bekannt  $\Rightarrow$  Äußere Magnetfelder (für schwache Felder ist  $V_{\text{mag}} \ll V_{I+J}$ , sonst spricht man von starken Feldern)

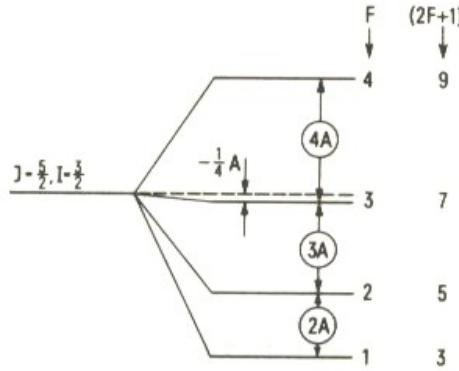


Abbildung 2.28: Hyperfeinstrukturaufspaltung: Multiplett für  $J = 5/2$  und  $I = 3/2$ . (aus Ref. [1])

### 2.5.3 Hyperfeinstruktur in äußeren Magnetfeldern

Gegeben sei ein äußeres Magnetfeld  $\vec{B}$  mit der Wechselwirkungsenergie

$$V_B^{\text{HFS}} = -\vec{\mu}_F \cdot \vec{B} \quad (2.93)$$

Man unterscheidet dann zwischen starken und schwachen Feldern:

#### i) Schwaches $\vec{B}$ -Feld

Es sei  $V_B \ll V_{\text{HFS}}$ , dh. die  $\vec{I}, \vec{J}$ -Kopplung ist noch erhalten. Es kommt zu einer Präzessionsbewegung von  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  um  $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$ .  $\vec{F}$  präzidiert um die  $z$ -Achse, die durch das externe Magnetfeld  $\vec{B}$  vorgegeben ist.

$$\Rightarrow -\vec{\mu}_F \cdot \vec{B} = -\frac{1}{\hbar^2 |\vec{F}|^2} \left( g_k \mu_k \cdot \vec{I} - g_J \cdot \mu_B \cdot \vec{J} \right) \cdot \vec{F} \left( \vec{F} \cdot \vec{B} \right) \quad (2.94)$$

, wobei  $g_J$  als Landé'scher  $g$ -Faktor bezeichnet wird:

$$g_J := \left\{ 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \right\} \quad (2.95)$$

Siehe hierzu auch Atomphysik, Zeemann-Aufspaltung der Feinstrukturniveaus im Magnetfeld. Man beachte, dass aufgrund der Vorzeichen der Ladungen auch die magnetischen Momente von Elektronen und Kern unterschiedliche Vorzeichen haben. Zudem ist zu beachten, dass auf Grund der unterschiedlichen  $g$ -Faktoren das magnetische Moment  $\mu_F$  und der Gesamtdrehimpuls  $F$  nicht in die gleiche Richtung zeigen (analog zur Zeemann-Aufspaltung der Feinstruktturniveaus).

Die Störungsenergien ergeben sich wie üblich durch Übergänge von den Operatoren zu den Eigenwerten:

$$\begin{aligned} \Delta E_B^{\text{HFS}} &= -m_F \cdot B \cdot g_K \cdot \mu_K \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)} \\ &\quad + m_F \cdot B \cdot g_J \cdot \mu_B \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)} \end{aligned} \quad (2.96)$$

, oder auch

$$\Delta E_{B,\text{schwach}}^{\text{HFS}} = g_F \cdot \mu_B \cdot B \cdot m_F \quad (2.97)$$

wobei

$$g_F := g_J \cdot \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} - g_K \frac{\mu_K}{\mu_B} \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)} \quad (2.98)$$

Da  $\mu_K/\mu_B \approx 1/1800$  ist, ist der erste Term dominant. Dies stellt die Zeemann-Aufspaltung der HFS-Niveaus dar. Man erhält eine äquidistante Aufspaltung jedes Niveaus in  $(2F+1)$  Komponenten.

## ii) Starkes $\vec{B}$ -Feld

Ein starkes  $\vec{B}$ -Feld führt zur Entkopplung von  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  (ähnlich zum Paschen-Back-Effekt). Es werden somit zwei Energiekorrekturen nötig:

- (i) Zeemann-Aufspaltung (äußeres Feld wirkt auf starkes magnetisches Moment der Hülle)

$$\Delta E = g_J \cdot \mu_B \cdot m_J \cdot B \quad (2.99)$$

- (ii) Standard-Hyperfeinstruktur-Wechselwirkung:

$$V_{\text{HFS}} = \frac{\mu_I \mu_K \cdot B}{\hbar^2 \cdot I \cdot J} (\vec{I} \cdot \vec{J}) \quad (2.100)$$

Jedoch kommt es zu keiner Kopplung von  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  zu  $\vec{B}$ !  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  präzessieren unabhängig mit verschiedenen Geschwindigkeiten um  $\vec{B}$ .

$$\Rightarrow \overline{(\vec{I} \cdot \vec{J})} = \frac{1}{B^2} (\vec{I} \cdot \vec{B}) (\vec{B} \cdot \vec{J}) = I_z \cdot J_z \quad (2.101)$$

$$\Delta E = \frac{\mu_I \cdot \mu_J \cdot B_0}{J \cdot I} \cdot m_I \cdot m_J = A \cdot m_I \cdot m_J \quad (2.102)$$

Man beachte hierbei, dass am Kernort das von der Hülle erzeugte Magnetfeld dominiert und mit etwa 100 T viel stärker ist als das äußere Feld.

- Es kommt zur Aufspaltung der  $J$  Energieniveaus im starken äußeren Magnetfeld in  $(2J+1)$  Niveaus.
- Zeemann-Aufspaltung der  $m_J$ -Niveaus nach  $m_I$ . In jeder Gruppe ( $m_J = \text{const.}$ ) beträgt die Zahl der Unterzustände  $(2I+1)$ ; Die Untersuchung des Aufspaltungsmusters in einem starken Magnetfeld stellt somit eine einfache Methode zur Bestimmung des Kernspins  $I$  dar.
- **Der Zeemann-Effekt der Hyperfeinstruktur geht in die Hyperfeinstruktur des Zeemann-Effekts über.**

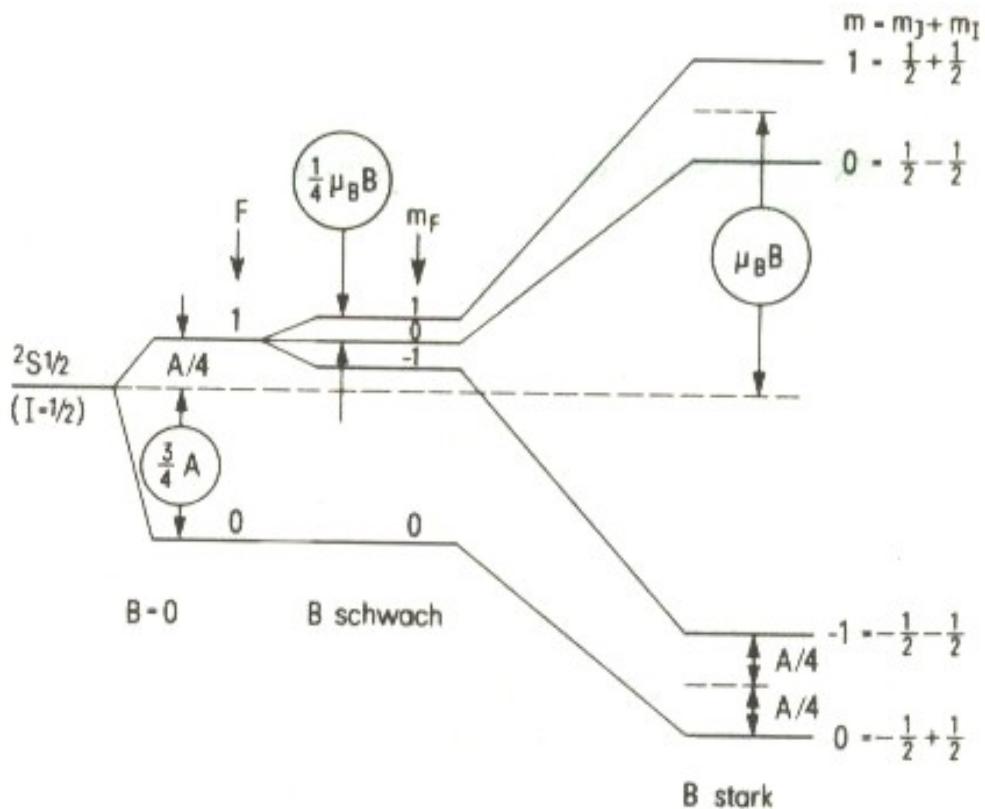


Abbildung 2.29: Aufspaltung der Hyperfeinstruktur niveaus für  $J = 1/2$  und  $I = 1/2$  in einem schwachen und starken äußeren Magnetfeld. (aus Ref. [1])

In einem starken externen Magnetfeld wird das Aufspaltungsmuster wegen  $\mu_I \ll \mu_J$  durch  $m_j$  bestimmt. In jeder Gruppe ( $m_j = const.$ ) beträgt die Zahl der Unterzustände  $(2I + 1)$ . Die Untersuchung des Aufspaltungsmusters in einem starken Magnetfeld stellt somit eine einfache Methode zur Bestimmung von  $I$  dar.

Zwischen den Energieniveaus gelten für elektromagnetische Übergänge (Photonen-Emission und -Absorption) die folgenden Auswahlregeln:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta F = 0, \pm 1 \\ \Delta m_F = 0, \pm 1 \\ \Delta m_I = 0, \pm 1 \\ \text{oder } \Delta m_j = 0, \pm 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zeemann-Gebiet} \\ \text{Paschen-Back-Gebiet} \end{array} \quad (2.103)$$

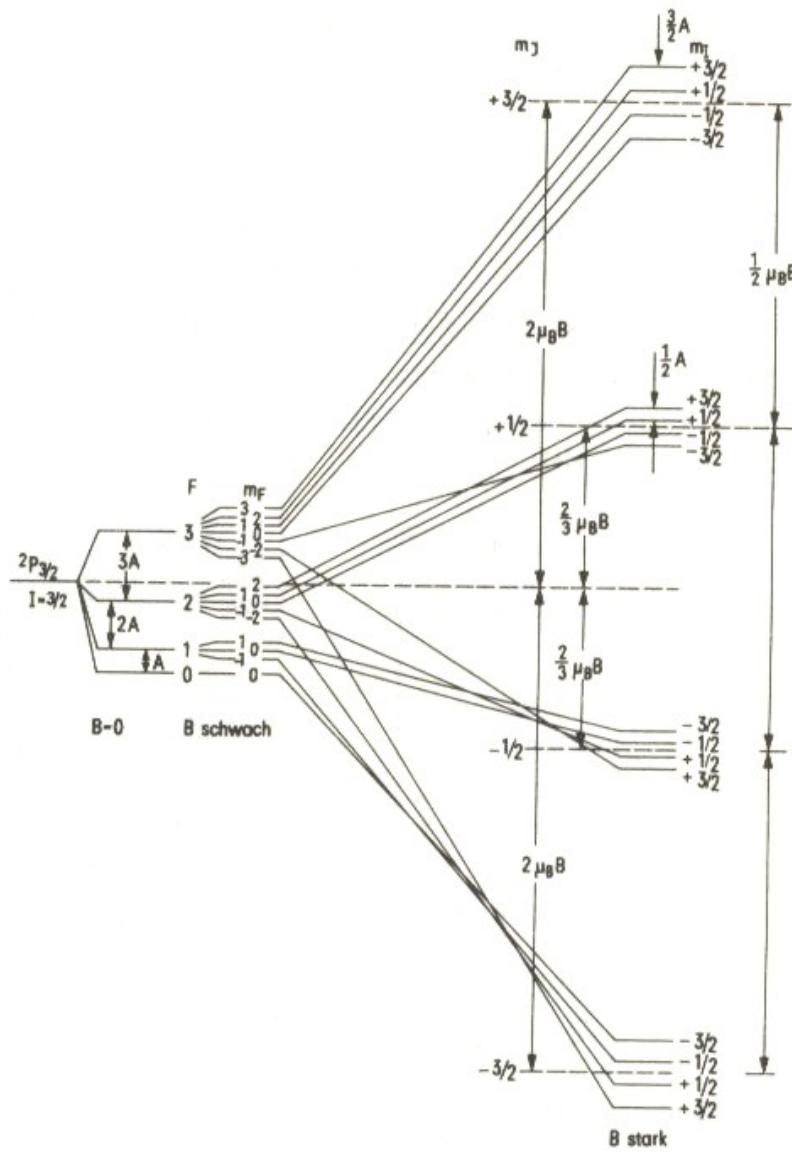


Abbildung 2.30: Aufspaltung der Hyperfeinstruktur niveaus für  $J = 3/2$  und  $I = 3/2$  in einem schwachen und starken äußeren Magnetfeld. (aus Ref. [1])

## 2.5.4 Experimentelle Methoden zu Bestimmung von $\mu_I$ und $I$

Wie bereits diskutiert, sind äußere Magnetfelder nötig, um die magnetischen Momente der Kerne präzise zu bestimmen. Das von der Hülle am Kernort erzeugte Magnetfeld ist nicht präzise genug bekannt, um die Bestimmung aus der HFS-Aufspaltung ohne externe Felder vorzunehmen.

Die Energiedifferenzen werden im Allgemeinen präzise durch Einstrahlung hochfrequenter elektromagnetischer Felder bestimmt. Zwei wichtige Methoden werden im Folgenden vorgestellt.

Darüber hinaus können Informationen über den Kernspin auch direkt aus Streuexperimenten gewonnen werden.

### Experimentelle Messung von magnetischen Momenten:

- (a) Atomstrahlexperiment (Rabi, 1939 ; Nobelpreis 1944)

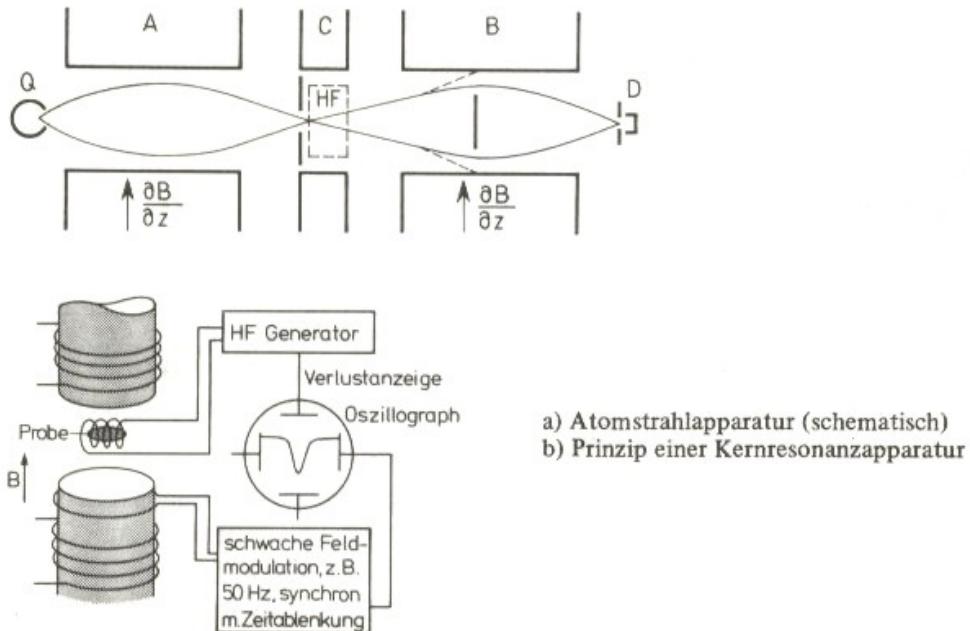


Abbildung 2.31: (aus Ref. [1])

Ein Strahl von Atomen von einer Quelle  $Q$  (Atomstrahlofen) durchläuft inhomogene Magnetfelder ( $A, B$ ) (Stern-Gerlach-Magnete):

$$F = \mu_Z \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.104)$$

Zwischen den Bereichen  $A$  und  $B$ , befindet sich ein Bereich  $C$  mit einem homogenen Feld, welches eine Aufspaltung hervorruft. Durch Einstrahlung elektromagnetischer Wechselfelder (Mikrowellen) der Kreisfrequenz  $\omega$  kommt es für

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \quad (2.105)$$

zu induzierten Übergängen (Hyperfeinstrukturfrequenz).

Eine Änderung der  $z$ -Komponente von  $\vec{\mu}$  führt zu einer unterschiedlich starken Ablenkung im zweiten inhomogenen Magnetfeld  $\vec{B}$ , sodass die entsprechenden Atome den Detektor nicht erreichen (Abfall der Zählrate).

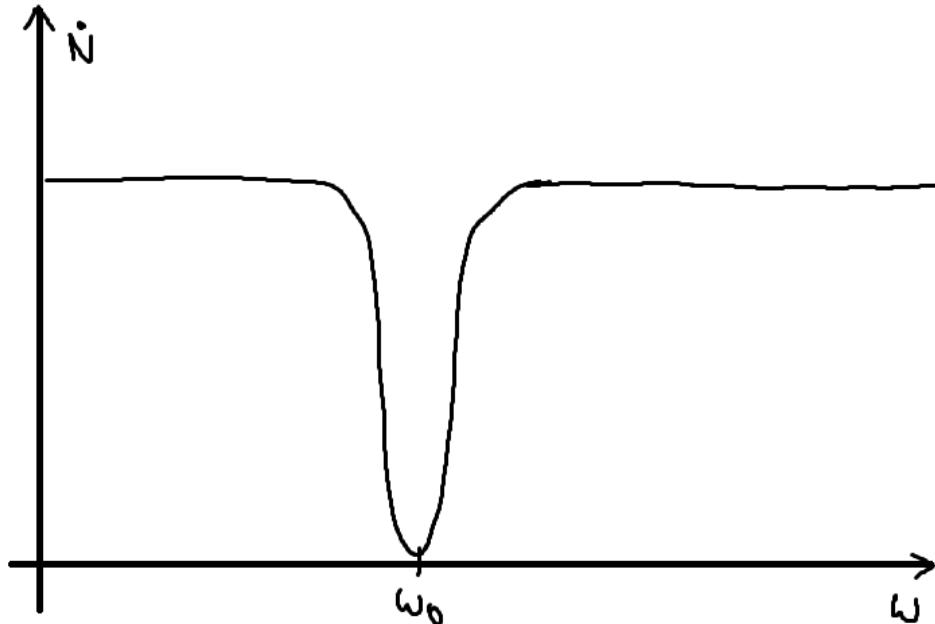


Abbildung 2.32: Zählrate beim Rabi-Experiment als Funktion der Frequenz des elektromagnetischen Wechselfeldes

(b) Kernspinresonanzmethode:

Diese Methode wurde von F. Bloch und E. Purcell entwickelt (Nobelpreis 1952).

- Probe in diamagnetischer Umgebung (z.B. Proton in Wassertropfen)
- homogenes Magnetfeld
- Für einen Kern mit Kernspin  $I$  kann die  $z$ -Komponente  $(2I + 1)$  mögliche Werte annehmen. Die Energiedifferenz für verschiedene  $z$ -Komponenten beträgt:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \langle \vec{\mu}_K \cdot \vec{B} \rangle = g_K \cdot \mu_K \cdot \Delta I_Z \cdot B \\ &= g_K \cdot \mu_K \cdot B \cdot \Delta m_I\end{aligned}\quad (2.106)$$

- Ein Hochfrequenzfeld in einer Induktionsspule führt zu induzierten Dipolübergängen

$$\Delta m = \pm 1 \Rightarrow \Delta E = \hbar \cdot \omega_L = g_K \cdot \mu_K \cdot B \quad (2.107)$$

mit der *Lamorfrequenz*  $\omega_L$ , welche der Präzessionsfrequenz

$$\omega_L = \frac{g_K \cdot \mu_K \cdot B}{\hbar} \quad (2.108)$$

des Kernspins im Magnetfeld entspricht.

- Der Nachweis der Resonanz kann über ein Verlustsignal oder ein induziertes Signal in einer zweiten Spule erbracht werden. Wichtig ist hierbei die unterschiedliche Besetzung der verschiedenen Niveaus, die im thermischen Gleichgewicht gegeben ist.

(c) Streuexperimente:

Die in Streuexperimenten gemessenen Winkelverteilungen sind sensitiv auf den Spin des Kerns.

Für die Streuung von Spin-0-Teilchen an einem Targetkern mit Spin-0 gilt die Rutherford-Streuformel. Für die Streuung von Spin- $1/2$ -Teilchen führen Spin-Effekte zu Modifikationen, die durch die Mott-Streuformel erfasst werden. Eine Möglichkeit zur Bestimmung des Kernspins besteht in der Vermessung des Streuquerschnitts identischer Kerne aneinander, z.B.  $^{10}\text{B}$ -Streuung und  $^{10}\text{B}$ .

Aufgrund der beteiligten identischen Teilchen ergibt sich eine Vorwärts-/Rückwärts-Symmetrie im differentiellen Wirkungsquerschnitt. Der Interferenzterm hängt von Spin des Kerns ab (siehe auch [4]):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Z^2 \cdot e^2}{4E_{\text{kin}}} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} + \frac{1}{2I+1} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2) \cdot \cos^2(\theta/2)} \cos \left( \eta \ln \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \right\} \quad (2.109)$$

wobei

$$\eta = \frac{Z^2 \cdot e^2}{\hbar^2 \cdot v_{\text{rel}}} \quad (2.110)$$

mit  $v_{\text{rel}}$  als Relativgeschwindigkeit der beiden Kerne ist. Der Wirkungsquerschnitt ist in Abb. 2.33 für verschiedene Annahmen über den Kernspin ( $S = I$ ) gezeigt. Diese Methode ist jedoch deutlich ungenauer als die Atomstrahl- oder Kernspinresonanz-Methode.

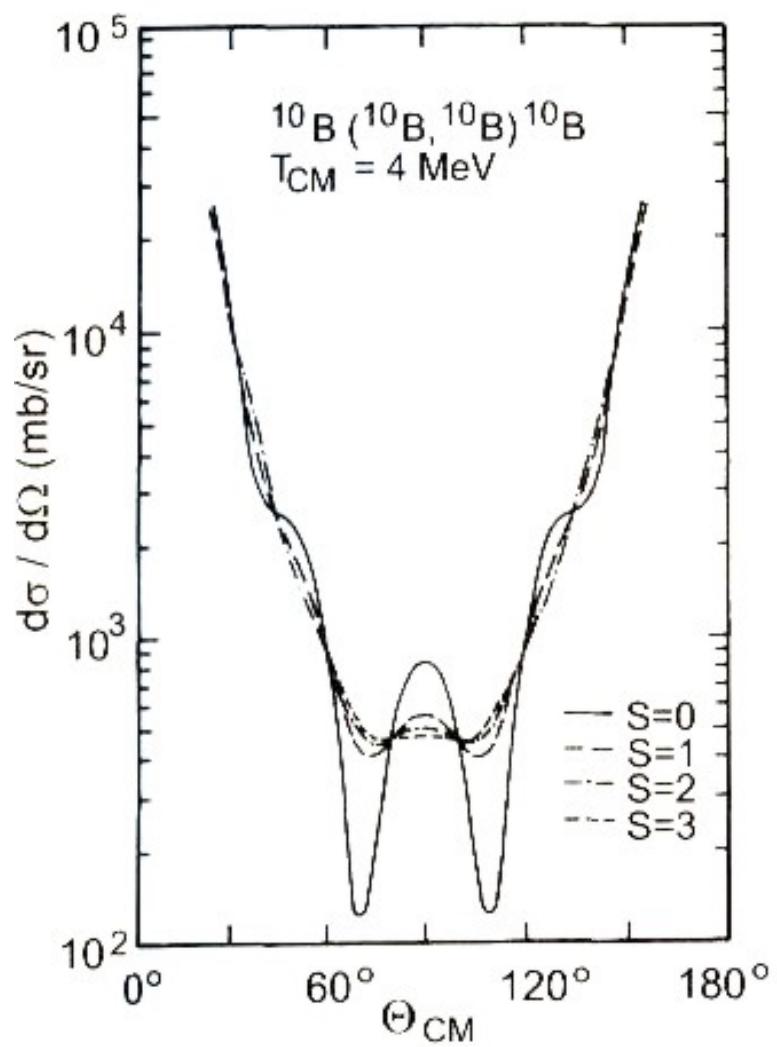


Abbildung 2.33: Theoretische Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für die Streuung von  $^{10}\text{B}$  an  $^{10}\text{B}$  für verschiedene Kernspinhypotesen (aus Ref. [4])

## 2.5.5 Experimentelle Ergebnisse

### (i) Proton und Neutron:

Mit Protonen wurden Kernspinresonanzexperimente und mit Neutronen Streuexperimente durchgeführt. Als Ergebnis dieser Experimente erhält man

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_p &= 2.79 \cdot \mu_K \\ \mu_n &= -1.91 \cdot \mu_K\end{aligned}} \quad (2.111)$$

, welche als *anormale magnetische Momente* der Nukleonen bezeichnet werden. Mit dem Protonen-/Neutronenspin  $1/2$  folgt damit

$$\begin{aligned}g_K(p) &= 5.59 \\ g_K(n) &= -3.82\end{aligned} \quad (2.112)$$

Für punktförmige, geladene Teilchen mit Spin  $1/2$  erwartet man  $g = 2$  (siehe Elektronen), was ein deutlicher Hinweis auf eine Substruktur der Nukleonen ist. Eine Erklärung ist im Quark-Modell möglich. Das negative Vorzeichen von  $\mu_n$  bedeutet, dass Spin und magnetisches Moment entgegengesetzt ausgerichtet sind.

### (ii) Magnetische Momente von Kernen (im Grundzustand):

Der Spin der Grundzustände aller stabilen und der meisten radioaktiven Kerne ist bekannt.

- (gg)-Kerne haben Spin 0 (im Grundzustand) ( $\uparrow\downarrow$  gepaarte Nukleonen)
- Kerne mit geradem  $A$  haben einen ganzzahligen Spin.
- (ug)- bzw. (gu)-Kerne haben einen halbzahlichen Spin im Wertebereich  $I = 1/2, 3/2, \dots, 9/2$ . Man findet sogar Kerne mit besonders großem Kernspin:  $^{125}_{50}\text{Sn}$  mit  $I = 11/2$  und  $^{176}_{71}\text{Lu}$  mit  $I = 7$ , welches radioaktiv und instabil ist.

Messergebnisse für Kerne mit ungepaarten Protonen und Neutronen (gu)- und (ug)-Kerne:

- Es gibt eine Korrelation von  $|\vec{I}|$  und  $g_K$  oder  $\mu_I$ .
- Modell (Th. Schmitdt, 1937); Einteilchenmodell:  
(gg)-Kerne besitzen Spin 0, das heißt dass gepaarte Nukleonen vorliegen. Diese liefern keinen Beitrag zu  $\vec{I}$ . Somit muss  $\vec{I}$  aus den ungepaarten Nukleonen resultieren, wobei die beiden Beträge
  - (i) Bahndrehimpuls  $\vec{\ell}$
  - (ii) Spin  $1/2$

zwei Möglichkeiten zulassen:

$$\Rightarrow I = \ell \pm 1/2 \quad (2.113)$$

Beispielsweise kann  $I = 5/2$  realisiert sein durch  $\ell = 3, s = -1/2$  oder durch  $\ell = 2, s = +1/2$ .  $\mu$  kann aus der Hyperfeinstrukturaufspaltung in Magnetfeldern bestimmt werden, dabei wird die Korrelation zwischen  $\mu$  und  $Z, N, \ell, s$  durch das Einteilchenmodell grob beschrieben, es sind jedoch deutliche Abweichungen sichtbar.

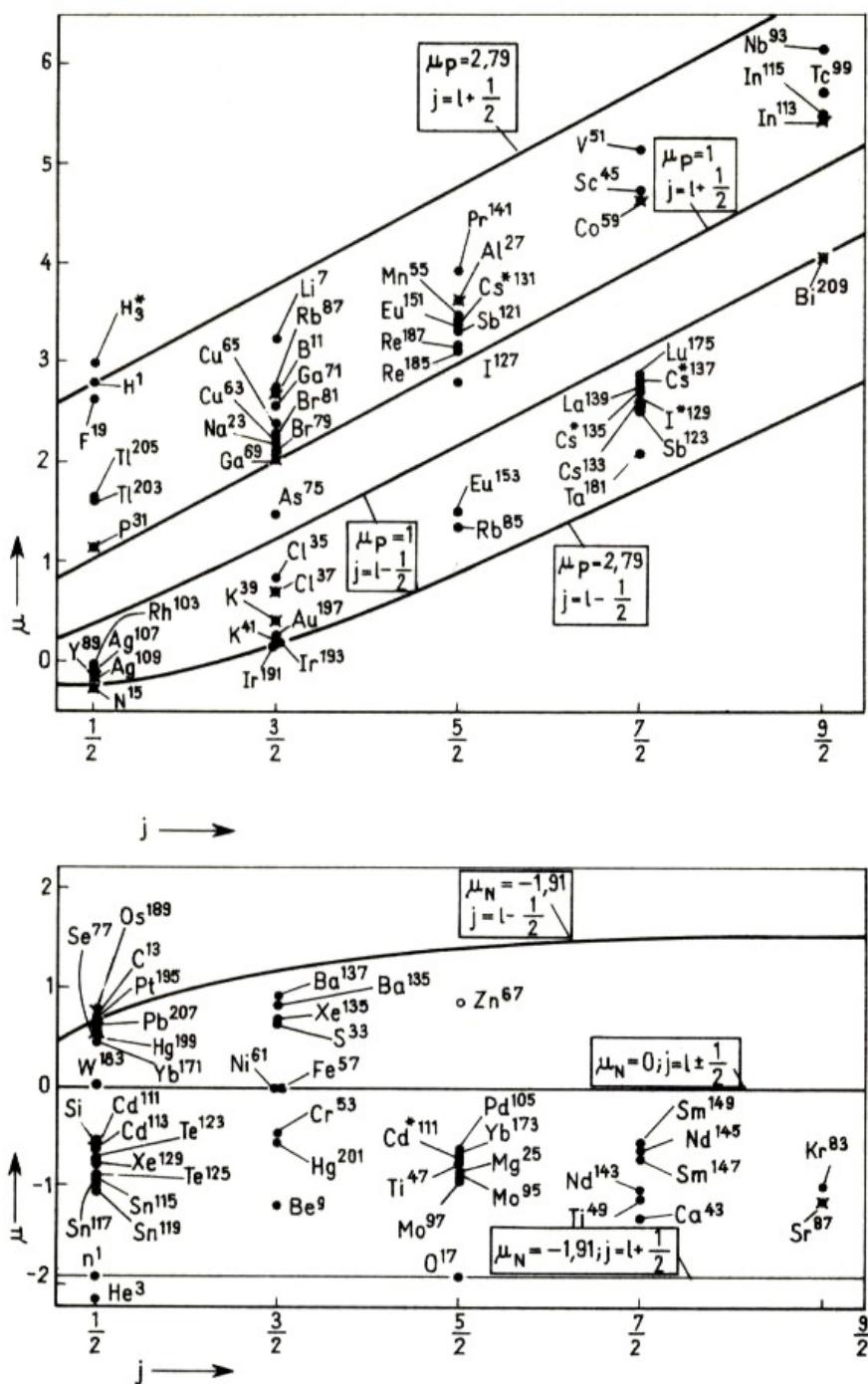


Abbildung 2.34: Magnetische Momente für Kerne mit ungepaartem Proton (oben) bzw. Neutron (unten). (aus Ref. [1])

- Modellkurven ( $\hat{=}$  Schmidt-Linien):  
Magnetische Momente liegen innerhalb von Bändern, die durch Kurven mit  $\mu_p = 2.79$  und  $\mu_p = 1.0$  bzw.  $\mu_n = -1.91$  und  $\mu_n = 0$  begrenzt sind.
- Limitierungen:
  - Zu einfach angesetzt, die Korrelationen zwischen den Nukleonen werden vernachlässigt (Rumpfkern  $\ell = 0, s = 0$  und ein Leuchtnukleon).
  - Der  $g$ -Faktor von  $p$  und  $n$  im Kern entspricht nicht dem  $g$ -Faktor der einzelnen Nukleonen.

Bisher wurde angenommen, dass kugelsymmetrische Ladungsverteilungen in den Kernen vorliegen, woraus die Hyperfeinstruktur und die Intervallregel resultieren. 1935 wurde jedoch an Europium ( $^{152}_{63} Eu$ ) durch Schmidt und Schüller eine Abweichung von der Intervallregel im HFS-Spektrum beobachtet.

Es muss somit eine nicht-kugelsymmetrische Ladungsverteilung vorliegen, dass bedeutet es gibt *deformierte Kerne*.

Demnach existiert ein Quadrupolmoment des Kerns

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r', \quad V = \text{Kernvolumen} \quad (2.114)$$

Die Multipolentwicklung lautet

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (2.115)$$

Je nach  $\ell$ -Wert unterscheidet man:

$\ell = 0$  : Monopol.  $Q$  entspricht der Gesamtladung,  $\phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot Q$

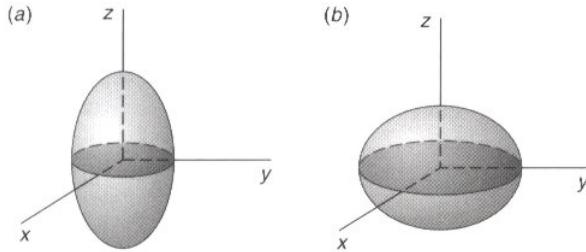
$\ell = 1$  : Ein statisches Dipolmoment existiert auf Grund der Paritätserhaltung nicht:

$$\Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \underbrace{\int r' \rho(r') \cdot d^3 r'}_{Q_D: \text{Dipolmoment}} = 0 \quad (2.116)$$

,da  $\rho(r') = Q|\psi(r')|^2 = Q|\psi(-r')|^2 = \rho(-r')$  und somit das Integral über eine ungerade Funktion (gerade ( $\rho$ ) · ungerade ( $r'$ )) bei Integration über das gesamte Volumen verschwindet (siehe auch Kapitel 7).

$\ell = 2$  : Quadrupolmoment: Für einen rotationssymmetrischen Kern (Zylindersymmetrie) mit der  $z$ -Achse als Symmetriearchse ist

$$\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \underbrace{\int \left( 3z'^2 - r'^2 \right) \rho(\vec{r}') d^3 r'}_{Q_z} \quad (2.117)$$



Nichtsphärische Kerne.

Für Kerne mit positivem Quadrupolmoment ist  $(z^2)_{\text{mittel}}$  größer als  $(x^2)_{\text{mittel}}$  oder  $(y^2)_{\text{mittel}}$ , sie sind zigarrenförmig (a). Für Kerne mit negativem Quadrupolmoment ist  $(z^2)_{\text{mittel}}$  kleiner als  $(x^2)_{\text{mittel}}$  oder  $(y^2)_{\text{mittel}}$ , sie sind diskusförmig (b).

Abbildung 2.35: (aus Ref. [11])

Es gibt also Abweichungen von der Intervallregel bei der Hyperfeinstruktur. Man unterscheidet dabei zwei Arten von Kernen:

$Q_z > 0$  prolate Kerne (zigarrenförmig)

$Q_z < 0$  oblate Kerne (diskusförmig)

Für ein klassisches Rotationsellipsoid, welches homogen mit Gesamtladung  $Q = Z \cdot e$  geladen ist, ist

$$Q_Z = \frac{2}{5} Z \cdot e \left( b^2 - a^2 \right) \quad (2.118)$$

, wobei  $a$  und  $b$  die Halbachsen des Ellipsoids sind. Mit  $\bar{R} = \frac{a+b}{2}$  und  $\Delta R = (b-a)$  ergibt sich dann

$$Q_z = \frac{2}{5} Z \cdot e \cdot 2\bar{R} \cdot \Delta R = c \left( Z \cdot \bar{R}^2 \right) \cdot \underbrace{\left( \frac{\Delta R}{\bar{R}} \right)}_{=: \delta} \quad (2.119)$$

$\delta$  wird dabei als *Deformationsparameter* bezeichnet. Es besteht also der Zusammenhang  $\delta \sim \left( \frac{Q_z}{Z \bar{R}^2} \right)$ .

$Q_z$  ist messbar aus der Hyperfeinstruktur-Aufspaltung,  $Z$  ist die Kernladung und  $\bar{R}$  entspricht dem Kernradius, für den  $R \sim A^{\frac{1}{3}}$  gilt. Daraus folgt, konsistent zur obigen Berechnung,  $\delta = \frac{\Delta R}{\bar{R}}$ . Für prolate (zigarrenförmige) Kerne ist  $\delta > 0$ , für oblate (diskusförmige) Kerne ist  $\delta < 0$ .

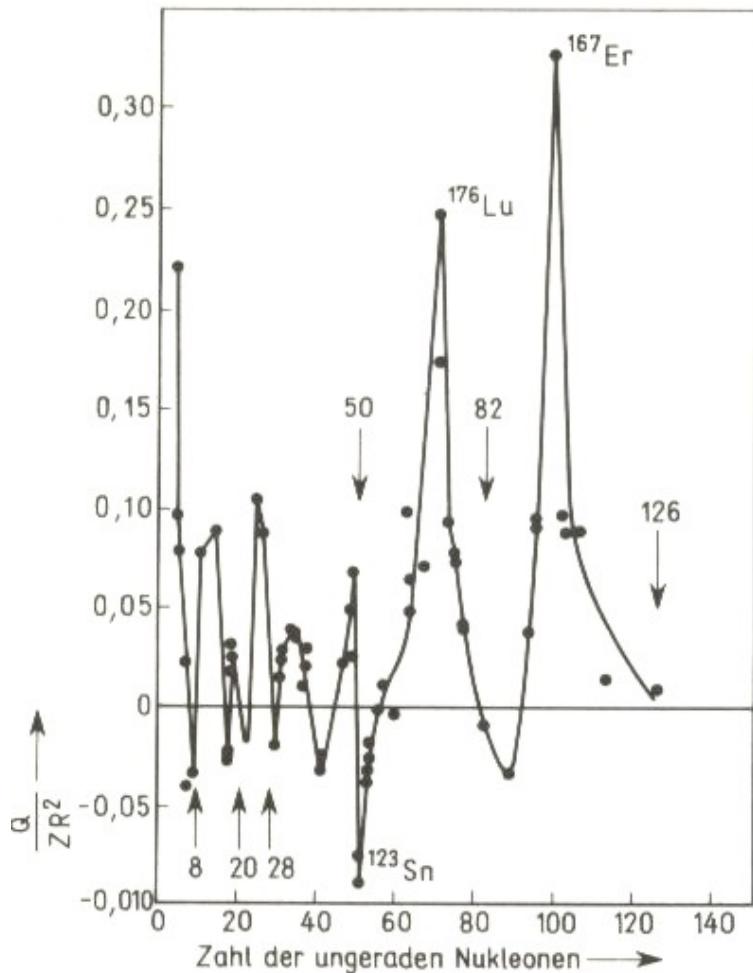


Abbildung 2.36: (aus Ref. [1])

### Einschub: Parität

Ausgehend von einem physikalischen System wird eine Spiegelung  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  zu einem (physikalischen System)' durch geführt

$$\text{Phys. System } \underset{\psi(\vec{r})}{\overset{\text{Spiegelung}}{\xrightarrow{\vec{r} \rightarrow -\vec{r}, P}}} (\text{Phys. System})' \quad (2.120)$$

Dies kann durch den Paritätsoperator  $P$  ausgedrückt werden, welcher das Vorzeichen von polaren Vektoren ändert (z.B.  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ,  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ ), das Vorzeichen von axialen Vektoren hingegen nicht (z.B.  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ).

$$\begin{aligned} P|\psi(\vec{r})\rangle &= |\psi(-\vec{r})\rangle \\ P^2|\psi(\vec{r})\rangle &= |\psi(\vec{r})\rangle \\ P^2 &= \text{id}, \quad \text{Eigenwerte } \pm 1 = \pi \end{aligned} \quad (2.121)$$

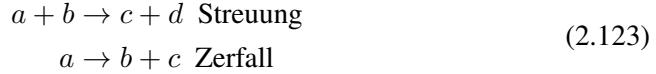
Wenn  $P$  und  $H$  kommutieren, so ist die Parität eine Erhaltungsgröße.

- Besitzt  $\psi(\vec{r})$  den Paritätseigenwert  $+1$ , so spricht man von gerader Parität.
- Besitzt  $\psi(\vec{r})$  den Paritätseigenwert  $-1$ , so spricht man von ungerader Parität.

Wichtige Beispiele für die Parität sind die Kugelflächenfunktionen  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ :

$$PY_\ell^m = (-1)^\ell \cdot Y_\ell^m \quad (2.122)$$

Bei Teilchenreaktionen



ist die Parität für den Anfangszustand

$$P|Anfang\rangle = \underbrace{P|a\rangle \cdot P|b\rangle}_{\begin{array}{l} \text{Parität der Teil-} \\ \text{chen} \end{array}} \cdot P|\text{rel. Bewegung}\rangle \quad (2.124)$$

(Kernzustand)  
(Innere Parität)

Die Paritätserhaltung besagt nun, dass

$$\pi_a \cdot \pi_b \cdot (-1)^\ell = \pi_c \cdot \pi_d \cdot (-1)^{\ell'} = \pi_a \cdot \pi_b \cdot (-1)^\ell \cdot |\text{rel. Bewegung}\rangle \quad (2.125)$$

gilt. Für die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung ist die Parität erhalten, bei der schwachen Wechselwirkung ist die Paritätserhaltung jedoch verletzt!

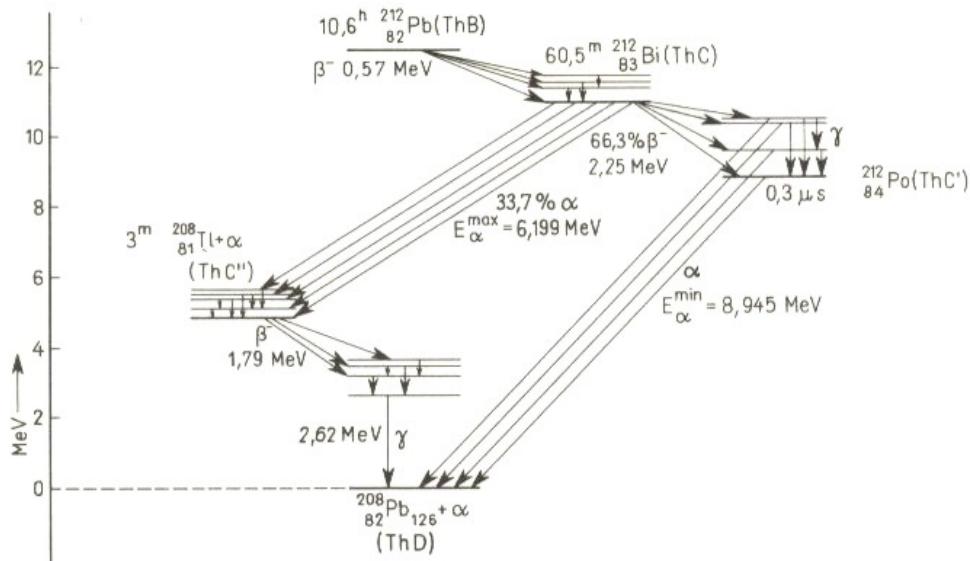
# 3 Zerfälle instabiler Kerne

## 3.1 Das Zerfallsgesetz

Historisch wurden verschiedene Strahlungsarten gefunden:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Die ersten beiden Strahlungsarten konnten durch ihre Ladung (Ablenkung im  $E$ - bzw.  $B$ -Feld) von der  $\gamma$ -Strahlung unterschieden werden. Aufgrund der unterschiedlichen Ladung ( $+2e$  bzw.  $-e$ ), sowie der unterschiedlichen Reichweite wiederum konnte zwischen  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung unterschieden werden. Instabile Kerne umfassen

- Kerne im Grundzustand, die sich durch Teilchenemission ( $\alpha$ ,  $\beta$ , Spaltung) *spontan* in andere Kerne umwandeln
- Kerne im angeregten Zustand, die durch elektromagnetische Wechselwirkungen in den Grundzustand übergehen

Damit solche Übergänge spontan stattfinden, müssen sie energetisch möglich sein. Ein Beispiel für ein Termschema ist in Abb. 3.1 zu sehen.



Zerfallsschema für  $\text{ThB}^{(212\text{Pb})}$  mit Folgeprodukten, stark vereinfacht

Abbildung 3.1: Beispiel für ein Termschema (aus Ref. [1])

Grund für das Auftreten dieser Strahlungsarten ist, dass Kerne sich spontan umwandeln können. Die Übergangswahrscheinlichkeit kann quantenmechanisch berechnet

werden, der Faktor

$$\lambda \sim |\langle \psi_f | \mathcal{O} | \psi_i \rangle|^2 \quad (3.1)$$

beschreibt die Übergangsamplitude.  $\mathcal{O}$  ist hierbei der Wechselwirkungs-Operator,  $\psi_i$  bzw.  $\psi_f$  die Wellenfunktion des Anfangs- bzw. Endzustands.

Für eine Probe mit  $N$  Kernen ist die Aktivität  $A$

$$A := -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N \quad (3.2)$$

als die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit definiert. Dabei wird  $\lambda$  als *Zerfallskonstante* bezeichnet. Mittels Integration folgt das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (3.3)$$

Der zeitliche Verlauf der Aktivität ist folglich gegeben durch

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (3.4)$$

mit der Aktivität zu Zeitpunkt  $t = 0$  als  $A_0 = \lambda N_0$  und der anfänglichen Kernzahl  $N_0$ , d.h. die Aktivität fällt exponentiell ab.

Als Halbwertszeit  $t_{1/2}$  bezeichnet man die Zeit, nach der die Hälfte der anfangs vorhandenen Kerne zerfallen ist:

$$\begin{aligned} N(t_{1/2}) &= \frac{N_0}{2} = N \cdot e^{-\lambda t_{1/2}} \\ \Rightarrow t_{1/2} &= \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Als (mittlere) Lebensdauer  $\tau$  definiert man

$$\tau := \frac{1}{\lambda} \approx 1.443 t_{1/2} \quad (3.6)$$

Die mittlere Lebensdauer wird durch die Überführung des Zerfallsgesetzes in die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  und der Bestimmung des Erwartungswertes

$$\langle t \rangle := \tau = \int_0^\infty t P(t) dt = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (3.7)$$

hergeleitet.  $\tau$  bezeichnet die Zeit, nach der die Anzahl der instabilen Kerne einer Probe auf  $1/e$  ihres Anfangswerts abgefallen ist.

Aufgrund der Unschärferelation bezeichnet man

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \lambda \quad (3.8)$$

als Zerfallsbreite.

Falls mehrere Zerfälle mit verschiedenen Zerfallskonstanten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  möglich sind, so ist

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

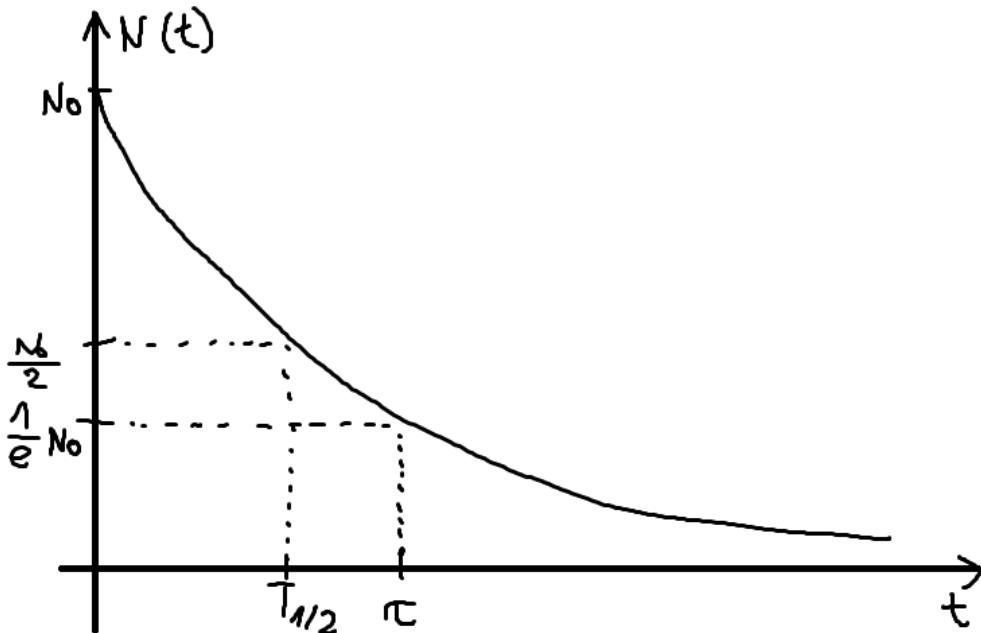


Abbildung 3.2: Anzahl der instabilen Kerne als Funktion der Zeit

Ein instabiler Kern muss nicht zwangsläufig zu einem stabilen Kern zerfallen, sondern auch das Zerfallsprodukt kann instabil sein. Es kommt somit zu *Zerfallsketten*

$$N_1 \xrightarrow{\lambda_1} N_2 \xrightarrow{\lambda_2} N_3 \xrightarrow{\lambda_3} \dots \xrightarrow{\lambda_{k-1}} N_k \quad (3.10)$$

beispielsweise die Uran- und Thoriumzerfallsreihen. Dieser Prozess lässt sich durch ein System aus Differentialgleichungen beschreiben:

$$\boxed{\dot{N}_i = \lambda_{i-1} N_{i-1} - \lambda_i N_i}. \quad (3.11)$$

Für eine Kette mit zwei instabilen Isotopen ist

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \quad (3.12)$$

falls zu Beginn  $N_0 = N_1(0)$  Mutterkerne und keine Tochterkerne ( $N_2(0) = 0$ ) vorhanden sind.

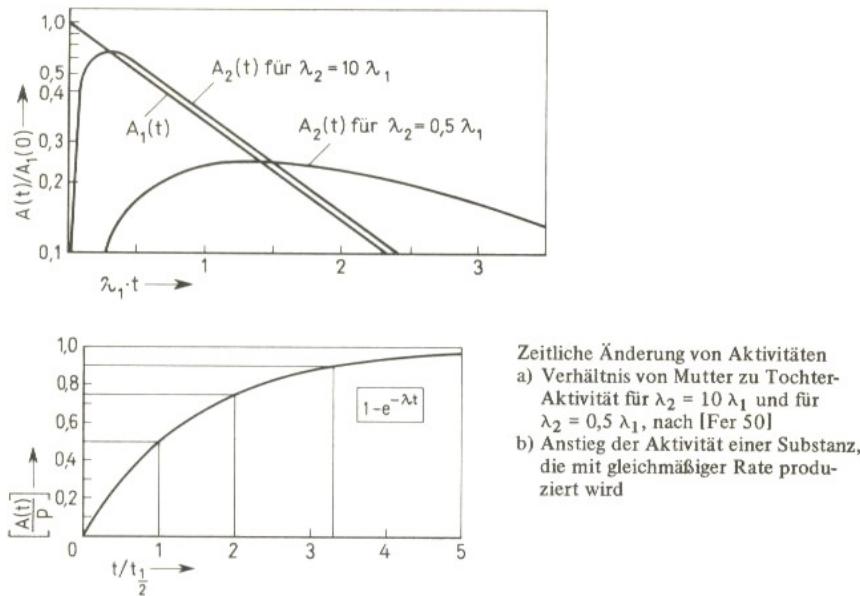


Abbildung 3.3: Verlauf der Aktivitäten in einer Zerfallskette mit zwei instabilen Gliedern, wobei der Tochterkern eine wesentlich kürzere Halbwertszeit aufweist als der Mutterkern bzw. eine deutlich kürzere Lebensdauer (aus Ref. [1])

- Das Maximum der Aktivität der zweiten Substanz tritt auf beim Schnittpunkt der Kurven  $A_1(t)$  und  $A_2(t)$ .
- Für große Zeiten ist der Abfall der Aktivität bestimmt durch die größere Lebensdauer.
- Falls in einer Kette eine langlebige Substanz vorkommt und alle anderen kurzlebig sind, so bestimmt alleine die langlebige die Aktivität aller nachfolgenden Zerfälle (Radioaktives Gleichgewicht).

Die Produktion von radioaktiven Substanzen (z.B. für medizinische Anwendungen) erfolgt unter anderem mit Beschleunigern. Dabei werden pro Zeiteinheit  $p$  Kerne erzeugt, die jedoch wieder zerfallen:

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = -\lambda N + p \Rightarrow A(t) = p \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \quad (3.13)$$

#### Einheiten:

Zerfälle werden in Becquerel gemessen:

$$1 \text{Bq} = 1 \text{Zerfall/s.} \quad (3.14)$$

Historisch wurde Curie als Einheit verwendet:

$$1 \text{Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Zerfälle/s.} \quad (3.15)$$

Die Wirkung radioaktiver Strahlung ist messbar, radioaktive Strahlung führt zur Ionisation und Energiedeposition. Für die Ionisation wird die Einheit Röntgen verwendet

$$1R = 2.58 \cdot 10^{-4} \frac{C}{kg} \text{ (Luft)} \quad (3.16)$$

, wobei Luft zur Referenz gewählt wurde, d.h. 1R bezeichnet die Strahlungsenergie, welche in 1kg Luft durch Ionisation die Ladung  $2.58 \cdot 10^{-4} C$ . Für andere Stoffe unterscheidet sich dieser Wert!

Die Energiedeposition wird durch die Energiedosis (d.h. die durch Strahlung an eine Substanz abgegebene Energie) gemessen:

$$1\text{rad} = 10^{-2} \frac{J}{kg} \quad (3.17)$$

wurde historisch verwendet, heute geht man zur Einheit Gray

$$1\text{Gy} = 1 \frac{J}{kg} \quad (3.18)$$

über.

Die Äquivalentdosis berücksichtigt die je nach Strahlungsart unterschiedliche biologische Wirksamkeit:

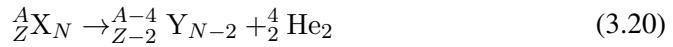
$$\begin{aligned} \text{Äquivalentdosis} &= (\text{Energiedosis}) \cdot (\text{biol. Bewertungsfaktor}) \\ 1 \frac{\text{Sv}}{(\text{Sievert})} &= q \cdot 1\text{Gy} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Zur Definition des Bewertungsfaktors wird 200 keV Röntgenstrahlung verwendet, für die  $q := 1$  ist. Für  $\beta$ -Strahlung ist  $q = 1.5$ , für  $\alpha$ -Strahlung  $q = 20$ . Die natürliche Strahlenbelastung liegt zwischen 1 – 5 mSv/Jahr, hinzu kommt noch eine zivilerische Belastung. Auf einem Transatlantikflug erhält man beispielsweise eine Dosis vom 0.3 mSv, bei einer Röntgenaufnahme sogar rund 4 mSv.

## 3.2 Der $\alpha$ -Zerfall

Der  $\alpha$ -Zerfall, sowie weitere Arten von Strahlung, wurden zuerst von Becquerel et al. 1896 in Paris entdeckt. Rutherford fand 1908 aus der Ablenkung im Magnetfeld heraus, dass für  $\alpha$ -Teilchen  $Z = 2$  und  $A = 4$  (vierfache Masse von Wasserstoff) ist. Aus der festen Reichweite konnte geschlossen werden, dass es sich um monoenergetische Strahlung handelt.

Der  $\alpha$ -Prozess wird beschrieben durch



, wobei  ${}^4_2 He_2$  das  $\alpha$ -Teilchen ist.

Die Zerfallsenergie ist

$$Q := (m_X - m_Y - m_\alpha) \cdot c^2 = E_{\text{kin}}(\alpha) + E_{\text{kin}}(Y) \quad (3.21)$$

Mittels Energie- und Impulserhaltung folgt dann

$$E_{\text{kin}}(\alpha) = \frac{Q}{\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}\right)} \quad (3.22)$$

Für schwere Kerne erhält das  $\alpha$ -Teilchen also den größten Anteil der zur Verfügung stehenden Energie. Die restliche Energie geht in den Rückstoß des Tochterkerns. Typische Energien liegen dabei im Bereich von  $E_{\text{kin}}(\alpha) \sim 5 \text{ MeV}$ .

#### $\alpha$ -Zerfall durch den quantenmechanischen Tunneleffekt

Wie ist nun die Zerfalls wahrscheinlichkeit für den  $\alpha$ -Zerfall gegeben?

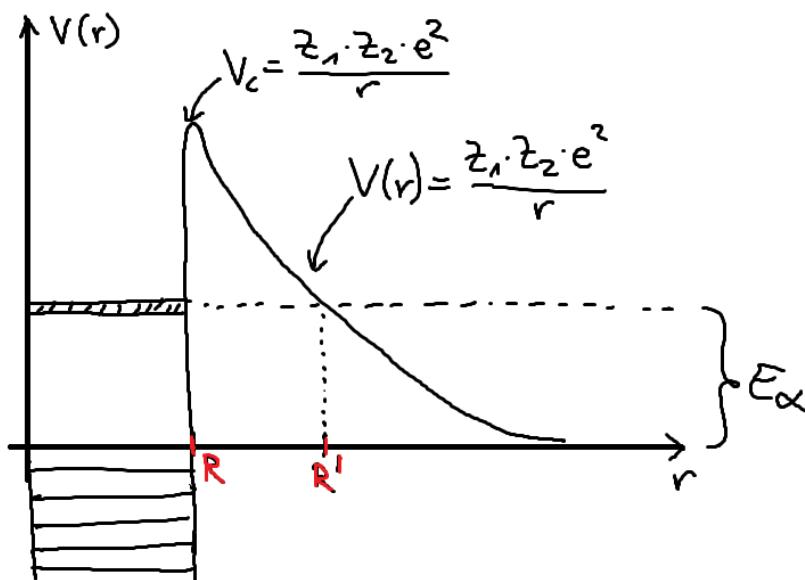


Abbildung 3.4: Zum  $\alpha$ -Zerfall durch den quantenmechanischen Tunneleffekt: Vor dem Zerfall muss sich das  $\alpha$ -Teilchen in einem metastabilen Zustand befinden, sodass es nach dem Tunneln die Energie  $E_\alpha$  besitzt.

Die Zerfallsenergie tritt als kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens auf, die Wahrscheinlichkeit  $\lambda$  setzt sich aus

$$\lambda = \lambda_0 \cdot T_\alpha \quad (3.23)$$

zusammen. Hierbei sind

$\lambda_0$  die Wahrscheinlichkeit für die Bildung der  $\alpha$ -Konfiguration und das Auftreffen auf den Potentialwall.

$T_\alpha$  die Wahrscheinlichkeit für das Durchdringen der Potentialwalls, *Transmissionskoeffizient* genannt. Dies ist der dominierende Faktor für die Metastabilität.

Die Quantenmechanik liefert für den Transmissionskoeffizienten (Tunneleffekt):

$$T \approx \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \int_0^D \sqrt{2 \cdot m (V(r) - E)} dr \right] \quad (3.24)$$

Angewandt auf das Coulomb-Potential ergibt sich mit der abkürzenden Schreibweise  $T \approx e^{-G}$ :

$$G = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{r} - E} dr \quad (3.25)$$

$G$  wird auch als *Gamov Faktor* bezeichnet. Die Lösung hierzu lautet

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \cdot Z_1 Z_2 \cdot e^2 \gamma(x) \text{ mit} \\ \gamma(x) &= \arccos \left( \sqrt{x} \right) - \sqrt{x - (1-x)} \\ x &= \frac{R}{R'} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Einige Werte für  $\alpha$ -Zerfälle sind in Tabelle 3.1 dargestellt, die verdeutlicht, dass es eine eindeutige Korrelation zwischen  $T_\alpha$ ,  $E_\alpha$  und  $t_{1/2}$  gibt:

$$\begin{aligned} t_{1/2} &\sim \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{T_\alpha} \sim e^G \\ \Rightarrow \ln(t_{1/2}) &\sim G \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Diesen Zusammenhang bezeichnet man als *Geiger-Nuttall-Regel*.

Tabelle 3.1: Einige Werte für  $\alpha$ -Zerfälle

Element	$T_\alpha$	$E_\alpha$	$t_{1/2}$
$^{212}_{84}\text{Po}$	$1.32 \cdot 10^{-13}$	8.78 MeV	$0.3 \mu\text{s}$
$^{224}_{88}\text{Ra}$	$5.9 \cdot 10^{-26}$	5.70 MeV	3.6 d
$^{144}_{66}\text{Nd}$	$2.18 \cdot 10^{-41}$	1.84 MeV	$2 \cdot 10^{15}$ a

Da es sich beim  $\alpha$ -Zerfall um einen Zweikörperzerfall handelt, ist das  $\alpha$ -Spektrum diskret. Es sind jedoch mehrere Linien möglich, die durch Übergänge in verschiedene angeregte Zustände des Tochterkerns hervorgerufen werden.

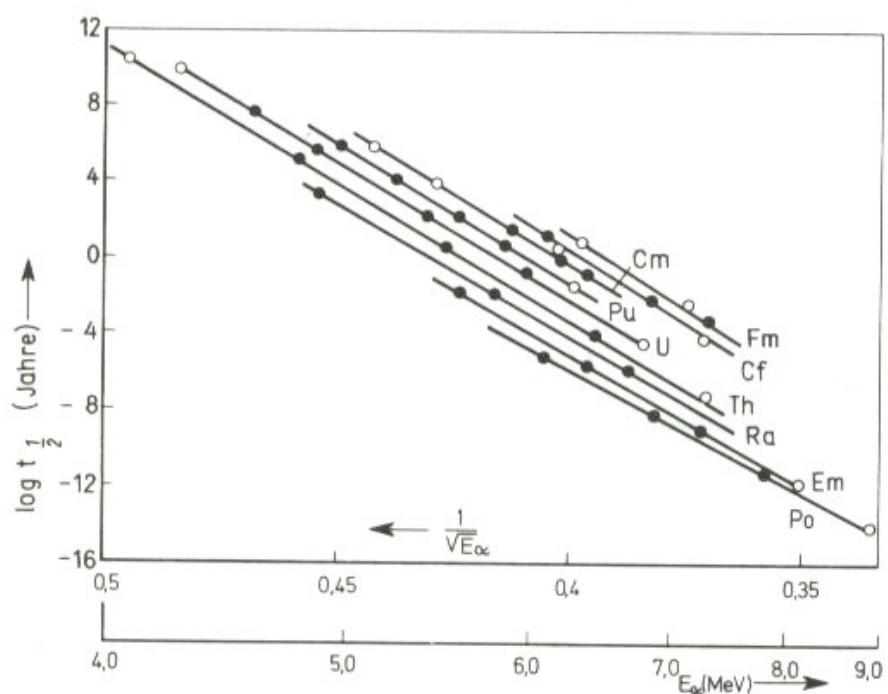


Abbildung 3.5: Die Geiger-Nuttalsche Regel ist zumindest innerhalb einer Zerfallsreihe gut erfüllt  
(aus Ref. [1])

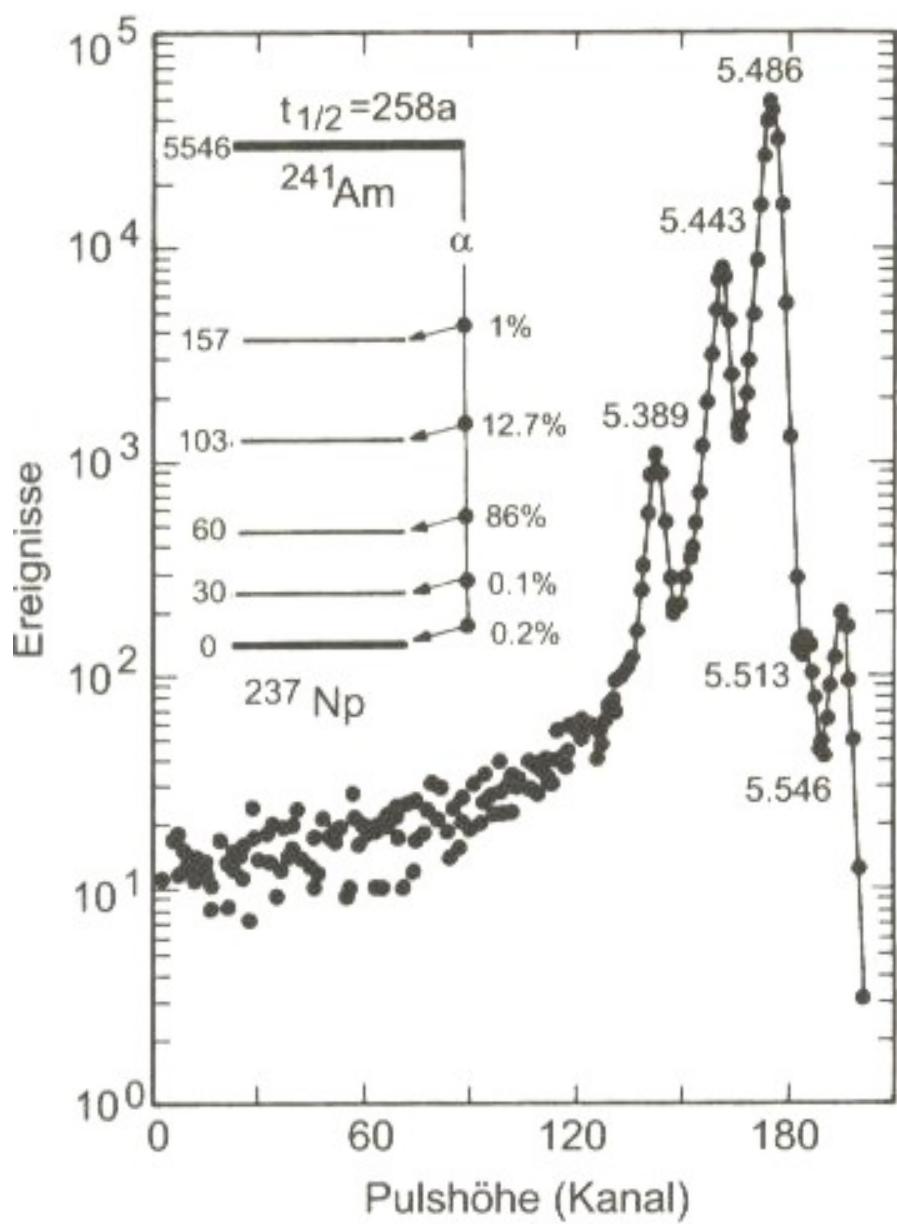


Abbildung 3.6:  $\alpha$ -Zerfallsspektrum von Americium  $^{241}\text{Am}$  (aus Ref. [4])

### Natürliche $\alpha$ - Radioaktivität

Bei der Synthese von Elementen (in Sternen und Supernovae) ist eine große Anzahl radioaktiver Kerne entstanden, aber nur wenige Isotope mit langen Halbwertszeiten haben überlebt. Beispiele für solche Isotope sind

**Kalium-40**  $^{40}\text{K}$  ( $\beta$ -Strahler) mit einer Halbwertszeit von  $t_{1/2} = 1.25 \cdot 10^9$  a

**Rubidium-87**  $^{87}\text{Rb}$  ( $\beta$ -Strahler) mit einer Halbwertszeit  $t_{1/2} = 4.9 \cdot 10^{10}$  a

**Samarium-147**  $^{147}\text{Sm}$  ( $\alpha$ -Strahler) mit einer Halbwertszeit  $t_{1/2} = 1.1 \cdot 10^{11}$  a

**Rhenium-187**  $^{187}\text{Re}$  ( $\beta$ -Strahler) mit einer Halbwertszeit  $t_{1/2} = 5 \cdot 10^{10}$  a

Die schwersten langlebigen Kerne sind

$^{232}\text{Th}$  Thorium

$^{235}\text{U}$  Uran

$^{238}\text{U}$  Uran

$^{237}\text{Np}$  Neptunium (kommt in der Natur nicht mehr vor,  $t_{1/2} \approx 10^6$  a!)

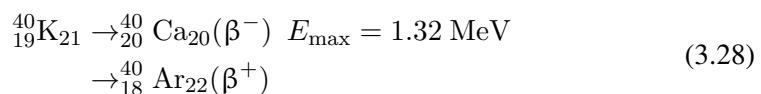
Diese vier Kerne stellen die Ausgangspunkte langer Zerfallsketten dar.

Natürliche Zerfallsreihen. Die Zerfallsreihe, die beim Neptunium beginnt, kommt in der Natur wegen der vergleichsweise kurzen Halbwertszeit nicht mehr vor. Diese Elemente sind jedoch zur Zeit der Entstehung der Erde ebenfalls vorhanden gewesen

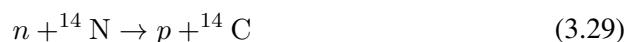
Nomenklatur	Mutternuklid	Halbwertszeit	Endprodukt	Zerfälle
4n	$^{232}\text{Th}$	$1.405 \cdot 10^{10}$ a	$^{208}\text{Pb}$	$6\alpha, 4\beta^-$
4n+1	$^{237}\text{Np}$	$2.14 \cdot 10^6$ a	$^{209}\text{Bi}$	$7\alpha, 4\beta^-$
4n+2	$^{238}\text{U}$	$4.468 \cdot 10^9$ a	$^{206}\text{Pb}$	$\begin{cases} 8\alpha, 6\beta^- \\ 10\alpha, 8\beta^- \end{cases}$
4n+3	$^{235}\text{U}$	$7.038 \cdot 10^8$ a	$^{207}\text{Pb}$	$7\alpha, 4\beta^-$

Abbildung 3.7: Die Isotope  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{237}\text{Np}$ ,  $^{238}\text{U}$  sowie  $^{235}\text{U}$  stellen die Ausgangspunkte langer Zerfallsketten dar. Auf Grund seiner vergleichsweise geringen Lebensdauer ist die  $^{237}\text{Np}$ -Kette nicht mehr natürlich anzutreffen, bei der Entstehung der Erde war  $^{237}\text{Np}$  jedoch vorhanden. (aus Ref. [11])

Einige bekannte Zerfälle sind



, ebenso wie der Zerfall von  $^{14}\text{C}$ , welches zur Datierung archäologischer Objekte verwendet wird. Es entsteht unter dem Einfluss kosmischer Strahlung durch



Eine andere Schreibweise für diese Reaktion lautet  ${}^{14}N(n, p){}^{14}C$ .  ${}^{14}C$  zerfällt mit einer Halbwertszeit von  $t_{1/2} = 5730$  a durch  $\beta^-$ -Zerfall zurück zu  ${}^{14}N$ . In der Atmosphäre ist der Anteil an  ${}^{14}C$

$$\frac{{}^{14}C}{{}^{12}C} \approx 1.5 \cdot 10^{-12} \quad (3.30)$$

Ein lebender Organismus nimmt diese Mischung durch seinen Stoffwechsel auf. Nach dem Absterben wird kein  ${}^{14}C$  mehr zugeführt, so dass die  ${}^{14}C$ -Menge durch Zerfälle abnimmt. Aus der Aktivität lässt sich bestimmen, wie viel Zeit seit dem Absterben des Organismus vergangen ist.

### 3.3 Der $\beta$ -Zerfall

#### 3.3.1 Zerfallsarten

Rutherford fand heraus, dass  $\beta$ -Teilchen

- elektrisch geladen sind,
- ihre Masse der Elektronenmasse entspricht,
- vom Kern emittiert werden und ein *kontinuierliches* Energiespektrum besitzen!

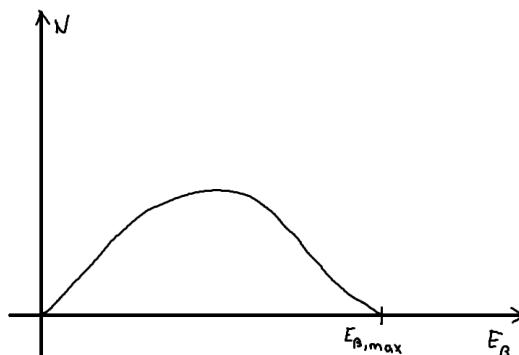


Abbildung 3.8: Form des  $\beta$ -Spektrums

Es kann sich beim  $\beta$ -Zerfall also nicht um einen Zweikörperzerfall handeln!<sup>1</sup>

Pauli postulierte daher 1930 ein elektrisch neutrales Teilchen (damals als Neutron bezeichnet), das beim  $\beta$ -Zerfall zusammen mit dem  $\beta$ -Teilchen emittiert wird.

Beim  $\beta$ -Zerfall wandelt sich ein Kern wie folgt um

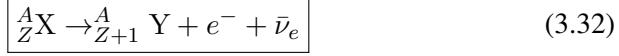


Aus der Drehimpulserhaltung folgt, dass auch das heute als (Elektron-)Neutrino bezeichnete Teilchen  $\nu_e$  den Spin  $\frac{1}{2}\hbar$  besitzt, es handelt sich also um ein Fermion. Man unterscheidet drei Arten von  $\beta$ -Zerfällen:

---

<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Beim  $\alpha$ -Zerfall ist die kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens durch die Zerfallsenergie  $Q$  und die Masse des Tochterkerns  $m_Y$  bestimmt:  $E_{\text{kin}}(\alpha) = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}}$

(i)  $\beta^-$ -Zerfall:



Es wird ein Elektron zusammen mit einem Anti-Elektron-Neutrino emittiert. Ein berühmtes Beispiel ist der Zerfall eines freien Neutrons:



Die mittlere Lebensdauer eines freien Neutrons beträgt  $\tau \approx 887.4$  s was ca 15 min entspricht.

Die Zerfallsenergie beim  $\beta^-$ -Zerfall ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Q = \Delta E &= \{m_k(Z, A) - m_k(Z + 1, A) - m_e - m_\nu\} c^2 \\ &= \{m_k(Z, A) + Z \cdot m_e - m_k(Z + 1, A) - Z \cdot m_e - m_e\} c^2 \\ Q &= \{m(Z, A) - m(Z + 1, A)\} c^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Hierbei bezeichnet  $m_k$  die Kernmasse,  $m$  die Masse des gesamten Atoms (d.h. inklusive Elektronenhülle). Die Masse des Neutrinos ist dabei vernachlässigbar klein, bisherige Experimente zur Massenbestimmung des Neutrinos über  $\beta$ -Zerfall konnten nur obere Grenzen für die Masse des Neutrinos liefern.

(ii)  $\beta^+$ -Zerfall:

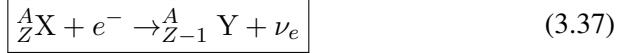


Anders als beim  $\beta^-$ -Zerfall tritt der  $\beta^+$ -Zerfall beim Proton *nicht* auf. Experimente, die nach einem möglichen Protonenzerfall suchen, liefern nur eine untere Grenze der Lebensdauer:  $\tau(p) > 10^{32}$  a. Die Zerfallsenergie eines  $\beta^+$ -Zerfalls ist

$$Q = \{m(Z, A) - m(Z - 1, A) - 2 \cdot m_e\} c^2 \quad (3.36)$$

Es steht also nicht die gesamte Massendifferenz zur Verfügung, sie ist um zwei Elektronenmassen reduziert.

(iii) Elektroneneinfang (EC: electron capture)



Es handelt sich also um einen Zweikörperzerfall, sodass das Neutrino  $\nu_e$  eine feste Energie besitzt. Da meist ein Elektron aus der  $k$ -Schale eingefangen wird, bleibt eine angeregte Elektronenhülle mit einem Loch in der  $k$ -Schale zurück. Nimmt nun ein äußeres Elektron diesen Platz ein, so kommt es zur Emission von Röntgenstrahlung. Alternativ kann die Energie auch auf ein weiteres (äußeres) Elektron übertragen werden, welches dann emittiert und als *Auger-Elektron* bezeichnet wird.

Der Elektroneneinfang tritt insbesondere dann auf, wenn  $Q = \Delta E$  kleiner als die Energie  $2m_e c^2 = 1.022$  MeV ist.

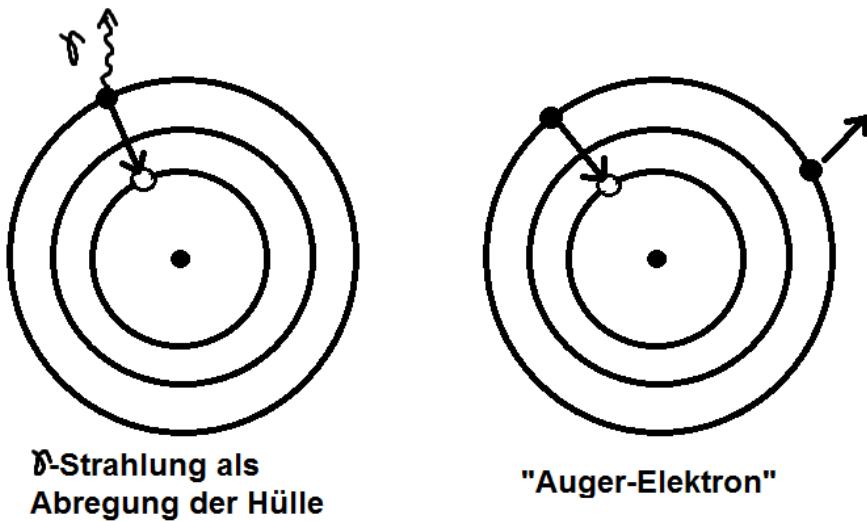


Abbildung 3.9: Folgeerscheinungen durch Abregung der Hülle nach Elektroneneinfang

### 3.3.2 Die Form des $\beta$ -Spektrums

Beim  $\beta$ -Zerfall kommt es wie bereits dargestellt zu einem kontinuierlichen Energiespektrum. Die Form dieses Spektrums kann mit Hilfe der Quantenmechanik berechnet werden. Hierzu wird die Übergangswahrscheinlichkeit verwendet, welche sich aus der zeitabhängigen Störungsrechnung erster Ordnung ergibt.

*Fermi's Goldene Regel* lautet

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H | i \rangle|^2 \cdot \frac{dn}{dE} \quad (3.38)$$

und gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, das Elektron im Impulsintervall  $[p, p + dp]$  zu finden. Das Matrixelement ist

$$\langle f | H | i \rangle = \int \psi_f^* H \psi_i dr =: H_{fi}. \quad (3.39)$$

$H$  ist hier der Hamilton-Operator der schwachen Wechselwirkung,  $\frac{dn}{dE}$  bezeichnet die Dichte der möglichen Endzustände im Energieintervall  $dE$ . Dies stellt den bestimmenden Faktor dar, wenn das Matrixelement  $H_{fi}$  kaum energieabhängig ist, was in den meisten Fällen erfüllt ist, wie sich experimentell gezeigt hat. Bei niedrigen Energien ist  $H_{fi}$  konstant und entspricht der Fermi-Wechselwirkung bzw. der Fermi-Konstante. Man erhält man schließlich als Besetzungsichte im Impulsraum (vgl. Mayer-Kuckuck, Kap. 8.3)

$$N(p) dp = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |H_{fi}|^2 \cdot P_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp \quad (3.40)$$

Dabei ist  $E_0$  die maximale kinetische Energie, d.h. der  $Q$ -Wert der Reaktion.  $P_e$  und  $E_e$  bezeichnen den Impuls und die Energie der Elektronen.

Es ist nun zweckmäßig, normierte Energien und Impulse zu verwenden:

$$\begin{aligned}\nu &:= \frac{p}{m_e c}, \\ \varepsilon &:= \frac{E}{m_e c^2} = \frac{E + m_e c^2}{m_e c^2} = \left( \frac{E}{m_e c^2} + 1 \right), \\ \rightarrow p &= \nu \cdot (m_e c), \\ dp &= (m_e c) d\nu, \\ E_{\text{kin}} &= [\varepsilon \cdot m_e c^2 - m_e c^2]\end{aligned}\tag{3.41}$$

Es folgt somit, dass

$$N(\nu) d\nu = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \cdot |H_{fi}|^2 \nu^2 \cdot (m_e c)^2 \cdot (\varepsilon_0 m_e c^2 - \varepsilon m_e c^2)^2 \cdot (m_e c) \cdot d\nu \tag{3.42}$$

gilt, woraus folgt:

$$\begin{aligned}N(\nu) d\nu &= \frac{m_e^2 c^2 m_e^2 c^4 m_e c}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \cdot |H_{fi}|^2 \cdot \nu^2 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 d\nu \\ &= \frac{m_e^5 \cdot c^7}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \cdot |H_{fi}|^2 \cdot \nu^2 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 \cdot d\nu\end{aligned}\tag{3.43}$$

Mit der Konstante  $B = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 \cdot c^4}$  lässt sich dies schreiben als

$$N(\nu) d\nu = \frac{|H_{fi}|^2}{B} \cdot \nu^2 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot d\nu \tag{3.44}$$

Man beachte dabei nun:

$$\begin{aligned}E_{\text{ges}} &= E_{\text{kin}} + m_e c^2 = E + m_e c^2 \\ \rightarrow E_{\text{ges}}^2 &= (cp)^2 + (m_e c^2)^2 \\ \frac{E_{\text{ges}}^2}{(m_e c^2)^2} &= \frac{(pc)^2}{m_e^2 c^4} + 1\end{aligned}\tag{3.45}$$

Es folgt also, dass

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \nu^2 + 1 \\ \hat{\varepsilon}^2 &= \varepsilon^2 - \nu^2 = 1 \\ \hat{\varepsilon}^2 &= \nu^2 = \varepsilon^2 - 1\end{aligned}\tag{3.46}$$

Es ergibt sich also  $\nu = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ , woraus

$$d\nu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} d\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\nu} d\varepsilon \tag{3.47}$$

, sowie

$$\nu^2 \cdot d\nu = \frac{\varepsilon^2 - 1 \cdot \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} d\varepsilon = \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cdot d\varepsilon \tag{3.48}$$

folgt.

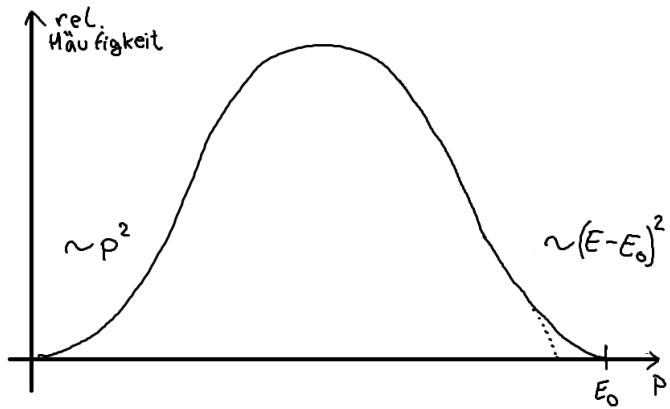


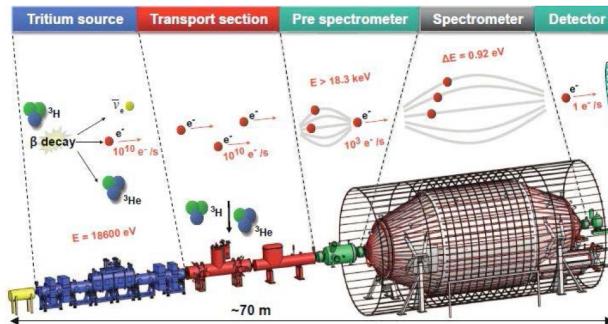
Abbildung 3.10: Form des  $\beta$ -Spektrums. Der gepunktete Teil deutet die Abweichung an, die auf Grund der endlichen Neutrinomasse entsteht.

### Form des kontinuierlichen Impulsspektrums

Aufgrund der endlichen Neutrinomasse muss ein (kompliziert zu berechnender) Korrekturfaktor angebracht werden:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu}{E_0 - E}\right)^2} \quad (3.49)$$

Die Form des Spektrums im Endpunkt liefert Aufschlüsse über die Masse der Neutrinos, da sie sensitiv auf diese ist. Experimentell wird meist Tritium verwendet, mit  $E_0 = 18.6$  keV. Bis heute liegt die erreichte obere Grenze der Neutrinomasse bei  $m(\nu) < 2.3$  eV, gemessen in Mainz bzw. Troizk. Mittlerweile finden die Messungen in Karlsruhe am KIT statt, wo die erwartete Sensitivität in einem Bereich von 0.2 eV liegt.



KATRIN verwendet den  $\beta$ -Zerfall von Tritium, um die Neutrinomasse zu bestimmen. Hierfür werden die Elektronen, die beim Zerfall entstehen, von der Quelle mit Hilfe von supraleitenden Magneten durch den Transportbereich zu den Spektrometern geführt. Diese Spektrometern filtern die langsamen Elektronen von den schnelleren, die am Ende von einem Detektor gezählt werden. Mit diesem Ergebnis und dem Elektronenspektrum erhält man die Neutrinomasse.

Abbildung 3.11: Direkte Vermessung der Neutrinomasse im KATRIN-Experiment durch präzise Vermessung des Endpunktsppektrums des Tritium- $\beta$ -Zerfalls

## Korrekturen zur Spektralform

- (i) Die Wechselwirkungen der Elektronen bzw. Positronen mit dem Coulomb-Feld des Kerns muss berücksichtigt werden, da eine positive Beschleunigung für die Positronen und eine negative Beschleunigung für die Elektronen entsteht.
- (ii) Die Abschirmung des Kern-Coulomb-Feldes durch Hüllenelektronen, die über eine Korrekturfunktion  $F(Z, \nu)$ , die sogenannte Fermi-Funktion berücksichtigt wird. Die Werte dieser Funktion sind bekannt und, durch Näherungsmethoden berechnet, tabelliert zu finden.

Schlussendlich erhält man mit diesen Korrekturen

$$N(\nu) d\nu = \frac{|H_{fi}|^2}{B} \cdot F(Z, \nu) \cdot \nu^2 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 d\nu. \quad (3.50)$$

Ebenso gilt

$$N(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{|H_{fi}|^2}{B} \cdot F(Z, \varepsilon) \cdot \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 d\varepsilon \quad (3.51)$$

Es folgt, dass

$$\sqrt{\frac{N(\nu)}{F(Z, \nu) \cdot \nu^2}} = \text{const.} \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon) \quad (3.52)$$

ist. Dies führt zur Fermi-Darstellung des  $\beta$ -Spektrums, das benutzt werden kann, um die maximale Energie  $\varepsilon_0$  zu bestimmen.

Die Gesamtzerfallswahrscheinlichkeit  $\lambda$  ergibt sich nun durch Integration über das gesamte Spektrum:

$$\lambda := \int_0^\nu N(\nu) d\nu = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{|H_{fi}|^2}{B} \cdot f(Z, \varepsilon_0) = \int_1^{\varepsilon_0} N(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.53)$$

, wobei

$$f(Z, \varepsilon_0) = \int_1^{\varepsilon_0} F(Z, \varepsilon) \cdot \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 d\varepsilon \quad (3.54)$$

Auch für dieses Integral sind Werte, erhalten durch numerische Integration, tabelliert zu finden. Historisch wurden  $ft$ -Werte eingeführt, die ein Maß für die Kernmatrixelemente / Kopplungskonstanten liefern:

$$ft := f(z, \varepsilon_0) \cdot t_{1/2} = \frac{B}{|H_{fi}|^2} \quad (3.55)$$

Die Kernladungszahl des Tochterkerns ist in der Regel bekannt, die maximale Zerfallsenergie  $\varepsilon_0$  sowie die Halbwertszeit  $t_{1/2}$  lassen sich messen, so dass aufgrund

$$ft \sim \frac{1}{|H_{fi}|^2} \quad (3.56)$$

die Stärke des Übergangs-Matrix-Elements (der Kopplungskonstante) bestimmt werden kann. Üblicherweise betrachtet man  $\log ft$  und unterteilt Zerfälle entsprechend in

1. Gruppe:  $\log ft \lesssim 4$ : über-erlaubte Zerfälle (z.B. Spiegelkerne, leichte Kerne)
2. Gruppe:  $\log ft \lesssim 5$ : erlaubte Zerfälle
3. Gruppe:  $\log ft \sim 8$ : einfach verbotene Zerfälle
4. Gruppe:  $\log ft \sim 12$ : zweifach verbotene Zerfälle
5. Gruppe:  $\log ft \sim 18$ : dreifach verbotene Zerfälle

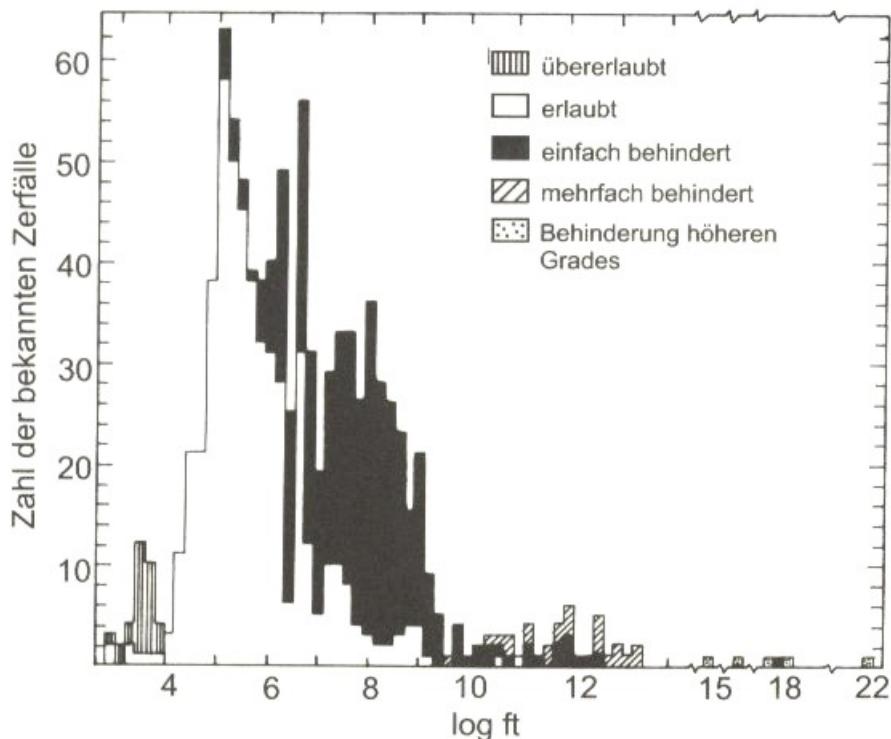


Abbildung 3.12: Anzahl der bekannten Übergänge für verschiedene  $\log ft$ -Werte. (aus Ref. [1])

Bei erlaubten Zerfällen muss mindestens eines der Kernmatrixelemente nicht verschwindend sein (Fermi-Übergänge, Gamow-Teller-Übergänge oder gemischte Übergänge). Für ein- oder mehrfach verbotene Übergänge müssen Elektron und Neutrino einen zusätzlichen Bahndrehimpuls aufnehmen was zu einer Unterdrückung der entsprechenden Zerfälle führt.

Art des Übergangs	Auswahlregeln		log ft	Beispiel	
	Spin	Parität <sup>1)</sup>		Isotop	Halbwertzeit
Übererlaubt	$\Delta I = 0, \pm 1$ (+)	$3,5 \pm 0,2$	$^1n$		11,7 m
Erlaubt	$0, \pm 1$ (+)	$5,7 \pm 1,1$	$^{35}S$		87 d
Einfach verboten	$0, \pm 1$ (-)	$7,5 \pm 1,5$	$^{198}Au$		2,7 d
„Unique“ einfach verboten	$\pm 2$ (-)	$8,5 \pm 0,7$	$^{91}Y$		61 d
Zweifach verboten	$\pm 2$ (+)	$12,1 \pm 1,0$	$^{137}Cs$		30 a
Dreifach verboten	$\pm 3$ (-)	$18,2 \pm 0,6$	$^{87}Rb$		$6 \times 10^{10}$ a
Vierfach verboten	$\pm 4$ (+)	22,7	$^{115}In$		$6 \times 10^{14}$ a

<sup>1)</sup> (+) bedeutet „keine Paritätsänderung“, (-) bedeutet „Paritätsänderung“

Abbildung 3.13: (aus Ref. [1])

### 3.3.3 Struktur der Wechselwirkung, Kopplungsstärke

Es stellt sich nun die Frage, wie das Übergangsmatrixelement  $H_{fi} = \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle$  aussieht. Das Element ist heute im Rahmen der schwachen Wechselwirkung berechenbar für Spin-1/2-Teilchen wie Elektronen, Neutrinos, Protonen und Neutronen. Jene werden durch relativistische Wellenfunktionen und die Dirac-Gleichung beschrieben. Die Wellenfunktionen sind dabei die 4-komponentigen Spinoren  $u_e, u_{\nu_e}, u_p$  und  $u_n$  (Teilchen, Antiteilchen und zwei Spin-Einstellungen).

Die Übergänge werden durch die sogenannten Dirac-Matrizen  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5$  beschrieben. Ein Beispiel ist nun folgender Übergang:

$$p \rightarrow ne^+ \nu_e \hat{=} p + e^+ \rightarrow n\nu_e \quad (3.57)$$

Das Übergangsmatrixelement ist hier definiert als

$$H_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \underbrace{[\bar{u}_n \gamma \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_o]}_{n \leftarrow p} \cdot \underbrace{[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_e]}_{\nu_e \leftarrow e} \quad (3.58)$$

Dabei ist  $G_F$  Die Fermi-Kopplungskonstante, die die Stärke der Wechselwirkung charakterisiert. Eingeführt wurde sie von Fermi in der ersten Theorie der schwachen Wechselwirkung.  $\bar{U}_{\nu_e} \gamma_\mu u_e$  ist die ursprüngliche Fermi- bzw. Vektorkopplung, die aufgrund der experimentellen Befunde (Paritätsverletzung) in den 1950er Jahren in die Vektor-Axialvektor-Kopplung  $\gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma^5$  geändert wurde.

Für Kerne wird  $H_{fi}$  deutlich komplizierter, da nun die Kernstruktur berücksichtigt werden muss. Es ergibt sich das Kernmatrixelement mit  $\langle \psi_f | O | \psi_i \rangle$ , wobei  $\psi_{i,f}$  die Wellenfunktionen des Kerns im Anfangs- bzw. Endzustand sind.

Experimentell findet man für Kerne nun:

$$|H_{fi}|^2 = g_\nu^2 |M_F|^2 + g_A^2 |M_{GT}|^2 \quad (3.59)$$

, wobei der Index  $F$  für Fermi steht, der Index  $GT$  für Gamow-Teller und die Faktoren  $g$  die Kopplungsstärke beschreiben.

Für Fermiübergänge ist der Operator  $O$  die Einheitsmatrix und es gilt

$$M_F = \int \psi_f^* \cdot \text{id} \cdot \psi_i d^3\vec{r} \quad (3.60)$$

, was als *Fermi-Matrix-Element* bezeichnet wird. Es erfolgt somit kein Umklappen des Kernspins und sowohl Elektron als auch Neutrino befinden sich im Singulett-Zustand (anti-parallel,  $\uparrow\downarrow$ ).

Für Gamow-Teller Übergänge entspricht der Operator  $O$  dem Spinoperator  $\sigma = \begin{pmatrix} \vec{s} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{s} \end{pmatrix} \sim \gamma^5$  ( $\vec{s}$  = Pauli-Matrizen) und es gilt

$$M_{GT} = \int \psi_f^* \cdot \sigma \psi_i d^3\vec{r}, \quad (3.61)$$

Die Leptonen ( $e^-$ ,  $\bar{\nu}_e$ ) bilden hier einen Triplet-Zustand ( $\uparrow\uparrow$ ).

Beispiele:

**Fermi-Übergänge** Der Einheitsoperator verändert weder den Spin noch die Parität der Wellenfunktion des Kerns. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} n \rightarrow & p + e^-, \bar{\nu}_e \\ \uparrow (1/2) \rightarrow & \uparrow (1/2) + \uparrow\downarrow (0) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Um die Drehimpulserhaltung zu erfüllen muss also  $\Delta I = 0$  sein, da die Parität unverändert ist gilt  $\Delta\pi = 0$ .

### Gamow-Teller-Übergänge

Hier wird die z-Komponente des Spins verändert. Der Drehimpuls bleibt erhalten, wenn die beiden Leptonen den Spin -1 forttragen, es besteht also ein Tripletzustand mit Spin 1.

$$\begin{aligned} n \rightarrow & p + e^-, \bar{\nu}_e \\ \uparrow (1/2) \rightarrow & \uparrow (-1/2) + \uparrow\downarrow (1) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Es sind somit Übergänge mit  $\Delta I = 1$  und  $\Delta I = 0$  möglich, wobei der Nullübergang  $0 \rightarrow 0$  jedoch verboten ist. Die Parität bleibt auch hier unverändert ( $\Delta\pi = 0$ ).

### Auswahlregeln

Bei Fermi-Übergängen ändert der Einheitsoperator weder Spin noch Parität der Wellenfunktion, d.h. die Auswahlregeln für Fermi-Übergänge sind

$$\Delta I = 0, \quad \Delta\pi = 0 \quad (\text{keine Paritätsänderung}) \quad (3.64)$$

Bei Gamov-Teller-Übergängen hingegen ändert sich die z-Komponente des Spins, so dass der Drehimpuls nur erhalten bleibt, wenn die beiden Leptonen den Spin 1 forttragen  $\Rightarrow$  Tripletzustand.

$$\Delta I = 0, \pm 1, \quad \Delta\pi = 0 \quad (\text{keine Paritätsänderung}) \quad (3.65)$$

Für den Zerfalls des freien Neutrons ist das Verhältnis zwischen Fermi und Gamow-Teller Zerfällen

$$\left| \frac{g_{GT}}{g_F} \right| = 1.261 \pm 0.004 \quad (3.66)$$

Verbotene Übergänge:

Falls  $\Delta I > 1$  ist, so verschwinden sowohl  $M_F$  als auch  $M_{GT}$ . Die Leptonen müssen dann mit einem Bahndrehimpuls  $\ell > 0$  emittiert werden. Dies entspricht anschaulich dem Bild, dass das Elektron mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht vom Zentrum des Kerns emittiert wird. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist jedoch sehr gering, so dass die Lebensdauern sehr lang sind.

### 3.3.4 Paritätsverletzung im $\beta$ -Zerfall

Eine grundlegende Frage lautet: Ist ein System spiegelinviant?

$$\text{System } K \xrightarrow{\text{Spiegelung}} \text{System } K' \quad (3.67)$$

Die beobachteten physikalischen Größen sollten in  $K$  und  $K'$  gleich sein.

Der Paritätsoperator  $P$  ändert das Vorzeichen polarer Vektoren, axiale Vektoren bleiben unverändert:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\xrightarrow{P} -\vec{r} \text{ (Ortsvektor, polar)} \\ \vec{p} &\xrightarrow{P} -\vec{p} \text{ (Impuls, polar)} \\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &\xrightarrow{P} \vec{L} \text{ (Drehimpuls, axial)} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Allgemein gilt für einen Drehimpulsvektor  $\vec{J}$

$$\vec{J} \xrightarrow{P} \vec{J} \quad (3.69)$$

Der Paritätsoperator  $P$  kann auf eine Wellenfunktion  $\psi$  angewandt werden:

$$\begin{aligned} P|\psi(\vec{r})\rangle &= |\psi(-\vec{r})\rangle \\ P^2|\psi(\vec{r})\rangle &= |\psi(\vec{r})\rangle \Rightarrow P^2 = \text{id} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Im Allgemeinen können  $\psi(\vec{r})$  und  $\psi(-\vec{r})$  völlig verschieden sein. Wenn  $P$  jedoch mit  $H$  kommutiert, d.h. wenn

$$[H, P] = 0 \quad (3.71)$$

, so ist die Parität eine Erhaltungsgröße und die Wellenfunktion kann gleichzeitig als Eigenfunktion von  $P$  und  $H$  gewählt werden:

$$\begin{aligned} H|\psi(\vec{r})\rangle &= E|\psi(\vec{r})\rangle & H P|\psi(\vec{r})\rangle &= P H|\psi(\vec{r})\rangle = P \cdot E|\psi(\vec{r})\rangle \\ H|\psi'(\vec{r})\rangle &= & E|\psi'(\vec{r})\rangle & \end{aligned} \quad (3.72)$$

d.h.  $|\psi(\vec{r})\rangle$  und  $P|\psi(\vec{r})\rangle$  erfüllen dieselbe Schrödingergleichung mit denselben Eigenwerten  $E$ .

Wenn keine Entartung vorliegt, müssen  $|\psi(\vec{r})\rangle$  und  $|\psi'(\vec{r})\rangle$  dieselbe physikalische Situation beschreiben.

$$\Rightarrow |\psi'(\vec{r})\rangle = P|\psi(\vec{r})\rangle = \pi|\psi(\vec{r})\rangle \quad (3.73)$$

Aus dieser Eigenwertgleichung folgt, dass

$$\boxed{\pi = \pm 1} \quad (3.74)$$

Man sagt, die entsprechende Wellenfunktion habe *gerade* (+) oder *ungerade* (-) Parität.

### Beispiele:

- (i) Ein wichtiges Beispiel einer Eigenfunktion der Parität sind die Kugelflächenfunktionen  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ , die Eigenfunktionen des Bahndrehimpulsoperators. Die Spiegelung  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  überführt die sphärischen Koordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned} r &\rightarrow r \\ \theta &\rightarrow \pi - \theta \\ \varphi &\rightarrow \pi + \varphi \end{aligned} \tag{3.75}$$

Somit ist

$$PY_\ell^m = (-1)^\ell \cdot Y_\ell^m \tag{3.76}$$

- (ii) Teilchenreaktionen: Für eine Reaktion



ist die Wellenfunktion des Anfangszustands

$$|\text{Anfang}\rangle = |a\rangle \cdot |b\rangle \cdot |\text{rel. Bewegung}\rangle \tag{3.78}$$

, wobei  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$  den inneren Zustand der Teilchen bezeichnen. Somit ist

$$\begin{aligned} P|\text{Anfang}\rangle &= P|a\rangle \cdot P|b\rangle \cdot P|\text{rel. Bewegung}\rangle \\ &= \pi_a \cdot \pi_b \cdot (-1)^\ell \end{aligned} \tag{3.79}$$

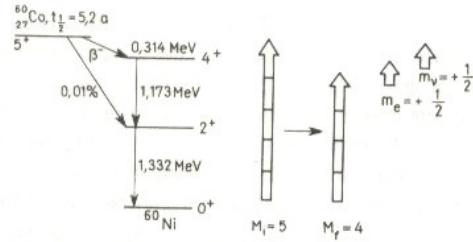
, wobei  $\ell$  der relative Bahndrehimpuls zwischen den Teilchen  $a$  und  $b$  ist. Falls die der Reaktion zu Grund liegende Wechselwirkung die Parität erhält, gilt:

$$\pi_a \cdot \pi_b \cdot (-1)^\ell = \pi_c \cdot \pi_d \cdot (-1)^\ell \tag{3.80}$$

Experimentell findet man, dass die Parität bei der starken Wechselwirkung ebenso wie bei der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten ist. Die schwache Wechselwirkung hingegen verletzt die Parität, erste Beispiele hierfür sind der  $\beta$ -Zerfall und das Wu-Experiment.

### Das Wu-Experiment

Betrachtet wird der Zerfall von  $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$ , wobei der Kernspin von  $J = 5$  zu  $J = 4$  übergeht ( $\rightarrow$  Gamow-Teller). Die  $^{60}\text{Co}$ -Kerne werden dabei durch ein starkes  $B$ -Feld polarisiert, sodass die Spins entlang der  $z$ -Achse ausgerichtet werden. Gemessen wird die Intensität der Elektronen  $I_1, I_2$  in zwei Richtungen 1 und 2.



Zum Wu-Experiment an  $^{60}\text{Co}$

Abbildung 3.14: Am  $\beta$ -Zerfall von  $^{60}\text{Co}$  beteiligte Niveaus und zugehörige Spins. (aus Ref. [?])

Der Paritätsoperator lässt den Kernspin unverändert, vertauscht jedoch die Impulse  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$  (falls die Detektoren 1 und 2 auf gegenüberliegenden Seiten der Probe angebracht sind). Die beobachtete Größe bei diesem Experiment ist der Erwartungswert

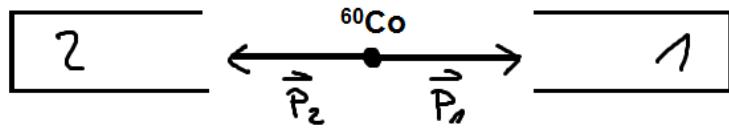


Abbildung 3.15: Prinzipieller Aufbau des Wu-Experiments. An Stelle der Verwendung eines zweiten Elektronendetektors drehte Wu die Richtung des polarisierenden Magnetfeldes um.

des Operators

$$\vec{P}_J := \vec{I} \cdot \vec{p} \quad (3.81)$$

mit dem Kernspin  $\vec{I}$  und dem Impuls  $\vec{p}$  des emittierten Elektrons, also ist  $P_J$  eine pseudoskalare Größe. Es folgt

$$P_J \xrightarrow{P} -P_J \quad (3.82)$$

da  $\vec{I}$  ein axialer Vektor und  $\vec{p}$  ein polarer Vektor ist. Gemessen wurde die Zählrate für die  $\vec{I}\vec{p}$  Einstellung, sowie die Zählrate für die  $-\vec{I}\vec{p}$  Einstellung (Im Wu-Experiment durch die Umkehr des Magnetfeldes realisiert). Eine Paritätsverletzung liegt vor, wenn der Erwartungswert der pseudo-skalen Größe  $P_J$  nicht verschwindet ist, d.h. falls sich die Zählraten bei den beiden Einstellungen des magnetischen Feldes (signifikant) unterscheiden.

Da die Besetzungszahlen der unterschiedlichen Orientierungen des Kernspins bei Raumtemperatur nahezu ausgeglichen sind, ist es nötig die Messung mit Kryostat gekühlt durchzuführen, sodass

$$g\mu_B B \gg k \cdot T \quad (3.83)$$

Dadurch ist nur das tiefste Zeemann-Niveau besetzt und die Spins zeigen in Richtung des magnetischen Feldes.

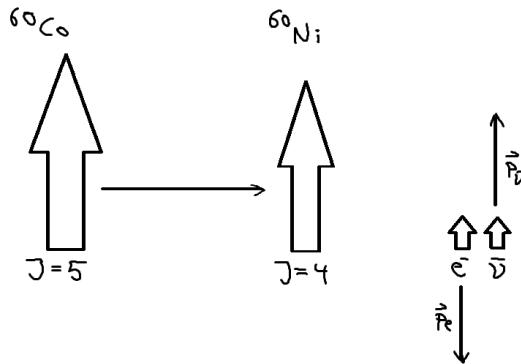


Abbildung 3.16: Spinverteilung bei  $^{60}\text{Co}$ -Zerfall. Das Elektron geht bevorzugt gegen die Richtung des Magnetfeldes (negative Helizität).

Es zeigt sich, dass die Elektronen bevorzugt entgegen der Richtung des  $B$ -Feldes und damit entgegen der Spin-Richtung entweichen, d.h. dass der Erwartungswert von  $P_J$  nicht verschwindet. Aus dieser Asymmetrie folgt sofort, dass hier eine Paritätsverletzung vorliegt. Elektronen besitzen also eine negative *Helizität*

$$h = \langle \vec{J} \cdot \vec{p} \rangle \quad (3.84)$$

Als Helizitätsoperator bezeichnet man

$$h := 2 \cdot \frac{\vec{J} \cdot \vec{e}_p}{\hbar} \quad (3.85)$$

, wobei  $\vec{e}_p$  der Einheitsvektor in Impulsrichtung und  $\vec{J}$  der Gesamtspin ist. Je nach Erwartungswert unterscheidet man

$$\begin{aligned} \langle h \rangle &= +1 \text{ positive Helizität, Spin in Flugrichtung(Impulsrichtung)} \\ \langle h \rangle &= -1 \text{ negative Helizität, Spin entgegen Flugrichtung} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Die Neutronenhelizität lässt sich beispielsweise im sog. *Goldhaber-Experiment* bestimmen.

Die Helizität der Leptonen in Zerfällen, die durch die schwache Wechselwirkung vermittelt werden, wurde gemessen zu

$$\begin{aligned} \langle h(e^-) \rangle &= -\frac{v}{c} \\ \langle h(e^+) \rangle &= +\frac{v}{c} \end{aligned} \quad (3.87)$$

⇒ Die schwache Wechselwirkung ( $\beta$ -Zerfall) verletzt somit die Parität!

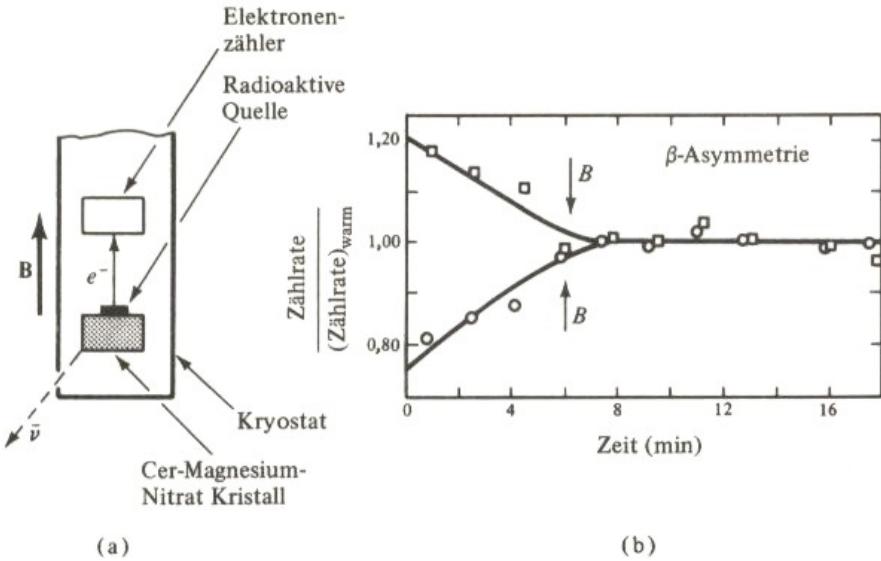


Abbildung 3.17: Aufbau und Ergebnis des Wu-Experiments. (aus Ref. [?])

### 3.4 $\gamma$ -Zerfälle

Unter  $\gamma$ -Zerfällen versteht man die Emission elektromagnetischer Strahlung aus Atomkernen. Dabei geht der Kern aus einem energetisch angeregten Zustand in einen tiefer liegenden Energiezustand über:



Die hierbei freiwerdende Energie ist

$$Q = \Delta E = E_i - E_f = E_\gamma = h\nu \quad (3.89)$$

Der Energiebereich für  $\gamma$ -Strahlung (aus Kernprozessen) liegt bei  $\sim 100 \text{ keV} - 10 \text{ MeV}$ . Licht bzw. Röntgenstrahlung, die bei Vorgängen in der Atomhülle auftritt, liegt im Bereich von  $\sim 100 \text{ eV} - 100 \text{ keV}$  (UV und Röntgen) bzw. im sichtbaren Bereich bei  $1 \text{ eV} - 10 \text{ eV}$ .

Angeregte Kerne können entstehen durch

- (i)  $\alpha$  und/oder  $\beta$ -Zerfälle, bei denen die Tochterkerne nicht im Grundzustand entstehen. Die Emission von  $\gamma$ -Strahlung tritt bei diesen Zerfällen als begleitende Erscheinung auf, deren Energie mit der der  $\alpha$ -/ $\beta$ -Strahlung korreliert ist.
- (ii) Kernanregung durch Teilchenbeschuss oder Einfangreaktionen. Beispiele:



Die letzte der hier dargestellten Reaktionen wird als  $(n, \gamma)$ -Reaktion bezeichnet, welche große Bedeutung in der nuklearen Energiegewinnung besitzt.

Allgemein befinden sich angeregte Kerne in höheren Rotations- oder Schwingungszuständen der Nukleonen. Angeregte Kerne haben daher im Allgemeinen größere Kernspins  $I$  als der Grundzustand. Die Lebensdauer der Zustände umfasst ein breites Spektrum von Jahren bis hin zu  $10^{-16}$  s.

### 3.4.1 $\gamma$ -Übergänge, Multipolstrahlung

Bei der zeitlich periodischen Änderung der Ladungs- und Stromverteilung werden elektromagnetische Wellen abgestrahlt. Im Allgemeinen entspricht dies der Überlagerung von Multipolmoden entsprechend der Multipolentwicklung (vgl. Mayer-Kukuck S.90/91).

Vorgegeben sei ein Übergang zwischen Kernniveaus (Rotationszuständen), wobei der Kernspin um  $\Delta I$  und die Parität um  $\Delta\pi$  geändert wird. Diese beiden Änderungen legen den Charakter (Multipolordnung) der elektromagnetischen Strahlung fest. Sind die Drehimpulse der beteiligten Zustände  $I_i$  und  $I_f$ , so gilt als Auswahlregel:

$$|I_i - I_f| \leq L \leq |I_i + I_f|, \quad m = m_i - m_f \quad (3.91)$$

$L$  bezeichnet hierbei die Multipolordnung der Strahlung, wozu auch die Multipolarität als  $2^L$  definiert wird. Für  $L = 1$  ergibt sich dementsprechend Dipolstrahlung, für  $L = 2$  Quadrupolstrahlung und für  $L = 3$  Oktupolstrahlung, sowie analog fortgesetzt für höhere Ordnungen.  $L$  entspricht dem Drehimpuls des Strahlungsfeldes und ist ganzzahlig.

In der klassischen Elektrodynamik wird oft eine Multipolentwicklung des elektromagnetischen Strahlungsfeldes mit Hilfe von Kugelflächenfunktionen durchgeführt. In der Quantenelektrodynamik wird eine Quantisierung des elektromagnetischen Feldes eingeführt: Ein zur Multipolordnung  $L$  gehörendes  $\gamma$ -Quant transportiert stets einen Drehimpuls vom Betrag  $L \cdot \hbar$ . Für ein  $\gamma$ -Quant ist also aufgrund der transversalen Natur des Lichtes

$$L \cdot \hbar \geq 1\hbar \quad (3.92)$$

Lösungen mit  $L = 0$  existieren somit nicht, d.h. es gibt keine  $\gamma$ -Übergänge zwischen Kernen mit  $I_i = I_f = 0$  (spinlose Kerne)<sup>2</sup>.

Im Spezialfall, wenn  $I_i = I_f \neq 0$  gilt, ist

$$0 \leq L \leq 2I_i \quad (3.93)$$

, wobei  $L = 0$  wieder nicht realisiert ist, sodass  $L=1$  den niedrigsten Wert darstellt.

Parität:

Die Paritäten der Kernzustände seien  $\pi_i$  und  $\pi_f$ . Es muss nun unterschieden werden zwischen *elektrischer* und *magnetischer* Multipolstrahlung. Die Parität der elektrischen Multipolstrahlung ist

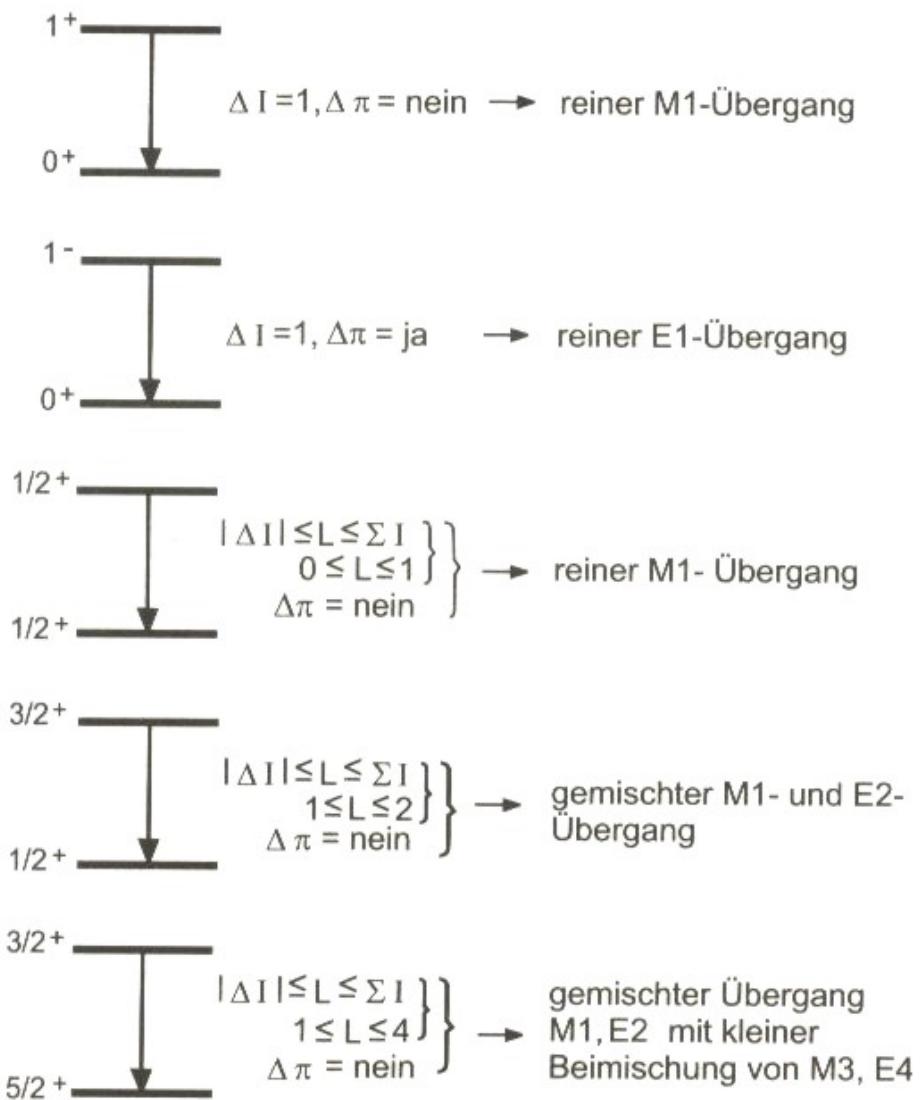
$$\boxed{\pi_E = (-1)^L} \quad (3.94)$$

, es gilt hingegen für die magnetische Multipolstrahlung

$$\boxed{\pi_M = -(-1)^L = (-1)^{L+1}} \quad (3.95)$$

---

<sup>2</sup>Theoretisch sind Multiphoton-Emissionen möglich, jedoch nur mit sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten.



Beispiele für Multipolübergänge

Abbildung 3.18: Einige Beispiele für Multipolübergänge. Aus Ref. [?]

Bei der elektromagnetischen Wechselwirkung gilt Paritätserhaltung, sodass

$\pi_i = (-1)^L \cdot \pi_f$	EL-Strahlung
$\pi_i = (-1)^{L+1} \cdot \pi_f$	ML-Strahlung

(3.96)

folgt. EL steht dabei für elektrische Multipolstrahlung der Ordnung  $L$ , ML für magnetische Multipolstrahlung  $L$ -ter Ordnung. Ersichtlich wird dies aus den Transformati-onseigenschaften der Multipolfelder. Für einen elektrischen  $2^\ell$ -Pol ist

$$\vec{B}_\ell^m = f_\ell(k \cdot r) \vec{L} \cdot Y_\ell^m, \quad \vec{E}_\ell^m \left( \frac{i}{k} \right) \text{rot} \vec{B}_\ell^m \quad (3.97)$$

und für einen magnetischen  $2^\ell$ -Pol

$$\vec{E}_\ell^m = f_\ell(k \cdot r) \vec{L} \cdot Y_\ell^m, \quad \vec{B}_\ell^m = - \left( \frac{i}{k} \right) \text{rot} \vec{E}_\ell^m \quad (3.98)$$

, wobei  $\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$  der Drehimpulsoperator,  $k = \omega/c$  die Wellenzahl und  $f_\ell(k \cdot r)$  eine Radialfunktion ist.

Einige Beispiele für Multipolübergänge sind in Abb. 3.18 dargestellt.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. die Zerfallskonstante  $\lambda$  sind mittels Quantenelektrodynamik (QED) berechenbar im vereinfachten Modell.

Die Übergangswahrscheinlichkeit für elektrische und magnetische Übergänge skaliert mit

$\lambda = \frac{1}{\tau} \sim \left( \frac{R}{\lambda} \right)^{2L}$
---

(3.99)

, wobei  $R$  den Kernradius und  $L$  den Drehimpuls bezeichnet und  $\lambda$  die reduzierte Wellenlänge ( $\lambda_{\text{rad}}/2\pi$ ) der emittierten Strahlung darstellt. Höhere Ordnungen sind somit um den Faktor

$$\lambda(L+1) : \lambda(L) \Rightarrow \frac{\left( \frac{R}{\lambda} \right)^{2(L+1)}}{\left( \frac{R}{\lambda} \right)^{2L}} = \left( \frac{R}{\lambda} \right)^2 \quad (3.100)$$

unterdrückt. Zahlenwerte: Für einen Kern mit  $A = 125$  beträgt der Radius ca.  $R \sim 6$  fm. Emittiert dieser Strahlung mit der Energie  $E_\gamma = 0.5$  MeV, so entspricht dies  $\lambda = 400$  fm und somit einem Unterdrückungsfaktor von

$$\left( \frac{R}{\lambda} \right)^2 \approx 2.25 \cdot 10^{-4} \quad (3.101)$$

In der Atomhülle ist die Unterdrückung noch stärker, beispielsweise ist für ein Atom mit  $R \sim 1$  Å und  $\lambda \approx 1000$  Å der Unterdrückungsfaktor

$$\left( \frac{R}{\lambda} \right)^2 \approx 10^{-6}. \quad (3.102)$$

$\lambda$  zeigt also eine starke  $L$ -Abhängigkeit, ebenso wie eine Energieabhängigkeit:  $\lambda$  wird größer für größere  $\gamma$ -Energien. Grundsätzlich gilt

$$\lambda_M < \lambda_E \quad (3.103)$$

, wie aus dem Weisskopf-Modell hervorgeht, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines magnetischen Übergangs ist stets kleiner als die eines elektrischen Übergangs derselben Ordnung (sofern der entsprechende Übergang erlaubt ist). Der Unterschied kann in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(100)$  liegen.

Gemessen werden kann die Multipolarität über die Winkelverteilung der emittierten  $\gamma$ -Quanten.

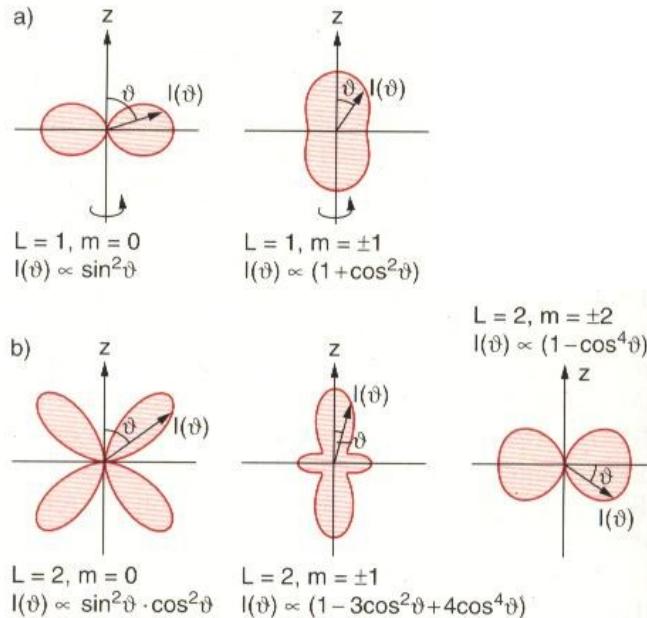


Abbildung 3.19: Richtungsverteilung der abgestrahlten  $\gamma$ -Intensität für a) Dipol- und b) Quadrupolübergänge. (aus Ref. [13])

Anschaulich lässt sich die Unterdrückung mit  $\lambda \sim \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{2L} = (R \cdot k)^{2L}$  ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) so verstehen, dass eine Fehlanpassung vorliegt. Im Idealfall sollte das Emissionsvolumen für die Abstrahlung des Photons eine Ausdehnung von  $\sim \frac{\lambda}{2}$  aufweisen. Für  $10 \text{ fm} = 2R \sim \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda \sim 20 \text{ fm}$  müsste die Energie des  $\gamma$ -Quants  $E_\gamma = 63 \text{ MeV}$  betragen! Typische Energien liegen jedoch im Bereich von  $0.5 - 1 \text{ MeV}$ , entsprechen also rund 100 mal größeren Wellenlängen. Mit zunehmender Energie wird diese Fehlanpassung abgemildert, d.h. die Zerfallskonstante steigt mit zunehmender Energie an.

Ebenso kann man klassisch den Drehimpuls betrachten. Der Drehimpuls eines  $\gamma$ -Quants, welches im Abstand  $R_\ell$  (orthogonal zum Verbindungsvektor mit dem Kernmittepunkt) mit dem Impuls  $p$  emittiert wird, hat den Drehimpuls

$$|\vec{r} \times \vec{p}| = R_\ell \cdot p = R_\ell \cdot \hbar k = \hbar L \quad (3.104)$$

, d.h.

$$R_\ell \cdot k = L \quad (L = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.105)$$

Da jedoch  $\left(\frac{R}{\lambda}\right) = Rk \ll 1$  ist, liegt auch hier eine Art „Fehlanpassung“ vor. Die Stelle, an welcher sich das Photon am leichtesten erzeugen ließe, liegt weit außerhalb der Ladungs- und Stromverteilung des Kerns. Diese Diskrepanz verschlimmert sich mit steigendem  $L$ .

#### Weisskopf-Modell

Die theoretische Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten ist sehr schwierig, weswegen vereinfachte modellabhängige Annahmen vollzogen werden. Im *Weisskopf-Modell* wird angenommen, dass ein einzelnes Proton (Leucht-Proton) für die Strahlung verantwortlich ist, d.h. dass nur ein einzelnes Proton durch die Emission von Strahlung seinen Quantenzustand ändert.

$$\frac{1}{\tau_E} = \lambda_E = \alpha \cdot \omega \cdot \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{2L} \frac{2(L+1)}{L [(2L+1)!!]} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \left[\frac{1}{\text{sec}}\right] \quad (3.106)$$

, wobei die Doppelfakultät  $n!!$  bedeutet, dass beispielsweise  $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1$  und  $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$  ist. Für magnetische Übergänge ist die Übergangswahrscheinlichkeit noch geringer:

$$\frac{\tau_M}{\tau_E} \simeq 4.5 \cdot A^{2/3} \quad (3.107)$$

Für einen Kern mit  $A = 100$  ist somit  $\tau_M/\tau_E \approx 100$ .

### 3.4.2 Konversionsprozesse

Neben  $\gamma$ -Strahlung kann der Kern seine Anregungsenergie durch direkte Übertragung auf ein Elektron der Hülle abgeben:



Die innere Konversion stellt einen Konkurrenzprozess zum  $\gamma$ -Zerfall dar. Da beide Arten von Zerfällen unabhängig voneinander stattfinden, addieren sich die jeweiligen Zerfallskonstanten

$$\lambda = \lambda_K + \lambda_\gamma \quad (3.109)$$

Die innere Konversion tritt insbesondere dann auf, wenn der entsprechende  $\gamma$ -Übergang verboten ist. Man unterscheidet  $K$ -,  $L$ -, ... Konversionen, jenachdem, auf welches Elektron die Energie übertragen wird. Die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Prozesses hängt vom Überlapp der Wellenfunktionen von Elektron und Kern ab. Sie ist folglich also am größten für Elektronen der  $K$ -Schale. Die kinetische Energie des so emittierten Elektrons ist dann

$$E_{\text{kin}}(e^-) = E_\gamma - E_B(e^-) \quad (3.110)$$

, wobei  $E_B$  die Bindungsenergie des Elektrons in seinem ursprünglichen Zustand bezeichnet. Die experimentelle Signatur dieses Prozesses ist ein Linienspektrum mit festen  $e^-$ -Energien, welches beispielsweise einem kontinuierlichen  $\beta$ -Spektrum überlagert sein kann.

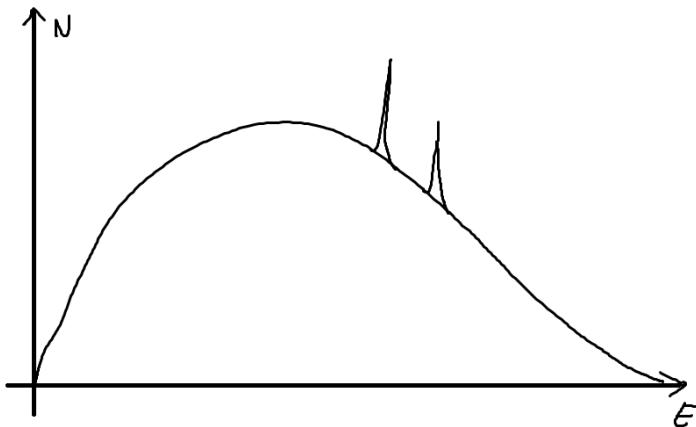


Abbildung 3.20: Linienspektrum der inneren Konversion, überlagert mit kontinuierlichen  $\beta$ -Spektrum

Nach der Emission eines Elektrons aus den tief liegenden Schalen liegt ein angeregter (Loch-)Zustand in der Hülle vor, welcher begleitende  $\gamma$ -Strahlung oder Auger-Elektronen hervorrufen kann.

Experimentell betrachtet man den sog. *Konversionskoeffizienten*

$$\alpha := \frac{N_e}{N_\gamma} \sim \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma} \quad (3.111)$$

Die Messung erfolgt beispielsweise durch gleichzeitige  $\beta$ - und  $\gamma$ -Messung und liefert somit einen Beitrag zur Bestimmung der Multipolarität des entsprechenden  $\gamma$ -Übergangs.

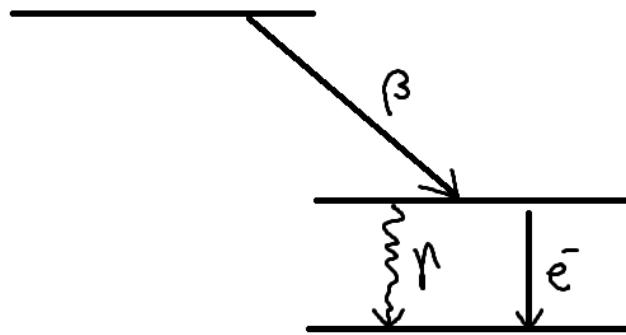


Abbildung 3.21: Beispielsweise nach einem  $\beta$ -Zerfall befindet sich der Tochterkern in einem angeregten Zustand, der sowohl durch  $\gamma$ -Emission, als auch durch innere Konversion in den Grundzustand über gehen kann. Das bei diesem Beispiel gemessene  $\beta$ -Spektrum ist in Abb. 3.20 zu finden.

Aus der Messung von  $\alpha$  lässt sich auf den Charakter der Multipolstrahlung schließen. Die Berechnung des Konversionskoeffizienten ist im Allgemeinen schwierig. Für

elektrische Übergänge ergibt sich für die K-Konversion:

$$\alpha_K \approx Z^3 \frac{L}{L+1} \left( \frac{2m_e c^2}{E_\gamma} \right)^{\ell+\frac{5}{2}} \quad (3.112)$$

$\alpha_K$  also nimmt mit höheren Energien ( $E_\gamma$ ) (Anregungsenergie) ab, wächst jedoch mit  $Z^3$  (größerer Überlapp mit dem Kern) und bei kleinen Energien stark mit der Multipolordnung an.

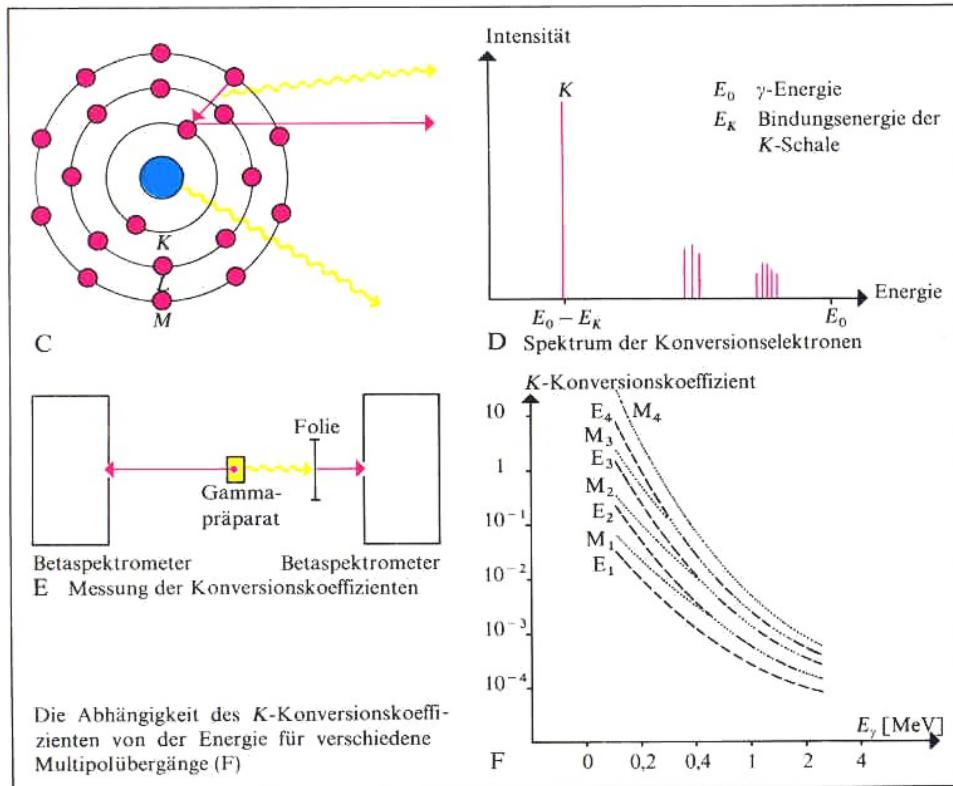
Für die magnetischen Übergänge ergibt sich für die K-Konversion:

$$\alpha_K(ML) \approx Z^3 \left( \frac{2m_e c^2}{E_\gamma} \right)^{\ell+\frac{3}{2}} \quad (3.113)$$

Beispiel:

Für  $E_\gamma = 50$  keV und

- $Z = 33$  ist für den E2-Übergang  $\alpha_L = 0.65$
- $Z = 92$  ist für den M5-Übergang  $\alpha_L = 8.9 \cdot 10^5$



Innere Konversion und Gammastrahlung

Abbildung 3.22: Zur inneren Konversion. (aus Ref. [?])

### Innere Paarbildung

Zusätzlich zur  $\gamma$ -Emission und inneren Konversion kann noch ein weiterer Prozess bei der Abregung von Kernen beobachtet werden, die *innere Paarbildung*, sofern die Anregungsenergie  $> 2m_e c^2 = 1.022 \text{ MeV}$  ist. Bei diesem Prozess wird im Coulombfeld des Kerns ein  $e^+ e^-$ -Paar gebildet. Ein Beispiel für einen solchen Prozess findet sich bei  ${}_{\bar{8}}^{16}\text{O}^*$  mit einer Anregungsenergie von  $E^* = 6.06 \text{ MeV}$ ,  $I^P = 0^+$ . Dieser angeregte Sauerstoffkern geht über zu  ${}_{\bar{8}}^{16}\text{O}$  mit  $I^P = 0^+$ .



Eine Emission von zwei  $\gamma$ -Quanten ist möglich, jedoch sehr unwahrscheinlich.

Als *Kernisomere* bezeichnet man langlebige Kernzustände, also Isomere des Grundzustands. Die Ursache für solche langlebigen Zustände liegt im hohen Kernspin der angeregten Zustände, so dass Dipol- und Quadrupolübergänge verboten sind. Aufgrund der hieraus resultierenden hohen Multipolordnung kommt es zu langen Halbwertszeiten.

### **3.4.3 $\gamma$ -Spektroskopie**

Unter  $\gamma$ -Spektroskopie versteht man die Untersuchung angeregter Kernzustände durch  $\gamma$ -Übergänge. Der Nachweis von  $\gamma$ -Strahlung ist möglich durch

- Photoeffekt  $\rightarrow e^-$  (scharfer Peak)
- Compton-Streuung  $\rightarrow e^-, \gamma$  (Compton-Kante wegen maximaler Energieübertragung bei Rückstreuung unter  $180^\circ$ )
- Paarbildung  $\rightarrow e^+ e^-$

Die wichtigsten Messparameter sind dabei

- die Anregungsenergie  $E$ ,
- der Drehimpuls  $I$  (und das magnetische Moment  $\mu$ ),
- die Parität  $\pi$ ,
- das magnetische Moment  $\mu$ ,
- das Quadrupolmoment  $Q$  (oder andere Deformationsparameter),
- sowie der Radius  $R$

Die benötigten angeregten Kerne werden über geeignete Kernreaktionen erzeugt, man nutzt also aus, dass Kerne nach einem  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfall nicht im Grundzustand vorliegen. Durch Energiemessung der ausgesandten  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Teilchen sowie der  $\gamma$ -Quanten und (verzögerte) Koinzidenzmessung kann auf die Lage der Energieniveaus geschlossen werden. Zur Spin-/Paritätsbestimmung kann die Multipolarität der  $\gamma$ -Strahlung benutzt werden, die Messung erfolgt dann relativ zum bekannten Grundzustand.

Wie kann der Charakter der Multipolstrahlung bestimmt werden?

Der Charakter der Multipolstrahlung kann ermittelt werden durch

- Bestimmung des Konversionskoeffizienten ( $\alpha$ ; mit Theorie)
- Messung der Winkelverteilung der Strahlung, diese ist charakteristisch für die Multipolordnung.  
Dies erfordert eine ausgezeichnete Richtung ( $z$ -Achse). Tatsächlich gemessen wird somit die Anzahl der  $\gamma$ -Quanten  $N(\vartheta)$  als Funktion des Winkels gegen eine physikalisch ausgezeichnete Achse, die üblicherweise als  $z$ -Richtung gewählt wird.
- Die räumliche Intensitätsverteilung ist  $\sim |Y_\ell^m|^2$ , z.B.  $I_1^0 \sim |Y_1^0|^2 \sim \sin^2 \vartheta$  und  $I_1^{\pm 1} \sim |Y_1^{\pm 1}|^2 \sim (1 + \cos^2 \vartheta)$  für einen Dipol
- Definition der  $z$ -Achse (Vorzugsrichtung):
  - (i) Äußeres Magnetfeld  $\rightarrow$  Kernspins richten sich (teilweise) aus
  - (ii)  $\gamma\gamma$ -Winkelkorrelation bei Zerfallskaskaden, die Messung des ersten Photons  $\gamma_1$  legt eine ausgezeichnete ( $z$ -)Richtung fest. Somit kann der Multipolcharakter der  $\gamma_2$ -Quanten ermittelt werden. Durch die Festlegung der Emissionsrichtung des ersten Quants werden die magnetischen Unterstände des Zwischensystems hinsichtlich dieser Richtung verschieden besetzt. Daraus resultiert eine charakteristische Winkelverteilung für das zweite Quant. Für das zweite Quant gilt wieder  $\Delta m = \pm 1$  (vgl. Abb. 3.23), da ein Übergang von  $m = \pm 1$  nach  $m = 0$  stattfindet. Somit ist die Winkelverteilung  $\sim |Y_1^{\pm 1}|^2$ . Der Vergleich mit theoretischen Vorhersagen ( $\frac{dN}{d\vartheta}(\vartheta)$ ) erlaubt die Bestimmung der Multipolordnung.

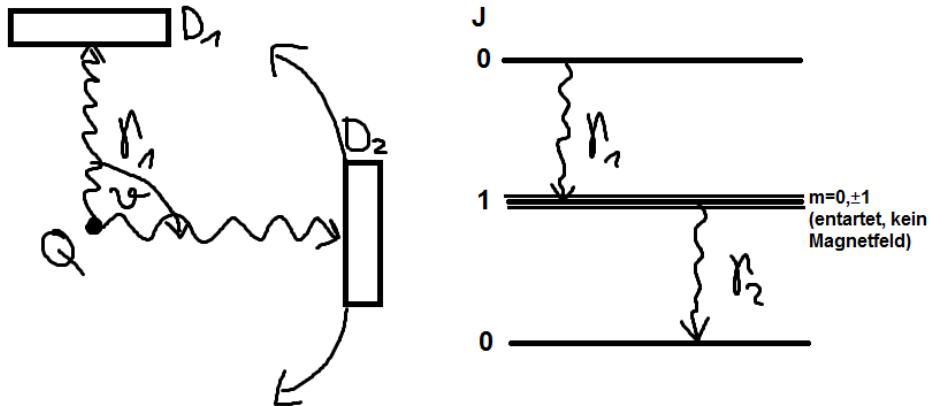


Abbildung 3.23: Zur Messung der  $\gamma\gamma$ -Winkelkorrelation. Das erste  $\gamma_1$ -Quant dient als Trigger für den zweiten Detektor  $D_2$ , der das zweite  $\gamma_2$ -Quant erfassst. Durch Variation der Position von Detektor  $D_2$  kann die Winkelverteilung gemessen werden. Die Richtung des  $\gamma_1$ -Quants wird dabei als  $z$ -Richtung festgelegt. Bei Dipolstrahlung tragen nur  $Y_1^1$  und  $Y_1^{-1}$  bei, da  $Y_1^0$  keine Quanten in  $z$ -Richtung emittiert, d.h. Detektor 1 wird nicht getriggert! Im Zwischenzustand werden nur die Niveaus mit den magnetischen Quantenzahlen  $m = \pm 1$  besetzt.

### 3.4.4 Mößbauer-Effekt

Der Mößbauer-Effekt wurde benannt nach seinem Entdecker R.Mößbauer (1958). Es handelt sich dabei um die rückstoßfreie Absorption von  $\gamma$ -Quanten an Kernen.

Bei der Resonanzfluoreszenz emittiert ein Atom ein  $\gamma$ -Quant, wobei das Atom/ der Kern den Rückstoß aufnehmen muss um die Impulserhaltung zu erfüllen. Ein anderes, gleichartiges Atom kann dieses Quant absorbieren und nimmt dabei auch den Impuls des Photons auf. Die (Re-)Absorption ist jedoch nicht immer möglich: Aufgrund des Rückstoßes des Kerns/Atoms wird ein  $\gamma$ -Quant kleinerer Energie als dem entsprechenden Übergang entspricht emittiert:

$$E_\gamma = E_0 - E_R \quad (3.115)$$

Auch bei der Absorption geht aufgrund des Impulsübertrags ein Teil der  $\gamma$ -Energie in die kinetische Energie des absorbierenden Atoms/Kerns. Es bleibt also noch die Energie

$$E_\gamma = E_0 - 2E_R \quad (3.116)$$

für die Anregung zur Verfügung.

Ob eine Resonanzabsorption stattfindet hängt von den Energieverhältnissen ab; von  $E_R$  und der (natürlichen) Linienbreite (Energieunschärfe)

$$\Gamma := \frac{\hbar}{\tau} \quad (3.117)$$

Der natürlichen Linienbreite liegt ein Breit-Wigner-Profil zu Grunde, hinzu kommt noch die Dopplerverbreiterung.

Für **Kerne** betrachten wir als Beispiel  $^{57}\text{Fe}$  mit einer Lebensdauer von  $\tau = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ s} \Rightarrow \Gamma = 4.7 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$ . Die Energie des Übergangs beträgt  $E_\gamma = 14.4 \text{ keV}$ , sodass die relative Breite  $\frac{\Gamma}{E_\gamma} = 3 \cdot 10^{-13}$  beträgt, es liegt also eine extrem scharfe Linie vor. Die Rückstoßenergie kann nun klassisch genähert werden:

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{p^2}{2M} = \frac{(h \cdot \nu)^2}{2Mc^2} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \\ &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \end{aligned} \quad (3.118)$$

Somit ist die Linienbreite hier:

$$\Rightarrow \Gamma = 10^{-6} \cdot E_R, \quad \Gamma \ll E_R \quad (3.119)$$

An freien Kernen sollte Resonanzabsorption somit nicht stattfinden. Freie Kerne emittieren keine Photonen, deren Energie groß genug ist um von einem anderen Kerns desselben Isotops absorbiert zu werden, wenn die Breite des angeregten Zustands  $\Gamma$  kleiner ist als  $2E_R = \frac{E_0}{Mc^2}$ .

Bei **Atomen** ergibt sich für typische Werte von ( $\tau \approx 10^{-8} \text{ s}$  eine nat. Linienbreite von  $\Gamma \approx 10^{-7} \text{ eV}$ , typischer Wert für die  $\gamma$ -Energie ist  $E_\gamma \approx 10 \text{ eV}$ , sodass wir die Rückstoßenergie  $E_R \approx 10^{-9} \text{ eV}$  und somit  $\Gamma \approx 10 - 100 \cdot E_R$  erhalten, was bedeutet dass Reabsorption hier leicht auftreten kann.

Die Dopplerverbreiterung der Linien, hervorgerufen durch die thermische Bewegung der Kerne, führt zu einem größeren Überlapp, die Erwartungswerte der Verteilungen bleiben dabei jedoch gleich. Die Linienverbreiterung aufgrund des Dopplereffekts ist

$$\Gamma_T = 2\sqrt{\ln 2} \cdot E_\gamma \cdot \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}} \quad (3.120)$$

Die Dopplerverbreiterung (bei Raumtemperatur) liegt in der Größenordnung der Rückstoßenergie, sodass tatsächlich Resonanzabsorptionen beobachtet werden können.

Bei tieferen Temperaturen nimmt die thermische Dopplerverbreiterung ab und somit sollte auch die Resonanzabsorption abnehmen.

Durch eine gerichtete Energieverschiebung kann die Verschiebung ausgeglichen werden, beispielsweise durch Bewegung der Quelle mit der Geschwindigkeit  $v_Q$ . Die Impulskomponente der Quelle in  $\gamma$ -Emissionsrichtung ist  $p_Q$ . Vor der Bewegung liegt die Anregungsenergie  $E_0$  und der Impuls  $p_Q$  vor, nach der Verschiebung ist der Impuls  $p_Q - \vec{p}$  und ein  $\gamma$ -Quant wird emittiert ( $\vec{p}$  entspricht dem Rückstoß). Durch den Energiesatz ergibt sich daraus nun

$$\begin{aligned} E_0 + \frac{p_Q^2}{2M} &= E_\gamma + \frac{(p_Q - \vec{p})^2}{2M} \\ \Leftrightarrow E_0 &= E_\gamma - \frac{2pp_Q}{2M} + \frac{p^2}{2M} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Für die Energieverschiebung  $\Delta E = E_0 - E_\gamma$  ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{p^2}{2M} - \frac{pv_Q M}{M} \\ \Rightarrow \boxed{\Delta E} &= \frac{E_\gamma^2}{Mc^2} - E_\gamma \frac{v_Q}{c} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Der erste Term beschreibt den Rückstoß ( $2E_R$ , Emission+Absorption), während der zweite Term die Energieverschiebung aufgrund des Doppler-Effekts erfasst. Bei Raumtemperatur liegt die Dopplerverschiebung ungefähr in der Größenordnung der Rückstoßenergie, beispielsweise ergibt sich für  $v_Q = 20 \frac{m}{s}$  für  $^{57}Fe$ :

$$\Delta E = E_\gamma \cdot \frac{v_Q}{c} = 14 \text{ keV} \cdot \frac{20}{3 \cdot 10^8} \approx 9.3 \cdot 10^{-4} \text{ eV} \approx 10^{-3} \text{ eV}$$

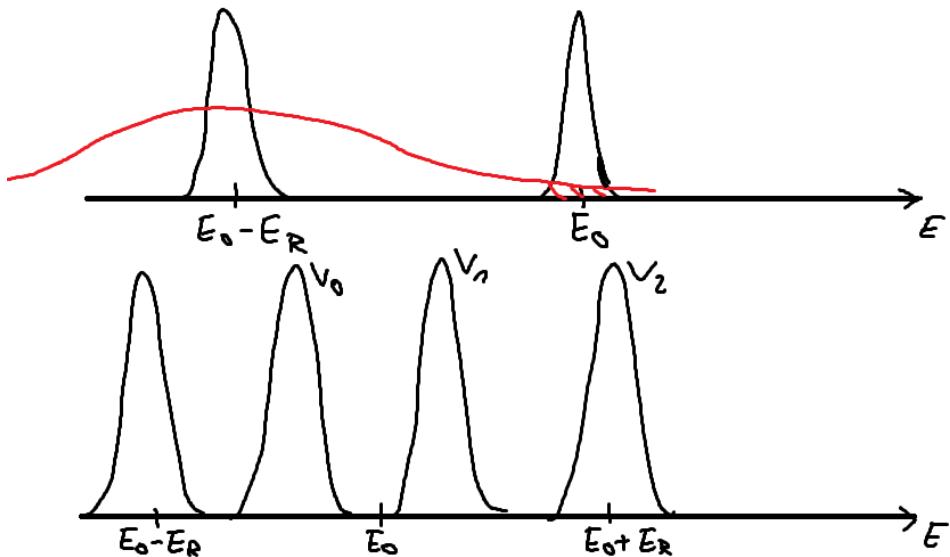


Abbildung 3.24: oben: Aufgrund der Dopplerverbreiterung kommt es zu einem nicht-verschwindenden Überlapp zwischen der Linienbreite und der Breite der  $\gamma$ -Energie. unten: Durch Variation der Geschwindigkeit (z.B. der Quelle) kann die Energie der  $\gamma$ -Quanten gezielt variiert werden.

Die Messung der  $\gamma$ -Rate als Funktion der Geschwindigkeit  $v_Q$  (Durchfluss) führt zu einem Peak bei der Resonanzgeschwindigkeit  $v_{\text{res}}$ . Der Beweis für rückstoßfreie Absorption ist erbracht bei  $v_{\text{res}} = 0$ .

Mößbauer fand 1958 mit einer  $^{191}\text{Ir}$ -Quelle (129 keV):

- Resonanzabsorption bei Raumtemperatur (Dopplerverbreiterung + rückstoßfreie Absorption)
- Unter Kühlung des Experiments bleibt die Resonanzabsorption erhalten, sie verstärkt sich sogar. Dies entsprach nicht den Erwartungen und sorgte dafür, dass die Dopplerverbreiterung als zu Grunde liegender Mechanismus ausfällt. Es handelte sich hierbei um die erste Beobachtung der *rückstoßfreien* Resonanzabsorption an Kernen, die in ein *Kristallgitter* eingebettet sind.

Es wurden gezielte Experimente mit bewegten Quellen durchgeführt, die ein exaktes Linienprofil für  $v_Q \approx \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  und der Beweis für rückstoßfreie Absorbtionen in Festkörpern liefern.

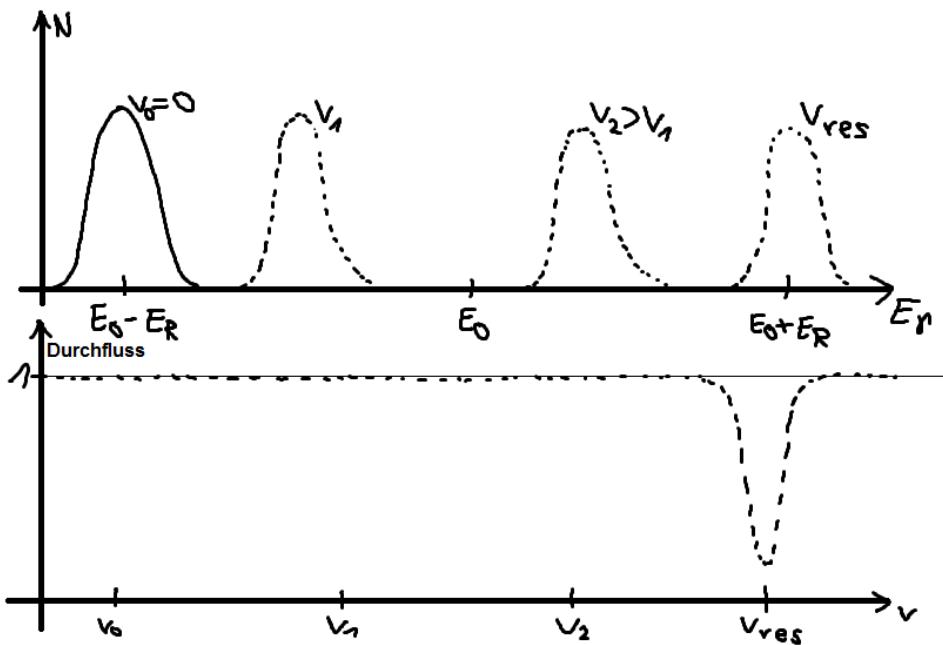


Abbildung 3.25: Oben: Energieverteilung der emittierten  $\gamma$ -Quanten bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Quelle (in Richtung der Emission). Unten: relativer Durchfluss durch den Absorber als Funktion der Geschwindigkeit. Bei  $v = v_{res}$  kommt es zur Absorption.

Die Erklärung findet sich in einem Quanteneffekt:

- Die Atome im Kristallgitter sind durch elastische Kräfte gebunden und somit schwingungsfähig in drei Dimensionen.
- Die Schwingungen des Festkörperrasters sind in Einheiten von  $\hbar\omega$  gequantelt. Ein Oszillatorquant ist  $1\hbar\omega$  und entspricht einem Phonon. Man unterscheidet nun die folgenden Fälle:
  - (i)  $E_R \gg \hbar\omega$ : Die Rückstoßenergie wird auf das Gitter übertragen, dessen Temperatur sich dadurch erhöht (wegen der riesigen Masse  $M'$  ist die entsprechende Rückstoßenergie verschwindend gering).
  - (ii)  $E_R < \hbar\omega$  (für Kerne realistischer Fall:  $E_R \sim 0.2 \cdot 10^{-2}$  eV,  $\hbar\omega = 10^{-2}$  eV): Die Energie kann nur in Quanten  $\hbar\omega$  abgegeben werden, das heißt bei einem Bruchteil der  $\gamma$ -Absorption/ Emission tritt rückstoßfreie Absorption bzw. Emission auf.

Man kann lediglich die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass 0 oder  $\hbar\omega$  als Rückstoßenergie übertragen wird.

Die Energie des Gitters ist gequantelt, d.h. es kann die Energie  $n \cdot \hbar\omega$  besitzen, ebenso wie  $(n+1)\hbar\omega$  eine mögliche Energie ist. Energien zwischen diesen beiden Werten sind jedoch nicht möglich. Für die oben angegebenen Werte würde also statistisch in 4 von 5 Fällen eine rückstoßfreie Absorption bzw. Emission stattfinden, allgemein lässt sich diese Abschätzung für den Bruchteil der rückstoßfreien Absorptions-/ Emissions-

prozesse ausdrücken durch

$$f = 1 - \frac{E_R}{\hbar\omega}. \quad (3.123)$$

Im Einstein-Modell liegt im Gitter nur eine Frequenz vor, in der Realität werden jedoch Abweichungen von den Vorhersagen dieses Modells beobachtet. Gründe hierfür sind:

- mehrere Frequenzen (kompliziertes Schwingungsspektrum)
- natürliche Breite der Phononenlinien

Ein verbessertes Modell, welches auch die spezifische Wärmekapazität und deren Temperaturabhängigkeit von Festkörpern erklären kann, ist das Debye-Modell.

$$\Rightarrow f = f(T, \text{Material}) \quad (3.124)$$

wird als *Debye-Waller-Faktor* bezeichnet.

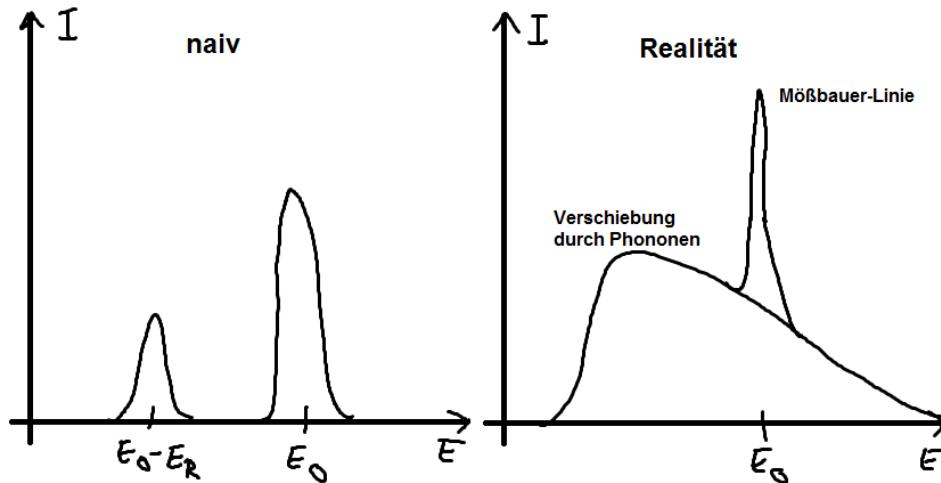


Abbildung 3.26: Naive Erwartung des  $\gamma$ -Spektrums nach dem Einstein-Modell, sowie das real beobachtete Spektrum, welches sich durch das Debye-Modell erklären lässt

Ein bekanntes Beispiel hierfür ist  $^{57}\text{Fe}$  (14.4 keV,  $\gamma$ -Linie), wofür bei  $T = 300 \text{ K}$  der Debye-Waller-Faktor  $f = 0.91$  beträgt. In vielen Fällen müssen Quelle und Absorber jedoch gekühlt werden, um hinreichend große Werte für  $f$  zu erhalten.

### Anwendungen

- Spektroskopie (kleine Energieverschiebungen, z.B. Hyperfeinstruktur, Quadrupolmomente, Isomerieverschiebung (chem. Umgebung)). Die Energieverschiebung ist über die Geschwindigkeit kontrollierbar:  $\Delta E = E_\gamma \frac{v_Q}{c}$ . Die messbaren Breiten zweier Mößbauerlinien sind

$$- {}^{57}\text{Fe}: \frac{\Gamma}{E_\gamma} = 3 \cdot 10^{-13}$$

$$- {}^{67}\text{Zn}: \frac{\Gamma}{E_\gamma} = 5 \cdot 10^{-16}$$

- Test der Relativitätstheorie: Mithilfe der Mößbauerspektroskopie kann die Energieverschiebung von Photonen im Schwerefeld der Erde gemessen werden. Die Energieverschiebung pro Meter Höhendifferenz liegt in der Größenordnung

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-16} \quad (3.125)$$

Beispielsweise ist die Verschiebung der  $^{57}\text{Fe}$ -Linie bei einer Höhendifferenz von 23 m

$$\frac{\Delta E}{E} = 5 \cdot 10^{-16} \quad (3.126)$$

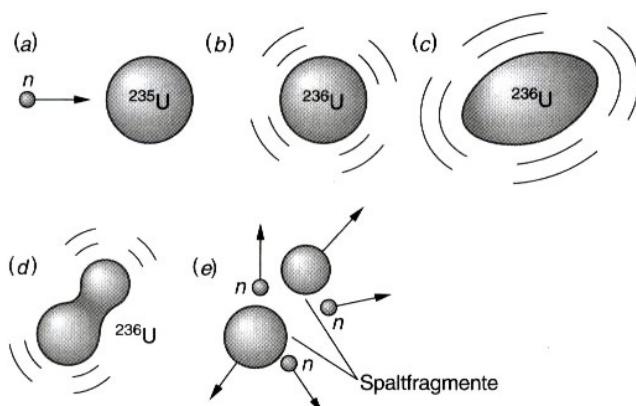
## 3.5 Kernspaltung

**1938** Die Entdeckung der Kernspaltung erfolgte durch O.Hahn und F. Straßmann.

**1939** Theoretische Interpretation zu den Ergebnissen des Vorjahres durch Lise Meitner und O. Frisch. An der Interpretation im Tröpfchenmodell ebenfalls beteiligt waren Bohr und Wheeler.

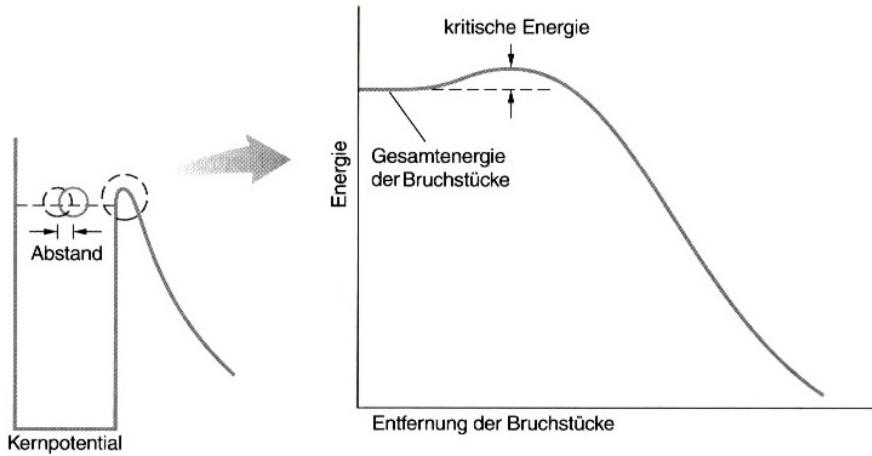
**1942** Erste kontrollierte Kettenreaktion (E.Fermi, Chicago)

Die Spaltung schwerer Kerne bringt einen Energiegewinn mit sich, vergleichbar mit dem  $\alpha$ -Zerfall. Die Kernspaltung wird durch eine dynamische Instabilität hervorgerufen, aufgrund einer Anregung, z.B. durch  $\gamma$ - oder Neutronenbeschuss. Es kommt infolgedessen zu Schwingungen und Deformationen des Kerns, sodass die Coulombabstoßung zur Spaltung führt. Besonders gut funktioniert dies bei Kernen, welche bereits im Grundzustand deformiert sind.



Schema einer Kernspaltung. Die Absorption eines Neutrons durch  $^{235}\text{U}$  (a) führt zu einem angeregten Zustand von  $^{236}\text{U}$  (b). Dieser angeregte Kern wird durch Schwingungen verformt (c), der schwingende Kern wird instabil (d) und zerfällt in zwei Bruchstücke (e) mittlerer Massenzahl unter Emission mehrerer Neutronen, die ihrerseits die Spaltung weiterer Kerne auslösen können.

Abbildung 3.27: (aus Ref. [11])



Einen winzigen Augenblick lang kann der Kern als Verbund zweier Fragmente existieren (links); die Coulombbarriere verhindert jedoch die endgültige Trennung der Bruchstücke. Um die Barriere zu überwinden, muß dem System mindestens die kritische Energie zugeführt werden.

Abbildung 3.28: (aus Ref. [11])

#### Potentialverhältnisse

Zur Separation der beiden „Prototöchter-Kerne“ muss die Oberfläche vergrößert werden, das heißt es muss Arbeit aufgewandt werden. Die Abnahme der Coulomb-Energie wirkt dem Bestreben zur Minimierung der Oberfläche entgegen, da die Protonen im Mittel weiter voneinander entfernt sind. Wenn  $R > R_{\text{sci}}$  (Szissionspunkt) ist, überwiegt die Coulomb-Abstoßung und führt zur Spaltung.

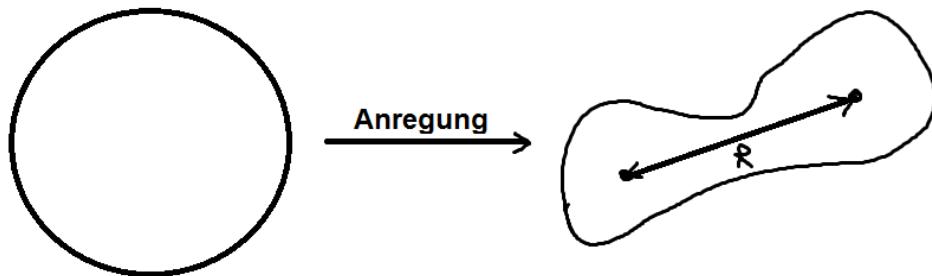
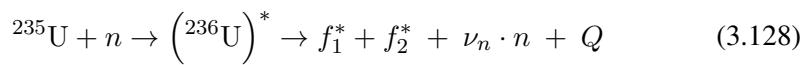


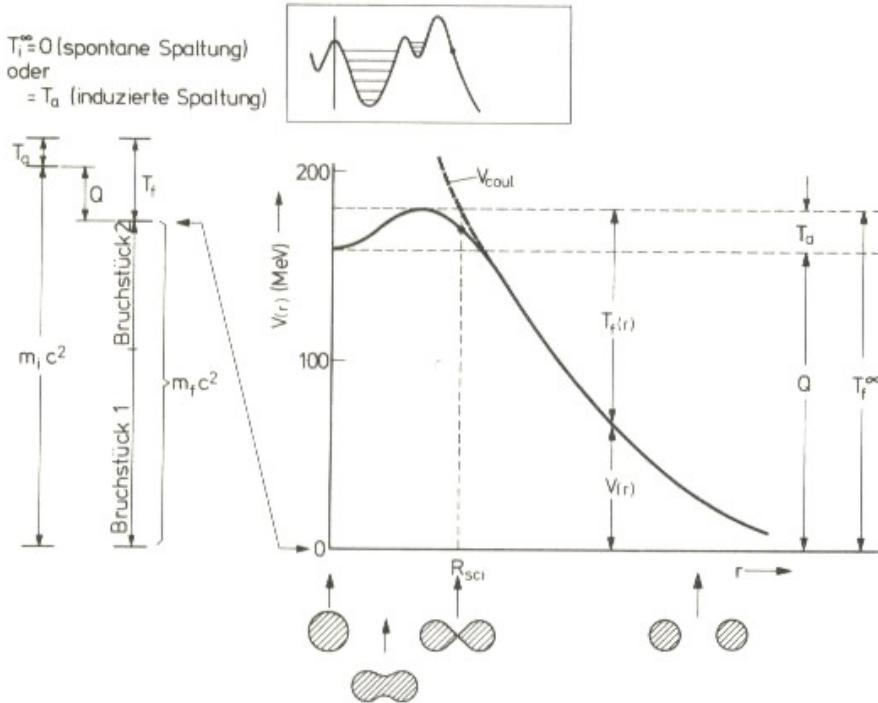
Abbildung 3.29: Die Anregung eines Kernes kann zu Schwingungen und Deformationen führen

Der  $Q$ -Wert ergibt sich aus der Differenz der Bindungsenergien, welche in Form von kinetischer Energie frei wird.

$$Q = (m_i - m_f)c^2 \quad (3.127)$$

Beispiel:





Energieverhältnisse und Potentialverlauf bei der Spaltung. Links: Energie-  
diagramm. Rechts: Potentialverlauf nach dem Tröpfchenmodell.  
Oben eingerahmt: Detail des Potentialwalls für die realistischere Be-  
schreibung nach dem Spaltungs-Hybrid-Modell. Der Grundzustand ist  
hier deformiert

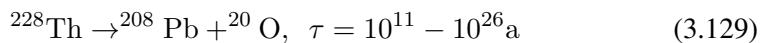
Abbildung 3.30: Energieverhältnisse bei der Spaltung. Aus Ref. [11]

, wobei  $f_1^*$  und  $f_2^*$  die (angeregten) Spaltprodukte sind und  $\nu_n$  die freiwerdenden *prompten* Neutronen. Bei einer solchen Reaktion werden freigesetzt:

- hochangeregte Spaltprodukte
- prompte Neutronen
- $Q = \text{frei werdende Energie} \sim 200 \text{ MeV pro Spaltung}$

Die prompten Neutronen werden von den hoch angeregten Spaltprodukten „abgedampft“.

*Beachte:* Die Spaltung passiert auf Grund einer Anregung/Verformung, nicht durch den Tunneleffekt! Theoretisch ist eine Spaltung durch Tunneleffekte möglich, jedoch ist die Wahrscheinlichkeit in der Praxis sehr klein. Einen Übergangsbereich bildet die *Cluster-Emission*, welche auch beobachtet werden kann, z.B.:



### Energieverhältnisse bei Spaltung nach dem Tröpfchenmodell

Nach dem Tröpfchenmodell treten zwei konkurrierende Energiebeiträge beim Übergang von einem sphärischen Kern zu einem verformten Kern auf:

(i) Oberflächenenergie

(ii) Coulombenergie

Geht eine Kugel mit Radius  $R$  in einen Ellipsoiden über, so erhält man für die Halbachsen des Ellipsoiden mit identischem Volumen wie die ursprüngliche Kugel:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 &= V_{\text{Kugel}} = V_{\text{Ellipsoid}} = \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ \Rightarrow a &= R(1 + \varepsilon) \\ b &= \frac{R}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \approx R \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Die Oberfläche ist dann gegeben durch

$$O = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right), \quad (3.131)$$

, sodass die Differenz der Oberflächenenergien beim Übergang von einer Kugel zu einem Ellipsoiden

$$\Delta E_{B,O} = a_O \cdot A^{2/3} \cdot \frac{2}{5}\varepsilon^2 \quad (3.132)$$

ist. Die Coulombenergie eines solchen homogen geladenen Ellipsoiden erhält man zu

$$E_C \sim \frac{Z^2}{R} \left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots\right), \quad (3.133)$$

, d.h. die Energiebeiträge lauten

$$\begin{aligned} \Delta E_{B,O} &= a_O \cdot A^{2/3} \cdot \frac{2}{5}\varepsilon^2 \\ \Delta E_{B,C} &= -a_C \frac{1}{5}\varepsilon^2 Z^2 \cdot A^{-1/3} \\ \Rightarrow \Delta E &= \varepsilon^2 \left(\frac{2}{5}a_O \cdot A^{2/3} - \frac{1}{5}a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3}\right) \end{aligned} \quad (3.134)$$

Mit den Werten für die Parameter aus dem Tröpfchenmodell

$$a_O = 18.34 \frac{\text{MeV}}{c^2}, \quad a_C = 0.71 \frac{\text{MeV}}{c^2} \quad (3.135)$$

ergibt sich

$$\Delta E = \varepsilon^2 \left(7.34 \cdot A^{2/3} - 0.14 \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3}\right) \quad (3.136)$$

Für die Spaltung muss  $\Delta E < 0$  sein, sodass die Bedingung für eine spontane Spaltung

$7.34 \cdot A^{2/3} < 0.14 Z^2 A^{-1/3} \rightarrow \frac{Z^2}{A} \gtrsim 51$

(3.137)

lautet. Man definiert hierbei den *Spaltbarkeitsparameter*

$$X := \frac{Z^2}{51 \cdot A} \quad (3.138)$$

Je kleiner  $X$  ist, um so größer ist die Halbwertszeit für spontane Spaltung. Der kritische Wert für spontane Spaltung wird erst für  $Z > 100$  erreicht. Das hierbei verwendete Modell ist jedoch zu naiv, eine realistischere Rechnung erlaubt spontane Spaltung für  $X \gtrsim 0.80$  (Die Näherung kleiner Deformationen ist nicht erfüllt, wenn der Kern sich einschnürt).

Tabelle 3.2: Spaltbarkeitsparameter und Halbwertszeiten einiger Kerne

Kern	$X$	$T_{1/2}$ (Spaltung)
$^{238}_{92}\text{U}$	0.71	$10^{16}\text{a}$
$^{252}_{98}\text{Cf}$	0.76	85a
$^{258}_{102}\text{No}$	0.80	1.2ms

### Induzierte Spaltung

Durch Kernreaktionen ( $n, \gamma, \dots$ ) kann eine Spaltung induziert werden, z.B. Neutroneneinfang:

$$n + {}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{92}^{236}\text{U}^* \rightarrow \begin{cases} {}_{92}^{236}\text{U} + \gamma + Q_\gamma \\ \underbrace{f_1^* + f_2^*}_{\text{hochangeregte Bruchstücke}} + \nu_n \cdot n + Q_f \end{cases} \quad (3.139)$$

Prinzipiell ist somit eine Spaltung möglich.

- Die Anlagerungsenergie eines Neutrons an  ${}_{92}^{235}\text{U}$  beträgt  $\Delta E_B = 6.5 \text{ MeV}$ .
- Die Höhe der Spaltbarriere beträgt  $\Delta E_{\text{Spalt}}({}_{92}^{235}\text{U}) = 5.8 \text{ MeV}$ , d.h. thermische<sup>3</sup> Neutronen können den Kern zur Spaltung bringen.
- Nicht jeder Neutroneneinfang führt zur Spaltung, es handelt sich um einen konkurrierenden ( $n, \gamma$ )-Prozess.
- $\Delta E_B({}_{92}^{235}\text{U})$  ist groß, da  ${}_{92}^{236}\text{U}_{144}$  ein gg-Kern ist (zusätzliche Bindungsenergie durch Paarungsenergien).
- Zum Vergleich:  $n + {}_{92}^{238}\text{U}_{146} \rightarrow {}_{92}^{239}\text{U}_{147}$  (d.h. ein gg-Kern wird zu einem gg-Kern), die Bindungsenergie des zusätzlichen Neutrons beträgt  $\Delta E_B = 5.0 \text{ MeV}$ , die Spaltbarriere<sup>4</sup> jedoch bei  $\Delta E_{\text{Spalt}} = 6.2 \text{ MeV}$ . Um eine Spaltung zu induzieren muss das Neutron zusätzliche kinetische Energie auf den Kern übertragen,

<sup>3</sup>Bei Raumtemperatur ist  $E_{\text{th}} = kT \approx \frac{1}{40} \text{ eV}$ . Durch Zusammenstöße mit der Umgebung wird so viel Energie abgegeben, dass sich die Neutronen im thermischen Gleichgewicht befinden.

<sup>4</sup>Die Höhe der Spaltbarkeitsbarriere kann durch Messung der Spaltwahrscheinlichkeit als Funktion der Neutronenenergie experimentell bestimmt werden.

$E_{\text{kin}}(n) > 1.2 \text{ MeV}$ . Die Differenz der Bindungsenergien zwischen  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  aufgrund der Paarungsenergie ist nach dem Tröpfchenmodell

$$a_P = 11.46 \text{ MeV}/c^2$$

$$\delta = \frac{a_P}{\sqrt{A}} \approx \frac{11.46 \text{ MeV}}{\sqrt{238}} = 0.74 \text{ MeV} \quad (3.140)$$

$$\Delta E_B \sim 2\delta \approx 1.5 \text{ MeV}$$

Einige Zahlenwerte:

	$\Delta E_{\text{Spalt}}/\text{MeV}$	$\Delta E_B/\text{MeV}$	Spaltbarkeit (therm. Neutronen)
$^{233}\text{U}$	5.2	6.7	ja
$^{235}\text{U}$	5.8	6.5	ja
$^{238}\text{U}$	6.2	5.0	nein
$^{239}\text{Pu}$	5.0	6.4	ja

#### Abregung der Spaltprodukte

Die Anregungsenergie der Spaltprodukte liegt bei  $\sim 30 \text{ MeV}$ , die Bindungsenergie eines Neutrons in diesen Kernen nur bei  $E_B(n) \sim 6 - 7 \text{ MeV}$ . Eine Abregung der Spaltprodukte ist somit möglich durch

- (1) Prompte Neutronenemission. Die Emission erfolgt nach der Spaltung (Richtungskorrelation mit Spaltprodukten),  $\Delta t = 10^{-21} - 10^{-14} \text{ s}$  (nach Spaltung). Man spricht daher von *prompten Neutronen* oder auch *Spaltungsneutronen*. Ihre Anzahl liegt in etwa bei  $\nu_n = 2 - 3$ . Statistisch werden bei

$$\begin{array}{ll} ^{235}\text{U} & \nu_n = 2.43 \\ ^{238}\text{U} & \nu_n = 2.88 \end{array} \quad (3.141)$$

prompte Neutronen emittiert. Diese bilden die Grundlage für Kettenreaktionen.

- (2)  $\gamma$ -Zerfälle
  - (3)  $\beta$ -Zerfälle: Der Neutronenüberschuss wird durch mehrere aufeinanderfolgende  $\beta^-$ -Zerfälle abgebaut:
- $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
- (3.142)
- (4) Falls die Anregungsenergie nach dem  $\beta$ -Zerfall groß genug ist, kann es zur Emission weiterer Neutronen kommen (verzögerte Neutronen).

Ein Energiespektrum von Spaltungsneutronen ist in Abb. 3.31 dargestellt. Das Energiespektrum wird beschrieben durch eine Funktion der Form

$$n(E) = a \cdot \sqrt{E} \cdot e^{-E/T} \quad (3.143)$$

Die wahrscheinlichste Energie liegt bei  $\sim 0.8 \text{ MeV}$ , der Erwartungswert der Energie bei  $\langle E \rangle \sim 2 \text{ MeV}$ .

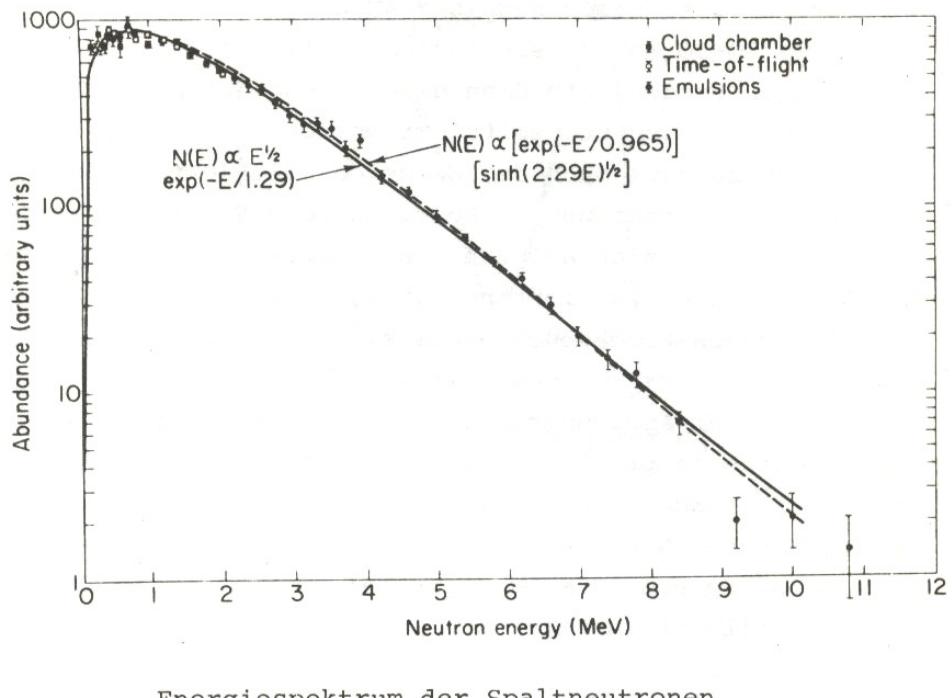


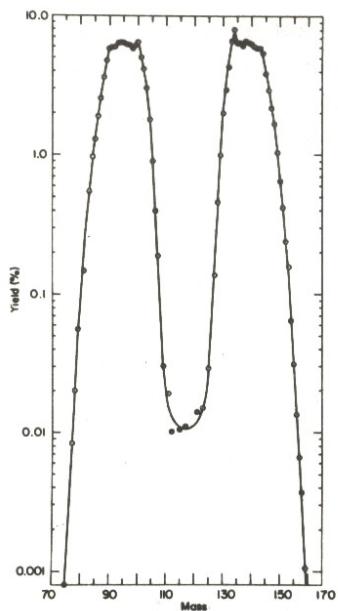
Abbildung 3.31: Energieverteilung der prompten Spaltneutronen. (aus Ref. [14])

- Die Massenverteilung der Spaltprodukte ist im Allgemeinen asymmetrisch. Eine symmetrische Verteilung tritt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von  $10^{-3}$  auf. Der Grund hierfür lässt sich im Schalenmodell finden.

Die Wahrscheinlichkeit einer symmetrischen Spaltung nimmt zu mit

- zunehmender Masse des Spaltkerns
- zunehmender Anregungsenergie

- Im Verlauf der Abregungsprozesse entstehen zahlreiche Kerne/Zwischenprodukte ( $\sim 80$  Zwischenprodukte) mit Halbwertszeiten von Sekunden bis hin zu  $10^{10}$  a!
- Langsame radioaktive Zerfälle führen zur sog. *Nachwärme* in Kernreaktoren.



Massenverteilung der Spaltprodukte für induzierte Spaltung von  $^{235}\text{U}$  mit thermischen Neutronen

Abbildung 3.32: (aus Ref. [14])

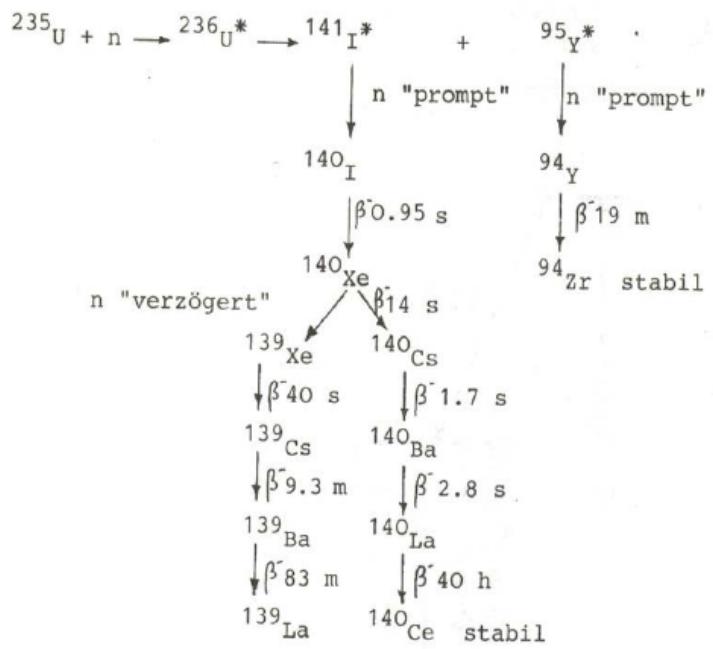
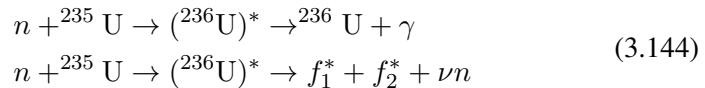


Abbildung 3.33: Typische Spaltprozesse von  $^{235}\text{U}$

### Technische Anwendung: Kernreaktor

Nachfolgend sollen noch einige Aspekte der Funktionsweise eines Kernreaktors diskutiert werden.

- Die Kettenreaktion kann kontrolliert ablaufen, wenn im Mittel 1 Neutron je Spaltung zu weiteren Spaltprozessen genutzt werden kann.
- Die wichtigsten Neutronenreaktionen sind



mit den Wirkungsquerschnitten  $\sigma(n, \gamma)$  bzw.  $\sigma(n, f)$  (*fission*). Im ersten Fall ist das Neutron für die Kettenreaktion verloren. Die Wirkungsquerschnitte für induzierte Spaltung und  $(n, \gamma)$ -Reaktionen hängen stark von der kinetischen Energie bzw. der Geschwindigkeit  $v$  der Neutronen ab. Im thermischen Bereich gilt:

$$\sigma(n, \gamma), \sigma(n, f) \sim \frac{1}{v} \quad (3.145)$$

Die Wirkungsquerschnitte werden in diesem Bereich durch die Zeit, während der sich das Neutron in der Umgebung des Kerns aufhält ( $t = \frac{s}{v} \Rightarrow \frac{1}{v}$ -Abhängigkeit), dominiert.

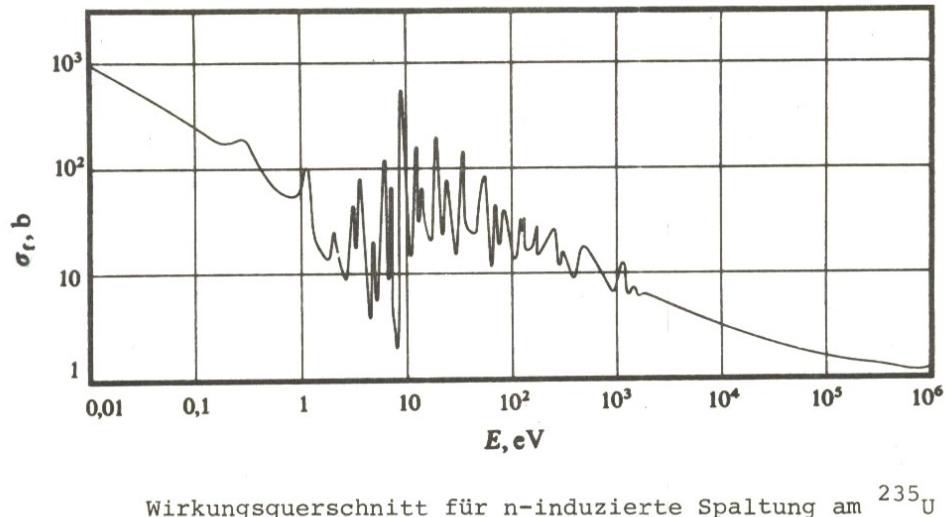


Abbildung 3.34: Wirkungsquerschnitt für  $(n, f)$ -Reaktion mit  ${}^{235}\text{U}$  in Abhängigkeit von der kinetischen Energie der Neutronen. (aus Ref. [14])

- Im mittleren Energienbereich treten Resonanzen auf, entsprechend der Energiezustände des sog. *Compound-Kerns*.
- Um die hohen Spaltquerschnitte im thermischen Energienbereich auszunutzen müssen die Neutronen ( $\langle E \rangle \sim 2 \text{ MeV}$ ) moderiert werden. Es erfolgt eine Moderation (Abkühlung) der Neutronen durch Stöße.

- Gesucht sind Materialien mit kleinem Absorptionsquerschnitt  $\sigma(n, \gamma)$  und großem Streuquerschnitt  $\sigma(n, n')$  (elastische Streuung, Energieabgabe). Ein solches Material wird als *Moderator* bezeichnet. Um eine effiziente Energieabgabe (d.h. Abkühlung) mit möglichst wenigen Stößen (Einfanggefahr!) zu erreichen sollte

$$m_{\text{Stoßpartner}} \approx m(n) \quad (3.146)$$

sein.

Tabelle 3.3: Einige Wirkungsquerschnitte für 2MeV-Neutronen

		$\sigma(n, n')/\text{b}$	$\sigma(n, \gamma)/\text{b}$
H <sub>2</sub> O	leichtes Wasser	105	0.664
D <sub>2</sub> O	schweres Wasser	14.5	0.001
C	Graphit	4.8	0.0035

- H<sub>2</sub>O (Leichtes Wasser) besitzt zwar einen besonders großen Wirkungsquerschnitt für die Streuung der Neutronen, jedoch auch einen großen Wirkungsquerschnitt für die Absorption von Neutronen. Schweres Wasser(D<sub>2</sub>O) besitzt für beide Reaktionen einen deutlich verringerten Wirkungsquerschnitt, wobei der Wirkungsquerschnitt der Absorption wesentlich stärker unterdrückt ist. Durch den hohen Wirkungsquerschnitt von leichtem Wasser ist mit natürlichem Uran kein Leichtwasserreaktor möglich. Natürliches Uran enthält zu ca. 0.72% <sup>235</sup>U. Die Wirkungsquerschnitte berechnen sich nun:

$$\begin{aligned} \sigma(n, f) &= \frac{0.72}{100} \cdot \sigma(n, f, {}^{235}\text{U}) + \frac{99.28}{100} \cdot \sigma(n, f, {}^{238}\text{U}) \\ &= 0.0072 \cdot 584 \text{ b} + 0 = 4.20 \text{ b} \\ \sigma(n, \gamma) &= \frac{0.72}{100} \cdot \sigma(n, \gamma, {}^{235}\text{U}) + \frac{99.28}{100} \cdot \sigma(n, \gamma, {}^{238}\text{U}) \\ &= 0.0072 \cdot 97 \text{ b} + 0.9928 \cdot 2.75 \text{ b} = 3.43 \text{ b} \end{aligned} \quad (3.147)$$

Die Anzahl der zur Spaltung verfügbaren Neutronen ist

$$k = 2.4 \cdot \frac{\sigma(n, f)}{\sigma(n, f) + \sigma(n, \gamma)} \approx 1.32 \quad (3.148)$$

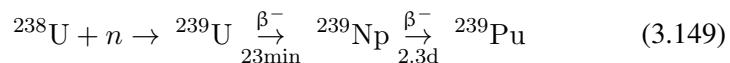
Durch weitere Verluste (z.B. durch Neutronen, die den Reaktor verlassen) sinkt die Anzahl weiter ab:  $k_{\text{eff}} < 1$ . Eine Kettenreaktion in einem Leichtwasserreaktor ist somit mit natürlichem Uran nicht möglich!

- Durch Anreicherung, d.h. durch Erhöhung des <sup>235</sup>U-Anteils auf ~ 3%, erreicht man  $k = 1.82$ . Somit ist der Betrieb mit  $k_{\text{eff}} > 1$  bei leichtem Wasser als Moderator möglich.
- Schwerwasserreaktoren (mit D<sub>2</sub>O als Moderator) können mit natürlichem Uran arbeiten (keine Anreicherung notwendig). Der Vorteil von Leichtwasserreaktoren ist jedoch der größere Wirkungsquerschnitt  $\sigma(n, n')$ , sodass die Moderation schneller erfolgt und eine kompaktere Bauweise erlaubt (Druck- oder Siedewasserreaktoren).

Kern	$\sigma(n, \gamma)$ , barn	Anzahl notwendiger Stöße bis zum Erreichen des thermischen Gleichgewichts
$^1\text{H}$	0,333	18
$^2\text{H}$	$0,51 \cdot 10^{-3}$	25
$^4\text{He}$	0	43
$^{12}\text{C}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	110
$^{238}\text{U}$	2,75	2200

Abbildung 3.35: Moderatoreigenschaften ausgewählter Kerne (aus [14])

- Was passiert, wenn nicht schnell moderiert wird?
  - Es besteht die Gefahr, dass zu viele Neutronen im sog. *epithermischen Bereich* ( $10 - 1000$  eV) eingefangen werden.
  - Resonanzen für  $^{238}\text{U}$  und  $^{235}\text{U}$  in diesem Bereich,  $\sigma(n, \gamma)$ -Resonanzen mit hohen Wirkungsquerschnitten, Neutronen sind verloren für den Neutronenhaushalt des Reaktors → Eine schnelle Moderation ist wünschenswert, um das Resonanzgebiet schnell zu durchlaufen.
- Brutreaktionen:  
Durch  $n$ -Einfang von  $^{238}\text{U}$  entsteht Plutonium:



Die Lebensdauer von  $^{239}\text{Pu}$  beträgt  $\tau = 2.4 \cdot 10^4$  a. Es kommt somit zu einer langsamen Anreicherung in den Brennlementen.

- Wiederaufbereitung:  
 $^{239}\text{Pu}$  und nicht abgebranntes  $^{235}\text{U}$  sowie Reaktorgifte werden extrahiert.  $^{239}\text{Pu}$  ist spaltbar, es besitzt einen hohen Spaltquerschnitt für schnelle Neutronen, was zum Konzept des sog. *schnellen Brüters* (Kalkar, 1970er Jahre, BRD) führte. Es ist somit kein Moderator erforderlich, zudem weißt  $^{239}\text{Pu}$  mit  $\nu = 2.7$  eine hohe Zahl an Spaltungsneutronen auf).

Die Gefährlichkeiten (wesentliche Sicherheitsprobleme) haben bisher den verbreiteten Einsatz schneller Brüter verhindert:

- hohe Anzahl prompter Spaltneutronen
- geringe Anzahl verzögerter Neutronen (nur 0.3%!) ⇒ kurze Sicherheitsabstände für mechanische Steuerung
- Verdopplung des spaltbaren Materials im Reaktor alle  $\sim 7$  Jahre

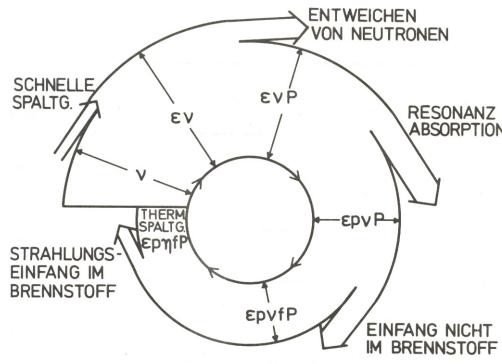
Reaktorgifte:

Einige Spaltprodukte (die unkontrolliert auftreten) haben hohe  $n$ -Einfangquerschnitte:

Reaktorgift	Wirkungsquerschnitt	$\tau_{1/2}$
$^{149}\text{Sm}$	$\sigma(n, \gamma) = 4 \cdot 10^4 \text{ b}$	stabil
$^{135}\text{Xe}$	$\sigma(n, \gamma) = 2.7 \cdot 10^6 \text{ b}$	9.2 h
$^{113}\text{Cd}$	$\sigma(n, \gamma) = 2 \cdot 10^4 \text{ b}$	$7.6 \cdot 10^{15} \text{ a}$

- Neutronenzyklus

Im Neutronenzyklus (vgl. Abb. 3.36) ist dargestellt, durch welche Prozesse Neu-

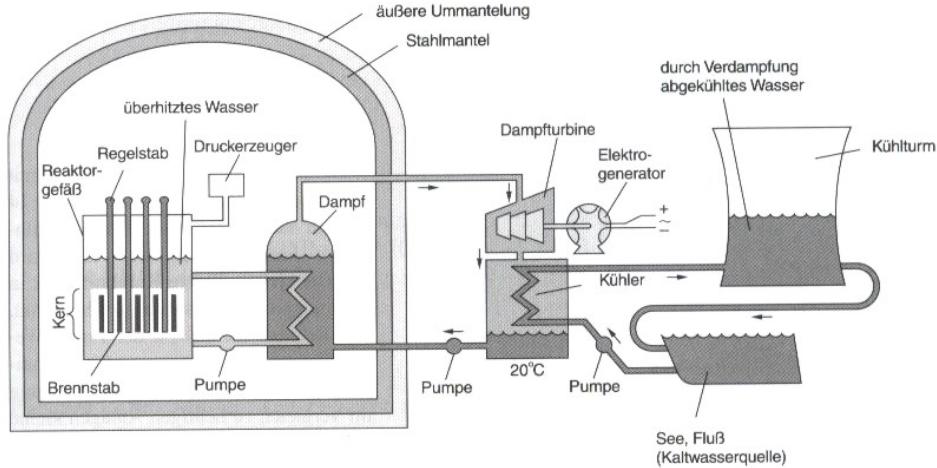


Graphische Veranschaulichung des Neutronenzyklus

Abbildung 3.36: Graphische Veranschaulichung des Neutronenzyklus. (aus Ref. [11])

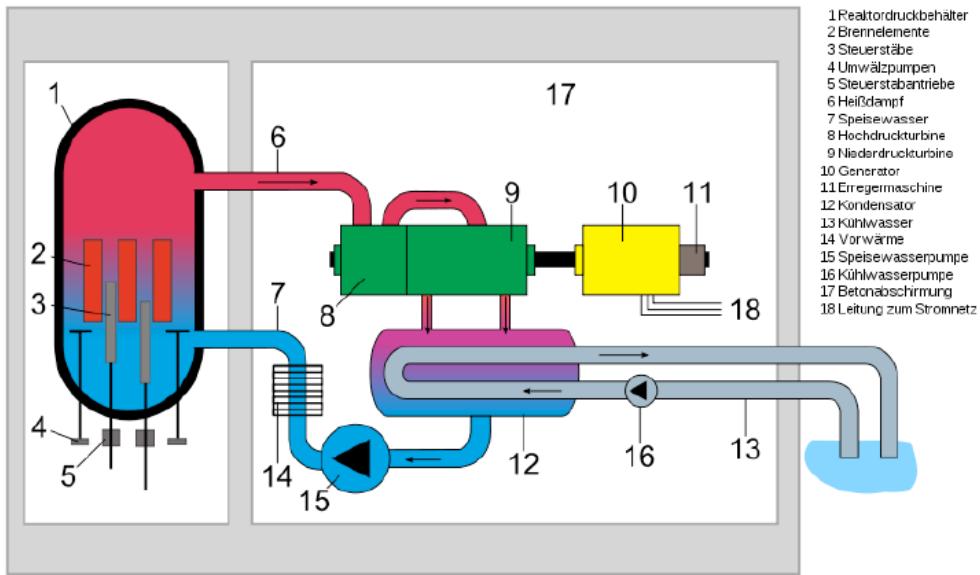
tronen für die Kettenreaktion verloren gehen können, bis sie zu einer weiteren Spaltung führen. Die Verluste werden hervorgerufen durch

- Entweichen von Neutronen
- Absorption  $\sigma(n, \gamma)$ , insbesondere im Resonanzbereich
- Einfang in anderen Materialen (Moderator, Reaktorgifte,...)  $\neq$  Brennstoff



Vereinfachtes Schema eines Druckwasserreaktors (PWR, *pressurized water reactor*). Das mit dem Reaktorkern in Kontakt stehende Wasser dient sowohl als Moderator als auch als Wärmeträger. Sein Kreislauf ist vollständig vom Sekundärkreislauf getrennt, in welchen Wasser erhitzt wird, um Dampfturbinen anzutreiben. Viele Details, unter anderem die Notkühlvorrichtungen, werden hier nicht gezeigt. Im Siedewasserreaktor (BWR, *boiling water reactor*) wird Dampf aus dem Primärwasserkreislauf direkt (ohne Isolationskreislauf) zu den Turbinen geleitet.

Abbildung 3.37: Schematische Darstellung eines Druckwasserreaktors. (aus Ref. [11])



### Aufbau eines Siedewasserreaktors

Abbildung 3.38: Aufbau eines Siedewasserreaktors, die heute kaum noch gebaut werden.

# 4 Das Schalenmodell des Kerns

## Motivation:

Die Feinstruktur der Bindungsenergie pro Nukleon ist bisher nicht erklärt. Es existieren sog. magische Zahlen, 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ..., für die energetisch besonders günstige Konfigurationen vorliegen. Diese Zahlen suggerieren Schalenabschlüsse, analog zur Elektronenhülle (Edelgaskonfiguration) → Quantenmechanik.

Betrachtet werden Einteilchenzustände. Die Potentialverhältnisse im Kern weisen im Gegensatz zur Atomhülle kein dominierendes Zentralpotential auf, stattdessen dominieren kurzreichweite Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen:

$$H = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{kin. Energie}}}^A T_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^A V_{ij} \quad (4.1)$$

Nukleon–Nukleon Potential

Man beschreibt daher die Wechselwirkung aller Nukleonen auf Nukleon  $i$  durch ein *mittleres Potential* (in Analogie zu Mehrelektronensystemen in der Atomphysik). Man verwendet das Hartree-Fock-Verfahren, eine iterative Lösung.

$$\Rightarrow H = \sum_{i=1}^A (T_i + V_i) \Big|_{\text{Restwechselwirkungen}} + V_R \quad (4.2)$$

, wobei die  $V_i$  ein gemitteltes Potential darstellen. Man betrachtet nun also Zustände *eines* Nukleons in einem von anderen erzeugten mittleren Potential.

Dabei wird jeder Energiezustand nach dem Pauli-Prinzip mit einer erlaubten Zahl von Nukleonen besetzt.

Ein Schalenabschluss wird durch ein voll besetztes Energieniveau sowie eine große Energiedifferenz zum nächsten Niveau gekennzeichnet.

## Form des mittleren Potentials

Bekannt ist, dass kurzreichweite Kräfte zwischen den Nukleonen vorliegen und dass die Nukleonen im Kerninneren von allen Seiten dieselbe Kraft erfahren. Der Ansatz ist nun, dass das Potential in der Mitte flach ist. Weiterhin sollte das Potential symmetrisch um den Kernmittelpunkt sein.

Aus Streuexperimenten ist bereits bekannt, dass ein relativ scharf definierter Kernrand vorliegt.

## Ansätze

(i) Rechteckpotential:  $V(r) = -V_0 (1 - \theta(r - R_0))$

(ii) Harmonischer Oszillator-Potential:  $V(r) = \begin{cases} -V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right) & \text{für } r \leq R_0 \\ 0 & \text{für } r > R_0 \end{cases}$

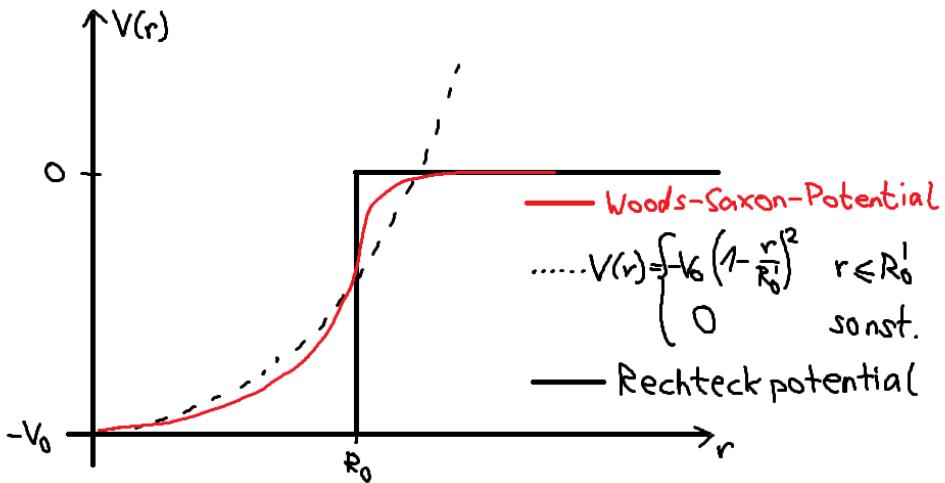


Abbildung 4.1: Rechteckpotential, Harmonischer Oszillatoren-Potential und Woods-Saxon-Potential.  
(Beachte: Das beim Rechteckpotential auftretende  $R_0$  entspricht nicht dem  $R'_0$  des Harmonischen Oszillatoren-Potentials.)

- (iii) Woods-Saxon-Potential: Dieses Potential stellt ein realistischeres Potential dar, welches der Dichteverteilung der Kerne (Ladung) ähnelt:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{-\frac{(r-R_0)}{a}}} \quad (4.3)$$

$a$  stellt hierbei ein Maß für die Randunschärfe dar.

Aufgrund der Radialsymmetrie kann die Lösung der Schrödinger-Gleichung in Radial- und Winkelanteil separiert werden. Da der Winkelanteil in einem solchen Fall nicht vom Potential abhängt, folgt sofort, dass die Wellenfunktion in Radial- und Winkelanteil separiert. Letzterer ist bereits bekannt:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (4.4)$$

Man muss nun also noch Lösungen für  $R(r)$  oder  $u(r) = r \cdot R(r)$  finden:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} \left[ E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0 \quad (4.5)$$

Die Energiewerte sollten von  $n$  und  $\ell$  abhängen<sup>1</sup>.

Für die Fälle (i) und (ii) ist die Schrödinger-Gleichung analytisch lösbar, falls  $V(r) \rightarrow \infty$  für (i)  $r = R_0$  bzw. (ii)  $r \rightarrow \infty$ . Dies stellt eine (geringfügige) Verschiebung der Energieniveaus dar.

Für den dreidimensionalen harmonischen Oszillatoren ist

$$\begin{aligned} E_{n,\ell} &= \left(2(n-1) + \ell + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \\ E_\lambda &= \left(\lambda + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

<sup>1</sup>Die Entartung der Niveaus beim Wasserstoff (d.h. die radiale Schrödinger-Gleichung enthält kein  $\ell$ ) ist eine Besonderheit des Coulomb-Potentials!

, wobei  $\lambda = 2(n - 1) + \ell$  und

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.7}$$

Es ergibt sich somit in der Näherung eines harmonischen Oszillatoren-Potentials:

- Es liegen äquidistante Energieniveaus vor.
- Die Energieniveaus sind entartet, verschiedene  $(n, \ell)$ -Kombinationen liefern gleiche  $\lambda$ -Werte:

$$\lambda = 2 \begin{cases} n = 1, \ell = 2 & 1d \\ n = 2, \ell = 0 & 2s \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\lambda = 3 \begin{cases} n = 1, \ell = 3 & 1f \\ n = 2, \ell = 1 & 2p \end{cases} \tag{4.9}$$

- Diese Entartung wird beim Rechteckpotential ebenso wie beim Woods-Saxon-Potential aufgehoben. Die Energieniveaus hängen dann explizit von  $n$  und  $\ell$  ab.
- Jeder Zustand mit der Quantenzahl  $\ell$  hat eine  $(2\ell + 1)$ -fache Entartung nach der magnetischen Quantenzahl  $m$ .
- Durch das Pauliprinzip ergibt sich die Anzahl der Nukleonen (jeweils Protonen und Neutronen; getrennte Potentialtöpfe) zu

$$\begin{array}{ll} \ell = 0 & \# \text{Nukleonen } p, n = 2 \\ \ell = 1 & = 6 \\ \ell = 2 & = 10 \\ \ell = 3 & = 14 \\ \vdots & \end{array} \tag{4.10}$$

Für das Rechteckpotential sind die Lösungen durch sphärische Besselfunktionen gegeben:

$$u_{n,\ell} = j_\ell(k_{n,\ell} \cdot r) \quad \text{mit} \quad k_{n,\ell} = \sqrt{\frac{2mE_{n,\ell}}{\hbar^2}} \tag{4.11}$$

Durch die Randbedingung

$$j_\ell(k_{n,\ell} \cdot R_0) = 0 \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4.12}$$

kommt es zur Quantelung der Energieniveaus: Nullstellen der Besselfunktionen sind einfach, d.h. nicht entartet. Somit gibt es keine Entartung für verschiedene Kombinationen von  $n$  und  $\ell$ . Aufgrund der Rotationsinvarianz gibt es jedoch eine  $(2\ell + 1)$ -fache Entartung bzgl. der magnetischen Quantenzahl  $m^2$ . Wie beim harmonischen Oszillatorenpotential ergeben sich die Nukleonenzahlen je Niveau.

Da Protonen und Neutronen (jeweils) ununterscheidbare Teilchen sind, kann ein Zustand mit Bahndrehimpuls  $\ell$  mit  $\nu = 2 \cdot (2\ell + 1)$  Spin- $1/2$ -Nukleonen besetzt werden.

---

<sup>2</sup>Zur Erinnerung:  $\ell$  ist die Kopplungskonstante zwischen Radial- und Winkelanteil,  $m$  die Kopplungskonstante zwischen  $\theta(\vartheta)$  und  $\phi(\varphi)$ ,  $\theta(\vartheta) \cdot \phi(\varphi) = Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ .  $m$  tritt nur im Winkelanteil auf.

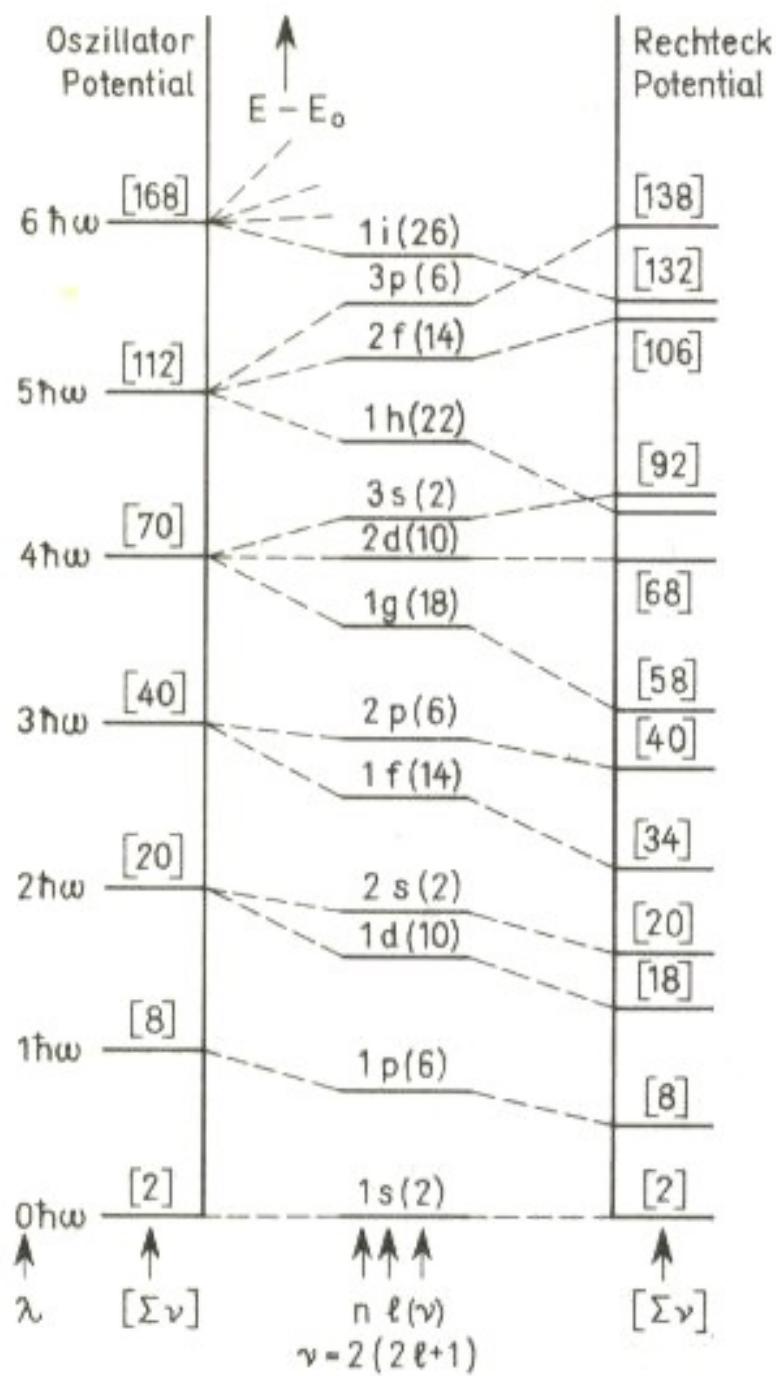


Abbildung 4.2: Energieniveaus im Oszillatoren- und im Rechteckpotential, in der Mitte interpolierte Werte (aus Ref. [1])

Die Schalenabschlüsse liegen in beiden Modellen (Harmonischer Oszillator und Rechteckpotential) bei 2, 8, 20. Es werden jedoch keine höheren magischen Zahlen beschrieben!

Durch ein reines radialsymmetrisches Potential können die magischen Zahlen somit nicht erklärt werden.

### Spin-Bahn-Wechselwirkung

Wichtige Ergebnisse zur Spin-Bahn-Kopplung lieferten Maria Goeppert-Mayer sowie Jensen, Haxel und Suess

Es wird ein Korrekturterm in Analogie zur Atomhülle eingeführt, der die Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls eines Nukleons beschreibt. In der Atomhülle sind die Effekte der Spin-Bahn-Kopplung relativ klein, sie führen zur Feinstrukturaufspaltung. Im Kern ist die Spin-Bahn-Kopplung in der gleichen Größenordnung wie die Termabstände.

In Analogie zur Atomhülle setzt man an:

$$V_i = V(r) + V_{\ell s}(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s} \quad (4.13)$$

, wobei  $\vec{\ell}$  und  $\vec{s}$  die Bahn- und Spin-Drehimpulsoperatoren eines Nukleons sind.  $V_{\ell s}(r)$  ist eine beliebige Funktion der radialen Koordinate und beschreibt die radiale Abhängigkeit des Spin-Bahn-Potentials. Es gilt:

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle j^2 \rangle - \langle \ell^2 \rangle - \langle s^2 \rangle \right\} = \frac{1}{2} \left\{ j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right\} \quad (4.14)$$

Somit ist für

$$\begin{aligned} j = \ell + 1/2 & \quad \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = 1/2\ell & V_i = V(r) + \frac{1}{2} V_{\ell s} \cdot \ell \\ j = \ell - 1/2 & \quad \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = -1/2(\ell+1) & V_i = V(r) - \frac{1}{2} V_{\ell s} \cdot (\ell+1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\Delta E = E(\ell + 1/2) - E(\ell - 1/2) = \frac{1}{2} V_{\ell s} (2\ell + 1) \quad (4.16)$$

Die Aufspaltung ist somit  $\sim (2\ell+1)$ , d.h. wir erhalten große Effekte für große  $\ell$ -Werte, die zu einer Umordnung der Energieniveaus führen.  $V_{\ell s}$  ist nicht aus fundamentalen Prinzipien berechenbar und muss daher (basierend auf Modellen) an experimentelle Daten angepasst werden. Wenn  $V_{\ell s}(r)$  ebenso wie  $V(r)$  negativ ist, so liegen die Zustände für  $j = (\ell - 1/2)$  energetisch höher als die für  $j = (\ell + 1/2)$ .

Experimentelle Evidenz findet man aus der Streuung von Neutronen an  ${}^4_2\text{He}$ :

- ${}^4_2\text{He}$  hat den  $(1s)$ -Zustand vollständig besetzt.
- Die nächst höher liegenden Zustände sind  $1p_{3/2}$  und  $1p_{1/2}$ .

Die Analyse der Streuung von Neutronen an  ${}^4_2\text{He}$  zeigt, dass der  $j = 3/2$ -Zustand niedriger liegt als der  $j = 1/2$ -Zustand.

Weitere Korrekturen aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung zwischen Protonen führen zu leichten Unterschieden zwischen  $p$ - und  $n$ -Niveaus.

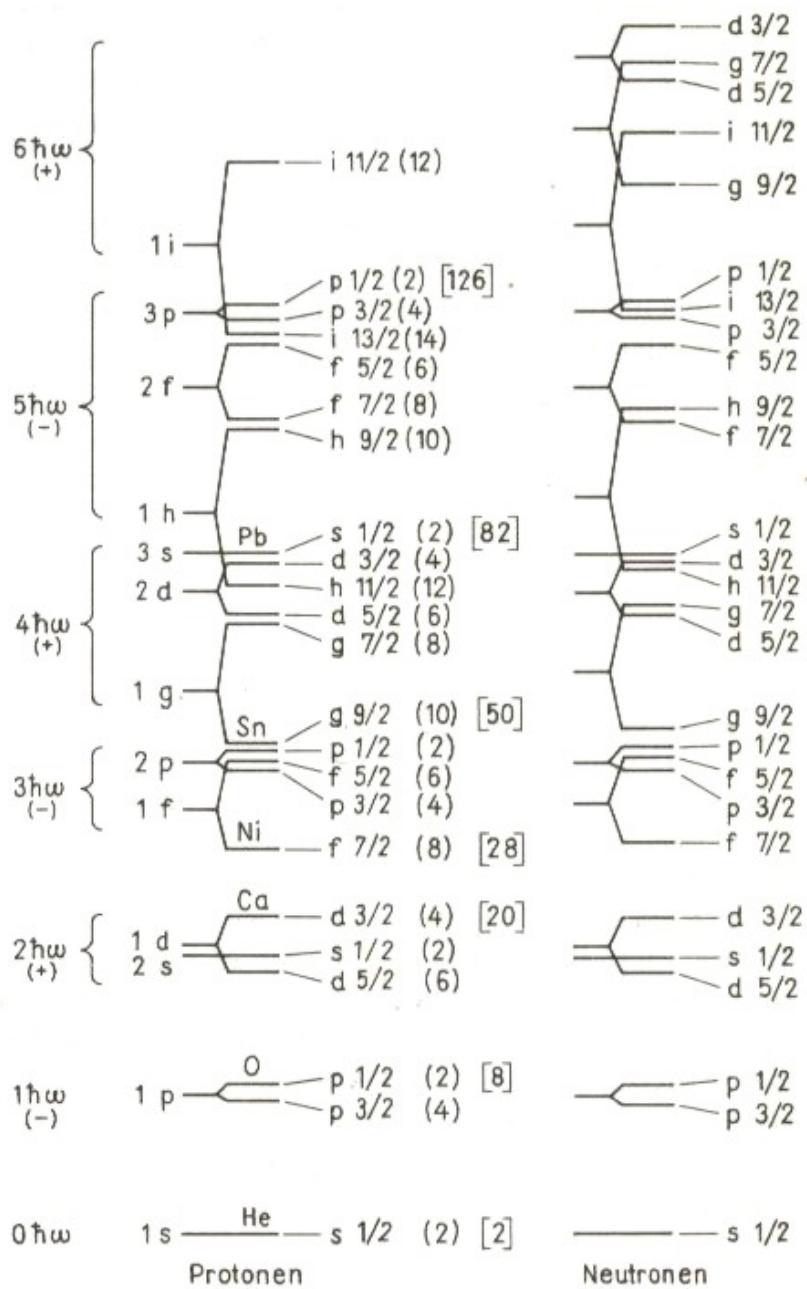


Abbildung 4.3: Energieniveaus nach dem Schalenmodell mit Spin-Bahn-Aufspaltung (aus Ref. [1]).

Mittels des Schalenmodells inklusive  $\vec{\ell}\vec{s}$ -Kopplung (und Coulomb-Wechselwirkung) lassen sich somit die magischen Zahlen erklären, da die Spin-Bahn-Kopplung starke Verschiebungen ( $\Delta E \sim \ell$ ) hervorruft, welche zu einer Umsortierung der Niveaus führt.

Wegen  $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$  erwartet man eine  $(2j+1)$ -fache Entartung der Protonen- und Neutronenniveaus. Die Parität ist bestimmt durch die Winkelsymmetrie, d.h.  $Y_\ell^m$ . Daher ist

$$\pi = (-1)^\ell, \quad \ell = \begin{matrix} s, p, d, f, g \\ 0, 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \quad (4.17)$$

Energieniveaus gruppieren sich um gerade / ungerade  $\ell$ -Werte, sodass den Schalen eine definierte Parität zugeordnet werden kann.

**s,d-Gruppe** positive Parität

**p,f-Gruppe** negative Parität

Vorhersagen des Schalenmodells:

Die Energieniveaus werden mit Protonen und Neutronen aufgefüllt (getrennte Niveauschema!)

$n\ell j$	1s 1/2	1p 3/2	1p 1/2	1d 5/2	2s 1/2	1d 3/2	1f 7/2
$\nu = 2j + 1$	2	4	2	6	2	4	8
$\Sigma\nu$	2 ${}^4_2\text{He}_2$	6	8 ${}^{16}_8\text{O}_8$	14	16	20 ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$	28 ${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}({}^{56}_{28}\text{Ni}_{28})$

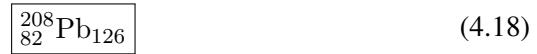
Abbildung 4.4: Auffüllen der Kernschalen (aus Ref. [1])

(1) Magische Zahlen

(2) Hohe Bindungsenergie für doppelt magische Kerne: Für 2, 8 und 20 trifft dies zu, jedoch ist  ${}^{56}_{28}\text{Ni}_{28}$  bereits instabil, seine  $\beta$ -Lebensdauer ist allerdings deutlich größer als für Nachbarkerne:

- $\tau({}^{56}_{28}\text{Ni}_{28}) = 6.1 \text{ d}$
- $\tau({}^{57}_{28}\text{Ni}_{29}) = 36 \text{ h}$
- $\tau({}^{55}_{27}\text{Co}_{28}) = 18 \text{ h}$

Ein doppelt magischer, stabiler Kern tritt auf bei



Dieses Isotop stellt den Endpunkt der Uran-/Thorium-  $\alpha$ -Zerfallsreihen dar.

(3) Spin und Parität:

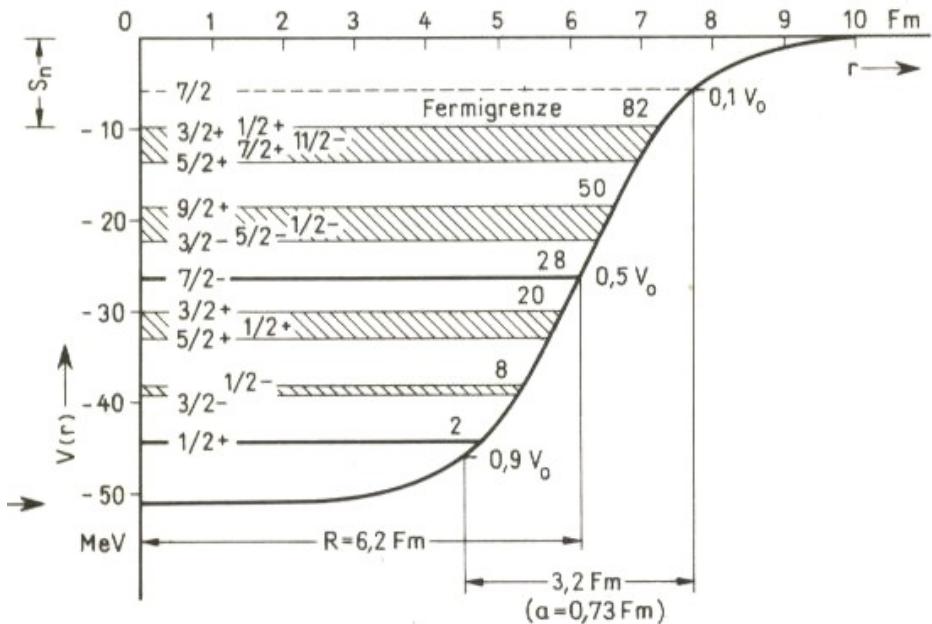


Abbildung 4.5: Auffüllen der Kernschalen (aus Ref. [1])

- In jeder abgeschlossenen  $j$ -Unterschale (z.B.  $p_{3/2}$ ,  $d_{5/2}$ ) sind alle magnetischen  $m_j$ -Zustände voll besetzt, das heißt alle Nukleonen koppeln zum Spin 0.
- Im Einklang mit Experimenten: Kerne mit abgeschlossenen Protonen- und Neutronenschalen haben Spin 0, sind kugelsymmetrisch.
- Quadrupoldeformationen verschwinden bei magischen Nukleonenzahlen.
- Für ein einzelnes Nukleon außerhalb einer abgeschlossenen Unterschale sind Spin und Parität durch das Niveau bestimmt, in welchem sich das Nukleon befindet. Selbiges gilt für 1-Nukleon-Lochzustände (1 fehlendes Nukleon in einer Schale). Beispiel:  ${}^8_8 O_7 \rightarrow J^\pi = 1/2^-$  (ein fehlendes Neutron),  ${}^{17}_8 O_9 \rightarrow J^\pi = 5/2^+$  (ein Neutron in der  $1d_{5/2}$ -Schale).
- Die Situation ist schwieriger bei nur teilweise gefüllten  $j$ -Schalen, wegen der starken  $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$ -Kopplung erwartet man eine  $jj$ -Kopplung der Nukleonen:  $\vec{I} = \sum_i \vec{j}_i$ . Für zwei Nukleonen in der  $f_{7/2}$ -Schale erhält man

$$j_{\text{ges}} = 7/2 \otimes 7/2, \quad 0 \leq I \leq 7 \quad (4.19)$$

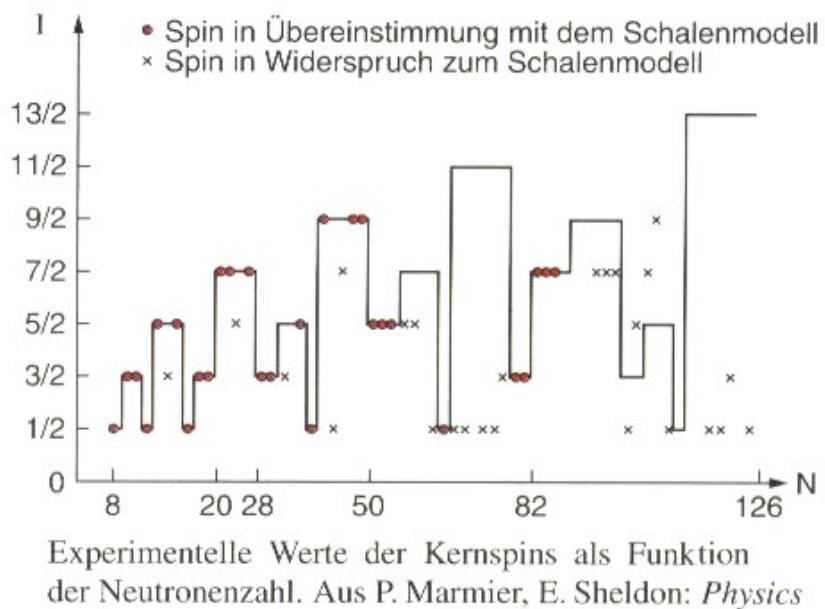
Das Pauli-Prinzip bewirkt, dass ungerade, ganzzahlige Spins ausgeschlossen sind  $\Rightarrow I = 0, 2, 4, 6^3$ .

<sup>3</sup>Details der Spin-Kopplung bei nicht-abgeschlossenen Schalen mit mehreren Nukleonen hängen von der Spin-Abhängigkeit der Nukleonenträger ab. Diese sind im Schalenmodell nicht berücksichtigt, sie fallen unter die Restwechselwirkungen.

- Generell gilt auch für nicht abgeschlossene Schalen: alle geradzahlig vor kommenden Nukleonen koppeln zum Drehimpuls  $0 \rightarrow$  (gg)-Kerne besitzen  $I = 0$ .

(4) Vorhersage/Bestätigung von isomeren Zuständen:

- langlebige  $\gamma$ -Übergänge mit hoher Drehimpulsänderung  $\Delta I$ , z.B.  $2p_{1/2}$  Schale  $\rightarrow 1g_{9/2}$  bei [39-42] ( $p, n$ ) (17 Isomere mit M4, sowie weitere Isomerinseln [65-81] und [101-125])



Experimentelle Werte der Kernspins als Funktion der Neutronenzahl. Aus P. Marmier, E. Sheldon: *Physics*

Abbildung 4.6: Experimentelle Werte des Kernspins als Funktion der Nukleonenzahl im Vergleich zu den Vorhersagen des Schalenmodells (aus Ref. [13]).

# 5 Einführung in die Teilchenphysik

## 5.1 Neue Teilchen und Antiteilchen

### 5.1.1 Die ersten Elementarteilchen

**1897** Identifizierung des Elektrons durch J. J. Thomson: Das erste Elementarteilchen, welches entdeckt wurde ist das elektrisch geladene Elektron. Es wird aufgrund seiner Ladung in elektrischen und magnetischen Feldern abgelenkt und stellt auch heute noch das leichteste elektrisch geladene Teilchen dar. Seine wichtigsten Eigenschaften sind:  $Q = -e$ ,  $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$ , Spin =  $1/2\hbar$ , stabil,  $\tau = \infty$

**1911-1919** Rutherford'sche Streuexperimente, Identifizierung des Wasserstoffkerns als Proton

**1930** Neutrino-Hypothese von Pauli (von Pauli noch als *Neutron* bezeichnet)

**1932** Entdeckung des Neutrons ( $\neq$  Neutrino) durch J. Chadwick

Die Teilchen interagieren über verschiedene Wechselwirkungen: Die Gravitation, die elektromagnetische Wechselwirkung, die starke Wechselwirkung (Kernkräfte) und die schwache Wechselwirkung ( $\beta$ -Zerfall).

### 5.1.2 Antimaterie

Im Jahre 1932 wurde durch Anderson das *Positron* bei systematischen Durchmusterungen von Nebelkammeraufnahmen von Teilchenspuren, die durch Höhenstrahlung erzeugt wurden, entdeckt. Das Teilchen zeigte eine positive Ladung und eine große Reichweite, durch letzteres konnte es in den Nebelkammeraufnahmen von einem Proton unterschieden werden.

- Das Positron wurde zunächst als positiv geladenes Elektron interpretiert.
- Eigenschaften:  $Q=+e$ ,  $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$ , Spin:  $1/2\hbar$ , im Vakuum ist es stabil, sodass die mittlere Lebensdauer  $\tau = \infty$  ist.
- Feynmann/Stückelberg (Theorie, 40er Jahre): Die Lösungen der Dirac-Gleichung, die zu negativen Energien gehören, werden als Zustände positiver Energie von sogenannten *Antiteilchen* interpretiert.
- *Quantenfeldtheorien* besitzen eine grundlegende Eigenschaft: Zu jedem Teilchen muss es ein Antiteilchen geben, das dieselbe Masse hat, aber entgegengesetzte additive Quantenzahlen (Symmetrie zwischen Materie und Antimaterie).

### 5.1.3 Weitere Teilchen in der kosmischen Strahlung

V. Hess untersuchte bereits 1912 die kosmische Höhenstrahlung mithilfe von Ballon-Experimenten und Photoplatten in großer Höhe (Berge).

1937 entdeckten Anderson und Nedermeyer ein neues Teilchen  $X$  in der kosmischen Strahlung:

$$m_X = 105 \text{ MeV}/c^2 \quad (5.1)$$

Ursprünglich wurde es als *Yukawa-Teilchen*,  $\pi$ -Meson (mittlere Masse) assoziiert. Es wurde auch als Austauschteilchen der starken Wechselwirkung betrachtet, deren kurze Reichweite durch den Austausch eines massiven Teilchens erklärt würde. Heute ist bekannt, dass es sich hierbei nicht um ein  $\pi$ -Meson handelt, sondern  $X = \mu$ , d.h. ein Myon, eine schwerere Ausgabe des Elektrons ist ( $Q = \pm 1e$ , Spin =  $1/2\hbar$ ,  $m = 105.7 \text{ MeV}/c^2$ ).

1946 erfolgte die Klarstellung in Rom: Das  $X$ -Teilchen der kosmischen Strahlung wechselwirkt nur schwach mit Materie (d.h. mit Kernen) und kann demzufolge nicht mit dem Austauschteilchen der starken Wechselwirkung identisch sein.

Das Teilchen besitzt eine kurze Lebensdauer:

$$\tau_\mu = 2.20 \cdot 10^{-6} \text{ s}, \quad c\tau_\mu = 659.1 \text{ m} \quad (5.2)$$

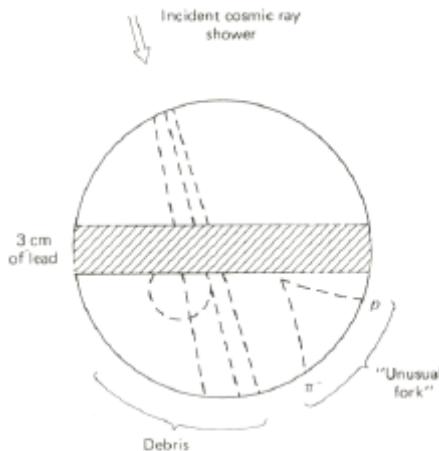
Powell *et al.* entdeckten 1947 in Bristol ein zweites, mittelschweres Teilchen in der kosmischen Strahlung. Sie nutzen dabei eine photographische Emulsion auf Berghöhe. Das von ihnen entdeckte Teilchen wird heute als  $\pi$ -Meson bezeichnet:

$$m_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2, \quad \tau_\pi = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad (5.3)$$

$\pi$ -Mesonen entstehen in der oberen Atmosphäre, sie zerfallen oder wechselwirken aber bevor sie den Erdboden erreichen. In Rom, auf Meereshöhe sind fast nur noch Myonen anzutreffen. Die jeweils wichtigsten Zerfälle von Myonen und Pionen sind

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu, \quad \mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e + \nu_\mu \quad (5.4)$$

### 5.1.4 Weitere, sogenannte seltsame Teilchen



**Figure 1.8** The first strange particle. Cosmic rays strike a lead plate, producing a  $K^0$ , which subsequently decays into a pair of charged pions. (Photo courtesy of Prof. G. D. Rochester. Reprinted by permission from *Nature* **160**, 855. Copyright © 1947, Macmillan Journals Limited.)

Abbildung 5.1: Erstes entdecktes seltsames Teilchen (aus *Macmillan Journals Limited, 1947*)

Ende der 1940er und in den 1950er Jahren wird an Teilchenbeschleunigern eine neue „Klasse“ von Teilchen entdeckt, die sogenannten *seltsamen Teilchen*. Ihre Eigenschaften umfassen:

- Sie zerfallen mit Lebensdauern von  $10^{-8} - 10^{-10}$  s in bereits bekannte Teilchen (z.B.  $p$  und  $\pi^\pm, \pi^0$ ).
- Neutrale seltsame Teilchen zeigen eine charakteristische V-Signatur beim Zerfall (siehe Abb. 5.2). Aus der Impulsmessung der Zerfallsteilchen  $\vec{p}_1, m_1$  und  $\vec{p}_2, m_2$  im bekannten B-Feld lässt sich die invariante Masse  $m$  des zerfallenen Teilchens berechnen:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ \vec{p}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 + E_2 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}, \quad m = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} \quad (5.5)$$

Beispiele für neue, neutrale, seltsame Teilchen sind

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^-, \quad m(K^0) = 497.7 \text{ MeV}, \quad \tau(K^0) = 5.2 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ \Lambda &\rightarrow p \pi^-, \quad m(\Lambda) = 1115.6 \text{ MeV}, \quad \tau(\Lambda) = 2.6 \cdot 10^{-10} \text{ s} \end{aligned} \quad (5.6)$$

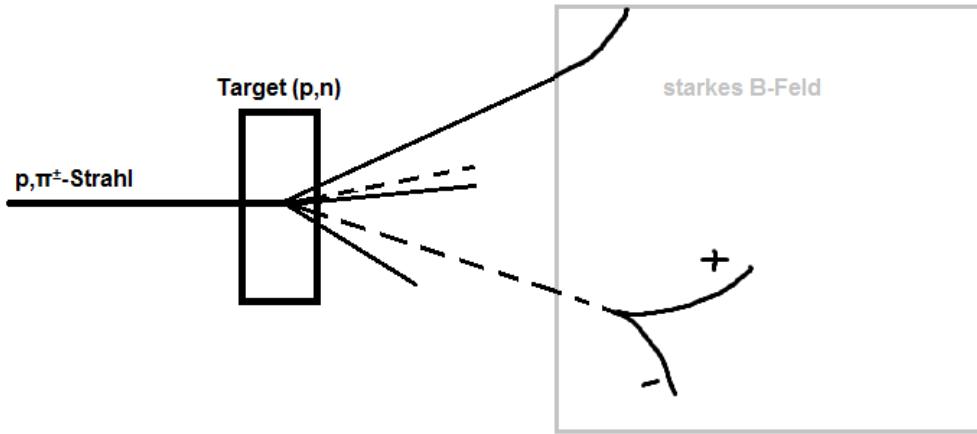


Abbildung 5.2: Neutrale, seltsame Teilchen zeigen eine charakteristische V-Signatur beim Zerfall

Ein geladenes, seltsames Teilchen ist beispielsweise

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^\mp \pi^\pm, \quad m(K^\pm) = 493.7 \text{ MeV}, \quad \tau(K^\pm) = 1.2 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad (5.7)$$

Zu den mittelschweren seltsamen Teilchen,  $m_{\pi^\pm} < m < m_p$  gehören  $K^+, K^-, K^0, K_2^0, \eta, \eta'$ , zu den schweren seltsamen Teilchen gehören

$$\begin{aligned} \Lambda^0, \quad & m(\Lambda) = 1115.6 \text{ MeV} \\ \Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0, \quad & m(\Sigma^+) = 1197.3 \text{ MeV} \\ & m(\Sigma^0) = 1192.5 \text{ MeV} \\ \Xi^0, \Xi^\pm, \quad & m(\Xi^\pm) = 1321.3 \text{ MeV} \\ & m(\Xi^0) = 1314.9 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Parallel zu den neuen seltsamen Teilchen wurden auch weitere, *nicht-seltsame* Teilchen entdeckt:

- $\pi^0$ -Teilchen: Neutrales Partnerteilchen von  $\pi^\pm$ . Ihre Masse unterscheidet sich nur geringfügig:

$$m(\pi^0) = 134.96 \text{ MeV}, \quad m(\pi^\pm) = 139.57 \text{ MeV} \quad (5.9)$$

Der Hauptzerfall des  $\pi^0$ -Teilchens ist  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $\tau(\pi^0) \sim 10^{-16} \text{ s}$ . Das  $\pi^0$ -Teilchen ist das leichteste bekannte Meson, sodass kein weiterer Zerfall in ein leichteres Meson möglich ist.

- $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$ -Teilchen: Ihre Hauptzerfälle sind

$$\begin{aligned} \Delta^{++} & \rightarrow p\pi^+ \\ \Delta^+ & \rightarrow p\pi^0 \\ & \rightarrow n\pi^+ \\ \Delta^0 & \rightarrow p\pi^- \\ & \rightarrow n\pi^0 \\ \Delta^- & \rightarrow n\pi^- \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Masse aller  $\Delta$ -Teilchen liegt bei  $m(\text{Delta}) \approx 1232 \text{ MeV}$ ,  $\tau(\Delta) \sim 0.6 \cdot 10^{-23} \text{ s}$ .

Zu beachten sind hierbei die charakteristischen Zeitstufen:

$$\begin{aligned} &\text{schwache Wechselwirkung, } \tau = 10^{-10} - 10^{-8} \text{ s} \\ &\text{elektromagnetische Wechselwirkung, } \tau = 10^{-16} \text{ s} \\ &\text{starke Wechselwirkung, } \tau = 10^{-23} \text{ s} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Zerfallszeiten bei schwachen Zerfällen entspricht den Zerfallszeiten von seltsamen Teilchen. Seltsame Teilchen zerfallen also aufgrund der schwachen Wechselwirkung.

- Seltsame Teilchen werden durch stark wechselwirkende Teilchen immer *paarweise erzeugt*.

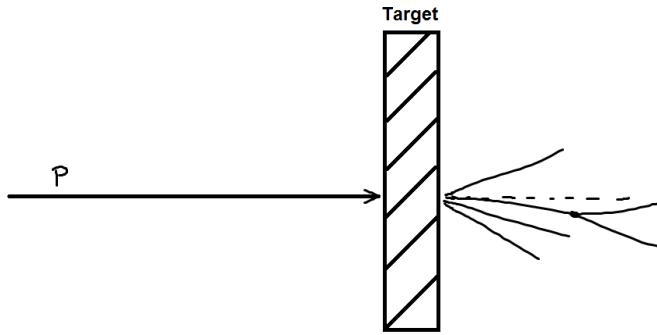


Abbildung 5.3: Beispiel für die Erzeugung neuer Teilchen durch Beschuss eines Targets mit geladenen Teilchen

Der Anfangszustand besteht beispielsweise aus  $pp, pn, \pi^\pm p, \pi^\pm n, \dots$ , sodass es beispielsweise zu einer Reaktion wie



kommt.

- Zerfälle seltsamer Teilchen durch die schwache Wechselwirkung weisen aufgrund der relativ langen Lebensdauer eine schärfere Resonanz auf, als Zerfälle aufgrund der starken Wechselwirkung ( $\tau_{\text{weak}} \sim 10^{-10} - 10^{-8} \text{ s}$ ,  $\tau_{\text{strong}} \sim 10^{-23} \text{ s}$ ). Umgekehrt lässt sich aus der Breite der Resonanzkurve auf die Lebensdauer schließen.
- Seltsame Teilchen zerfallen über die schwache Wechselwirkung in nicht-seltsame Teilchen. Die schwache Wechselwirkung beseitigt also die *Seltsamkeit (strangeness)*.

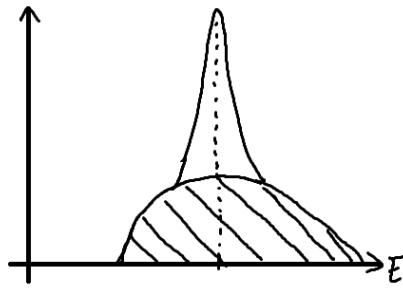
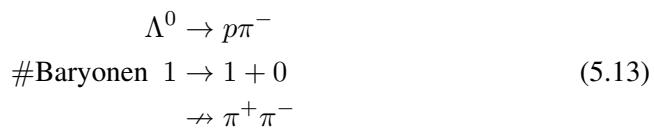


Abbildung 5.4: Aufgrund der längeren Lebensdauer schwach zerfallender Teilchen ist ihre Zerfallsenergie deutlich kleiner als bei stark zerfallenden Teilchen

- Mit der Entdeckung der seltsamen Teilchen ergaben sich eine Fülle neuer Teilchen, die alle in starker Wechselwirkung produziert werden können. Der Oberbegriff für alle Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, ist *Hadronen* (gr. hadros = stark). Dies stellt eine Abgrenzung gegenüber Leptonen ( $e, \mu, \dots, \nu$ ) dar, die „nicht stark“ wechselwirken.

Weiter unterteilt man in *Mesonen* („mittlere Masse“, pionähnlich, ganzzaliger Spin 0, 1) und *Baryonen* („schwere Masse“, Proton-ähnlich, halbzahliges Spin  $1/2, 3/2$ )

Experimentell stellt man fest, dass für Baryonen ein Erhaltungssatz gilt; Die Zahl der Baryonen bleibt in Wechselwirkungsprozessen erhalten. Dies gilt sowohl für die starke und die elektromagnetische, als auch für die schwache Wechselwirkung.



Für Mesonen gilt ein solcher Erhaltungssatz *nicht*:



Sie können in Leptonen zerfallen und in Zerfällen erzeugt werden.

### 5.1.5 Entdeckte Teilchen

Die folgende Grafik gibt einen Überblick über die Zeiträume, in denen neue Teilchen entdeckt wurden.

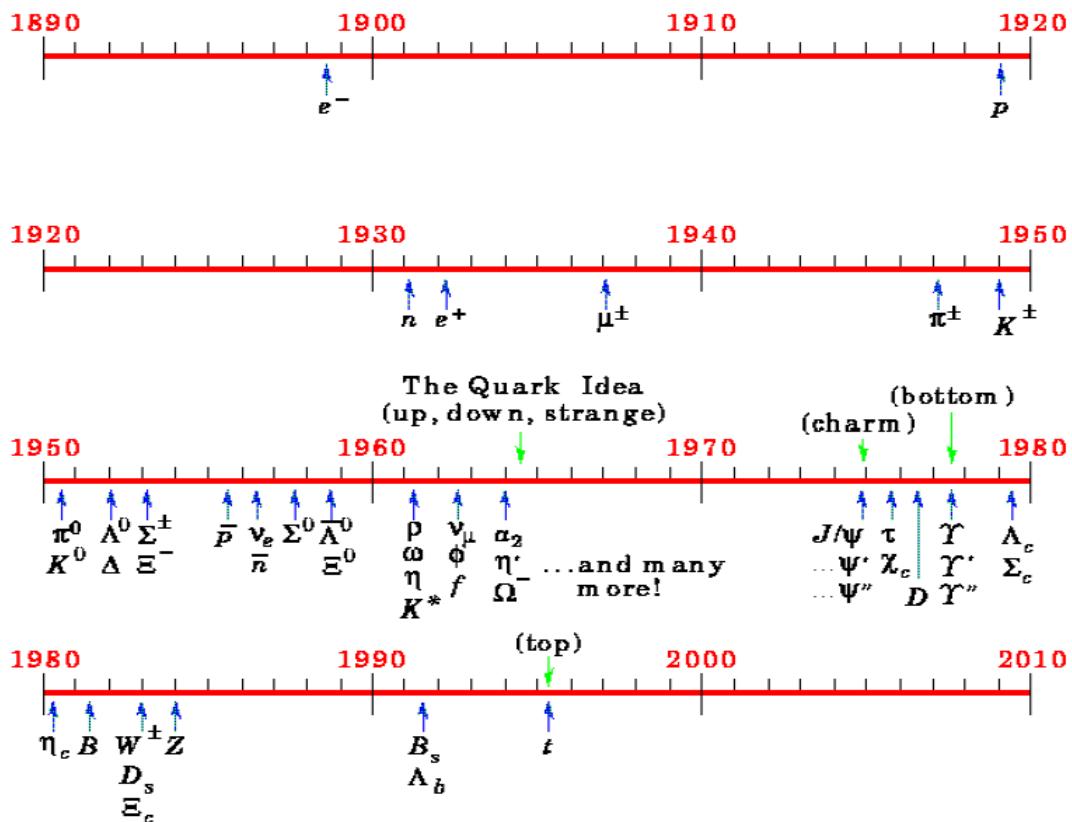


Abbildung 5.5: Timeline neuer entdeckter Teilchen

Zudem sollen die folgenden Tabellen eine Zusammenfassung über die Teilchendaten verschiedener Mesonen, Baryonen und Leptonen geben.

**PARTICLE DATA**  
**(Mass in MeV/c<sup>2</sup>; Lifetime in Seconds; Charge in Units of Proton Charge.)**

QUARKS (Spin  $\frac{1}{2}$ )

	Flavor	Charge	Mass (speculative)		
			Bare	Effective	
				In baryons	In mesons
First generation	$d$	$-\frac{1}{3}$	7.5	363	310
	$u$	$+\frac{2}{3}$	4.2		
Second generation	$s$	$-\frac{1}{3}$	150	538	483
	$c$	$+\frac{2}{3}$	1100		
Third generation	$b$	$-\frac{1}{3}$	4200	1500	4700
	$t$	$+\frac{2}{3}$			
				$\sim 173.000$	

LEPTONS (Spin  $\frac{1}{2}$ )

	Lepton	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
First generation	$e$	-1	0.511003	$\infty$	—
	$\nu_e$	0	0	$\infty$	—
Second generation	$\mu$	-1	105.659	$2.197 \times 10^{-6}$	$e\nu_\mu\bar{\nu}_e$
	$\nu_\mu$	0	0	$\infty$	—
Third generation	$\tau$	-1	1784	$3.3 \times 10^{-13}$	$\mu\nu_\tau\bar{\nu}_\tau, e\nu_\tau\bar{\nu}_e, \rho\nu_\tau$
	$\nu_\tau$	0	0	$\infty$	—

MEDIATORS (Spin 1)

Mediator	Charge	Mass	Lifetime	Force
gluon	0	0	$\infty$	strong electromagnetic (charged) weak (neutral) weak
photon ( $\gamma$ )	0	0	$\infty$	
$W^\pm$	$\pm 1$	81,800	unknown	
$Z^0$	0	92,600	unknown	

Abbildung 5.6: Überblick über Quarks, Leptonen und Austauschteilchen

### BARYONS (Spin $\frac{1}{2}$ )

Baryon	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$N \begin{cases} p \\ n \end{cases}$	$uud$ $udd$	+1 0	938.280 939.573	$\infty$ 900	— $p\pi^-, n\pi^0$
$\Lambda$	$uds$	0	1115.6	$2.63 \times 10^{-10}$	$p\pi^-, n\pi^0$
$\Sigma^+$	$uus$	+1	1189.4	$0.80 \times 10^{-10}$	$p\pi^0, n\pi^+$
$\Sigma^0$	$uds$	0	1192.5	$6 \times 10^{-20}$	$\Lambda\gamma$
$\Sigma^-$	$dds$	-1	1197.3	$1.48 \times 10^{-10}$	$n\pi^-$
$\Xi^0$	$uss$	0	1314.9	$2.90 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$
$\Xi^-$	$dss$	-1	1321.3	$1.64 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$
$\Lambda_c^+$	$udc$	+1	2281	$2 \times 10^{-13}$	not established

### BARYONS (Spin $\frac{3}{2}$ )

Baryon	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$\Delta$	$uuu, uud, udd, ddd$	+2, +1, 0, -1	1232	$0.6 \times 10^{-23}$	$N\pi$
$\Sigma^*$	$uus, uds, dds$	+1, 0, -1	1385	$2 \times 10^{-23}$	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
$\Xi^*$	$uss, dss$	0, -1	1533	$7 \times 10^{-23}$	$\Xi\pi$
$\Omega^-$	$sss$	-1	1672	$0.82 \times 10^{-10}$	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-, \Xi^-\pi^0$

### PSEUDOSCALAR MESONS (Spin 0)

Meson	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$\pi^+$	$u\bar{d}, d\bar{u}$	+1, -1	139.569	$2.60 \times 10^{-8}$	$\mu\nu_\mu$
$\pi^0$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	134.964	$8.7 \times 10^{-17}$	$\gamma\gamma$
$K^\pm$	$u\bar{s}, s\bar{u}$	+1, -1	493.67	$1.24 \times 10^{-8}$	$\mu\nu_\mu, \pi^+\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
$K^0, \bar{K}^0$	$d\bar{s}, s\bar{d}$	0, 0	497.72	$\left\{ \begin{array}{l} K_S^0 0.892 \times 10^{-10} \\ K_L^0 5.18 \times 10^{-8} \end{array} \right.$	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$
$\eta$	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0	548.8	$7 \times 10^{-19}$	$\gamma\gamma, \pi^0\pi^0\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
$\eta'$	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	0	957.6	$3 \times 10^{-21}$	$\eta\pi\pi, \rho^0\gamma$
$D^+$	$c\bar{d}, d\bar{c}$	+1, -1	1869	$9 \times 10^{-13}$	$K\pi\pi$
$D^0, \bar{D}^0$	$c\bar{u}, u\bar{c}$	0, 0	1865	$4 \times 10^{-13}$	$K\pi\pi$
$F^0$ (now $D_s^0$ )	$c\bar{s}, s\bar{c}$	+1, -1	1971	$3 \times 10^{-13}$	not established
$B^\pm$	$u\bar{b}, b\bar{u}$	+1, -1	5271	$\left. \right  14 \times 10^{-13}$	$D + ?$
$B^0, \bar{B}^0$	$d\bar{b}, b\bar{d}$	0, 0	5275	$\left. \right  6 \times 10^{-23}$	$KK\pi, \eta\pi\pi, \eta'\pi\pi$
$\eta_c$	$c\bar{c}$	0	2981		

### VECTOR MESONS (Spin 1)

Meson	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$\rho$	$u\bar{d}, d\bar{u}, (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	+1, -1, 0	770	$0.4 \times 10^{-23}$	$\pi\pi$
$K^*$	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	+1, -1, 0, 0	892	$1 \times 10^{-23}$	$K\pi$
$\omega$	$(u\bar{s} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	783	$7 \times 10^{-23}$	$\pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\gamma$
$\phi$	$s\bar{s}$	0	1020	$20 \times 10^{-23}$	$K^+K^-, K^0\bar{K}^0$
$J/\psi$	$c\bar{c}$	0	3097	$1 \times 10^{-20}$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, 5\pi, 7\pi$
$D^*$	$c\bar{d}, d\bar{c}, c\bar{u}, u\bar{c}$	+1, -1, 0, 0	2010	$> 1 \times 10^{-22}$	$D\pi, D\gamma$
$\Gamma$	$b\bar{b}$	0	9460	$2 \times 10^{-20}$	$\tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-, e^+e^-$

Abbildung 5.7: Überblick über Baryonen und Mesonen

## 5.2 Additive Quantenzahlen

Additive Quantenzahlen verhalten sich (wie ihre Bezeichnung impliziert) additiv. Sie bringen Erhaltungssätze mit sich, welche die erlaubten Reaktionen festlegen:

		stark	el.magn.	schwach
0	Energie/Impuls	$E/p$	✓	✓
1	Elektrische Ladung	$Q$	✓	✓
2	Leptonenzahl	$L$	✓	✓
3	Baryonenzahl	$B$	✓	✓
4	Strangeness/Seltsamkeit		✓	✓
				nein!

Die Leptonenzahl  $L$  ist sogar für jede Generation erhalten, d.h.  $L_e$ ,  $L_\mu$  und  $L_\tau$  sind jeweils erhalten (vgl. Tab. 5.1). Beispiele für solche Zerfälle sind

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ \nu_\mu \\ &\rightarrow e^+ \nu_e \\ \mu^- &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \\ &\rightarrow e^- \gamma \end{aligned} \tag{5.15}$$

Der letzte Zerfall ist nicht erlaubt, wenn der Erhaltungssatz der Leptonenzahl für jede Generation einzeln gilt, die zugehörige *branching ratio* (BR) für diesen Zerfall ist  $< 1.2 \cdot 10^{-11}$  (bei 90% CL (confidence level)).

Tabelle 5.1: Leptonenzahl aufgespaltet in die drei Generationen. Die entsprechenden Anti-Teilchen besitzen dieselben Leptonenzahlen mit umgekehrtem Vorzeichen.

	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$
$e^-$	1	0	0
$\mu^-$	0	1	0
$\tau^-$	0	0	1
$\nu_e$	1	0	0
$\nu_\mu$	0	1	0
$\nu_\tau$	0	0	1

Konsequenzen der Leptonenzahlerhaltung:

- Im Myonenzerfall treten zwei Neutrinos auf ( $\bar{\nu}_e$  und  $\nu_\mu$  beim Zerfall von  $\mu^-$ ).
- Zerfälle der Art  $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$  wurden bislang nicht beobachtet.
- Das leichteste (geladene) Lepton ist stabil.

Baryonen wird die Baryonenzahl  $B = +1$  zugewiesen, Antibaryonen  $B = -1$ . Auch die Baryonenzahl ist in allen Zerfällen erhalten.

Konsequenzen der Baryonenzahlerhaltung:

- Das leichteste Baryon ( $p$ ) ist stabil. Es gibt jedoch Theorien, die sowohl Verletzung der Baryonen- als auch der Leptonenzahl vorhersagen:

$$p \rightarrow e^+ \pi^0, \quad \tau(p) \gtrsim 10^{32} \text{y} \tag{5.16}$$

Ursprünglich wurde noch die Strangenessquantenzahl  $S$  eingeführt, diese ist jedoch nur in der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung erhalten.

- Strangeness (Seltsamkeit):  
„Seltsamen“ Teilchen wird Strangeness zugeordnet
- Per Konvention wird zugewiesen:  $K^+, K^0: S = +1$   
Teilchen, die mit diesen Kaonen gemeinsam produziert werden, erhalten  $S = -1$ , z.B.  $\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$
- Die Seltsamkeit ist in der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten, z.B. wird der Zerfall  $\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-$  beobachtet.

Es gibt keinen Erhaltungssatz für die Mesonenzahl:

In einer Reaktion wie  $\pi^+ p \rightarrow \Lambda^+ K^- (\pi^0 \dots) \pi^+ \pi^+ (\pi^+ \pi^- \dots) (K^+ K^- \dots)$  kann beispielsweise prinzipiell eine beliebige Anzahl von Mesonen erzeugt werden, solange Ladungs- und Strangenesserhaltung erfüllt sind.

### 5.3 Teilchen-Antiteilchen Reaktionen

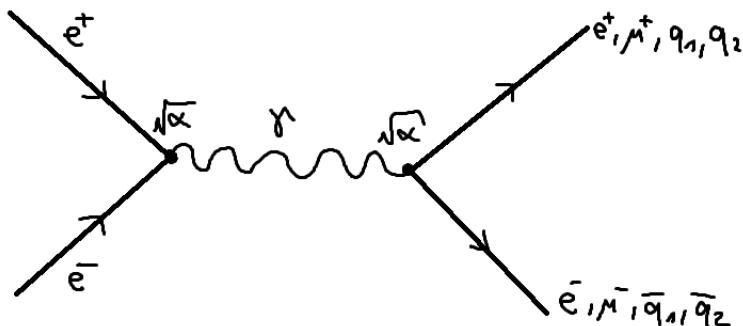


Abbildung 5.8: Vernichtungsreaktion von  $e^+$  und  $e^-$ . Eine Vernichtungsreaktion ist beim Aufeinandertreffen von  $e^-$  und  $e^+$  jedoch nicht zwingend: Die Bhabha-Streuung beschreibt den elastischen Stoß zwischen  $e^+$  und  $e^-$  (Austausch eines (virtuellen)  $\gamma$ -Quants zwischen  $e^+$  und  $e^-$ )

Die QFT (*quantum field theory*) sagt voraus, dass zu jedem Teilchen ein Antiteilchen mit gespiegelten additiven Quantenzahlen existiert.

Allgemein lässt sich eine Reaktionsgleichung schreiben als

$$A + B \rightarrow C + D \quad (5.17)$$

,wobei jedes Teilchen auf die andere Seite gebracht werden kann, z.B.

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \bar{B} + C + D \\ A + \bar{C} &\rightarrow \bar{B} + D \end{aligned} \quad (5.18)$$

,wenn es durch sein Antiteilchen ersetzt wird.

Tabelle 5.2: Additive Quantenzahlen von Elektron ( $e^-$ ) und Positron ( $e^+$ )

	$e^-$	$e^+$
$m$	0.511 MeV	0.511 MeV
$Q$	-1	+1
$L$	1	-1
Spin	$\frac{1}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$

Tabelle 5.3: Auswahl an Teilchen und zugehörigen Antiteilchen. Das Photon stellt sein eigenes Antiteilchen dar.

Teilchen	Antiteilchen
$e^- \nu_e$	$e^+ \bar{\nu}_e$
$\mu^- \nu_\mu$	$\mu^+ \bar{\nu}_\mu$
$\tau^- \nu_\tau$	$\tau^+ \bar{\nu}_\tau$
$p$	$\bar{p}$ (Berkley, 1955)
$n$	$\bar{n}$ (Berkley, 1956)
$\pi^-$	$\pi^+$
$\pi^0$	$\pi^0$
$\gamma$	$\gamma$

Tabelle 5.4: Vergleich von  $e^-$  und  $e^+$

	$e^-$	$e^+$
$m$	511keV	511keV
$Q$	-1	+1
Spin	$1/2\hbar$	$1/2\hbar$
Leptonenzahl $L$	1	-1

Es gilt jedoch immer (also auch an jedem Knoten im Feynmann-Diagramm) die Energie- und die Impulserhaltung!

Weitere Beispiele:

(a) Compton-Streuung

$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ : Durch Umstellen der Gleichung erhält man einen Prozess, der ebenfalls ablaufen sollte:

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma \quad (5.19)$$

Selbe Reaktion erhält man auch, wenn man den Feynman-Graphen der Compton-Streuung um  $90^\circ$  dreht. Das dabei auftretende Elektron, welches in der Zeit rückwärts läuft, wird dabei als Positron (zugehöriges Antiteilchen) interpretiert, welches sich vorwärts in der Zeit bewegt (Vernichtungsreaktion  $\rightarrow$  Streureaktion)<sup>1</sup>.

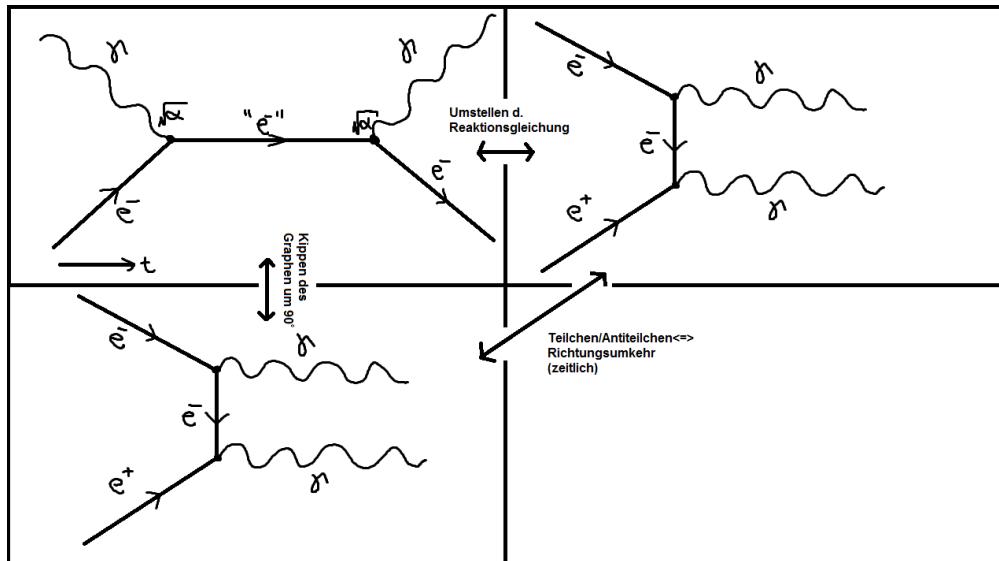


Abbildung 5.9: Compton-Streuung und  $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$  Paarvernichtung. In der Zeit rückwärts laufende Teilchen werden als vorwärtslaufende Antiteilchen betrachtet.

<sup>1</sup>Läuft ein virtueller Zustand (= Teilchen liegt nicht auf seiner Massenschale) in der Zeit weiter, so spricht der Teilchenphysiker von einer Vernichtungsreaktion. Die Comptonstreuung ist also eine Vernichtungsreaktion und keine Streuung!

(b) Produktion von Quarks:

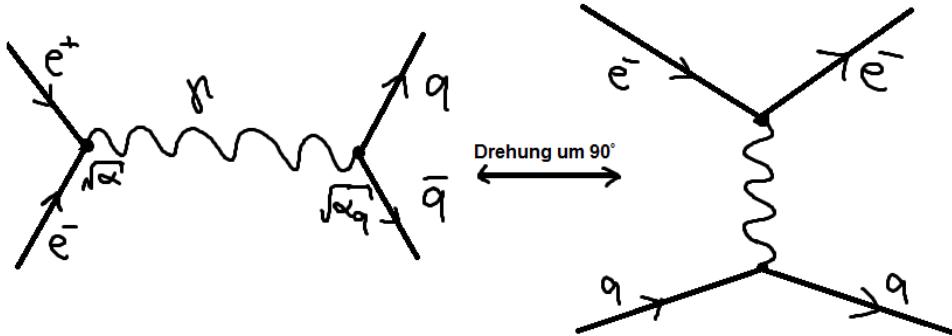


Abbildung 5.10: Produktion eines Quark-Antiquark-Paares in einer  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  Reaktion und Elektron-Quark-Streuung  $e^-q \rightarrow e^-q$  ( $\rightarrow$  Rutherford-Experiment). Beachte: Die Stärke der Kopplung des  $\gamma$ -Quants im Elektron-Positron Vertex ist  $\sqrt{\alpha} \sim e$ , im Quark-Vertex jedoch nur  $\sqrt{\alpha_q} \sim e_q$  (Quarkladung).

Die Produktion von Quarks ist paarweise möglich, elektromagnetisch beispielsweise durch  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ . Durch Drehen des entsprechenden Feynmandiagramms erhält man die Streuung von Elektronen an Quarks ( $\hat{=}$  Rutherford-Experiment, vgl. Abb. 5.10).

(c) Myon Zerfall:

$$\begin{aligned} \mu^- &\rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e \\ \mu^- \bar{\nu}_\mu &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \end{aligned} \quad (5.20)$$

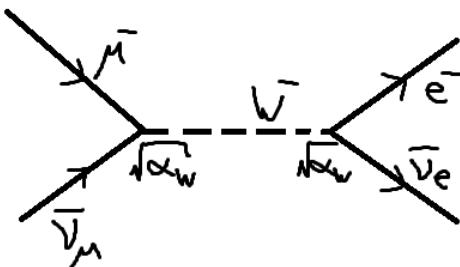


Abbildung 5.11: Feynman-Diagramm zur aus dem Myonenzerfall abgeleiteten Reaktion  $\mu^- \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$

### Einschub: Mandelstam-Variablen

Ein Streuprozess der Form  $A + B \rightarrow C + D$  lässt sich meist am einfachsten durch Lorentz-invariante Größen beschreiben. Die hierbei verwendeten Größen werden als *Mandelstam-Variablen* bezeichnet:

$$s := (P_A + P_B)^2, \quad t := (P_A - P_C)^2, \quad u := (P_A - P_D)^2 \quad (5.21)$$

$\sqrt{s}$  entspricht der Schwerpunktsenergie,  $\sqrt{t}$  und  $\sqrt{u}$  dem jeweiligen Impulsübertrag. Es lässt sich leicht zeigen, dass

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 \quad (5.22)$$

Je nach Prozess lässt sich dieser durch eine jeweilige Mandelstam-Variablen beschreiben. Für Vernichtungsprozesse eignet sich  $s$  als  $(\text{Schwerpunktsenergie})^2$ , für Streuprozesse  $t$  als  $(\text{Viererimpulsübertrag})^2$ . Am LHC beträgt  $\sqrt{s} = 8 - 13 \text{ TeV}$ .

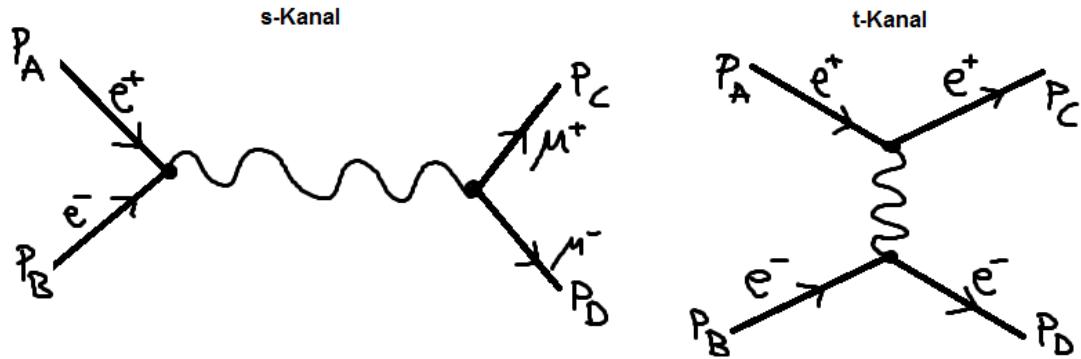


Abbildung 5.12: Beispiel für  $s$ - und  $t$ -Kanal Prozesse

## 5.4 Leptonen

### 5.4.1 Geladene Leptonen

Die geladenen Leptonen sind

- das Elektron  $e^-$ , entdeckt um 1900.
- das Myon  $\mu^-$ , entdeckt durch kosmische Strahlung.
- das Tauon  $\tau^-$

Hinzu kommen noch die entsprechenden Anti-Teilchen. Das  $\tau^-$  wurde 1975 durch M.Perl am SLAC entdeckt.

LEPTON CLASSIFICATION					
$l$	$Q$	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$	
First generation	$e$	-1	1	0	0
	$\nu_e$	0	1	0	0
Second generation	$\mu$	-1	0	1	0
	$\nu_\mu$	0	0	1	0
Third generation	$\tau$	-1	0	0	1
	$\nu_\tau$	0	0	0	1

Abbildung 5.13: Leptonenklassifikation (aus Ref. [?])

Eine Reaktion zu  $X^-$ ,  $X^+$  läuft ab, sobald  $\sqrt{s} > 2m_X$ . Perl *et al.* führten 1975 Experimente am  $e^+e^-$ -Speicherring SPEAR durch, bei 4 GeV Strahlenergie. Die beobachteten Ereignisse umfassten:

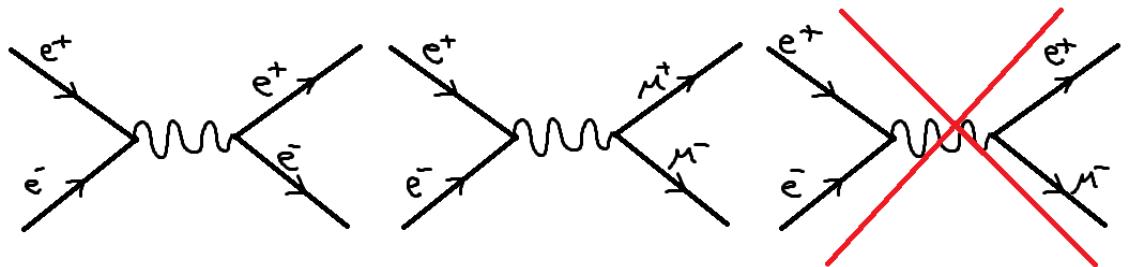


Abbildung 5.14: Erlaubte Prozesse bei  $e^+e^-$ -Kollision und scheinbar durch Perl et al. beobachter Prozess. Letzterer ist auf Grund der getrennten Erhaltung der Leptonenzahl je Generation nicht erlaubt.

- Viele  $e^+e^-$ -Paare
- Viele  $\mu^+\mu^-$  Paare
- Zusätzlich  $e^-\mu^+$  und  $e^+\mu^-$  Paare, die nicht erwartet wurden.

Die letzten beiden Paare können nicht direkt erzeugt werden, aufgrund der Erhaltung der Leptonenzahl je Generation. Perl *et al.* interpretierten dies daher als Produktion eines schwereren Lepton-Paars  $\tau^+\tau^-$

$$\begin{aligned}\tau^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_e \nu_\tau \\ \tau^+ &\rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\tau\end{aligned}\quad (5.23)$$

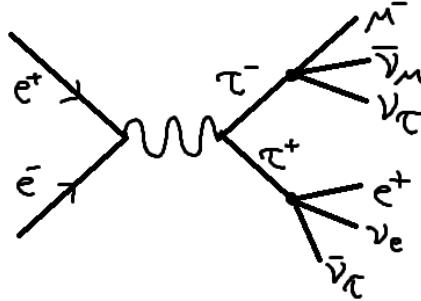


Abbildung 5.15: Produktion eines  $\mu^- e^+$ -Paars in  $e^- + e^-$ -Kollision über  $\tau^+\tau^-$ .

Signatur im Detektor:

- $e^+ e^- \rightarrow \mu^- \mu^+$
- $e^+ e^- \rightarrow e^- e^+$ :
- $e^+ e^- \rightarrow \tau^+ \tau^- \rightarrow \mu^- e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ :

→ Evidenz für ein neues Lepton.

Durch die Messung des Anstiegs des Wirkungsquerschnitts an der Produktionschwelle konnte die Masse und der Spin des neuen Teilchens bestimmt werden:

- $m(\tau) = 1777 \text{ MeV} \gg m_\pi, m_K$
- Spin  $1/2$
- Lebensdauer  $\tau = 290 \cdot 10^{-15} \text{ s} = 0.29 \text{ ps}, c\tau = 87 \mu\text{m}$

Zu jeweils rund 17.5% zerfällt  $\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$  und  $\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$ . Da die  $\tau$ -Masse  $m(\tau) > m(\pi, K, \rho, \dots)$  größer ist als die vieler Mesonen, sind auch hadronische Zerfälle möglich:

$$\tau^- \rightarrow h^- \nu_\tau \quad \text{z.B. } \pi^- \nu_\tau, K^- \nu_\tau, \dots \quad (5.24)$$

Je nach Anzahl der geladenen Teilchen unterscheidet man 1-prong (1 geladenes Hadron), 3-prong (3 geladene Hadronen),... Zerfälle. Normiert auf hadronische Zerfälle stellen 1-prong Zerfälle ca. 85% der Zerfälle dar, 3-prong Zerfälle ca. 15%.

Die leptonischen Zerfälle (35% aller  $\tau$ -Zerfälle) umfassen:

$$\begin{aligned}\tau^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau \\ \tau^- &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau\end{aligned}\quad (5.25)$$

## 5.4.2 Neutrinos

Ausgangspunkt stellt der nukleare  $\beta$ -Zerfall dar: Für einen reinen Zweikörperzerfall wird ein diskretes Energiespektrum erwartet:  $P_A = 0$ . Die Energie des Elektrons wäre also festgelegt:

$$A \rightarrow B + e^-$$

$$E_e = \left( \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_e^2}{2m_A} \right) \cdot c^2 \quad (5.26)$$

Experimentell wird jedoch ein kontinuierliches Energiespektrum beobachtet.

Pauli postulierte 1930 ein neues Teilchen, das *Neutrino* (damals von Pauli noch als *Neutron* bezeichnet). Fermi's Theorie des  $\beta$ -Zerfalls (1933) enthält das Neutrino, der  $\beta$ -Zerfall ist darin eine Punktwechselwirkung, d.h. es existiert kein Austauschquant. Die Kopplungsstärke wird ad hoc als  $G_F$  eingeführt.

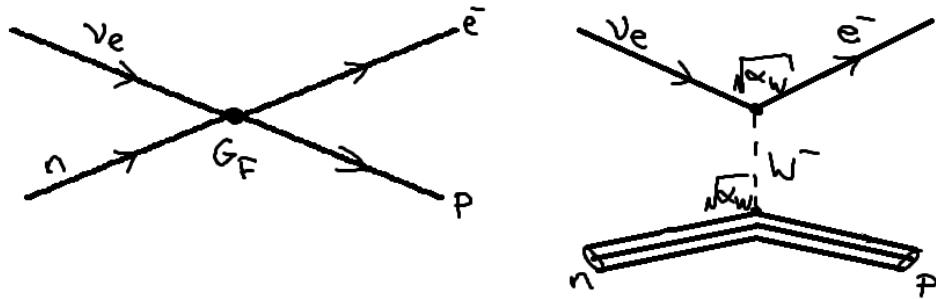


Abbildung 5.16:  $\beta$ -Zerfall des Neutrons in Fermi's Theorie des  $\beta$ -Zerfalls und nach heutigem Kenntnisstand.  $W^\pm$  sind Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung (Kopplungsstärke  $\sqrt{\alpha_w} = \sqrt{\alpha_{\text{weak}}}$ )

Fermis Theorie ist eine effektive Theorie, die jedoch unzureichend ist bei hohen Energien / kleinen Abständen. Sie enthält jedoch bereits Pauli's Neutrino, welches sich durch folgende Eigenschaften auszeichnet:

- elektrisch neutral („kleines Neutron“)
- sehr leicht
- extrem schwache Wechselwirkung (die  $1/e$ -Reichweite in Blei liegt in der Größenordnung von Lichtjahren). Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt nachgewiesen werden kann.

Schlüsselexperimente zum Nachweis von Neutrinos:

- (i) Nachweis von Neutrinos durch  $\nu$ -induzierte Reaktionen (Suche nach dem inversen  $\beta$ -Zerfall) mithilfe des Neutrinostrahles eines Kernreaktors (Cowan und Reimes, 1956)
- (ii) Nachweis, dass  $\nu_e \neq \nu_\mu$ :  $\nu_\mu$ -Induzierte Reaktionen am Beschleuniger, Neutrinos aus  $\pi^\pm$ -Zerfällen (Steinberger, Schwartz, Ledermann 1962)

(iii) Nachweis des  $\nu_\tau$ : DONUT-Kollaboration (Fermilab) (2000)

Experimenteller Nachweis des Neutrinos:

- (a) Suche nach „inversem  $\beta$ -Zerfall“:

Der normale  $\beta$ -Zerfall ist  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  ( $\beta$ -Zerfall der Spaltprodukte im Kernreaktor).  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$  unter Verwendung von den Neutrinos aus einem Kernreaktor (South Carolina): Während die  $\bar{\nu}_e$  vom Reaktor stammen, stellen die Protonen die Targetmasse (in Form von mehreren Tonnen Wasser) dar. Die geringe Wechselwirkungswahrscheinlichkeit wird kompensiert durch eine große Anzahl von Stoßpartnern (Targetmasse) und einen hohen Neutrinostrahl.

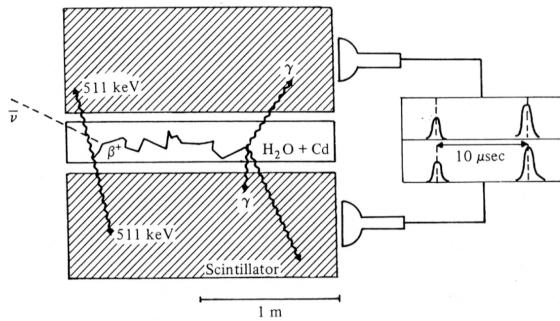


Abbildung 5.17: Entstehung des prompten und verzögerten Signals im Experiment von Cowan und Reimes, 1956 (aus Ref. [?])

Als Detektor dient ein Flüssigszintillator mit Photomultiplier, der zwei Signale aufnimmt:

- Promptes Signal:  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma\gamma$  (jew. 511 keV)
- Verzögertes Signal:  $n + {}^{108}\text{Cd} \rightarrow {}^{109}\text{Cd}^* \rightarrow {}^{109}\text{Cd} + \gamma$

- (b) Gibt es zwei verschiedene Neutrinos?

- i)  $\pi^- \rightarrow \mu^- \nu$ : Das Myon hat eine feste Energie / ein diskretes Spektrum.
- ii)  $\pi^- \rightarrow e^- \nu\nu$ : Das Elektron zeigt ein kontinuierliches Spektrum, neben dem Elektron wird kein weiteres Teilchen im Endzustand nachgewiesen, es gibt somit mindestens zwei „unsichtbare Teilchen“, was ein Hinweis auf zwei Neutrinentypen ist.

Von Seiten der Theorie wurde nun vorgeschlagen, jedem Lepton ein eigenes Neutrino zuzuordnen:

$$\begin{aligned} e &\rightarrow \nu_e \\ \mu &\rightarrow \nu_\mu \end{aligned} \tag{5.27}$$

Elektron- und Myon-Neutrinos sind verschieden. Den Neutrinos wird dieselbe (Elektron-)Leptonenzahl zugeordnet, wie dem entsprechenden Lepton ( $L_e = +1$  für  $\nu_e$ ,  $L_\mu = +1$  für  $\nu_\mu$ ).

Den experimentellen Nachweis von  $\nu_e \neq \nu_\mu$  erbrachten 1962 Steinberger, Schwartz und Ledermann: Sie nutzten  $\bar{\nu}_\mu$  aus  $\pi^-$ -Zerfällen:

$$p + X \rightarrow \pi^- + \dots \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{5.28}$$

Analog zum (inversen)  $\beta$ -Zerfall betrachteten sie die folgenden Reaktionen:

$$\text{I)} \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$$

$$\text{II)} \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow e^+ + n$$

Gilt die Erhaltung der Leptonenzahl je Generation, so kann nur die Reaktion des Typs I ablaufen, die Reaktion des Typs II wäre verboten ( $L_\mu : -1 \rightarrow -1$  für Typ I,  $L_\mu : -1 \rightarrow 0$  für Typ II).

Tatsächlich wurden 29 Ereignisse des Typs I gemessen und kein Ereignis des Typs II. Somit war bewiesen, dass  $\nu_\mu \neq \nu_e$ .

(c) Nachweis des  $\tau$ -Neutrinos

Am Fermilab wurde das Experiment *DONUT* ( $\hat{=}$  Direct Observation of NU Tau) durchgeführt.

Zur Erzeugung eines Neutrinostrahls hoher Intensität wurde ein Protonenstrahl mit 800 GeV auf ein Target geschossen. Über Zerfälle schwerer Mesonen ( $D$ -Mesonen) werden  $\tau$ -Leptonen erzeugt, die über

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \mu \nu_\mu \bar{\nu}_\tau \\ &\rightarrow e \nu_e \bar{\nu}_\tau \\ &\rightarrow h^\pm + h_0 + \bar{\nu}_\tau \end{aligned} \quad (5.29)$$

zerfallen. Die charakteristische Signatur eines  $\tau$ -Leptons im Detektor ist ein „Knick“ am Zerfallsvertex.

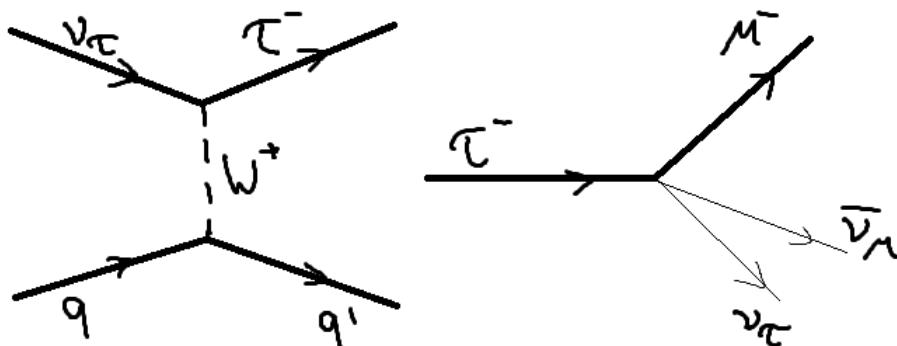


Abbildung 5.18: Feynman-Diagramm zur Produktion eines  $\tau^-$ -Leptons aus  $\nu_\tau$  und Skizze zur Entstehung des charakteristischen „Knick“ beim  $\tau$ -Zerfall

Die Datennahme dauerte von 1998-2000, wobei  $3.6 \cdot 10^{17}$  Protonen auf das Target geschossen wurden. Dabei wurden

$$71 \nu_\mu \rightarrow \mu \text{ Ereignisse}$$

$$61 \nu_e \rightarrow e \text{ Ereignisse}$$

$$4 \nu_\tau \rightarrow \tau \text{ Ereignisse}$$

gemessen. Die Untergrundwartung für  $\nu_\tau \rightarrow \tau$  lag bei 0.3 Ereignissen, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 4 Ereignisse aus dem Untergrund stammen bei  $P < 4 \cdot 10^{-4}$ .

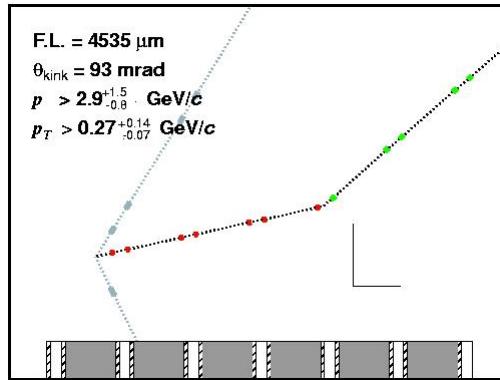


Abbildung 5.19: Eines der vier Ereignisse im DONUT Experiment (DONUT-Kollaboration, Jul. 2000)

## 5.5 Das Quarkmodell

1964 schlugen unabhängig voneinander M. Gell-Mann und G. Zweig ein Modell vor, welches die Vielfalt der Hadronen durch drei elementare Bausteine zu erklären versuchte. Diese *Quarks*<sup>2</sup> besitzen die nachfolgenden Eigenschaften:

- Alle Hadronen sind aus elementaren Bausteinen, den sog. *Quarks*, aufgebaut.
- Diese tragen drittzahlige elektrische Ladungen, treten in drei Arten (flavours) auf und besitzen halbzahligen Spin (Fermionen). Die drei Flavours (heute 6) sind:

$$\begin{array}{lll} u\text{-Quark} & Q = +\frac{2}{3}e & \text{„up“} \\ d\text{-Quark} & Q = -\frac{1}{3}e & \text{„down“} \\ s\text{-Quark} & Q = -\frac{1}{3}e & \text{„strange“} \end{array}$$

Das *s*-Quark ist für die „Seltsamkeit“ *S* von Teilchen verantwortlich

- Zu jedem Quark existiert ein Antiquark ( $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ )
- Quarks tragen einen neuen Feiheitsgrad, die sog. Farbladung; es existieren drei verschiedene Farbladungen (rot (*r*), blau (*b*), grün (*g*)). Antiquarks tragen Anti-farbe:  $\bar{r}, \bar{b}, \bar{g}$ .
- Alle Hadronen sind farbneutral („weiß“ bei additiver Farbmischung).
- Jedes *Baryon* besteht aus drei Quarks

Beispiele:

$$\begin{array}{llll} p = (u, u, d) & Q = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 & S = 0 \\ n = (u, d, d) & Q = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 & S = 0 & ^3 \\ \Lambda^0 = (u, d, s) & Q = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 & S = -1 \end{array}$$

<sup>2</sup>Die Bezeichnung *Quarks* wurde von M. Gell-Mann gewählt und entstammt ursprünglich dem Roman *Finnegans Wake* von James Joyce: „three quarks for Muster Mark“. Dies hatte er auf der Durcheinreise auf dem Bauernmarkt in Freiburg im Breisgau gehört, als Marktfrauen ihre Milchprodukte anboten.

<sup>3</sup>Aus historischen Gründen muss dem *s*-Quark die Seltsamkeit *S* = −1 zugeordnet werden, bedingt durch die vorher definierte Zuordnung *S*(*K*<sup>+</sup>) = +1, *S*( $\Lambda$ ) = −1

Die extremalen Ladungszustände der Baryonen sind:

$$\Delta^{++} = (u_r^\uparrow, u_b^\uparrow, u_g^\uparrow) : \quad Q_{\max} = 3 \frac{2}{3} = +2, \quad S = \frac{3}{2}$$

$$\Delta^- : \quad Q_{\min} = 3(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} \quad (5.30)$$

Baryonen besitzen Spin  $1/2$  oder  $3/2$ . Für Spin  $1/2$  existieren acht Zustände, das sog. *Baryonen-Oktett*, für Spin  $3/2$  ergeben sich zehn mögliche Kombinationen, das sog. *Baryonen-Dekuplett*.

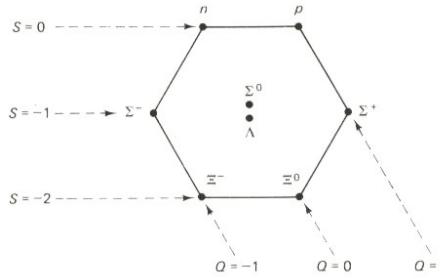


Abbildung 5.20: *Baryonen-Oktett* (aus Ref. [?])

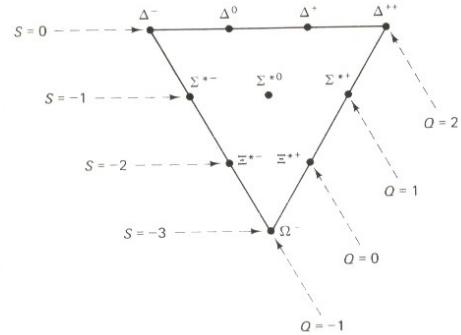


Abbildung 5.21: *Baryonen-Dekuplett* (aus Ref. [?])

- Mesonen bestehen aus Quark und Antiquark, zum Beispiel:

$$\begin{array}{lll} - \pi^+ = (u, \bar{d}) & - \pi^0 = (u\bar{u}, d\bar{d}) & - K^- = (\bar{u}, s) \\ - \pi^- = (\bar{u}, d) & - K^+ = (u, \bar{s}) & \end{array}$$

Historisch bedingt ist die Strangeness  $S(K^+) = +1$ . Die grundlegenden Eigenschaften von Mesonen umfassen:

- Die Ladungszustände von Mesonen sind maximal  $+1$  und minimal  $-1$ .
- Ihr Spin ist  $s = 1/2 \otimes 1/2 = \{0, 1\}$ . Bei Spin-0-Mesonen spricht man von *pseudoskalaren Mesonen*, bei Spin-1-Mesonen von *Vektormesonen*.

THE MESON NONET			
$q\bar{q}$	$Q$	$S$	Meson
$u\bar{u}$	0	0	$\pi^0$
$u\bar{d}$	1	0	$\pi^+$
$d\bar{u}$	-1	0	$\pi^-$
$d\bar{d}$	0	0	$\eta$
$u\bar{s}$	1	1	$K^+$
$d\bar{s}$	0	1	$K^0$
$s\bar{u}$	-1	-1	$K^-$
$s\bar{d}$	0	-1	$\bar{K}^0$
$s\bar{s}$	0	0	??

THE BARYON DECUPLLET			
$qqq$	$Q$	$S$	Baryon
$uuu$	2	0	$\Delta^{++}$
$uud$	1	0	$\Delta^+$
$udd$	0	0	$\Delta^0$
$ddd$	-1	0	$\Delta^-$
$uus$	1	-1	$\Sigma^{*+}$
$uds$	0	-1	$\Sigma^{*0}$
$dds$	-1	-1	$\Sigma^{*-}$
$uss$	0	-2	$\Xi^{*0}$
$dss$	-1	-2	$\Xi^{*-}$
$sss$	-1	-3	$\Omega^-$

### Konsequenzen aus dem Quark-Modell:

- (i) Dieselbe Quark-Kombination kann unterschiedliche Teilchen darstellen, z.B.:

$$\begin{array}{lll} p = (u, u, d) & s = 1/2 & \uparrow\uparrow\downarrow \\ \Delta^+ = (u, u, d) & s = 3/2 & \uparrow\uparrow\uparrow \end{array}$$

- (ii) Farbfreiheitsgrad:

$\Delta^{++} = (u, u, u)$   $s = 3/2$   $\uparrow\uparrow\uparrow$  wäre ohne einen weiteren Freiheitsgrad durch das Pauliprinzip verboten. Die Lösung besteht in einer dreiwertigen Ladung, der Farbladung:  $\Delta^{++} = (u_g, u_r, u_b)$

- (iii) Vorhersage von noch nicht entdeckten Teilchen: Das berühmteste Beispiel ist  $\Omega^- = (s, s, s)$ ,  $S = -3$ . Dieses Teilchen war zur Zeit der Formulierung des Quark-Modells noch nicht entdeckt. Die Strangeness kann durch die schwache Wechselwirkung vernichtet werden, jedoch nur in Schritten von  $\Delta S = \pm 1$  durch Kaskadenzerfälle, z.B.:

$$\begin{aligned} \Omega^- &\rightarrow \Xi^0 \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + \dots \rightarrow p + \dots \\ S(\Xi^0) &= -2, \quad S(\Lambda^0) = -1, \quad S(p) = 0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

- (iv) Hadronen sind *farbneutral*:

$$\begin{aligned} \text{Baryonen: } (r + g + b) &\hat{=} \text{weiß} \\ \text{Mesonen: } (r\bar{r}, g\bar{g}, b\bar{b}) &\hat{=} \text{weiß} \end{aligned} \tag{5.32}$$

→ Hadronen aus 2 oder 4 Quarks sollten somit nicht existieren.

### Probleme des Quarkmodells (60er Jahre)

- Es wurden nie freie Quarks beobachtet (Teilchen mit drittzahligen Ladungen).
- → Quarks können *nicht* aus Hadronen heraus gelöst werden (nicht als freie Quarks).

Experimentelle Evidenz erfolgte indirekt durch Streuexperimente am SLAC 1968: 20 GeV  $e^- \rightarrow p$  Streuexperimente. Durch Messung der differentiellen Wirkungsquerschnitte konnten die Formfaktoren bestimmt werden, welche der Streuung an drei punktförmigen Streuzentren entsprechen mit elektrischen Ladungen  $+2/3, +2/3, -1/3$ .

- Bei hohen Impulsüberträgen auf ein Quark bilden sich neue Hadronen.

Heute kann dies durch die QCD (Quantenchromodynamik, Theorie der starken Wechselwirkung) erklärt werden, vergleiche Kap. 6. Quarks sind in Hadronen eingesperrt (confinement)  $\hat{=}$  fundamentale Eigenschaft der QCD.

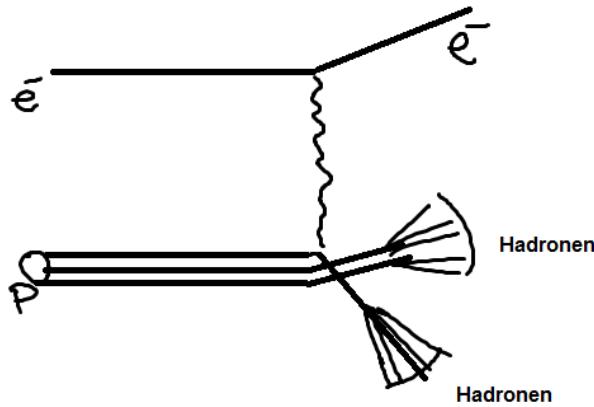


Abbildung 5.22: Bei Kollisionen von Elektronen mit Protonen würde man erwarten, dass ein Quark herausgelöst würde. Tatsächlich findet man jedoch immer sog. Jets, d.h. ganze Bündel von (bekannten) Hadronen.

#### Bemerkungen:

- $\pi^0, \eta, \eta'$  sind Mischungen aus  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$  und  $s\bar{s}$
- Die Zustände  $(uuu)$ ,  $(ddd)$  und  $(sss)$  treten im Spin- $1/2$ -Oktett der Baryonen nicht auf. Der Grund hierfür liegt in der Symmetrie der Gesamtwellenfunktion.
- $\Omega^- = (sss)$  mit Spin  $3/2$  ist ein im Rahmen des Quark-Modells postulierte Teilchen.
- Mesonen können in einer Oktett-Struktur angeordnet werden. Die Parameter hierbei sind die Strangeness, sowie die Ladung bzw. der Isospin<sup>4</sup>.

## 5.6 Neue, schwerere Quarks

Mithilfe von Beschleunigern höherer Energie in den 1970er Jahren ( $c, b$ ) und in den 1990er Jahren ( $t$ ) konnten die restlichen heute bekannten Quarks nachgewiesen werden.

### 5.6.1 Entdeckung des $c$ -Quarks

1974 wurde das Charmquark als neue Resonanz in  $e^+e^-$ -Kollisionen bei  $\sqrt{s} > 3$  GeV am SLAC durch B.Richter *et al.* entdeckt. Der gebundene Zustand ( $c\bar{c}$ ) wird als  $J/\psi$  bezeichnet. Die Resonanz ist besonders schmal ( $\Gamma = 87$  keV), d.h. der dabei entstehende Zustand besitzt eine relativ lange Lebensdauer für starke Zerfälle.

---

<sup>4</sup>Isospin: Anlehnung an die Spin-Beschreibung, Teilchen mit verschiedenen Ladungszuständen werden zu Multiplets zusammengefasst.

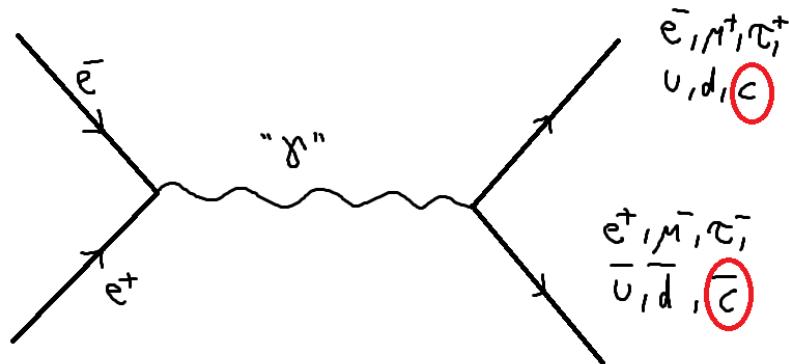


Abbildung 5.23: Mögliche Reaktionen bei  $e^+e^-$ -Kollisionen. Eine der stattfindenden Reaktionen ist die zu  $c\bar{c}$ . Der gebundene Zustand ( $c\bar{c}$ ) wird als  $J/\psi$  bezeichnet.

Eine zweite unabhängige Entdeckung erfolgte durch S.Ting in der Reaktion  $p + Be \rightarrow J + \dots$  am Brookhaven National Lab.

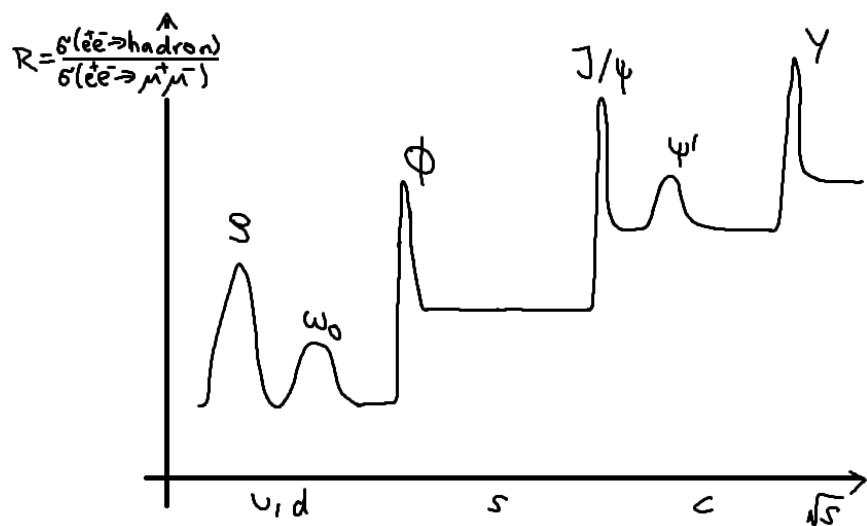


Abbildung 5.24: Der R-Faktor (Hadronenproduktionsrate relativ zu einem Referenzkanal, z.B.  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ) steigt jedes mal an, wenn die Schwerpunktsenergie ausreicht einen weiteren Hadronenkanal zu öffnen. Zusätzlich treten Resonanzen auf, wenn die Schwerpunktsenergie gerade für die Produktion des neuen Quarks ausreicht.

Kurze Zeit später wurde bei höherer Energie in  $e^+e^-$ -Kollisionen eine radiale Anregung  $\psi'$  entdeckt (2s-Zustand)

$$\begin{aligned} m(J/\psi) &= 3.097 \text{ GeV} \\ m(\psi') &= 3.686 \text{ GeV} \end{aligned} \tag{5.33}$$

Die Beobachtung von  $\psi'$  zeigte den Zerfall:

$$\psi' \rightarrow J/\psi + \pi^+ \pi^- \tag{5.34}$$

und für  $J/\psi$  beispielsweise

$$J/\psi \rightarrow e^+ e^- \quad (5.35)$$

Heute ist ein ganzes Spektrum von ( $c\bar{c}$ )-Anregungszuständen bekannt (orbitale Anregung, höhere Drehimpulse, Rotation, Vibrationen), was als *Charmonium-Spektrum* bezeichnet wird.

Die Zerfallsbreite war des  $J/\psi$  war mit  $u, d, s$ -Quark nicht erklärbar, es muss also einen weiteren Baustein geben, der nur elektromagnetisch und schwach zerfallen kann.

**TABLE 5.7** Charmonium states and decay modes

State	Mass, MeV	$J^P, I$	$\Gamma$ , MeV	Branching ratio
$J/\psi(3100)$	$3097 \pm 1$	$1^-, 0$	0.063	Hadrons [mostly $(2n + 1)\pi$ ] $e^+ e^-$ $\mu^+ \mu^-$
				86% 7% 7%
$\psi(3700)$	$3685 \pm 1$	$1^-, 0$	0.228	$\psi + 2\pi$ $\chi + \gamma$ $e^+ e^-$ $\mu^+ \mu^-$
				50% 21% 0.9% 0.9%

Abbildung 5.25: Grund- und erster angeregter Zustand der Charmoniums ( $c\bar{c}$ ) mit Zerfallskanälen. (aus Ref. [9])

Bei höheren Energien werden weitere Mesonen, die  $c$  oder  $\bar{c}$  enthalten, produziert, sogenannte *D-Mesonen*:

$$\begin{aligned} D^+(1.869 \text{ GeV}) &= (c, \bar{d}) \\ D^- &= (\bar{c}, d) \\ D^0(1.865 \text{ GeV}) &= (c, \bar{u}) \\ \bar{D}^0 &= (\bar{c}, u) \\ D_S^+(1.969 \text{ GeV}) &= (c, \bar{s}) \\ D_S^- &= (\bar{c}, s) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Ebenso findet man weitere Baryonen, z.B.:

$$\Lambda_C^+(2.285 \text{ GeV}) = (u, d, c) \quad (5.37)$$

### 5.6.2 Entdeckung des $b$ -Quarks

Im Jahre 1977 erfolgte die Entdeckung einer weiteren Resonanz in einem Fixed Target Experiment am Fermilab National Accelerator Laboratory (FNAL) durch L. Lederman *et al.*

$$p + \text{Be} \rightarrow \Upsilon + \dots \quad (5.38)$$

Bestätigt wurde dies in  $e^+ e^-$ -Kollisionen am DORIS-Speicherring am DESY in Hamburg.

Wieder wurde eine schmale Resonanz beobachtet, es lag eine vergleichbare Situation wie beim Charmonium-Fall vor. Das neue Teilchen war ein  $\Upsilon = (b\bar{b})$ -Bindungszustand, bestehend aus sog. *Bottom-Quarks* (auch *beauty* genannt).

Zudem wurde das Bottomonium-Spektrum bestehend aus den Anregungszuständen  $\Upsilon'(2s)$ ,  $\Upsilon''(3s)$ ,  $\Upsilon''' \dots$  gefunden, ebenso wie neue schwerere Mesonen und Baryonen (analog zum Charmquark).

$$\begin{aligned}
B^+ &(5.729 \text{ GeV}) = (u, \bar{b}) \\
B^- &= (\bar{u}, b) \\
B^0 &(5.285 \text{ GeV}) = (d, \bar{b}) \\
\bar{B}^0 &= (\bar{d}, b) \\
B_S^0 &(5.370 \text{ GeV}) = (s, \bar{b}) \\
&\vdots \\
\Lambda_b^0 &(5.461 \text{ GeV}) = (udb)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

### 5.6.3 Entdeckung des $t$ -Quarks

Das *Top-Quark* (auch *truth*) wurde 1994 am Fermilab in  $p\bar{p}$ -Kollisionen mit  $\sqrt{s} = 1.8 \text{ TeV}$  entdeckt:

$$p\bar{p} \rightarrow t\bar{t} \quad (5.40)$$

Die Masse eines Top-Quarks beträgt  $m_{\text{top}} \sim 172 \text{ GeV}$ . Jedoch ist  $m_{\text{top}} > m_W$  (80.4 GeV), d.h. es existieren keine gebundenen  $(t, \bar{t})$ -Zustände, da das Top-Quark innerhalb der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-24} \text{ s})$  in ein  $W$ -Boson und in ein  $b$ -Quark zerfällt.

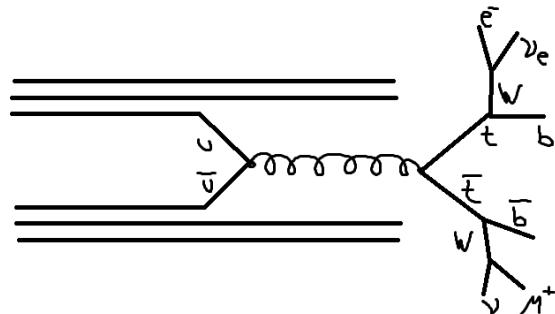


Abbildung 5.26: Feynman-Diagramm zur Produktion von  $t + \bar{t}$

# 6 Überblick über die fundamentalen Wechselwirkungen

## 6.1 Quantenelektrodynamik

- Die elektromagnetische Wechselwirkung koppelt an die elektrische Ladung ( $Q$ )
- Das Vermittlerteilchen (Austauschteilchen) ist das Photon  $\gamma$ .
- Die Menge der beteiligten Teilchen umfasst alle elektrisch geladenen Teilchen, d.h. Quarks (u, d, s, c, b, t), geladene Leptonen (z.B. e,  $\mu$ ,  $\tau$ ) und geladene Austauschteilchen ( $W^+$ ,  $W^-$ ).

Fundamentale Kopplung:

Als Kopplungsstärke ist  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  für ein Elektron definiert. Für Teilchen mit anderer Ladung muss diese entsprechend eingesetzt werden:

$$\alpha = \frac{q^2}{\hbar c} \quad (6.1)$$

Die Kombination solcher Vertices führt zur Beschreibung von Streu-/Vernichtungsprozessen,

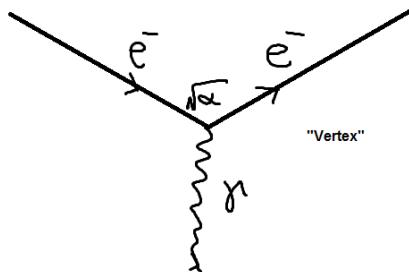


Abbildung 6.1: Kopplung der elektromagnetischen Kraft an ein geladenes Teilchen

u.a.:

- (i) Møller-Streuung:  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$
- (ii) Bhabha-Streuung:  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$
- (iii) W-Paarproduktion:  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$
- (iv) Quark-Produktion

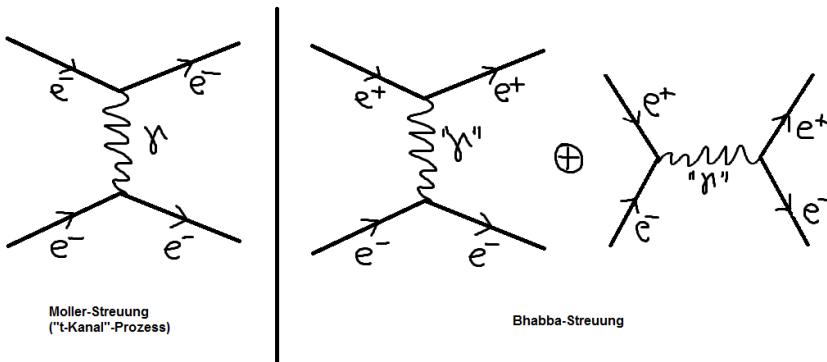


Abbildung 6.2: Feynman-Diagramme zur Møller- und Bhabha-Streuung

Im Feynman-Bild entspricht das Streudiagramm einer Wirkungsquerschnittsamplitude (Streuamplitude)

$$\sigma = \underbrace{|A|}_{\text{Amplitude}}^2, \quad A \sim \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} = \alpha \Rightarrow \sigma \sim \alpha^2 \quad (6.2)$$

- Der Wirkungsquerschnitt kann in der Störungstheorie (Reihenentwicklung) berechnet werden.
- bislang: führende Ordnung (Born-Diagramme)
- Korrekturen höherer Ordnung (z.B. 2,3,... Photonenlinien) (siehe Abb. 6.3)



Abbildung 6.3: Elektromagnetische Korrekturen höherer Ordnung des  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  Prozesses.

Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus der Störungstheorie:

$$\sigma^{[n]} = c_0 \cdot \alpha^2 \left[ 1 + c'_1 \alpha + c'_2 \alpha^2 + \dots \right] \quad (6.3)$$

Diese Reihe konvergiert schnell, da  $\alpha$  klein ist, die Anzahl der zu berücksichtigenden Diagramme/Ordnungen ist durch die geforderte Präzision bestimmt.

$$\sigma^{[0]} = c_0 \alpha^2 \quad \sigma \sim | \text{---} \oplus \text{---} |^2 \sim \alpha^2$$

$$\sigma^{[1]} = c_0 \alpha^2 + c_1 \alpha^3$$

$$\sigma \sim | \text{---} \oplus \text{---} \oplus \text{---} \oplus \dots |^2$$

$$+ | \text{---} + \dots |^2$$

Abbildung 6.4: Zusammensetzung der Störungsreihenentwicklung nullter und erster Ordnung

## 6.2 QCD - Quanten-Chromo-Dynamik

Analog zur elektromagnetischen Wechselwirkung lässt sich die starke Wechselwirkung beschreiben durch

- 3 Farbladungen ( $r, g, b$ )
- Beteiligte Teilchen sind die Quarks ( $u, d, s, c, b, t$  und jeweilige Antiteilchen hierzu)
- Austauschteilchen sind Gluonen  $g$  (insgesamt 8 verschiedene). Gluonen besitzen selbst eine Farbladung, sodass eine Selbstkopplung möglich ist!
- Quarks tragen Farbladung ( $r, g, b$ ), Antiquarks tragen Antifarbe ( $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ ), Gluonen tragen sowohl Farbe als auch Antifarbe! Dies stellt einen wichtigen Unterschied zur QED dar.
- Die fundamentalen Vertices sind in Abb. 6.5 dargestellt. Die Farbe der Quarks ändert sich an Vertices, ihr Flavour ( $u, d, \dots$ ) bleibt jedoch erhalten! Die Koppelungsstärke ist gegeben durch  $\alpha_s$ . Eine wichtige Anwendung sind Streuprozesse innerhalb des Protons ( $qq, qg, gg$ -Streuung).

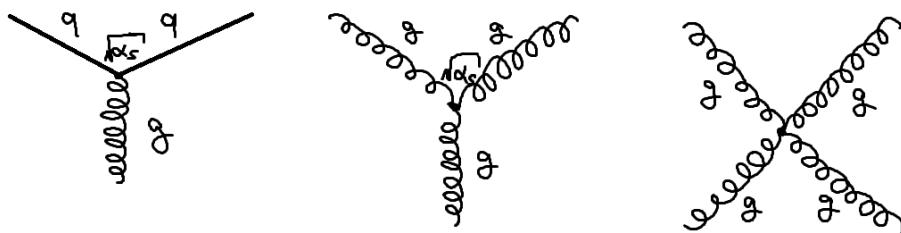


Abbildung 6.5: Die fundamentalen Vertices der starken Wechselwirkung/QCD. Da auch Gluonen Farbladung tragen, können diese an sich selbst koppeln. Zu beachten ist, dass das mittlere Diagramm in der QED nicht existiert.

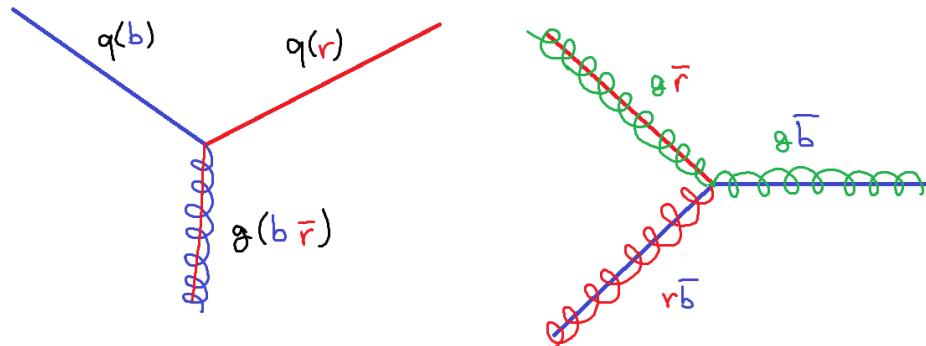


Abbildung 6.6: Beispiele Farbladungen und -fluss an Vertices

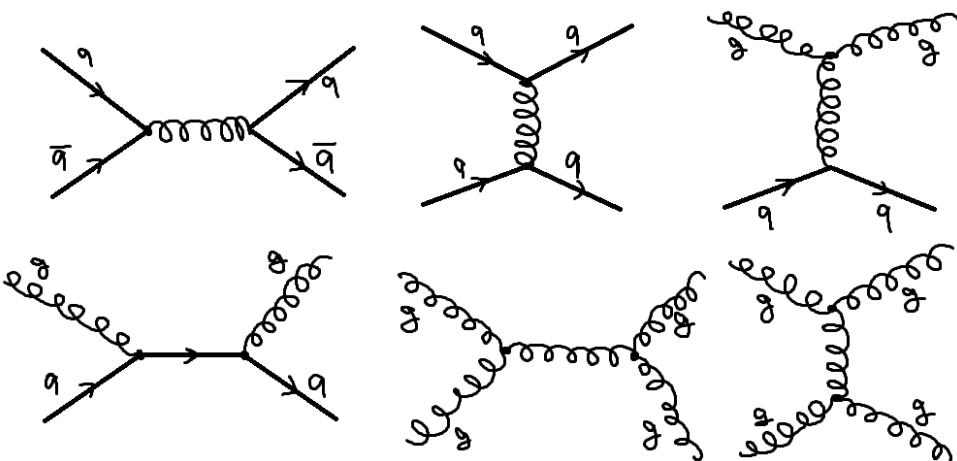


Abbildung 6.7: Beispiele für weitere wichtige Streu-/Vernichtungsdiagramme

Table 1. Matrix elements for parton scattering

subprocess	$ M ^2$	$\theta^* = \pi/2$
$qq' \rightarrow qq'$	$\frac{4}{9} \frac{s^2+u^2}{t^2}$	2.22
$qq \rightarrow qq$	$\frac{4}{9} \left( \frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{s^2+t^2}{u^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{t^2}{ut}$	3.26
$q\bar{q} \rightarrow q'q\bar{q}'$	$\frac{4}{9} \frac{t^2+u^2}{s^2}$	0.22
$q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$	$\frac{4}{9} \left( \frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{t^2+u^2}{s^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{u^2}{st}$	2.59
$q\bar{q} \rightarrow gg$	$\frac{32}{27} \frac{u^2+t^2}{ut} - \frac{8}{3} \frac{u^2+t^2}{s^2}$	1.04
$gg \rightarrow q\bar{q}$	$\frac{1}{6} \frac{u^2+t^2}{ut} - \frac{3}{8} \frac{u^2+t^2}{s^2}$	0.15
$qg \rightarrow qg$	$-\frac{4}{9} \frac{u^2+s^2}{us} + \frac{u^2+t^2}{t^2}$	6.11
$gg \rightarrow gg$	$\frac{9}{2} \left( 3 - \frac{ut}{s^2} - \frac{us}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right)$	30.38

Abbildung 6.8: Beiträge zur  $qq$ ,  $gg$ ,  $gq$ - Streuung

Die Anzahl der Gluonen ergibt sich mittels Gruppentheorie aus den möglichen Farb-Antifarb-Kombinationen: SU(3)-Gruppentheorie:

$$3 \times 3 \rightarrow \underset{\text{Farb-Oktett}}{8} + \underset{\text{Farb-Singulett}}{1} \quad (6.4)$$

Das Farbsingulett ist farbneutral

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}), \quad (6.5)$$

bei Gluonen sind jedoch nur die Oktett-Zustände realisiert:

$$r\bar{b}, r\bar{g}, b\bar{g}, b\bar{r}, g\bar{b}, g\bar{r}, \frac{1}{\sqrt{6}} (r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}), \frac{1}{\sqrt{2}} (r\bar{r} - g\bar{g}) \quad (6.6)$$

Wichtige Konsequenzen aus der Gluonen-Selbstkopplung sind:

- (i) Die Stärke der Kopplung ( $\alpha, \alpha_s$ ) ist energieabhängig! Aufgrund der Gluonen-Selbstkopplung gibt es eine andere Energieabhängigkeit für  $\alpha_s$  als für  $\alpha$ :

Bei der Elektromagnetischen Wechselwirkung (QED) tritt Vakuumpolarisation auf ( $\gamma \xrightarrow{\sqrt{\alpha}} e^+e^- \xrightarrow{\sqrt{\alpha}} \gamma$ ). Dies führt zum Anwachsen der „sichtbaren Ladung“ bei kleinen Abständen.

Bei der starken Wechselwirkung (QCD) kann  $g \xrightarrow{\sqrt{\alpha_s}} q\bar{q} \xrightarrow{\sqrt{\alpha_s}} g$  auftreten, jedoch auch beispielsweise  $g \rightarrow gg \rightarrow g$ .

Die Kopplungsstärke  $\alpha$  in der QED ist

$$\alpha(E) = \frac{\alpha(E_0)}{1 - \frac{\alpha(E_0)}{3\pi} \log\left(\frac{E}{E_0}\right)} \quad (6.7)$$

, wobei  $E_0$  die Anfangsenergie bezeichnet. Dies beschreibt Beiträge der  $e^+e^-$ -Schleife. Es ist beispielsweise  $\alpha(E = m_Z = 91\text{GeV}) = \frac{1}{128}$  und  $\alpha(m_e) = \frac{1}{137}$ . Die Kopplungsstärke in der QCD ist

$$\alpha_s(E) = \frac{\alpha_s(E_0)}{1 + \frac{\alpha_s(E_0)}{12\pi} (33 - 2n_f) \log\left(\frac{E}{E_0}\right)} \quad (6.8)$$

Der Term mit Faktor 33 tritt aufgrund der Gluonen auf, der Term mit  $-2n_f$  aufgrund der Quarks.  $n_f$  bezeichnet die Zahl der Flavours ( $n_f = 6$ :  $u, d, s, c, b, t$ ).

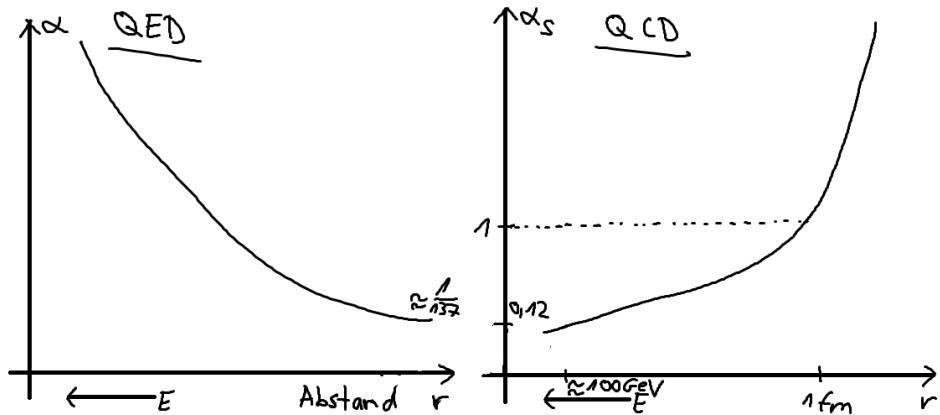


Abbildung 6.9: Verhalten der Kopplungskonstanten als Funktion von Abstand  $r$  bzw. Energie  $E$ . Den Abfall für  $r \rightarrow 0$  bei  $\alpha_s$  bezeichnet man als asymptotische Freiheit der QCD. Diese erklärt das Confinement der Quarks in Hadronen.

Somit lässt sich erklären, warum keine freien Quarks beobachtet werden können: Während das Potential in der QED  $V(r) \sim \frac{1}{r}$  ist, ist in der QCD  $V(r) \sim r$ . Vergrößert sich der Abstand zwischen Quarks, so können aus dem Kraftfeld neue Quarks-Antiquark-Paare gebildet werden (vgl. Abb. 6.10). Dies resultiert in ganzen Bündeln von Hadronen, den sogenannten *Jets*.

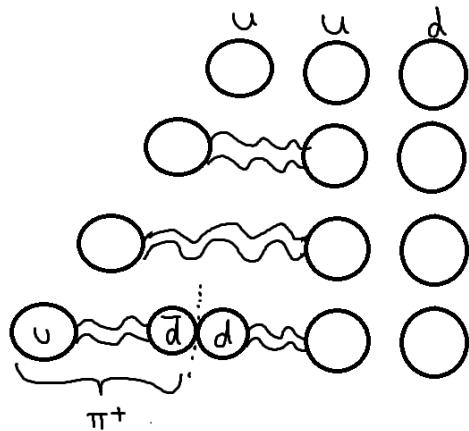


Abbildung 6.10: Das Entfernen eines Quarks aus einem Verband von Quarks führt zur Bildung von Quark-Antiquarkpaaren.

Experimentell findet man solche Jets vor, ebenso wie die Abstrahlung eines Gluons durch ein beispielsweise in  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  produziertes Quark. Ein solches abgestrahltes Gluon wird im Detektor sichtbar als weiterer Jet  $\rightarrow$  3-Jet Ereignisse, zuerst entdeckt 1977 am DESY in Hamburg.

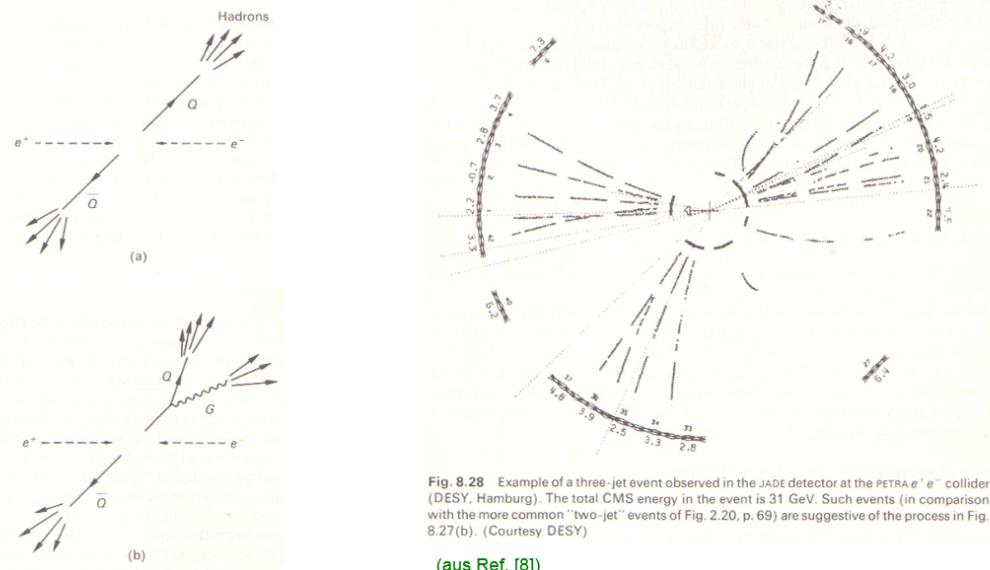


Fig. 8.28 Example of a three-jet event observed in the JADE detector at the PETRA  $e^+ e^-$  collider (DESY, Hamburg). The total CMS energy in the event is 31 GeV. Such events (in comparison with the more common "two-jet" events of Fig. 2.20, p. 69) are suggestive of the process in Fig. 8.27(b). (Courtesy DESY)

(aus Ref. [8])

Abbildung 6.11: Entdeckung der 3-Jet-Ereignisse am DESY in Hamburg 1977

- (ii) Aufgrund der Selbstkopplung der Gluonen sagt die QCD gebundene Zustände voraus, die keine Quarks enthalten, sondern lediglich Gluonen, sog. *Glueballs*.

Beispiele für Prozesse durch starke Wechselwirkung (Feynman-Diagramme):

- (i) vgl. Abb. 6.12

$$\Delta^{++} \rightarrow p \pi^+ \quad (uuu) \quad (uud)(\bar{d}u) \quad (6.9)$$

- (ii) Assozierte Produktion seltsamer Teilchen:

$$\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda \quad (\bar{u}d)(uud) \quad (d\bar{s})(uds) \quad (6.10)$$

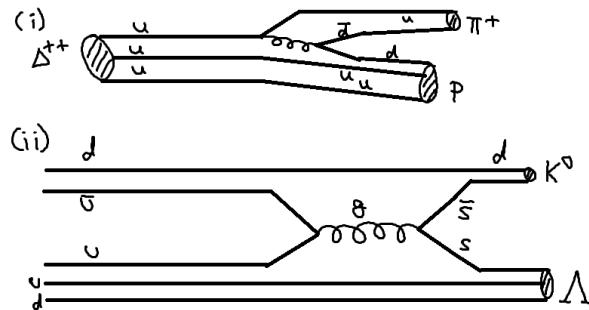


Abbildung 6.12: Zerfall von  $\Delta^{++} \rightarrow p\pi^+$  und Produktion von  $K^0$  und  $\Lambda$  aus  $\pi^-$  und  $p$  durch starke Wechselwirkung.

## 6.3 Schwache Wechselwirkung

- Die schwache Wechselwirkung koppelt an die *schwache Ladung*.
- Es sind alle Teilchen beteiligt ( $e, \nu, q, \dots$ ).
- Die Austauschteilchen sind  $W^+, W^-, Z^0$ . Man unterscheidet dabei zwei Arten von schwacher Wechselwirkung:
  - (i) Austausch elektrisch geladener Feldquanten  $W^\pm$  (*geladene Ströme*), z.B.  $\beta$ -Zerfall.
  - (ii) Austausch neutraler Feldquanten  $Z^0$  (*neutraler Strom*). Diese neutralen Ströme wurden erst relativ spät entdeckt (CERN, 1973)

### 6.3.1 Lepton-Sektor

Der fundamentale Prozess im Lepton-Sektor ist die Umwandlung eines Elektrons  $e^-$  in ein Neutrino  $\nu_e$  unter Abgabe eines  $W^-$  bzw. die Umwandlung eines  $e^+$  in ein  $\bar{\nu}_e$  unter Abgabe eines  $W^+$ . Allgemein gesagt, geladene Leptonen  $\ell$  wandeln sich unter Aussendung von  $W^\pm$ -Teilchen in die entsprechenden neutralen Leptonen  $\nu_\ell$  um :

$$\ell^- \rightarrow W^- + \nu_\ell ; \quad \ell^+ \rightarrow W^+ + \bar{\nu}_\ell \quad (6.11)$$

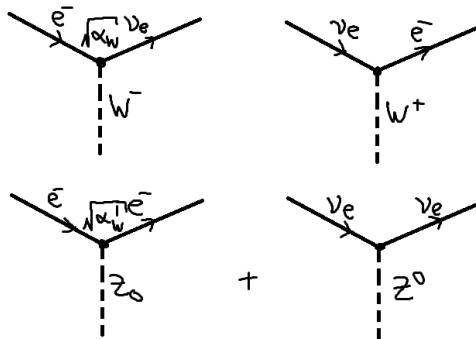


Abbildung 6.13: Fundamentale Vertices der schwachen Wechselwirkung im Lepton-Sektor

Kombinationen liefern Streu- und Zerfallsprozesse:

- (i)  $\mu^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_\mu \Rightarrow \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
- (ii) Die experimentelle Entdeckung des  $Z^0$ -Teilchens:  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$

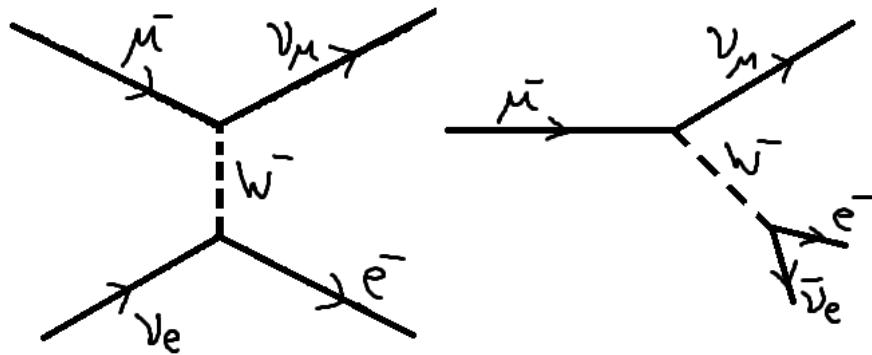


Abbildung 6.14: Zerfall des Myons. Die Reaktionsgleichung des linken Diagramms ist  $\mu^- \bar{\nu}_e \rightarrow \nu_\mu e^-$ , wohingegen im rechten Diagramm das Elektroneneutrino auf die andere Seite geschoben wurde:  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ .

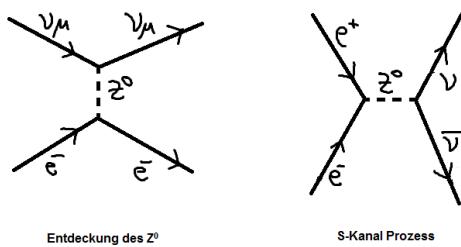


Abbildung 6.15: Prozess, der zur Entdeckung des  $Z^0$  führte, sowie der s-Kanal Prozess mit  $Z^0$  am LEP

- (iii) s-Kanal Prozess am LEP:  $e^+ e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e, \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ . Das  $Z^0$ -Teilchen trägt auch zur Elektron-Elektron-Streuung bei, wird bei niedrigen Energien jedoch von der elektromagnetischen Wechselwirkung überdeckt. Bei hohen Energien liefert es eine wichtige Korrektur zum Coulomb-Gesetz.

⇒ In der schwachen Wechselwirkung verbindet der  $W^\pm$ -Austausch Mitglieder der selben Generation  $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$ . Hieraus folgen die möglichen  $W$ -Zerfälle bzw. -Produktionsprozesse, konsistent mit der Leptonenzahlerhaltung. Anders ausgedrückt folgt die Leptonenzahlerhaltung aus der Kopplungsstruktur der elektroschwachen Wechselwirkung<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>D.h. es findet beispielsweise kein Prozess  $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_\mu$  statt.

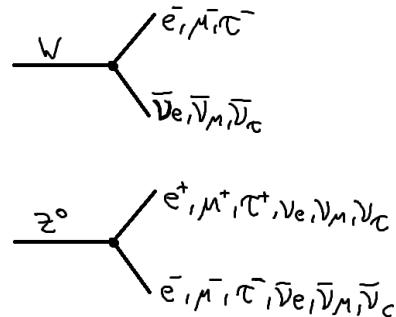


Abbildung 6.16:  $W$ -Zerfälle/Produktion und  $Z^0$ -Zerfälle/Produktion

### 6.3.2 Quark-Sektor

- Die Kopplung erfolgt an schwache Eigenzustände, z.B.  $u \rightarrow d', s', b'$  (die Umwandlung in  $d'$  ist dominant). Diese sind nicht identisch mit den Masseneigenzuständen  $d, s, b$ .
- Die Farbladung der Quarks bleibt dabei erhalten ( $W^\pm$  und  $Z^0$  tragen keine Farbladung).
- Der Quarksflavour hingegen ändert sich, z.B.  $d \rightarrow u, c \rightarrow s \rightarrow$  Quantenflavouredynamik. Umgekehrt ist der Flavour in der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten. Dies liefert den Grund für den schwachen Zerfall seltsamer Teilchen.

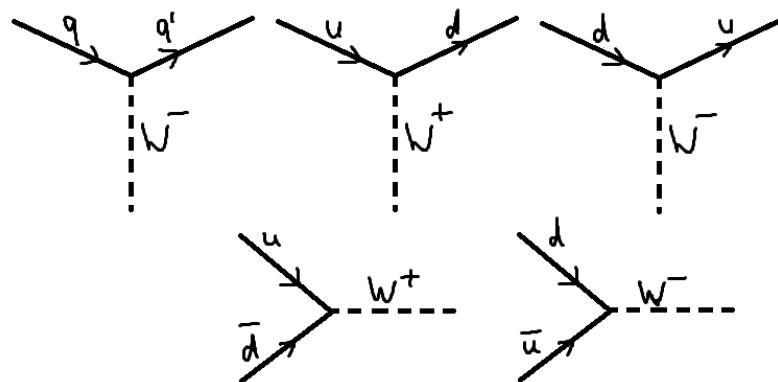


Abbildung 6.17: Fundamentale Vertices der schwachen Wechselwirkung im Quarksektor

### Zerfalls- und Streuprozesse:

(i)  $\beta$ -Zerfall:  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , dies entspricht  $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$ .

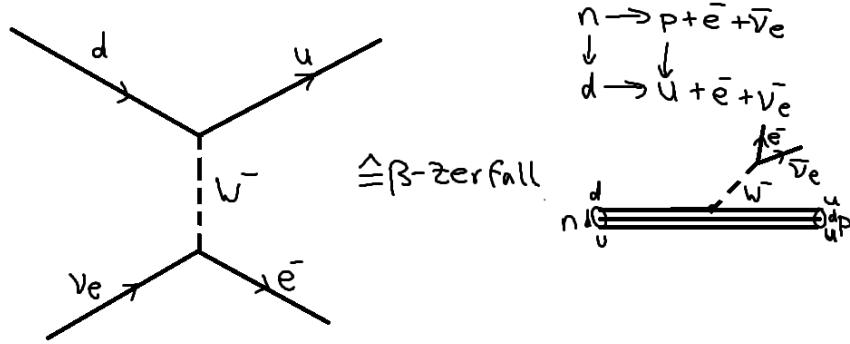


Abbildung 6.18: Zerfalls- und Streuprozesse im Quark-Sektor der schwachen Wechselwirkung und  $\beta^-$ -Zerfall eines Neutrons

(ii)  $\pi^\pm$ -Zerfall:  $\pi_{(u,\bar{d})}^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu$

(iii) Zerfall seltsamer Teilchen: Obwohl scheinbar die *Strangeness*, d.h. die Anzahl der seltsamen Teilchen, eine Erhaltungsgröße darstellt, werden beispielsweise Prozesse beobachtet wie:

- $\Lambda_{(uds)}^0 \rightarrow p_{(uud)} + \pi_{(\bar{u}\bar{d})}^-$
- $K_{(d\bar{s})}^0 \rightarrow \pi_{(u\bar{d})}^+ + \pi_{(d\bar{u})}^-$

Es muss also eine Übergangswahrscheinlichkeit  $P(s \leftrightarrow u) \neq 0$  geben, anders als im Lepton-Sektor!

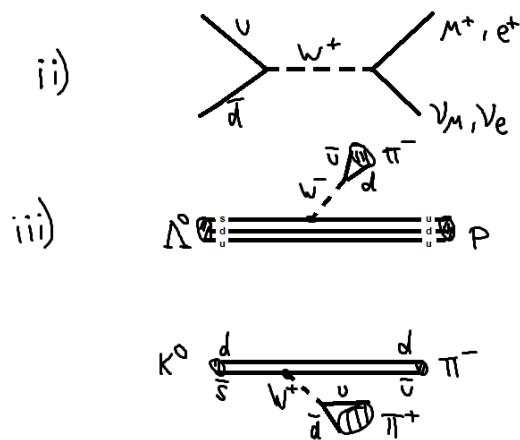


Abbildung 6.19: Feynman-Diagramme zu Punkten ii) und iii) der Zerfalls- und Streuprozesse im Quark-Sektor

- Evidenz für Generationenübergänge auch aus Wechselwirkungsstärken:

$$\begin{aligned}
\mu^+ &\rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \text{ (leptonisch, Referenzprozess) Wechselwirkungsstärke: } \propto G_F^2 \\
p &\rightarrow n e^+ \nu_e \text{ Wechselwirkungsstärke: } \propto G_F^2 \cdot \alpha_1^2, \quad \Delta S = 0 \\
\pi^- &\rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e \text{ Wechselwirkungsstärke: } \propto G_F^2 \cdot \alpha_1^2, \quad \Delta S = 0 \\
K^- &\rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e \text{ Wechselwirkungsstärke: } \propto G_F^2 \cdot \alpha_2^2, \quad \alpha_2^2, \quad \Delta S = 1
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Experimentell zeigt sich, dass  $\alpha_2^2 \ll \alpha_1^2$ , jedoch ist  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \approx 1$ . Daher führte Cabibbo 1963 die Quarkmischung ein:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix} \uparrow W^\pm \tag{6.13}$$

$\rightarrow \alpha_1 = \cos \theta_C, \quad \alpha_2 = \sin \theta_C \Rightarrow$  experimentelle Daten:  $\theta_C = 13.1^\circ$ . Es können somit alle experimentellen Messungen mittels nur eines einzigen Parameters beschrieben werden.

Mittels des *Cabibbo-Winkels*  $\theta_C$  ist eine Abschätzung der Zerfallsraten-Verhältnisse möglich:  $\Gamma = \text{Zerfallsbreite} \sim \text{Zerfallsrate}$

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \left| \frac{G_F \cdot G_F \cdot \sin \theta_C}{G_F \cdot G_F \cdot \cos \theta_C} \right|^2 \sim \sin^2 \theta_C \tag{6.14}$$

Nach Korrektur der kinetischen Faktoren sind  $\Delta S = 1$ -Übergänge um einen Faktor 20 gegenüber  $\Delta S = 0$ -Übergängen unterdrückt.

- GIM-Mechanismus: 1970 wurde die Cabibbo-Theorie von Glashow, Iliopoulos und Mariani auf vier Quarks und somit 2 Dubletts erweitert. Die Dubletts sind nun

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

, sodass nun gilt:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

Die Zerfälle des  $W^+$ -Bosons in  $u, \bar{d}$  bzw.  $c, \bar{s} \sim \cos \theta_C$  sind dabei Cabibbo-erlaubt, die Zerfälle nach  $u, \bar{s}$  bzw.  $c, \bar{d} \sim \sin \theta_C$  Cabibbo-unterdrückt.

- 1973: Verallgemeinerung der Quarkmischung auf sechs Quarks:

$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} \uparrow W^\pm$ . Die schwachen Eigenzustände  $d', s', b'^2$  sind dabei Linearkombinationen der physikalischen Quarks (Masseneigenzustände):

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}}_{V_{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

---

<sup>2</sup>Das b-Quark wurde jedoch erst vier Jahre später, 1977, entdeckt.

$V_{\text{CKM}}$  wird als *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix* bezeichnet. Sie ist eine komplexe, unitäre<sup>3</sup>  $3 \times 3$  Matrix. Die Einträge  $V_{ud}$  und  $V_{us}$  entsprechen  $\cos \theta_C$  und  $\sin \theta_C$  in der Cabibbo-Theorie.

- Die Matrixelemente werden durch die Theorie nicht vorhergesagt und müssen experimentell bestimmt werden, sie sind freie Parameter des Standardmodells. Beispielsweise ist die Kopplungsstärke des  $W^+$ -Bosons bei der Umwandlung  $u \rightarrow d$  gegeben durch  $\sqrt{\alpha_w} \cdot V_{ud}$ , bei der Umwandlung  $u \rightarrow s$  ist sie  $\sqrt{\alpha_w} \cdot V_{us}$ . Nach dem Stand von 2008 sind die *Beträge* der Matrixeinträge

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 0.97419 \pm 0.00022 & 0.2257 \pm 0.0010 & 0.00359 \pm 0.00016 \\ 0.2256 \pm 0.0010 & 0.97334 \pm 0.00023 & 0.0415^{+0.0010}_{-0.0011} \\ 0.00874^{+0.00026}_{-0.00037} & 0.0407 \pm 0.0010 & 0.999133^{+0.000044}_{-0.000043} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Die größten Unsicherheiten treten bei den Elementen der dritten Generation auf, eine präzise Vermessung dieser Matrixelemente ist Teil des Physikprogramms der sogenannten *B-factories* (BaBar, Belle-Experimente) und des LHCb-Experiments am LHC.

- Eine äquivalente Matrix kann auch im Leptonen-Sektor eingeführt werden, diese ist jedoch  $V_{\text{CKM}}^L \simeq \text{id}$ .
- Neutrale Ströme im Quark-Sektor existieren nur innerhalb einer Generation, es gibt keine flavourändernden neutralen Ströme! Eine Erklärung hierfür lässt sich analog zum *GIM-Mechanismus* finden.

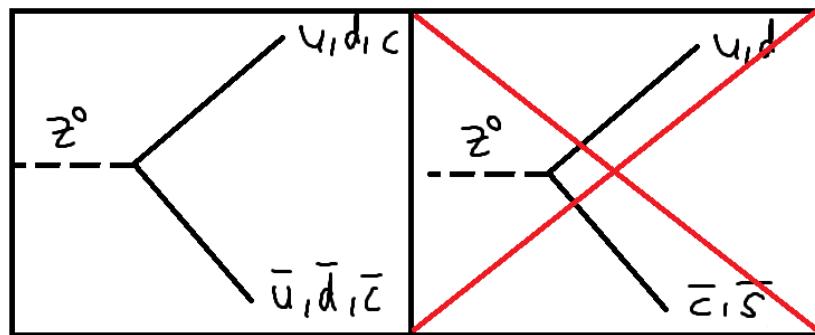


Abbildung 6.20: Es existieren keine flavourändernden neutralen Ströme!

---

<sup>3</sup>Für unitäre Matrizen  $V$  gilt, dass  $V \cdot V^* = I$  ist, wobei  $I$  die Matrix der Identität bezeichnet. Der Betrag ihrer Determinante ist 1, zudem lassen sie Winkel und Längen unverändert und somit auch Skalarprodukte:  $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$ .

- Selbstkopplung der  $W$ - und  $Z$ -Teilchen: Die Feldquanten  $W^\pm, Z^0$  tragen selbst die schwache Ladung (Isospin), was zur Selbstkopplung führen kann.

Die Selbstkopplung führt auch hier zu einer Energieabhängigkeit der schwachen Kopplung, derart, dass sie mit höherer Energie schwächer wird (ähnlich  $\alpha_s$ ).

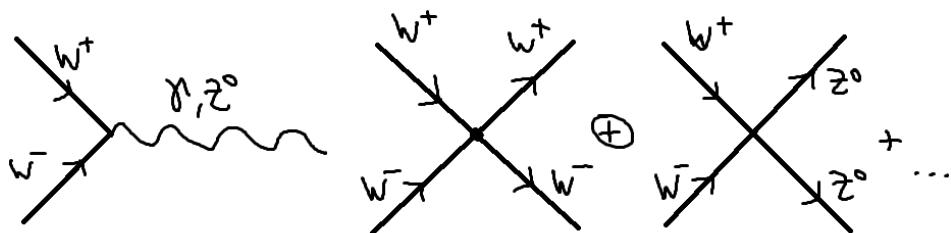


Abbildung 6.21: Wie Gluonen können auch  $W$ - und  $Z$ -Bosonen miteinander koppeln

## 6.4 Entdeckung der $W^\pm$ - und $Z^0$ -Teilchen

1983/84 wurde am CERN mithilfe eines Proton-Antiproton-Speicherrings durch C. Rubbia und S. van der Meer (Nobelpreis 1985) der Prozess

$$\begin{aligned} p\bar{p} &\rightarrow W^\pm + \dots \text{ mit} \\ W^\pm &\rightarrow e^\pm \nu_e^{(-)} \\ &\rightarrow \mu^\pm \nu_\mu^{(-)} \end{aligned} \tag{6.19}$$

untersucht. Analog:

$$\begin{aligned} p\bar{p} &\rightarrow Z^0 + \dots \text{ mit} \\ Z^0 &\rightarrow e^+ e^- \\ &\rightarrow \mu^+ \mu^- \end{aligned} \tag{6.20}$$

Das Problem einer Untersuchung über die hadronischen Zerfallskanäle ist der starke Untergrund aufgrund der starken Wechselwirkung!

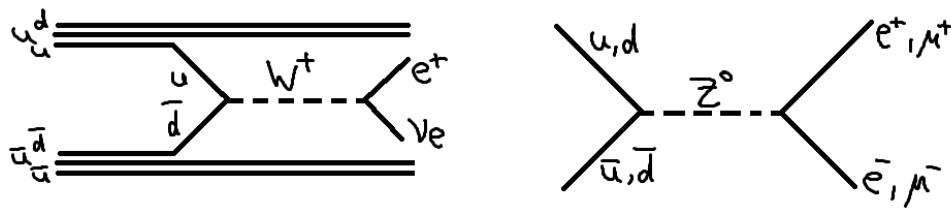


Abbildung 6.22: Von C. Rubbia untersuchte Prozesse zur  $W$ - und  $Z$ -Produktion

Die experimentelle Signatur beim Experiment von Rubbia und van der Meer: Protonen und Anti-Protonen werden mit annähernd identischen Impulsen (bis auf ihr Vorzeichen) aufeinander geschossen. Das anschließend zerfallende  $W$ -Boson ist somit annähernd ruhend. Während das  $e^-$  direkt nachweisbar ist, macht sich das Neutrino nur in Form von fehlender transversaler Energie bemerkbar. Beim Zerfall von  $Z^0$  sind sowohl  $e^-$  als auch  $e^+$  nachweisbar und ihre Energien messbar. Somit ist die Rekonstruktion der invarianten Masse der  $Z^0$  möglich. Es ist fast kein Untergrund aus Jet-Produktionen vorhanden, jedoch ein konstanter Untergrund durch Drell-Yan-Prozesse:  $q\bar{q} \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-$ .

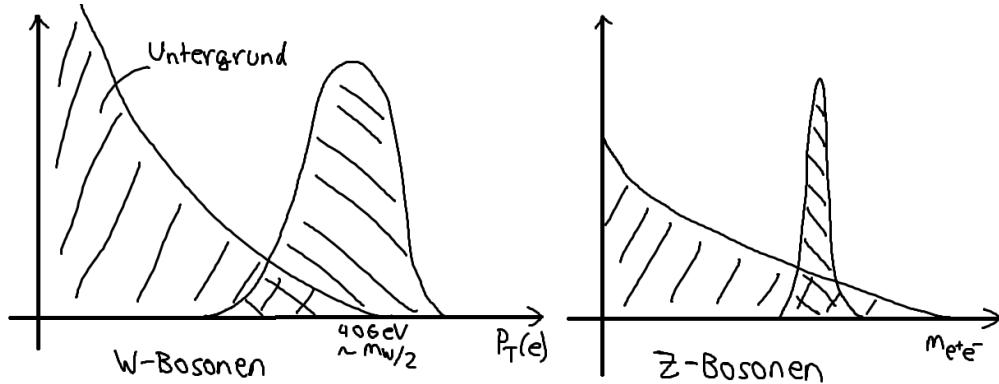


Abbildung 6.23: Experimentelle Signatur von  $W$ - und  $Z$ -Zerfall. Während bei  $W$ -Zerfällen der Transversalimpuls der Elektronen/Positronen betrachtet wurde, lassen sich  $Z^0$ -Teilchen durch die Summe der Energien von  $e^-$  und  $e^+$  nachweisen.

Da die Longitudinalkomponente des Neutrinoimpulses nicht gemessen werden kann, ist für  $W^\pm$  keine Massenrekonstruktion möglich. Zerfällt das  $W^\pm$  jedoch so, dass Elektron und Neutrino nahezu orthogonal zur Strahlachse emittiert werden, so entspricht der gemessene Transversalimpuls des Elektrons ungefähr der halben  $W$ -Masse (Die Ruheenergie des Elektrons ist klein gegen der des  $W$ -Bosons). Der Untergrund bei den hier untersuchten Prozessen besteht vornehmlich aus Jet-Produktion.

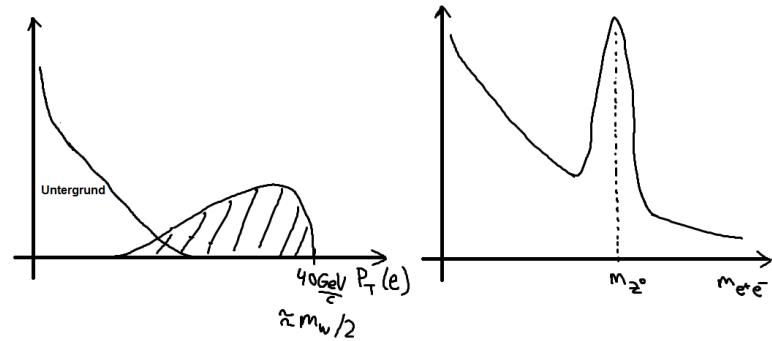


Abbildung 6.24: Histogramme des Transversalimpulses der  $e^\pm$  aus  $W^\pm$ -Zerfällen und der aus den gemessenen  $e^+e^-$ -Impulsen rekonstruierten invarianten Masse bei  $Z^0$ -Zerfällen

Die Massen von  $W^\pm$  und  $Z^0$  wurden mittlerweile zu  $m_W = 80.35 \text{ GeV}$  und  $m_Z = 91.127 \text{ GeV}$  bestimmt.

# 7 Symmetrien und Erhaltungssätze

## 7.1 Symmetrien und Gruppen, Einleitung, SO(3), SU(2)

Experimentell wird beobachtet, dass verschiedene Erhaltungssätze auftreten, beispielsweise Energie-, Impuls-, Drehimpuls-, Ladungs- und Leptonenzahlerhaltung. Die Theorie dazu besagt, dass für jede einem physikalischen System zugrundeliegende Symmetrie eine erhaltene Ladung bzw. Quantenzahl definiert werden kann. Emmy Noether formulierte dazu 1917: Jede Symmetrie in der Natur zieht einen Erhaltungssatz nach sich (und umgekehrt).

Symmetrien sind dabei zum Beispiel: Dazu gehören die Erhaltungsgrößen:

- |                                |               |
|--------------------------------|---------------|
| 1. Zeitliche Translation       | 1. Energie    |
| 2. Räumliche Translation       | 2. Impuls     |
| 3. Rotation                    | 3. Drehimpuls |
| 4. Raumspiegelung              | 4. Parität    |
| 5. Eichtransformation (später) | 5. Ladung     |

Symmetrie bedeutet, dass ein System unter Anwendung einer Operation invariant bleibt, der transformierte Zustand also nicht vom Untransformierten unterschieden werden kann.

Mathematisch lässt sich die durch die *Gruppentheorie* beschreiben. Die auf ein System anwendbare Menge aller Symmetrieeoperationen bildet eine mathematische Gruppe, das heißt sie hat die folgenden Eigenschaften:

- **Abgeschlossenheit:**  $R_i \in G, R_j \in G \Rightarrow R_i R_j = R_k \in G$
- **Einselement:** Es gibt  $I \in G$  so, dass  $I \cdot R_i = R_i \cdot I = R_i \forall R_i$
- **Inverses Element:**  $\forall R_i$  gibt es ein Element  $R_i^{-1}$ , s.d.  $R_i \cdot R_i^{-1} = R_i^{-1} \cdot R_i = I$
- **Assoziativität:**  $(R_i \cdot R_j) \cdot R_k = R_i \cdot (R_j \cdot R_k)$

Im Allgemeinen sind die Gruppenelemente nicht kommutativ. Wenn jedoch alle Elemente kommutieren spricht man von einer abelschen Gruppe. Bei räumlichen und zeitlichen Translationen handelt es sich beispielsweise um abelsche Gruppen, während Rotationen nicht abelsch sind.

Von **Kontinuierlichen Gruppen** spricht man, wenn die Gruppenelemente von einem oder mehreren kontinuierlichen Parametern (z.B. Rotationswinkel) abhängen. Die führt zu additiven Quantenzahlen.

In **Diskreten Gruppen** können die Elemente durch einen (ganzzahligen) Index gekennzeichnet werden<sup>1</sup>, was zu multiplikativen Quantenzahlen führt.

### Physikalisch relevante Gruppen:

Physikalisch relevant sind die Matrizengruppen. Die Menge aller unitären  $n \times n$  Matrizen bildet zum Beispiel die Gruppe **U(n)**, wobei ein wichtiger Spezialfall die Gruppe **SU(n)** der unitären Matrizen mit der Determinante 1 ist. Ebenfalls wichtig sind die reellen unitären (und somit orthogonalen) Matrizen **O(n)** und deren Untergruppe **SO(n)** mit Determinante 1.

Konkrete Beispiele:

- SO(3): Rotationen im 3-dimensionalen Raum, die mit der Drehimpulserhaltung verknüpft sind.
- SU(2), SU(3): Wichtige innere Symmetrien in der Elementarteilchenphysik

Das Standardmodell der Elementarteilchen basiert auf der Symmetrie unter

$$\underbrace{SU(3)}_{\text{QCD}} \times \underbrace{SU_L(2)}_{\text{Elektroschwach}} \times U(1) \quad (7.1)$$

Beispiele für diskrete Gruppen sind die Paritätsoperationen P, die Teilchen-Antiteilchen-Konjugationen C und deren Kombination CP.

### Beispiel: Drehungen in drei Dimensionen

$\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$  Es erfolgt nun eine Drehung um den Winkel  $\theta_3$  um die z-Achse:

$$\theta_3 \rightarrow R^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} ; \quad R^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

Alle Drehmatrizen erfüllen die Orthogonalitätsrelation:  $R^{-1} = R^T \rightarrow \det R = \pm 1$

Die *Drehgruppe SO(3)* ist die Gruppe der speziellen (mit Determinante 1) orthogonalen Matrizen im Dreidimensionalen. Sie ist nicht kommutativ, die zugehörige Gruppe wird als Nicht-abelsche Gruppe bezeichnet.

---

<sup>1</sup> Alle endlichen Gruppen sind diskret.

Die  $\text{SO}(3)$ -Gruppe hängt von drei kontinuierlichen Parametern ab (z.B. 3 Eulersche Winkel), und gehört somit zu den *LIE-Gruppen*, die alle von endlich vielen kontinuierlichen Parametern abhängenden Gruppen beinhalten.

Betrachtet man nun infinitesimale Drehungen, ergibt sich über die Kleinwinkelnäherung:

$$R^{(3)}(d\theta) = 1 - i \cdot d\theta \cdot D_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

$D_1, D_2$  ergeben sich analog.

$D_1, D_2$  und  $D_3$  heißen dabei **Generatoren** der Gruppe. Dreht man nun um eine beliebige Achse  $\vec{n}$ , so gilt:

$$R^n(d\theta) = 1 - id\theta \cdot n_i D_i = 1 - id\theta \cdot \vec{n} \cdot \vec{D} \quad (7.4)$$

Eine Hintereinanderausführung von  $m$  infinitesimalen Drehungen ergibt dann

$$\begin{aligned} R^n(m \cdot d\theta) &= (1 - id\theta \vec{n} \cdot \vec{D})^m \\ &\rightarrow \boxed{R^n(\theta) = e^{-i\theta \vec{n} \cdot \vec{D}}} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Kurze Erinnerung: Die Exponentialfunktion einer Matrix  $A$  ist definiert als

$$e^A := Id + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots \quad (7.6)$$

Da es sich um eine nicht-abelsche Gruppe handelt, vertauschen die  $D_i$  nicht, also gilt

$$[D_i, D_j] = i \cdot \varepsilon_{ijk} \cdot D_k \quad (7.7)$$

Darstellungen der Drehgruppe: Die Gesamtheit der orthogonalen Matrizen bildet eine Darstellung von  $\text{SO}(3)$ .

### Die Symmetriegruppe $\text{SU}(2)$

Zur Erinnerung: Die Gruppe ist invariant unter Rotationen, sodass mit dem unitären Operator  $U$  und dem infinitesimalen Drehwinkel  $\varepsilon$

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle = (1 - i\varepsilon J_3) \cdot |\psi\rangle \quad (7.8)$$

ergibt. Die Drehung um einen endlichen Winkel  $\theta$  lässt sich nun als Aufeinanderfolgen von  $n$  infinitesimalen Rotationen ausdrücken:

$$U(\theta) = (1 - i\frac{\theta}{n} J_3)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{i\theta J_3} \quad (7.9)$$

Die  $J_i$  sind dabei die Generatoren der Rotationsgruppe.

Die Kommutator-Relationen sind

$$[J_i, J_k] = i \cdot \varepsilon_{jkl} \cdot J_l ; \text{ z.B. } [J_1, J_2] = i \cdot J_3 \quad (7.10)$$

, der Casimir-Operator ist

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 : J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle ; \quad J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (7.11)$$

und die Auf-/ Abstiegsoperatoren sind  $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$  mit

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle \quad (7.12)$$

Dabei sind  $|j, m\rangle$  die Basisvektoren, die den Darstellungsraum auf der Dimension  $d = 2j + 1$  der Darstellung aufspannen, wobei  $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  (Multipletts) ist.

### Darstellung der Rotationsgruppe für ( $j = 1/2$ ): SU(2)

Die Generatoren sind  $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$  mit den Pauli-Matrizen  $\sigma_i$ :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Basisvektoren sind zu Spin  $\uparrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und zu Spin  $\downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Diese lassen sich durch  $\frac{1}{2}(\sigma_1 \mp \sigma_2)$  hin und her transformieren.

Zudem gilt  $\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Die Transformationsmatrizen, die einer Rotation um die Achse  $i$  entsprechen sind

$$U(\theta_i) = e^{-i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}} \quad (7.13)$$

, während für die Rotation um eine beliebige Achse  $\vec{\theta}$

$$U(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (7.14)$$

gilt. Die  $U(\theta)$  bilden dabei eine Gruppe mit der Determinante 1, es handelt sich also um eine SU(2)-Gruppe ( $\det(e^{iA}) = e^{iTr(A)} = 1$  A Matrix).

### Rotationen um die y-Achse:

$$U(\theta_2) = e^{-i\theta_2 \frac{\sigma_2}{2}} = \cos \frac{\theta_2}{2} - i\sigma_2 \sin \frac{\theta_2}{2} \quad (7.15)$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\sigma_2^2 = Id$  und  $\sigma_2^3 = \sigma_2$  ist. Für  $\theta_2 = 180^\circ$  ergibt sich nun:

$$U(\theta_2) = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad U(\theta_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

, für  $\theta_2 = 360^\circ$  ergibt sich  $U(\theta_2) = -Id$ . Das bedeutet, dass der Spinor das Vorzeichen unter Rotation verändert, was ein wichtiger Unterschied zwischen SO(3) und SU(2) ist. Die Spinordarstellungen der SU(2) sind keine Darstellungen der Rotationsgruppe.

Die Darstellungen können auf höhere Spins verallgemeinert werden:

$$\text{Spin -1: } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Generatoren:  $3 \times 3$  Matrizen  $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$

Die Anwendung sind Teilchen, denen  $|j, m\rangle$  zugeordnet wird. Systeme wechselwirkender Teilchen werden dann durch die Produkte von Darstellungen beschrieben:

$$|j_A, m_A\rangle \cdot |j_B, m_B\rangle$$

Dies entspricht der Drehimpulskopplung.

Die **Kopplung von Drehimpulsen** führt uns zu den *Clebsch-Gordan-Koeffizienten*. Es ist:

$$J_A, J_B \rightarrow J = J_A \otimes J_B; J = |J_A - J_B|, |J_A - J_B| + 1, \dots, J_A + J_B; M = m_A + m_B$$

Es folgt

$$|J, M\rangle = \sum_{m_A, m_B} c(m_A, m_B, JM) |j_A j_B m_A m_B\rangle \quad (7.17)$$

, wobei die  $c(m_A, m_B, JM)$  die Clebsch-Gordan-Koeffizienten darstellen.

Beispiel:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \rightarrow J = 1 \text{ Triplett}; J = 0 \text{ Singulett}$$

Dabei ist:

- $|S = 1, m = 1\rangle = \uparrow\uparrow$
- $|S = 1, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$
- $|S = 1, m = -1\rangle = \downarrow\downarrow$
- $|S = 0, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$

Es ergibt sich also:

$$2 \otimes 2 \rightarrow 3 \oplus 1$$

$$(2 \otimes 2) \otimes 2 \rightarrow (3 \oplus 1) \otimes 2 = (3 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2) = \underbrace{4}_{3/2} \oplus \underbrace{2}_{1/2} \oplus \underbrace{2}_{1/2}$$

, wobei die  $3/2$  bzw.  $1/2$  der Gesamt-Spin sind.



## 7.2 Parität, Symmetrie unter räumlicher Spiegelung

Die Paritätsoperation  $P$  stellt die Spiegelung der Koordinaten am Ursprung dar und überführt einen Vektor  $\vec{x}$  oder  $\vec{p}$  in

$$\begin{aligned}\vec{x} &\rightarrow -\vec{x} \\ \vec{p} &\rightarrow -\vec{p}\end{aligned}\tag{7.18}$$

Die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{p}$  sind Beispiele sog. *polarer* Vektoren, diese ändern ihr Vorzeichen unter der Paritätsoperation. Neben polaren Vektoren gibt es sog. *axiale* Vektoren, diese bleiben unverändert unter der Paritätsoperation. Je nach Transformationsverhalten unter  $P$  unterscheidet man verschiedene Arten von Größen:

$$\begin{aligned}P(\vec{v}) &= -\vec{v} && \text{Vektor, polarer Vektor} \\ P(\vec{a}) &= +\vec{a} && \text{axialer Vektor, Pseudovektor} \\ P(s) &= s && \text{Skalar} \\ P(p) &= -p && \text{Pseudoskalar, z.B. } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\end{aligned}\tag{7.19}$$

Beispiele für polare Vektoren sind wie bereits gesehen der Orts- und Impulsvektor. Beispiele für axiale Vektoren sind Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , aber auch das magnetische Feld  $\vec{B}$ , aufgrund der Struktur der Lorentzkraft, welche einen polaren Vektor darstellt:

$$\vec{F}_{\text{pol.}} = q \left( \vec{E}_{\text{pol.}} + \vec{v} \times \vec{B}_{\text{axial}} \right)\tag{7.20}$$

Ein Pseudoskalar ist beispielsweise gegeben durch das Skalarprodukt eines Vektors und eines Pseudovektors.

Für eine Wellenfunktion  $\psi$  ist  $P\psi(\vec{x}, t) = \psi(-\vec{x}, t)$ , d.h.  $P^2 = \text{id}$ , die Eigenwerte des Paritätsoperators sind folglich  $\pm 1$ , die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$\psi_{\pi}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi(\vec{x}) \pm \psi(-\vec{x}) \}\tag{7.21}$$

Die Invarianz eines Systems unter  $P$  impliziert, dass  $[H, P] = 0$ , was dem Erhaltungssatz der Parität entspricht.

Beispiel sind die elektromagnetische Wechselwirkung und das Wasserstoffatom.

Die Eigenfunktionen des (ungestörten) Wasserstoffatoms ist

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r) \cdot Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)\tag{7.22}$$

In Kugelkoordinaten überführt der Paritätsoperator die Koordinaten

$$r \rightarrow r, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \varphi \rightarrow \pi + \varphi\tag{7.23}$$

so, dass die Parität der Wasserstoffwellenfunktion  $(-1)^{\ell}$  ist, da

$$Y_{\ell}^m(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)\tag{7.24}$$

Die Parität der Wellenfunktion hängt also vom Bahndrehimpuls  $\ell$  ab. Ist die Parität erhalten, so ergeben sich quantenmechanische Auswahlregeln für Übergänge.

### Intrinsische Parität von Elementarteilchen

Hadronen sind Eigenzustände von  $P$ , die durch eine zusätzliche Paritätsquantenzahl (Eigenparität) klassifiziert werden.

Wir betrachten nun zusammengesetzte Teilchen/Systeme aus Teilchen  $a$  und  $b$  mit relativem Bahndrehimpuls  $\ell$ . Die Parität ist dann

$$P := P_a \cdot P_b \cdot (-1)^\ell \quad (7.25)$$

, wobei  $P_a$  und  $P_b$  die Eigenparitäten der Teilchen  $a, b$  bezeichnen und  $\ell$  den relativen Drehimpuls.

Quarks besitzen per Definition positive Eigenparität +1 (historisch bedingt, da bereits für das Proton  $P(p) = +1$  definiert wurde). Antiquarks besitzen eine Eigenparität von -1 (Quantenfeldtheorie: Fermionen/Antifermionen besitzen entgegengesetzte Parität).

**Mesonen** • Für die Mesonen ( $\pi^+, \pi^-, \pi^0, K^+, K^-, \eta, \dots$ ) sind  $\ell = s = 0$ . Folglich ist ihre Parität

$$P = (-1) \cdot (+1) \cdot (-1)^0 = -1 \quad (7.26)$$

Diese Mesonen werden zu den pseudoskalaren Mesonen gezählt.

• Für ( $\rho^+, \rho^-, \rho^0, \omega, K^*, \Phi, \dots$ ) mit  $\ell = 0, s = 1$  ist die Parität genau gleich

$$P = (-1) \cdot (+1) \cdot (-1)^0 = -1 \quad (7.27)$$

, da der Spin für die Parität keine Rolle spielt. Diese Mesonen werden als Vektormesonen bezeichnet.

Es existieren jedoch auch Zustände mit höherem Bahndrehimpuls  $\ell = 1$ , dies liefert einen zusätzlichen Faktor -1.

**Baryonen**  $p, n, \Lambda, \dots$  mit  $\ell = 0$  besitzen den Paritätseigenwert

$$P = (+1)^3 = +1 \quad (7.28)$$

**Photonen** Aus dem Transformationsverhalten elektromagnetischer Felder<sup>2</sup> ergibt sich die Parität von Photonen (Vektorteilchen) zu

$$P(\gamma) = -1 \quad (7.29)$$

Die Parität ist in der *starken* und der *elektromagnetischen* Wechselwirkung erhalten , sodass gilt:

$$\begin{aligned} a + b &\xrightarrow{\ell} c + d \\ P_a \cdot P_b \cdot (-1)^\ell &= P_c \cdot P_d \cdot (-1)^{\ell'} \end{aligned} \quad (7.30)$$

, wobei  $\ell, \ell'$  den relativen Bahndrehimpuls im Anfangs-/Endzustand bezeichnen.

---

<sup>2</sup>Das Vektorpotential  $A^\mu$  transformiert sich wie 4-er Vektoren.

Beispiel:  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ :

$$\begin{aligned} P|\rho^0\rangle &= -1|\rho^0\rangle \\ \text{Spin}(\rho^0) &= +1 \text{ (Vektormeson)} \\ \text{Spin}(\pi^+, \pi^-) &= 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

Somit ist die Parität nur erhalten, wenn genau zwei Pionen (theoretisch  $+2n$  Pionen, jedoch energetisch unterdrückt) produziert werden:

$$\begin{aligned} P_{\rho^0} &= P_{\pi^+} \cdot P_{\pi^-} \cdot (-1)^{\ell'} \\ -1 &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^1 = -1 \checkmark \end{aligned} \quad (7.32)$$

Die Parität ist in der schwachen Wechselwirkung verletzt! Berühmtestes Beispiel ist der  $K^+$ -Zerfall:

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^0 \\ (-1) &\rightarrow (-1)(-1) = 1 \text{ Parität verletzt!} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Die Parität eines Teilchens kann in Produktionsreaktionen bestimmt werden (idealerweise wird nur ein Teilchen produziert), sofern es durch die starke Wechselwirkung produziert wird:

$$\begin{aligned} a + b &\rightarrow a + b + c \\ P_a \cdot P_b \cdot (-1)^\ell &= P_a \cdot P_b \cdot P_c \cdot (-1)^{\ell'} \\ \Rightarrow P_c &= (-1)^{\ell' - \ell} \end{aligned} \quad (7.34)$$

### 7.3 Ladungskonjugation

Der Operator  $C$  konvertiert ein Teilchen  $P$  in das zugehörige Antiteilchen  $\bar{P}$ .

$$C|P\rangle = |\bar{P}\rangle \quad (7.35)$$

- $C$  kehrt somit alle additiven Quantenzahlen um (Ladung, Baryonenzahl, Leptonenzahl, Strangeness,...).
- Masse, Impuls und Spin bleiben unverändert.
- $C^2 = \text{id}$
- Es können nur Teilchen Eigenzustände sein, die ihre eigenen Antiteilchen sind ( $\gamma, \pi^0, \eta, \rho^0, \dots$ ).
- Im Quark-Multiplett wird dies auf alle Teilchen verallgemeinert ( $\rightarrow G$ -Parität).

Für Photonen ergibt sich aufgrund der Ladungskonjugation und der damit verbundenen Auswirkung auf elektromagnetische Felder, dass

$$C|\gamma\rangle = -1|\gamma\rangle \quad (7.36)$$

Die  $C$ -Parität der übrigen Teilchen ergibt sich aus Zerfällen.

$$\begin{aligned} \pi^0 &\rightarrow \gamma\gamma & C|\pi^0\rangle &= +|\pi^0\rangle && \text{(Pseudoskalar)} \\ \omega^0 &\rightarrow \pi^0\gamma & C|\omega^0\rangle &= -|\omega^0\rangle && \text{(Vektor)} \\ &\not\rightarrow \pi^0\gamma\gamma \end{aligned} \quad (7.37)$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned}\eta^0 &\rightarrow \gamma\gamma \quad (\text{Pseudoskalar}) \\ &\not\rightarrow \pi^0\gamma \\ \pi^0 &\not\rightarrow \gamma\gamma\gamma\end{aligned}\tag{7.38}$$

Wieder erhalten die *starke* und die *elektromagnetische* Wechselwirkung die *C*-Parität.

Die *C*-Parität kann auch für Teilchen-Antiteilchen-Systeme definiert werden, beispielsweise für Positronium oder  $q\bar{q}$ -Systeme. Für diese gilt

$$C = (-1)^{\ell+s} \tag{7.39}$$

, wobei  $s$  den Spin des Systems und  $\ell$  dessen Bahndrehimpuls beschreibt. Der Beweis erfolgt in den Übungen (Man betrachte dabei die Paritäten der Spin- und Ortswellenfunktion!). Die *C*-Parität wurde jeweils für die neutralen Zustände bestimmt werden und dann auf die Mesonenklasse verallgemeinert (Multiplett).

- Für *pseudoskalare Mesonen* ist  $\ell = 0$ ,  $s = 0$  und  $C = +1$  (z.B.  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ,  $K^+$ , ...), also  $J^{PC} = 0^{-+}$
- Für *Vektormesonen* ist  $\ell = 0$ ,  $s = 1$  und  $C = -1$  (z.B.  $\rho^0$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $K^*$ , ...), also  $J^{PC} = 1^{--}$
- Ebenso ist für Photonen  $J^{PC} = 1^{--}$

Auch die *C*-Parität ist, ebenso wie die *P*-Parität in der schwachen Wechselwirkung verletzt:

Betrachtet man beispielsweise ein Neutrino, welches mit dem Impuls  $\vec{p}$  in  $+x$ -Richtung fliegt. Sein Spin ist dann in  $-x$ -Richtung gerichtet (negative Helizität). Unter der *C*-Transformation würde dieses linkshändige Neutrino  $\nu_L$  in ein Anti-Neutrino  $\bar{\nu}_L$  mit gleichem Spin und Impuls überführt werden. Ein solches linkshändiges Anti-Neutrino existiert jedoch nicht! Hingegen existiert die *CP*-Transformation: Wird auch der Impuls des Neutrinos gespiegelt, so erhalten wir ein rechtshändiges  $\bar{\nu}_r$ .

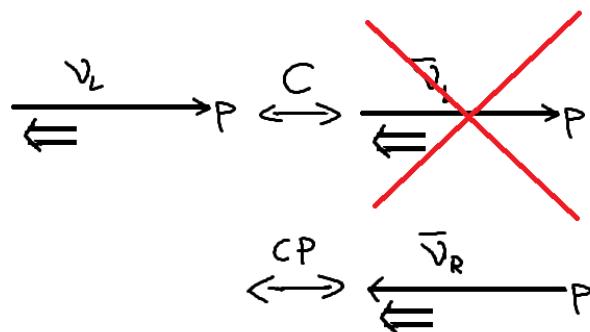


Abbildung 7.2: Die *C*-Paritätserhaltung ist für Neutrinos verletzt, jedoch nicht die *CP*-Paritätserhaltung

## 7.4 Physik neutraler Kaonen, CP-Verletzung

Es lag die Vermutung vor, dass die schwache Wechselwirkung die kombinierte  $CP$ -Symmetrie befolge. Um dies zu prüfen, wurden Experimente mit  $K^0$ -Strahlen, die die  $K^0$ -Zerfälle untersuchen, realisiert:

- Die Erzeugung findet mittels starker Wechselwirkung und somit in seltsame-Teilchen-Paaren statt:
$$\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0, E_{\text{kin}}(\pi^-) = 0.91 \text{ GeV}$$

$$\pi^+ p \rightarrow K^+ \bar{K}^0 p, E_{\text{kin}}(\pi^+) = 1.5 \text{ GeV}$$
- Kaonen bestehen aus:

$$K^0 \hat{=} |d\bar{s}\rangle, \bar{K}^0 \hat{=} |\bar{d}s\rangle, K^+ \hat{=} |\bar{s}u\rangle \quad (7.40)$$

Aufgrund der unterschiedlichen Schwellenenergien lässt sich die Produktion eines reinen  $K^0$ -Strahls über die Pion-Energie kontrollieren.

$K^0$ -Teilchen gehören zu den pseudoskalaren Mesonen  $J^{PC} = 0^{-+}$ :

$$\begin{aligned} P|K^0\rangle &= -|K^0\rangle & C|K^0\rangle &= |\bar{K}^0\rangle & CP|K^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle \\ P|\bar{K}^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle & C|\bar{K}^0\rangle &= |K^0\rangle & CP|\bar{K}^0\rangle &= -|K^0\rangle \end{aligned} \quad (7.41)$$

$\Rightarrow |K^0\rangle$  und  $|\bar{K}^0\rangle$  sind *keine* Eigenzustände von  $CP$ .  $CP$ -Eigenzustände sind hingegen:

$$\begin{aligned} |K_1\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle \right\} & CP|K_1\rangle &= |K_1\rangle \\ |K_2\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle \right\} & CP|K_2\rangle &= -|K_2\rangle \end{aligned} \quad (7.42)$$

$K_1$  und  $K_2$  wurden eingeführt, da man experimentell zwei neutrale Kaonen mit verschiedener Lebensdauer beobachtet hatte. Die nahe am Produktionsort zerfallenden Kaonen zerfielen dabei in Zustände mit  $P = +1$ , die erst in relativ großer Entfernung zerfallenden Kaonen in  $P = -1$ -Zustände.

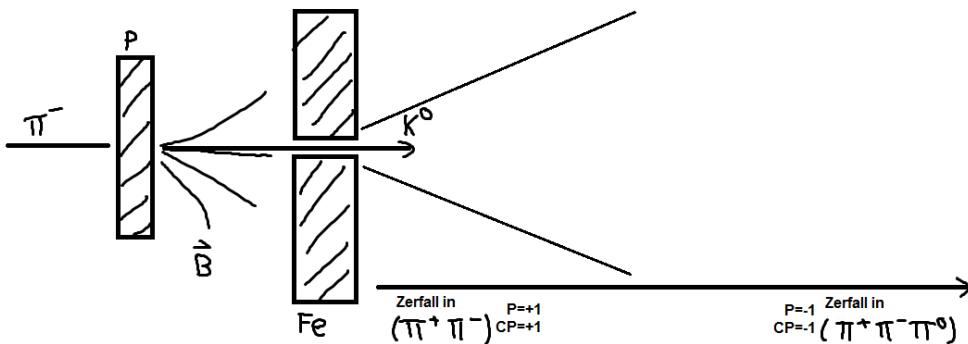


Abbildung 7.3: Experiment zur Untersuchung von  $K^0$ -Zerfällen: Es zeigt sich, dass zwei Arten von  $K^0$  vorliegen, die unterschiedlich schnell zerfallen.

### Experimenteller Befund: (1950er Jahre)

- Der Zerfall zeigt zwei Komponenten: kurzlebige  $K_S^0$  ( $K$ -short) und langlebige  $K_L^0$  ( $K$ -long)

$$\begin{aligned} K_S^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^- \quad \tau = 0.89 \cdot 10^{-10} \text{ s} \\ K_L^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad \tau = 5.2 \cdot 10^{-8} \text{ s} \end{aligned} \quad (7.43)$$

- Neutrale Kaonen können nur durch schwache Wechselwirkung zerfallen und zeigen klare Paritätsverletzung.

Als Teilchen mit definierten Lebensdauern und Massen<sup>3</sup> sind  $K_L^0$  und  $K_S^0$  die physikalischen Teilchen. Es stellt sich somit die Frage: Sind  $|K_S^0\rangle$  und  $|K_L^0\rangle$  mit  $|K_1\rangle$  und  $|K_2\rangle$  identisch?

- Produziert werden die Teilchen  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$ .
- Die zerfallenden Teilchen sind  $K_S^0$  und  $K_L^0$  (schwacher Zerfall).
- Die CP-Eigenzustände sind  $|K_1\rangle$  und  $|K_2\rangle$

Falls die  $CP$ -Parität erhalten ist, so ist  $|K_S\rangle = |K_1\rangle$  und  $|K_L\rangle = |K_2\rangle$ . Das Schlüssel-experiment zur Beantwortung dieser Frage wurde 1964 durch Cronin und Fitch durchgeführt: In einem langen Zerfallstunnel ( $\rightarrow$  reine  $K_L^0$ -Komponente, sehr kleiner  $K_S^0$ -Untergrund) beobachteten sie  $2\pi$ -Zerfälle im  $K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ -Zerfall. Wenn  $K_L = K_2$  ist, so sollten nur  $\pi^+ \pi^- \pi^0$ -Zerfälle auftreten. Sie beobachteten

- $\sim 22700 \pi^+ \pi^- \pi^0$ -Zerfälle
- $45 \pi^+ \pi^-$ -Zerfälle

Also ist auch  $CP$  in der schwachen Wechselwirkung verletzt! Der physikalische Zustand  $K_L$  ist also *kein* reiner  $CP$ -Eigenzustand.

$$\boxed{|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \{ |K_2\rangle + \varepsilon |K_1\rangle \}} \quad \varepsilon = 2.3 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \{ |K_1\rangle + \varepsilon |K_2\rangle \}}$$
(7.44)

$\varepsilon$  beschreibt die Abweichung von der  $CP$ -Invarianz. Es existiert also keine exakte Spiegelsymmetrie in der Natur!

Die Differenz der Massen dieser beiden Teilchen wurde gemessen<sup>4</sup> zu

$$\Delta m(K_S^0, K_L^0) = 3.5 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \quad (7.45)$$

Weitere Evidenz für  $CP$ -Verletzung findet sich in semi-leptonischen Zerfällen:

$$(i) \quad K_L^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$$

---

<sup>3</sup>Die Masse eines  $K^0$  beträgt 498 MeV, die Massendifferenz zwischen  $K_L^0$  und  $K_S^0$  jedoch nur  $\Delta m = 3.5 \cdot 10^{-6}$  eV, d.h.  $\Delta m/m = 1 : 10^{14}$ !

<sup>4</sup>Wie in einem späteren Abschnitt zu ersehen ist, lässt sich diese winzige Abweichung aufgrund von Teilchen-Antiteilchen-Oszillationen messen.

$$(ii) \ K_L^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$$

Diese beiden Zustände lassen sich durch  $CP$ -Spiegelung ineinander überführen:  $CP|(i)\rangle = |(ii)\rangle$ . Bei  $CP$ -Erhaltung müssten gleiche Verzweigungsverhältnisse auftreten, jedoch ist

$$\frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)} - 1 = 3.3 \cdot 10^{-3} \quad (7.46)$$

, d.h. auch hier ist die  $CP$ -Symmetrie verletzt (Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie)! Die Konsequenzen umfassen

- Schock für die Physiker: Es existiert keine exakte Spiegelsymmetrie in der Natur, es liegt eine Verletzung der Zeitumkehrinvarianz vor.
- Die  $CP$ -Verletzung erlaubt eine eindeutige Festlegung der Ladungsvorzeichen.
- Die  $CP$ -Verletzung gibt eine Erklärung für den Überschuss an Materie über Antimaterie im Universum.

Während die Massen von  $|K_L^0\rangle$  und  $|K_S^0\rangle$  leicht voneinander abweichen, sollten nach dem CPT-Theorem die Massen von  $|K^0\rangle$  und  $|\bar{K}^0\rangle$  als Teilchen/Antiteilchen identisch sein. Eine Massendifferenz würde zur  $CP$ -Verletzung beitragen, heutige Grenzen sind

$$\frac{m(K^0) - m(\bar{K}^0)}{m(K^0)} < 10^{-18} \quad (7.47)$$

## 7.5 Teilchen-Antiteilchen Oszillationen

Bei neutralen Mesonen kann die schwache Wechselwirkung Oszillationen zwischen Teilchen und Antiteilchen bewirken:

$$K_{(d\bar{s})}^0 \leftrightarrow \bar{K}_{(\bar{d}s)}^0, D_{(c\bar{u})}^0 \leftrightarrow \bar{D}_{(\bar{c}u)}^0, B_d^0 \leftrightarrow \bar{B}_{(\bar{b}d)}^0, B_S^0 \leftrightarrow \bar{B}_{(\bar{b}\bar{s})}^0 \quad (7.48)$$

Physikalische Teilchen sind solche, die eine definierte Masse und Lebensdauer besitzen. Unter Vernachlässigung der  $CP$ -Verletzung entsprechen

$$K_S^0 \approx K_1, \quad K_L^0 \approx K_2 \quad (7.49)$$

, sowie analog für die restlichen, o.g. Teilchen, z.B.

$$\begin{aligned} |B_1^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |B^0\rangle + |\bar{B}^0\rangle \right\} & M_1, \Gamma_1 &= 1/\tau_1 \\ |B_2^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |B^0\rangle - |\bar{B}^0\rangle \right\} & M_2, \Gamma_2 &= 1/\tau_2 \end{aligned} \quad (7.50)$$

Die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Teilchens mit Lebensdauer  $\tau$  bzw. Zerfallskonstante  $\Gamma$  ist

$$P(t) = \Gamma e^{-\Gamma t} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (7.51)$$

Die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Zustands  $(M, \Gamma)$  ist

$$|B_1^0(t)\rangle = |B_1^0(0)\rangle \cdot e^{-i(M_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1)t} \quad (7.52)$$

Wie sieht nun die zeitliche Entwicklung eines in starker Wechselwirkung erzeugten, reinen  $B^0$ - oder  $\bar{B}^0$ -Zustands aus?

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= |B^0(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |B_1^0\rangle + |B_2^0\rangle \right\} \\ |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |B_1^0(0)\rangle \cdot e^{-i(M_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1)t} + |B_2^0(0)\rangle \cdot e^{-i(M_2 - \frac{i}{2}\Gamma_2)t} \right\} \end{aligned} \quad (7.53)$$

Wir definieren nun die mittleren Massen  $M$  und Zerfallskonstanten  $\Gamma$  so, dass

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= M \pm \frac{\Delta m}{2} \\ \Gamma_{1,2} &= \Gamma \pm \frac{\Delta \Gamma}{2} \end{aligned} \quad (7.54)$$

Die Wahrscheinlichkeit ein zum Zeitpunkt  $t = 0$  erzeugtes  $B^0$  wurde, zum Zeitpunkt  $t$  wieder als  $B^0$  vorzufinden, ist gegeben durch

$$P_{B^0 \rightarrow B^0}(t) = \left| \langle B^0(t) | \psi(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \Gamma \left[ e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2 \cdot e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m \cdot t + \varphi) \right] \quad (7.55)$$

Analog ist die Wahrscheinlichkeit ein  $\bar{B}^0$  vorzufinden

$$P_{B^0 \rightarrow \bar{B}^0}(t) = \left| \langle \bar{B}^0(t) | \psi(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \Gamma \left[ e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2 \cdot e^{-\Gamma t} \cos(\Delta m \cdot t + \varphi) \right] \quad (7.56)$$

Falls die Lebensdauern annähernd gleich sind (Näherung im  $B^0$ -System), so vereinfachen sich die Gleichungen zu ( $\Gamma_{1,2} = \Gamma$ ,  $\Delta \Gamma = 0$ ,  $M_1 \neq M_2$ ):

$$\begin{aligned} P_{B^0 \rightarrow B^0}(t) &= \frac{1}{2} \Gamma e^{-\Gamma t} \{ 1 + \cos(\Delta m \cdot t + \varphi) \} \\ P_{B^0 \rightarrow \bar{B}^0}(t) &= \frac{1}{2} \Gamma e^{-\Gamma t} \{ 1 - \cos(\Delta m \cdot t + \varphi) \} \\ P_{B^0 \rightarrow B^0 \vee \bar{B}^0}(t) &= \Gamma e^{-\Gamma t} \end{aligned} \quad (7.57)$$

Diese Oszillation entspricht dem klassischen Analogon von gekoppelten Pendeln. Die Kopplung bzw. die Übergänge werden durch die schwache Wechselwirkung induziert, wobei Beiträge höherer Ordnung (Box-Diagramme) auftreten (vgl. Abb. 7.5).

Die „Oszillationsfrequenz“  $\Delta m$  kann theoretisch berechnet werden:

$$\Delta m(B_d^0) \sim |V_{tb}^* V_{td}|^2 \cdot m_t^2 \cdot m(B_d^0) \quad (7.58)$$

Aus den Oszillationsfrequenzen können CKM-Matrixelemente bestimmt werden. Gut geeignet sind Verhältnisse von Massendifferenzen verschiedener Mesonen:

$$\frac{\Delta m(B_d^0)}{\Delta m(B_s^0)} \simeq \frac{m(B_d^0)}{m(B_s^0)} \cdot \frac{|V_{td}|^2}{|V_{ts}|^2} \quad (7.59)$$

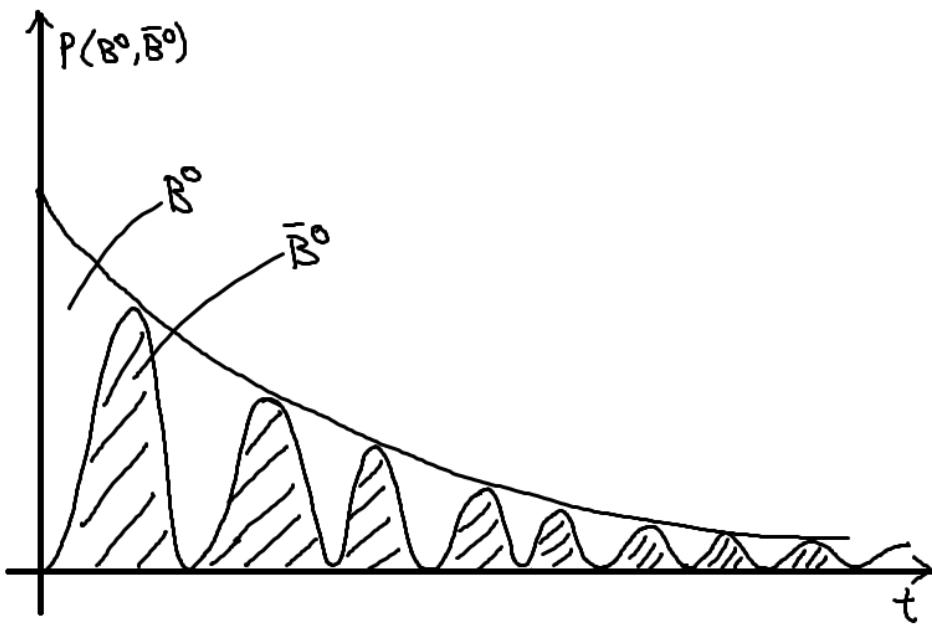


Abbildung 7.4: Oszillation von  $B^0$  und  $\bar{B}^0$ . Nach der Hälfte einer Oszillationslänge  $\Delta m \cdot t = \pi$ , d.h.  $t = \frac{\pi}{\Delta m}$ , sind die Mesonen komplett in  $\bar{B}^0$  umgewandelt.

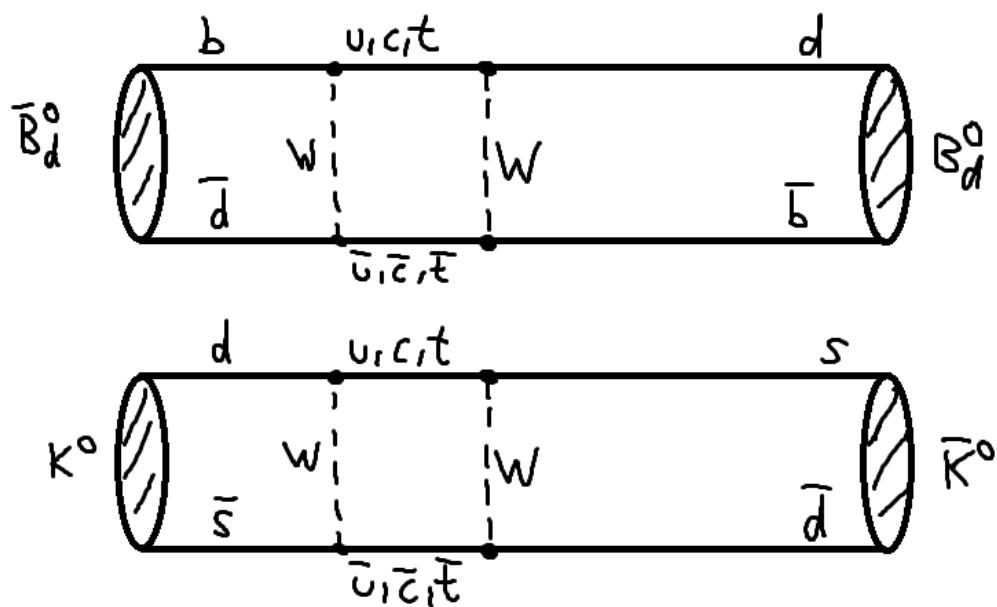


Abbildung 7.5: Feynman-Diagramme der Oszillation von  $B^0$ - und  $K^0$ -Mesonen, analog für  $D^0$  möglich.

# 8 Gebundene Zustände

## 8.1 Mesonen aus leichten Quarks

Als leichte Quarks werden u, d und s bezeichnet. Mesonen sind  $q\bar{q}$ - Bindungszustände, wobei sowohl  $q$  als auch  $\bar{q}$  den Spin  $\frac{1}{2}$  besitzen. Die Spins können somit zum Gesamtspin  $S = 0, 1$  kombiniert werden. Dabei gilt:

- S=0: Pseudoskalare Mesonen ( $\pi^+, \pi^-, \pi^0, K^0, \dots$ )
- S=1: Vektormesonen ( $\rho, \omega, \phi, K^*, \dots$ )

Der Bahndrehimpuls  $L$  ist Null für die leichtesten Mesonen. Wie sehen nun die Wellenfunktionen der Quark-Antiquark-Zustände aus?

Ein nützlicher Formalismus ist dabei der Isospin, die SU(2)-Symmetrie und die Konstruktion analog zur Spin-Kopplung.

Die u- und d- Quarks bilden das Isospin-Dublett  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ . Es gilt für  $I = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} I_3(u) &= +\frac{1}{2} & u &= \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = |I, I_3\rangle \\ I_3(d) &= -\frac{1}{2} & d &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |I, I_3\rangle \end{aligned} \quad (8.1)$$

Der Isospin für Antiteilchen ergibt sich nun für  $\begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} I_3(-\bar{d}) &= \frac{1}{2} \\ I_3(\bar{u}) &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Mesonen aus (u, d)-Quarks haben somit die folgenden Isospin-Zustände:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \leftrightarrow \underbrace{0}_{\text{Singulett}}, \underbrace{1}_{\text{Triplet}} \\ &\equiv 2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Für das Triplet mit  $I=1$  ergibt sich nun für  $|I, I_3\rangle$

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= -ud\bar{d} \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ |1, -1\rangle &= \bar{u}d \end{aligned} \quad (8.4)$$

, für das Singulett mit  $I=0$  folgt

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad (8.5)$$

Als nächstes betrachten wir nun die 3-Quark-Systeme ( $u, d, s$ ). Es besteht eine empirische Relation zwischen der elektrischen Ladung  $Q$ ,  $I_3$  und der Strangeness der beobachteten Mesonen. Diese wird als *Gell-Mann Nishijima-Relation* bezeichnet und lautet

$$\begin{aligned} Q &= I_3 + \frac{1}{2}(B + S) \\ Q &= I_3 + \frac{1}{2}Y \end{aligned} \quad (8.6)$$

, wobei  $B$  die Baryonenzahl,  $S$  die Strangeness und  $Y := (B + S)$  die Hyperladung ist. Es ergibt sich also ein neuer Freiheitsgrad (Isospin + Strangeness). Für Mesonen ist die Baryonenzahl  $B=0$ .

Man geht nun zu einer  $SU(3)$ -Symmetrie über, um Teilchen in einer Multiplett-Struktur anzugeordnen, man spricht historisch von der sogenannten Flavour-  $SU(3)$ .

Isospin	Strangeness	$B$	$Y$	$Q$
$u =  1/2, 1/2\rangle$	0	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$d =  1/2, -1/2\rangle$	0	$1/3$	$1/3$	$-1/3$
$s =  0, 0\rangle$	-1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$

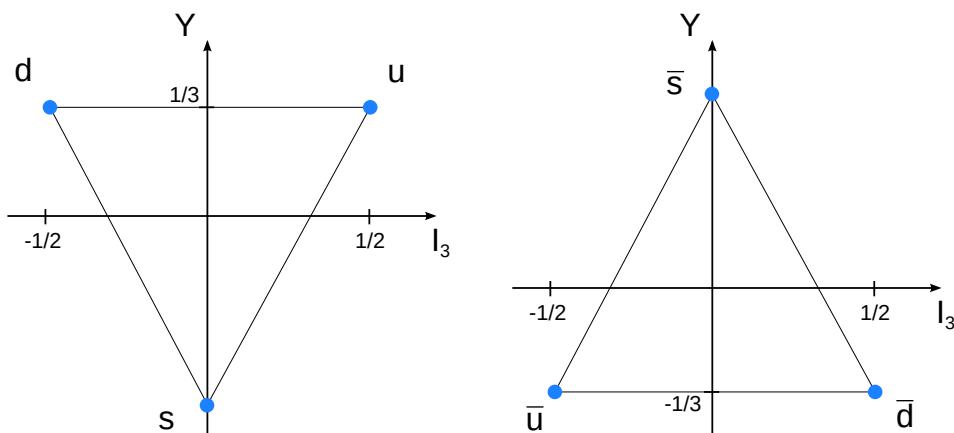
Tabelle 8.1: Übersicht über Isospin, Strangeness, Baryonenzahl sowie Ladung und Hyperladung

Es gibt insgesamt neun mögliche  $q\bar{q}$ -Kombinationen:

$$3 \times \bar{3} = \underbrace{8}_{SU(3), \text{Oktett}} \oplus \underbrace{1}_{SU(3), \text{Singulett}} \quad (8.7)$$

Im Oktett transformieren sich die 8 Zustände untereinander unter  $SU(3)$ -Operationen, sie mischen jedoch nicht mit dem Singulett-Zustand.

#### Konstruktion der Flavour-Zustände



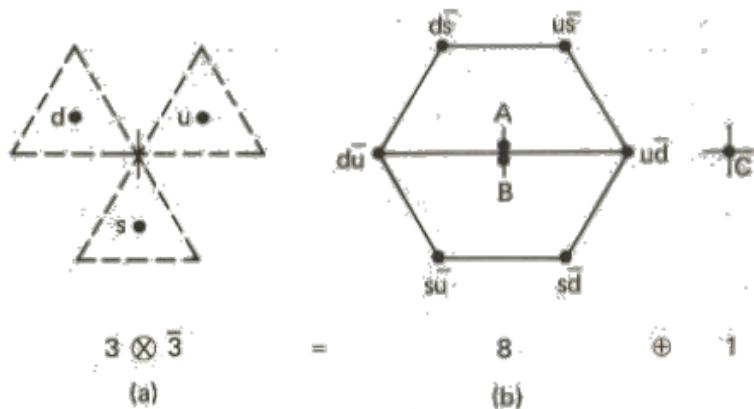
Es entsteht eine Überlagerung des Antiquark-Multipletts (Schwerpunkt) auf die jeweiligen Quarks.

$\rightarrow SU(3)$ Oktett	$\rightarrow$ 6 Eckpunkte $ q\bar{q}\rangle$
$SU(3)$ Singulett	$\rightarrow$ 2 Mischzustände $A, B$
	$\rightarrow$ Punkt $C$

**TABLE 2.1**  
Quantum Numbers of the Quarks ( $Y = B + S$ ,  $Q = I_3 + Y/2$ )<sup>a</sup>

Quark	Spin	$B$	$Q$	$I_3$	$S$	$Y$
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$
s	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{2}{3}$

<sup>a</sup>Here,  $S$  denotes the strangeness.



**Fig. 2.5** The quark content of the meson nonet, showing the  $SU(3)$  decomposition in the  $I_{13}$ ,  $Y$  plane.

Abbildung 8.1: Quantenzahlen der Quarks und Quarkinhalt des Meson-Nonets

Es gibt somit drei Zustände (A, B, C) mit  $I_3 = 0, Y = 0$ . Es handelt sich um Linearkombinationen aus  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$  und  $s\bar{s}$ -Zuständen. Die Singulett-Kombination C ist vollkommen symmetrisch und sieht folgendermaßen aus:

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \quad (8.8)$$

Der Zustand A wird als Mischzustand im Isospin-Triplett interpretiert:

$$\left( \underbrace{d\bar{u}}_{\pi^-}, \underbrace{A}_{\pi^0}, \underbrace{u\bar{d}}_{\pi^+} \right) \quad (8.9)$$

, wobei eine Assoziation mit dem  $(\pi^-, \pi^0, \pi^+)$ -Triplet erfolgt, die ungefähr die gleiche Masse besitzen. Der Zustand A hat somit keinen s-Inhalt:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad (8.10)$$

Nach der Festlegung von A und C kann der Zustand B als orthogonal zu A und C definiert werden:

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \quad (8.11)$$

#### Orthogonalitätsrelationen der drei neutralen Zustände

Die drei Zustände A, B, C lassen sich mathematisch als

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ausdrücken. Daraus folgt

$$A \cdot B = 0, \quad A \cdot C = 0, \quad B \cdot C = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 1 - 2) = 0$$

, sowie

$$A \cdot A = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1, \quad B \cdot B = \frac{1}{6}(1 + 1 + 4) = 1, \quad C \cdot C = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1$$

#### Zuordnung zu den beobachteten Mesonen:

Es stellt sich die Frage, ob die SU(3)-Flavour-Symmetrie etwas mit der Realität zu tun hat. Die beobachteten pseudoskalaren Mesonen entsprechen etwa den SU(3)-Flavour Zuständen, dies gilt jedoch nicht für die Vektormesonen.

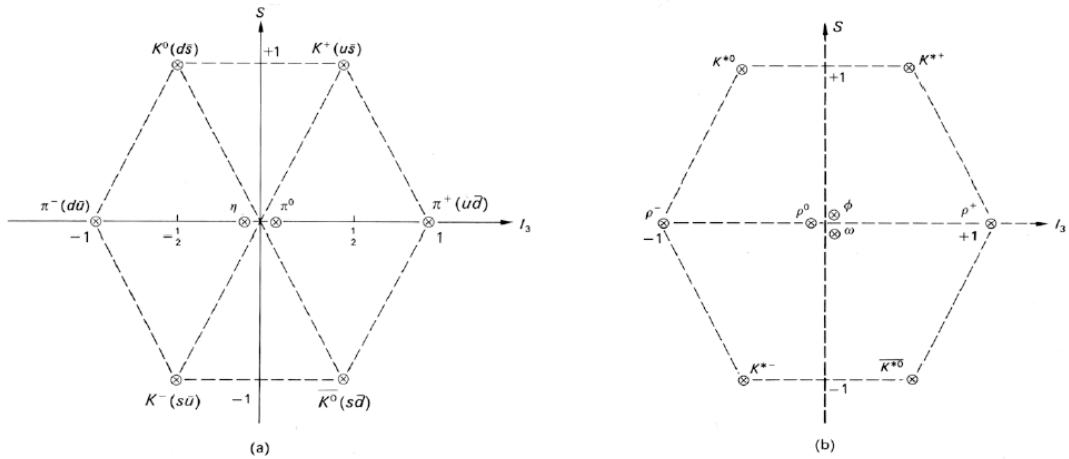
$$\begin{aligned} \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) & \rho^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) & \omega &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ \eta' &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) & \phi &= s\bar{s} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Experimentell wird beobachtet, dass das  $\phi$ -Meson ein reiner  $(s\bar{s})$ -Zustand ist.

Die pseudoskalaren Mesonen erfüllen somit die SU(3)-Flavour-Symmetrie, die Vektormesonen jedoch nicht, da das  $\phi$ -Meson ein reiner  $|s\bar{s}\rangle$ -Zustand ist. Die experimentellen Hinweise erhält man aus  $\phi$ -Zerfällen. Die Masse wurde zu  $m(\phi) = 1.020$  GeV bestimmt und es ist  $J^{PC} = 1^{--}$ , wie bei Vektormesonen üblich.

Die beobachteten  $\phi$ -Zerfälle sind:

$\rightarrow K^+ K^-$	49.2%
$\rightarrow K_L^0 \bar{K}_S^0$	33.8%
$\rightarrow \rho^+ \pi^-$ bzw. $\pi^+ \pi^- \pi^0$	15.5%



(a) The lowest-mass pseudoscalar meson states ( $J^P = 0^-$ ). The quark flavour assignments are indicated. (b) The vector meson states ( $J^P=1^-$ ).

Abbildung 8.2: Vergleich pesudoskalarer Mesonen und Vektormesonen

Die Zerfälle in Kaonen sind trotz des kleinen zur Verfügung stehenden Phasenraums dominant, was sich aus der Beachtung von Fermis Goldener Regel ergibt. Die Massen der Kaonen sind  $m(K^+) \approx 493.8$  MeV und  $m(K^0) = 497.7$  MeV. Es ergibt sich:

- $Q(3\pi - \text{Zerfall}) \sim 600$  MeV
- $Q(K^+K^- \text{Zerfall}) \sim 32$  MeV
- $Q(K_L^0 \bar{K}_S^0 - \text{Zerfall}) \sim 24$  MeV

Die Zerfallsdiagramme des  $\phi$ - Mesons sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

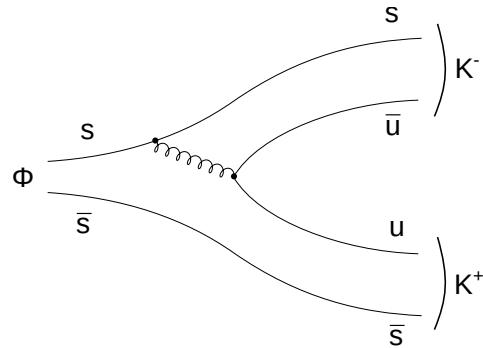


Abbildung 8.3: Zerfall des  $\phi$ -Mesons in  $K^+K^-$

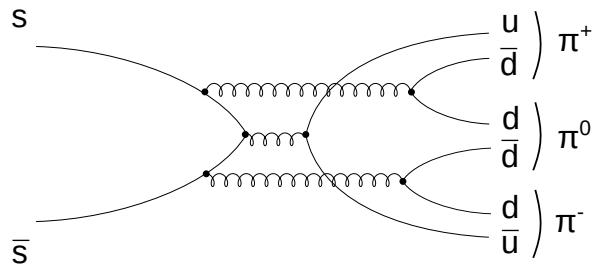


Abbildung 8.4: Zerfall des  $\phi$ -Mesons in  $\pi^+\pi^0\pi^-$

Die unterdrückten Zerfälle werden auch als Zweig-unterdrückt bezeichnet. Im in Abb. (8.4) dargestellten Zerfall in Pionen gibt es keine durchlaufenden Quark-Linien, da eine  $s\bar{s}$ -Vernichtung notwendig ist, sodass die Zerfälle unterdrückt bzw. unwahrscheinlicher werden.

Auch beim  $\phi$ -Zerfall über  $\rho^0$  (vgl. Abb (8.5) gibt es keine durchlaufenden Quark-Linien, es ist ebenfalls eine  $s\bar{s}$ -Vernichtung notwendig!

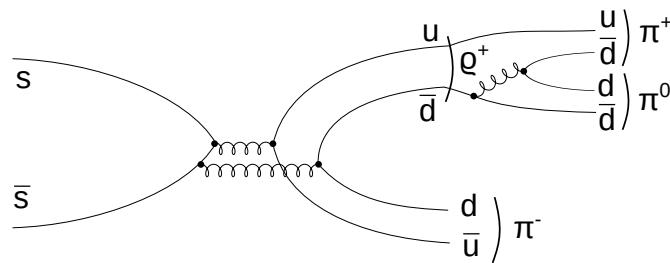


Abbildung 8.5: Zerfall des  $\phi$ -Mesons in  $\pi^+\pi^0\pi^-$  über ein  $\rho^0$

### $\rho^0$ -Zerfall in zwei Pionen

Das  $\rho^0$ -Meson ist als

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

bekannt und kann über  $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$  zerfallen.

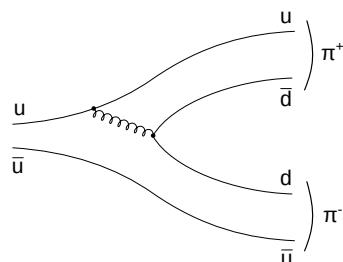


Abbildung 8.6:  $\rho^0$ -Zerfall in  $\pi^+\pi^-$

Hier gibt es durchlaufende Quark-Linien, sodass keine Quarkvernichtung notwendig ist. Die Gesamtzerfallsbreiten sind:

$$\Gamma(\rho_{770}^0) \approx 150.7 \text{ MeV}, m = 768.5 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(\phi_{1020}) = (4.43 \pm 0.05) \text{ MeV}, m = 1019.4 \text{ MeV}$$

Eine schmale Resonanz bedeutet gleichzeitig eine lange Lebensdauer:

$$\tau(\rho^0) = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeVs}}{150.2 \text{ MeV}} = 4.38 \cdot 10^{-24} \text{ s}$$

$$\tau(\phi^0) = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeVs}}{4.48 \text{ MeV}} = 1.48 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

### Leptonische Zerfälle von Vektormesonen:

Leptonische Zerfälle  $V \rightarrow l^+l^-$  von Vektormesonen sind nur über  $(q\bar{q})$ - Vernichtung möglich und somit nur relevant für neutrale Mesonen.

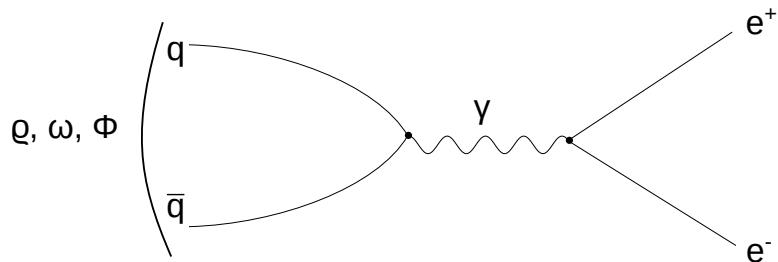


Abbildung 8.7: Ablauf eines leptonischen Zerfalls von Vektormesonen über Quarkvernichtung

Die Zerfallsbreite ist in der QED berechenbar:

$$\Gamma(V \rightarrow l^+l^-) = \frac{16\pi\alpha^2 Q^2}{M_V^2} |\Psi(0)|^2 \quad (8.14)$$

Hierbei handelt es sich um die *Van Royen - Weisskopf-Formel*.  $\Psi(0)$  ist dabei die Amplitude der  $(q\bar{q})$ -Wellenfunktion am Ursprung und  $|\Psi(0)|^2$  die Wahrscheinlichkeit für eine  $(q\bar{q})$ -Vernichtung am Ursprung ihrer Relativkoordinaten.  $M_V$  bezeichnet die Mesonenmasse. Dies ist proportional zu  $\frac{1}{q^2}$  ( $\gamma$ -Propagator), hier ist  $M_V^2 = s$ .

Die Erwartung im Quarkmodell ist nun

$$\Gamma(\rho^0) : \Gamma(\omega^0) : \Gamma(\phi^0) = 9 : 1 : 2 \quad (8.15)$$

, experimentell wurde dies, normiert auf das  $\omega$ -Meson, zu

$$(8.8 \pm 2.6) : 1 : (1.7 \pm 0.4)$$

beobachtet.

Weitere  $(q\bar{q})$ -Zustände mit höheren Drehimpulsquantenzahlen (orbitale Anregungen) haben L=1.

**TABLE 2.2**  
**Quantum Numbers of Observed Mesons Composed of u, d, and s Quarks**

Orbital Ang. Mom.	q̄q Spin	$J^{PC}$	Observed Nonet			Typical Mass (MeV)
			$I = \frac{1}{2}$	$I = \frac{1}{2}$	$I = 0$	
$L = 0$	$S = 0$	$0^{-+}$	$\pi$	$K$	$\eta, \eta'$	500
	$S = 1$	$1^{+-}$	$p$	$K^*$	$\omega, \phi$	800
$L = 1$	$S = 0$	$1^{+-}$	$B$	$Q_2$	$H, ?$	1250
	$S = 1$	$2^{++}, 1^{++}, 0^{++}$	$A_2, A_1$	$K^*, Q_1$	$f, f^*, D, ?$	1400, 1300, 1180

Abbildung 8.8: Quantenzahlen der beobachteten Mesonen (aus Ref. [6])

## 8.2 Charmonium Zustände

Im November 1974 wurde eine neue, sehr schmale Resonanz bei einer Masse/ Energie von 3.1 GeV (3.097 GeV) entdeckt. Diese wurde als  $q\bar{q}$ -Bindungszustand interpretiert und dem 4. Quark, dem Charm-Quark zugeordnet.

- SPEAR/ SLAC

Von B.Richter wurde die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \Psi$  entdeckt:

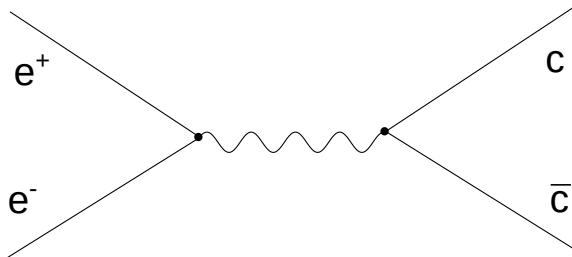
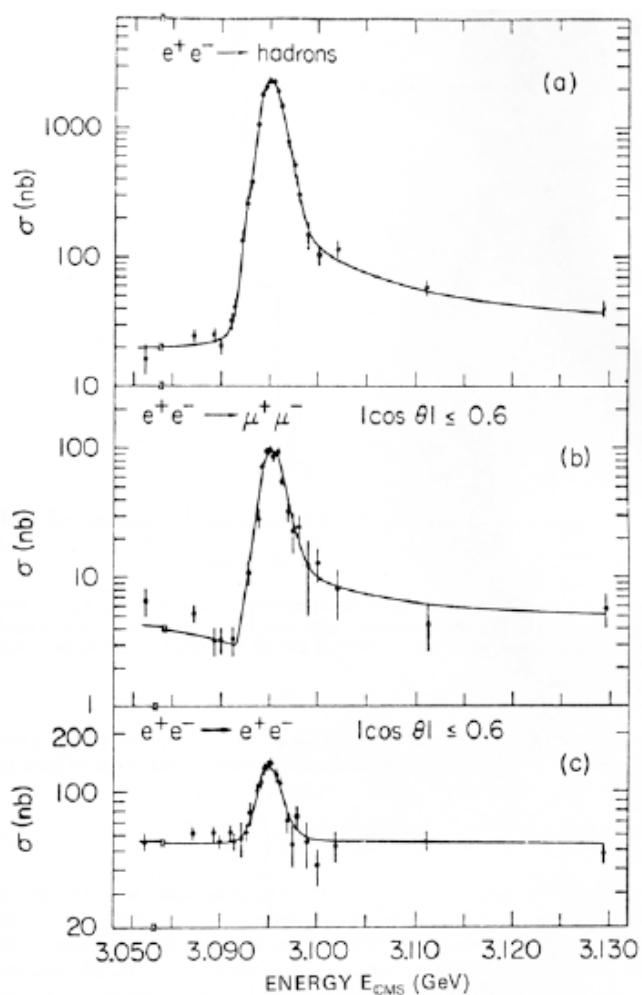


Abbildung 8.9: Entdeckung der Charmonium-Zustände im  $e^+e^-$ -Zerfall

Die Signatur im Detektor war eine Resonanz im  $e^+e^-$ -Wirkungsquerschnitt. Die Zerfälle sind von  $c\bar{c}$  in Hadronen,  $e^+e^-$  und  $\mu^+\mu^-$ .



**Fig. 5.10** Results of Augustin *et al.* (1974) showing the observation of the  $\psi/J$  resonance of mass 3.1 GeV, produced in  $e^+e^-$  annihilation at the SPEAR storage ring, SLAC.

Abbildung 8.10:  $J/\Psi$ -Resonanz in der  $e^+e^-$ -Annihilation

**TABLE 5.7** Charmonium states and decay modes

State	Mass, MeV	$J^P, I$	$F$ , MeV	Branching ratio
$\psi(3100)$	$3097 \pm 1$	$1^-, 0$	0.053	Hadrons [mostly $(2n + 1)\pi$ ] $e^+e^-$ $\mu^+\mu^-$
$\psi(3700)$	$3685 \pm 1$	$1^-, 0$	0.228	$\psi + 2\pi$ $\chi + \gamma$ $e^+e^-$ $\mu^+\mu^-$

Abbildung 8.11: Charmonium-Zustände und Zerfallsmoden

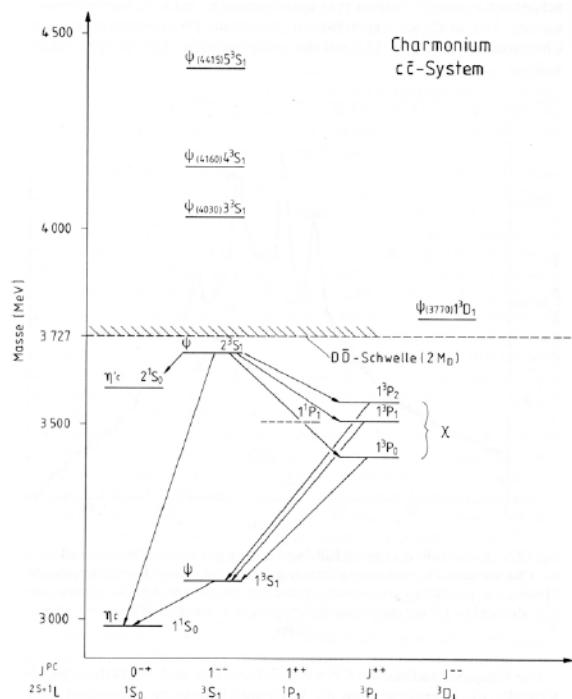


Fig. 12.10: Das Schema der Energieniveaus von Charmonium ähnelt dem von Positronium (vgl. Fig. 8.2b), doch sind die Energiedifferenzen etwa  $10^8$  mal größer. Die gestrichelten Linien deuten weitere vorhergesagte Zustände an.

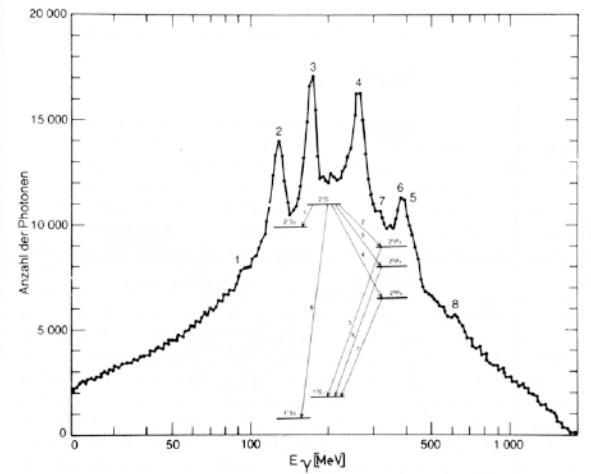


Fig. 12.9: Das mit Hilfe des Crystal Ball-Detektors aufgenommene Photonenspektrum von Charmonium. Die Photonenzählrate zeigt in dem gemessenen Energierbereich acht Maxima, die mit Ziffern gekennzeichnet sind. Sie entsprechen den Übergängen vom  $2^3S_1$ -Zustand ( $\psi'$ ) in die energetisch tieferliegenden  $S$ - und  $P$ -Zustände des Charmoniums.

Abbildung 8.12: Charmonium  $c\bar{c}$ -System, Energieniveauschema und Photonenspektrum

Das Charmonium-Spektrum erinnert stark an das Positronium-Spektrum, weshalb die folgende Grafik diese miteinander vergleicht. Man sieht deutlich die Analogien, bei dem Positronium-Spektrum finden im Gegensatz zum Charmonium jedoch keine hadronischen Zerfälle statt.

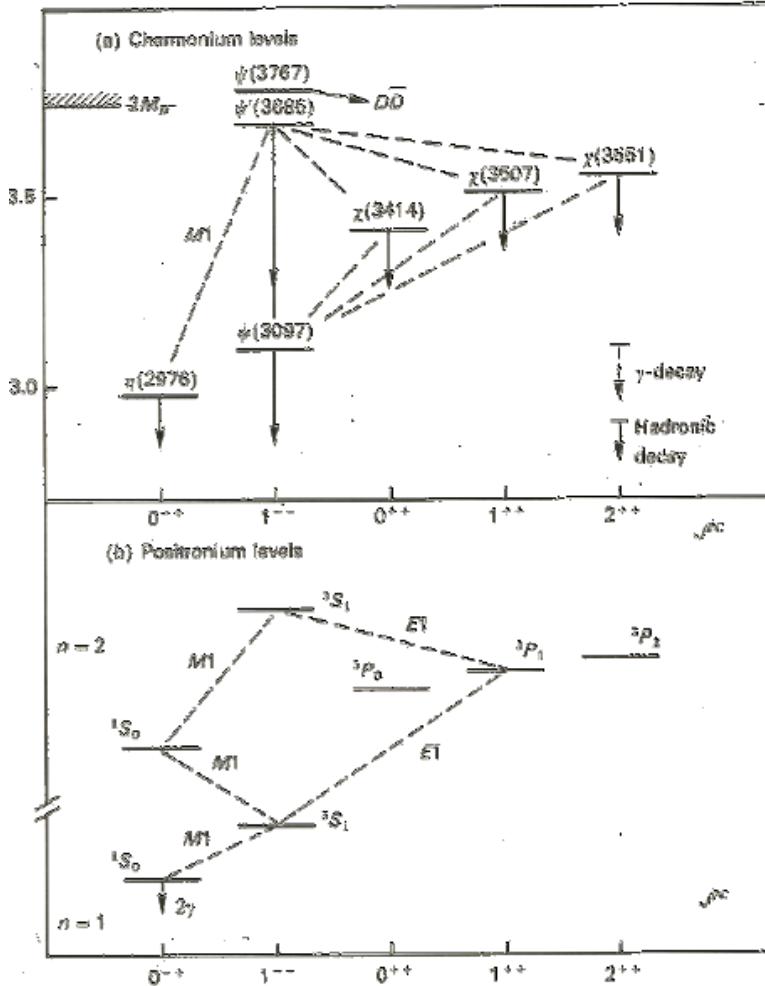


Abbildung 8.13: Vergleich der Charmonium-Energieschemas mit dem des Positroniums

- Im AGS-Beschleuniger wurde von Brookhaven der folgende Zerfall entdeckt:

$$P(28 \text{ GeV}) \rightarrow Be \rightarrow J + x \quad (8.16)$$

, wobei das J weiter in  $e^+ e^-$  zerfällt. Die heutige Bezeichnung ist  $J/\Psi$ .

Bei  $3.685 \text{ GeV}/c^2$  wurde ein weiterer Zustand  $\Psi'$  gefunden. Es handelt sich ebenfalls um einen angeregten  $q\bar{q}$ -Zustand, der über

$$\Psi' \rightarrow \Psi + \pi^+ \pi^- \text{ bzw } \pi^0 \pi^0$$

zerfällt. Es liegen wieder scharfe Resonanzen vor, deren Breite durch die experimentelle Auflösung limitiert ist. Die Zerfallsbreite ist  $\Gamma = 0.087 \text{ MeV}$  und die mittlere Lebensdauer somit  $\tau = 9.8 \cdot 10^{-21} \text{ s} \sim 10^{-20} \text{ s}$ . Es sind keine starken Zerfälle in u, d oder s Quarks möglich, folglich handelt es sich um einen neuen Zustand. Es gilt:

$$\frac{\Gamma_\rho^+}{J_{/\Psi}} = \frac{150.2}{0.087} = 1726 , \quad \frac{\Gamma_\phi}{J_{/\Psi}} = 51 \quad (8.17)$$

Die möglichen Zerfälle sind nun:

- Die hadronischen Zerfälle, analog zum  $\phi$ -Zerfall:

$$J/\Psi \rightarrow (2n + 1)\pi$$

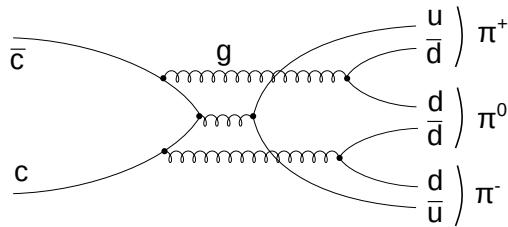


Abbildung 8.14: Hadronischer Zerfall des  $J/\Psi$ -Zustands in Pionen

- Die leptonischen Zerfälle, die ein großes Verzweigungsverhältnis ( $\text{BR} \sim 5.5\%!!$ ) besitzen.

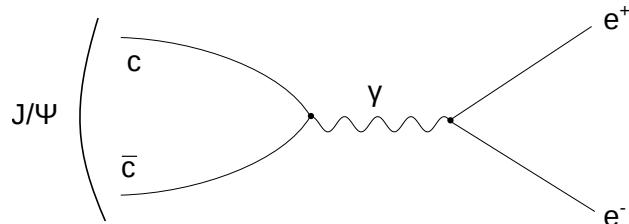


Abbildung 8.15: Leptonischer Zerfall des  $J/\Psi$ -Zustands

Zerfälle in Mesonen mit einem Charm-Quark sind energetisch nicht möglich: Die leichtesten Charm-Mesonen sind:

$$D^+ = (c\bar{d}) , D^- = (\bar{c}d) \text{ mit der Masse } m = 1.869 \text{ GeV}$$

$$D^0 = (c\bar{u}) , \bar{D}^0 = (u\bar{c}) \text{ mit der Masse } m = 1.865 \text{ GeV}$$

Die Massen von  $J/\Psi$  und  $\Psi'$  sind jedoch kleiner als  $2 \cdot m(D^0) = 3.73 \text{ GeV}$ , sodass ein Zerfall nicht möglich ist. Erst der nächste angeregte Zustand  $\Psi''$  kann in zwei D-Mesonen zerfallen, da dessen Masse  $3.770 \text{ GeV}$  beträgt. Die Zerfallsbreite ist  $\Gamma(\Psi'') = 23.6 \text{ MeV}$ ,  $\Psi''$  zerfällt zu fast 100 % in  $D\bar{D}$ , der Zerfall in  $e^+e^-$  ist nur mit  $\text{BR} \sim 1.12 \cdot 10^{-5}$  vertreten.

### c $\bar{c}$ -Spektroskopie:

Es handelt sich um einen Bindungszustand aus zwei Quarks (Spin  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ ).

Es werden demnach Singulett und Tripletz Spin-Zustände mit S=0 und S=1 erwartet.

Zudem gibt es Zustände mit verschiedenen Bahndrehimpulsen l=0,1,2,... (entspricht S,P,D...). Da die Massen gleich sind, ergibt sich eine Analogie zum  $e^+e^-$ -Positronium-System (siehe 8.13).

Die Notation ist nun

$$n^{2s+1}L_j \quad (8.18)$$

, wobei n die radiale Anregung ist. Es treten ebenfalls radioaktive Zerfälle

$$\Psi' \rightarrow \chi + \gamma \quad (8.19)$$

auf.

Aus dem Spektrum können mittels der Lage der s im Vergleich zu den p-Niveaus Aussagen über das  $q\bar{q}$ - Potential getroffen werden. Das Spektrum ist konsistent mit einem linearen Term, die QCD liefert:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s \cdot \hbar c}{r} + F_0 r \quad (8.20)$$

, wobei die  $\frac{4}{3}$  aus der QCD stammen, der  $\alpha$ -Term dem Coulomb-Term bei kleinen Abständen entspricht und der letzte Term das Quark Confinement darstellt.

## 8.3 b $\bar{b}$ -Zustände

1977 erfolgte durch L. Lesterma et al. am Fermilab in Chicago die Entdeckung weiterer neuer Resonanzen bei einer Energie von 9.4 GeV:

$$P + (Cu, Pt) \rightarrow \underbrace{\Upsilon}_{\rightarrow \mu^+ \mu^-} + X \quad (8.21)$$

Diese wurden als (b $\bar{b}$ )-gebundener Zustand interpretiert (b-Quark: beauty oder bottom). Das Resonanzbild sieht folgendermaßen aus:

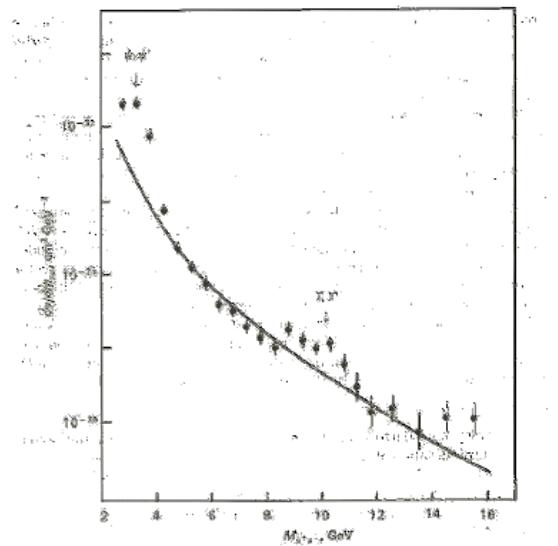


Fig. 8.16 First evidence for the uppsilon resonances  $\Upsilon(1S)$ , obtained by Herb et al. (1977) from the spectrum of muon pairs observed at 400-GeV proton-antiproton collisions at Fermilab, near Chicago. The enhancement due to three resonances stands out against the rapidly falling continuum background.

Abbildung 8.16: Resonanzbild der ersten Entdeckung des neuen  $b\bar{b}$ -gebundenen Zustands (aus Ref [4])

Der Zerfall von  $e^+e^-$  in Hadronen zeigte die folgenden Wirkungsquerschnittsresonanzen:

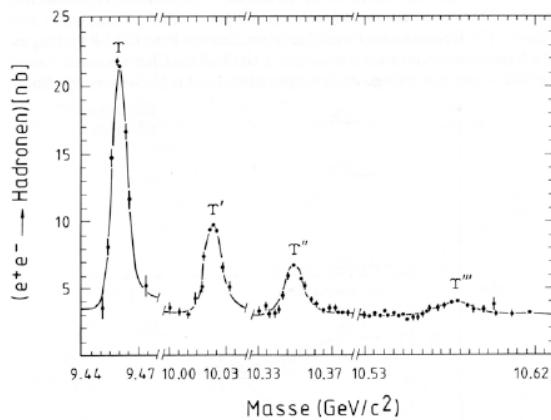


Fig. 12.13: Die  $\Upsilon$ -Teilchen ( $b\bar{b}$ -Zustände) konnten am CESR der Cornell-Universität als deutliche Maxima im Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$  nachgewiesen werden (nach [Fr 83]).

Abbildung 8.17: Entdeckte Resonanzen im Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$

Analog zu den ( $c\bar{c}$ )-Zuständen wurden die gebundenen Zustände definiert:

$\Upsilon(1s) : m = 9.460$  ;  $\Upsilon(2s) : m = 10.023$  ;  $\Upsilon(3s) : m = 10.355$  ;  $\Upsilon(4s) : m = 10.580$

, wobei das Letzte oberhalb der  $b\bar{b}$ -Schwelle zur Entstehung der B-Mesonen liegt.

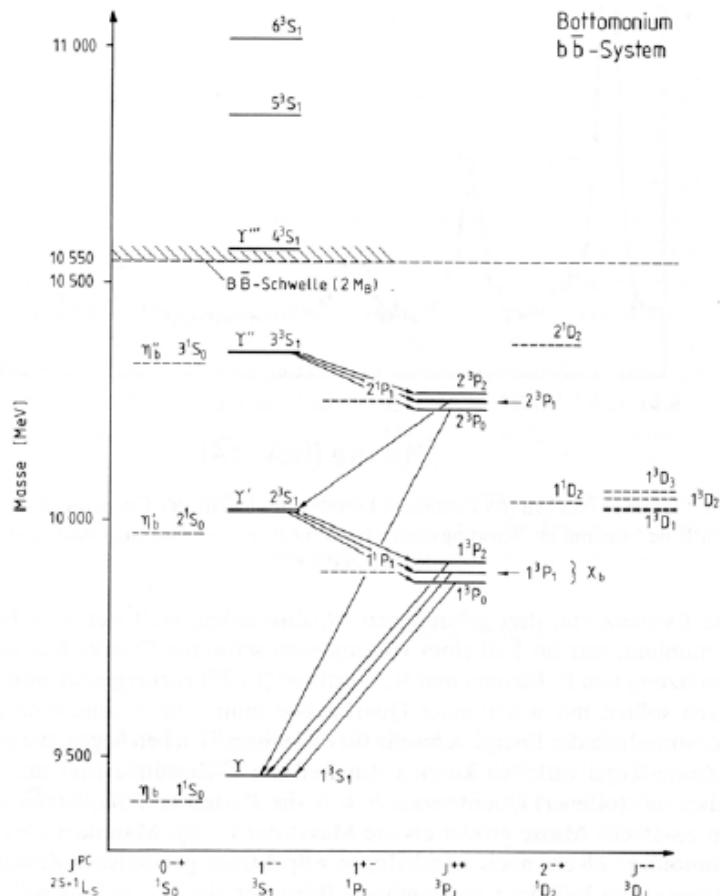


Fig. 12.14: Das Termschema des Bottomoniums ( $b\bar{b}$ ). Die  $\Upsilon$ -Teilchen sind die  $^3S_1$ -Bindungszustände des  $b\bar{b}$ -Systems. Die bisher nicht beobachteten Zustände sind als gestrichelte Linien eingezeichnet.

Abbildung 8.18: Termschema des Bottomums

Die B-Hadronen sind:

$$B^0 = (d\bar{b}) ; \bar{B}^0 = (b\bar{d}) \quad m = 5.275$$

$$B^+ = (u\bar{b}) ; (b\bar{u}) \quad m = 5.271$$

Wie zu sehen ist, liegt also  $\Upsilon(4s)$  über der doppelten Masse von  $B^0$  bzw.  $B^+$ . Die Zerfälle

$$\Upsilon(4s) \rightarrow B^0 \bar{B}^0 \text{ bzw. } \rightarrow B^+ B^-$$

sind also möglich.

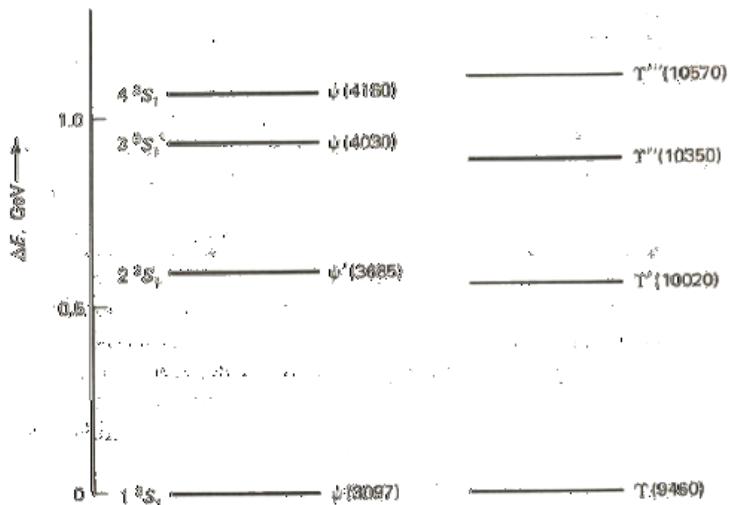


Figure 5.10 Level spacings in the  $\psi$  and  $\Upsilon$  systems. (Source: D. H. Perkins, *Introduction to High-Energy Physics*, 2d Ed. (Reading, MA: Addison-Wesley, 1982), p. 214.)

Abbildung 8.19: Energiedifferenzen in den  $\Psi$ - und  $\Upsilon$ -Systemen

# 9 Experimentelle Tests der Quantenelektrodynamik bei hohen Energien

## 9.1 Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- Der  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  Prozess ist ein wichtiger Prozess zum Test der QED (bei niedrigen Energien  $\lesssim 40$  GeV)
- Es handelt sich um einen rein leptonischen Prozess, d.h. es tritt keine Fragmentation auf.
- Feynman-Diagramme: siehe Abb. 9.1

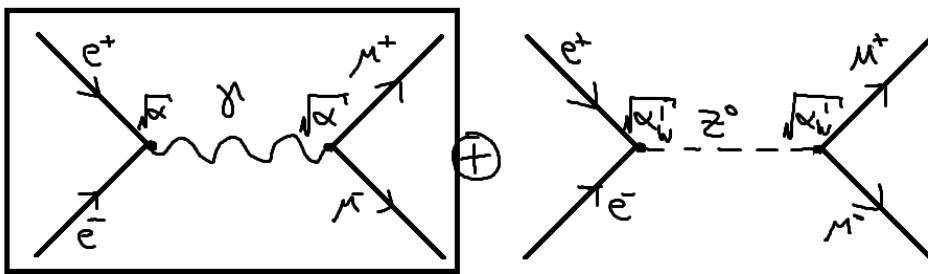


Abbildung 9.1: Feynman-Diagramme des  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  Prozesses. Bis  $\sim 40$  GeV ist der elektromagnetische Prozess klar dominant.

- Die Übergangsamplitude bzw. Matrixelemente sind in der QED/elektroschwachen Theorie berechenbar (vgl. Elementarteilchen II, QFT). Im Grenzfall niedriger Energie wird der Prozess durch die QED beschrieben (nur Photonenaustausch). In der elektroschwachen Theorie setzt sich der Wirkungsquerschnitt aus  $\gamma$ - und  $Z^0$ - Austausch sowie deren Interferenz zusammen.

Üblicherweise werden Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit von den Mandelstammben Variablen  $s$ ,  $t$  und  $u$  berechnet.

Die QED-Berechnung (für niedrige Energien, d.h. nur Beiträge durch Photonen) liefert<sup>1</sup> im CMS (Center of Mass)-System:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{CMS}} = \frac{1}{64\pi^2 \cdot s} |\mathbf{m}|^2 \quad (9.1)$$

„wobei  $|\mathbf{m}|^2 = 2 \cdot e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$  (invariante Amplitude)

<sup>1</sup>siehe z.B. Vorlesungen *Elementarteilchen II* oder *Standardmodell*

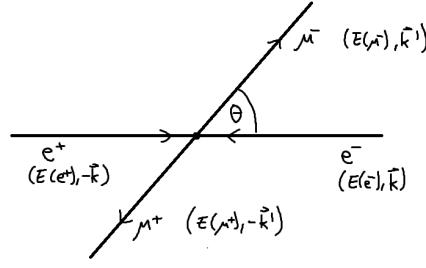


Abbildung 9.2:  $e^+e^-$ -Kollision im CMS

Der Vorgang  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  werde nun im CMS durch die Viererimpulse  $(E(e^-), \vec{k})$  und  $(E(e^+), -\vec{k})$  der Ausgangsteilchen (Elektron und Positron) sowie  $(E(\mu^-), \vec{k}')$  und  $(E(\mu^+), -\vec{k}')$  der Myonen beschrieben. In der Hochenergienäherung, für  $k^2, k'^2 \gg m_e, m_\mu$  bzw.  $p^2 \gg m^2$  ist

$$\Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'| \quad (9.2)$$

Damit lassen sich die Mandelstam-Variablen zu

$$\begin{aligned} s &:= (E(e^-) + E(e^+))^2 = k^2 + m_e^2 + 2\sqrt{k^2 m_e^2} \sqrt{k^2 m_e^2} \approx 4k^2 \text{ (für } k \gg m) \\ t &:= (P(e^-) - P(\mu^-))^2 \approx -2k^2(1 - \cos \theta) \\ u &:= (P(e^-) - P(\mu^+))^2 \approx -2k^2(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (9.3)$$

berechnen. Dabei ist  $\theta = \angle(\vec{k}, \vec{k}')$ . Weiterhin ergibt sich im Schwerpunktsystem:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \quad (9.4)$$

Dabei ist zu beachten, dass nur der Photonaustausch und die führende Ordnung berücksichtigt sind. Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\ \boxed{\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s}} \end{aligned} \quad (9.5)$$

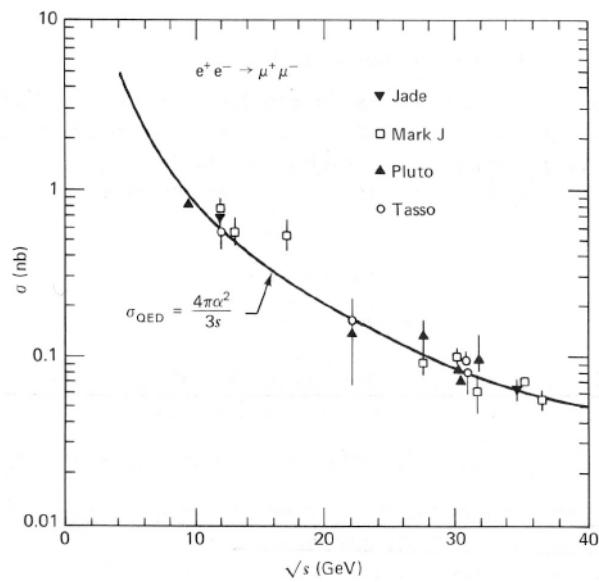


Abbildung 9.3: Der totale Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  als Funktion der Schwerpunktenergie (aus Ref [6])

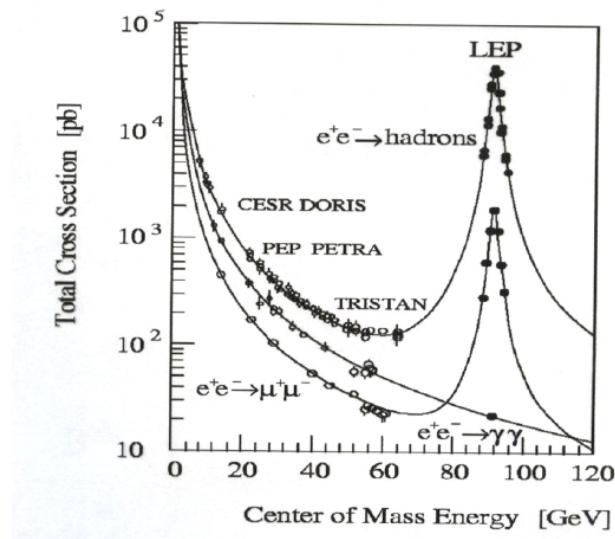


Abbildung 9.4: Gesamter Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^-$  mit eingetragenen Schwerpunktenergien der verschiedenen Collider

## 9.2 Weitere QED Streuprozesse

Weitere wichtige Streuprozesse in der QED umfassen

- (i) Bhabha-Streuung:  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

$$|\mathfrak{m}|^2 = 2 \cdot e^4 \left\{ \frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{2u^2}{t \cdot s} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right\} \quad (9.6)$$

Vernichtung      Interferenz      Streuung

Die Vernichtung ist dabei zeitartig, die Streuung ist vorwärts gerichtet.

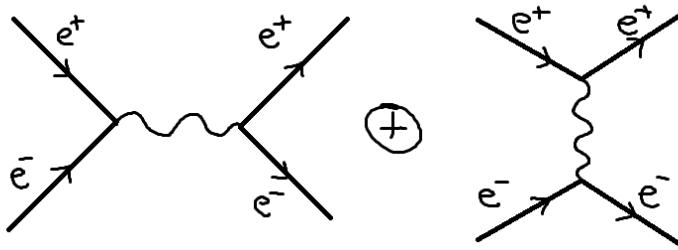


Abbildung 9.5: Feynman-Diagramm zur Bhabha-Streuung

Das linke Diagramm zeigt dabei den s-Kanal, das Rechte den t-Kanal.

- (ii) Møller-Streuung:  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ . Aufgrund der Vertauschbarkeit der beiden

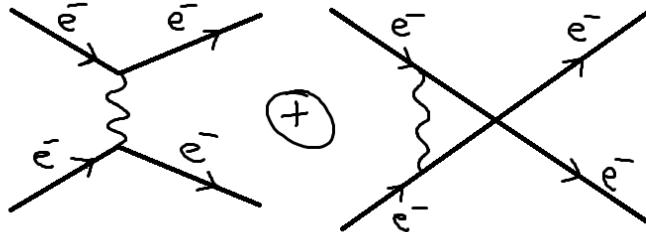


Abbildung 9.6: Feynman-Diagramm zur Møller-Streuung

Fermionen weist dieser Prozess eine Symmetrie zwischen  $t$  und  $u$  sowie eine Vorwärts-/Rückwärtssymmetrie auf:

$$|\mathfrak{m}|^2 = 2e^4 \left\{ \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} \right\} \quad (9.7)$$

Vorwärts      Interferenz      Rückwärts

- Test der QED in  $e^+e^-$ -Kollisionen
- Anwendung: Bhabha-Streuung zur Bestimmung der Luminosität des Beschleunigers

gers mithilfe des Flussfaktors L:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \sigma \cdot L \\ N &= \sigma \int L dt = \sigma L_{\text{int}} \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{N}{L_{\text{int}}}\end{aligned}\quad (9.8)$$

$L_{\text{int}}$  wird als *integrierte Luminosität* bezeichnet.

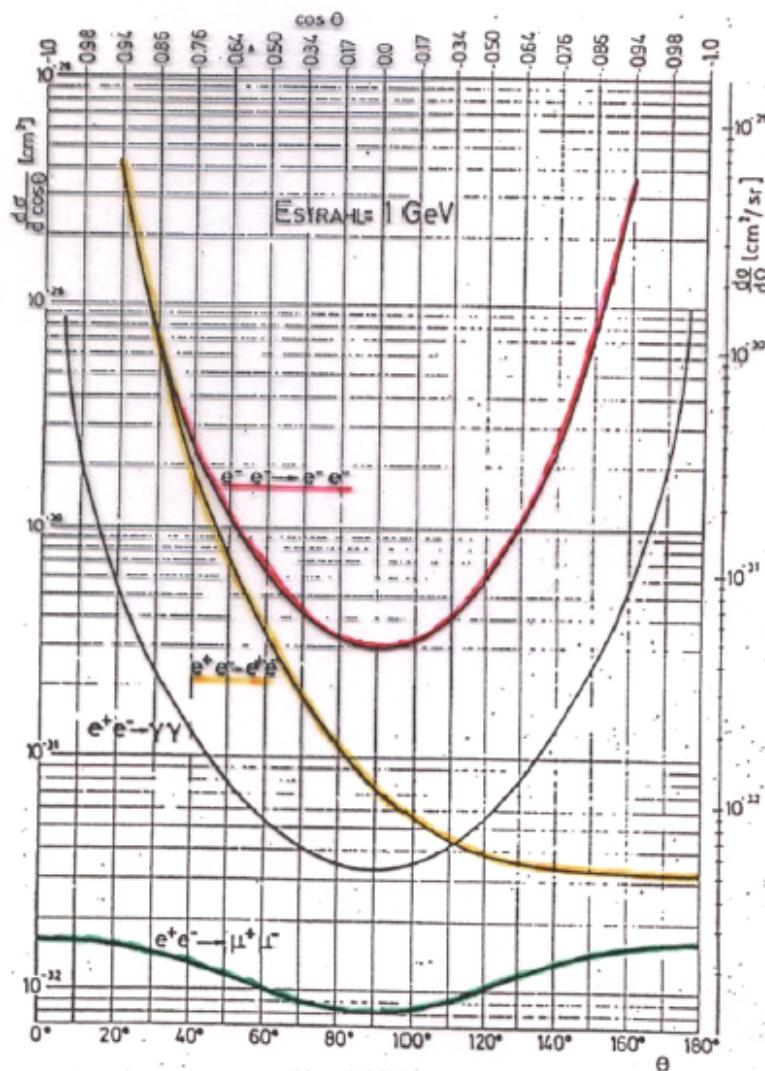


Abbildung 9.7: Differentielle Wirkungsquerschnitte wichtiger QED-Prozesse

### 9.3 $e^+e^-$ -Annihilation in Hadronen

Im Folgenden werden Prozesse der Form  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \xrightarrow{\text{Fragmentation}} \text{Hadronen}$  betrachtet.

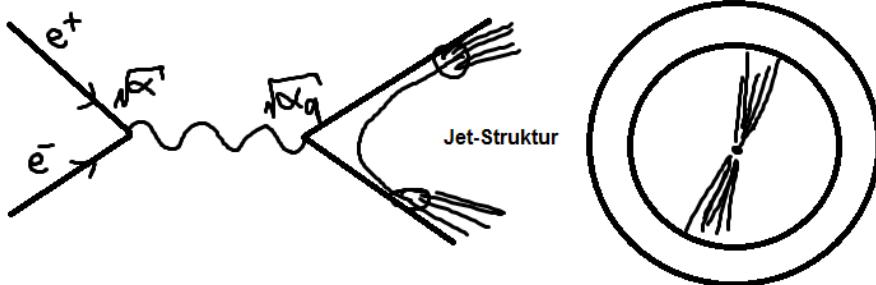


Abbildung 9.8: Feynman-Diagramm und skizzierte Detektorsignatur von  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \text{Hadronen}$  Prozessen

Der Prozess  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  mit  $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{s}$  wird als Referenzprozess verwendet. Für die Bildung von Quarks an Stelle von Myonen ergibt sich analog<sup>2</sup>

$$\boxed{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{s} \left(\frac{Q_q}{e}\right)^2 \cdot 3} \quad (9.9)$$

, wobei die 3 als Farbfaktor (Entartungsgrad) auftritt! Oft wird dies auch mit  $e_q := \frac{Q_q}{e}$  geschrieben, d.h. mit der Ladung der Quarks in Einheiten der Elementarladung:

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3 \left( \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{s} e_q^2 \right) \quad (9.10)$$

Eine wichtige Testgröße ist das  $R$ -Verhältnis:

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \cdot \sum_q e_q^2 \quad (9.11)$$

Dabei tritt die 3 wieder als Farbfaktor auf und die Summe läuft über alle Quark-Flavour, die kinematisch produziert werden können ( $2m_q < \sqrt{s}$ ).

Für drei mögliche Quarks ( $u, d, s$ ) ist  $R = 2$ , für 4 Quarks ( $c$ ) ist  $R = 10/3$  und für fünf Quarks ( $b$ ) ist  $R = 11/3$ .

- Generell wird eine gute Übereinstimmung mit diesen Vorhersagen gefunden.
- Abweichungen treten besonders im Bereich von Resonanzen ( $J/\psi, \Upsilon$ ) auf.
- Generell: Es werden weitere QCD-Korrekturen erwartet, die das  $R$ -Verhältnis erhöhen.

<sup>2</sup>Die Kopplungsstärke der elektromagnetischen Wechselwirkung ist proportional zum Quadrat der Ladung:  $\alpha \sim Q^2$

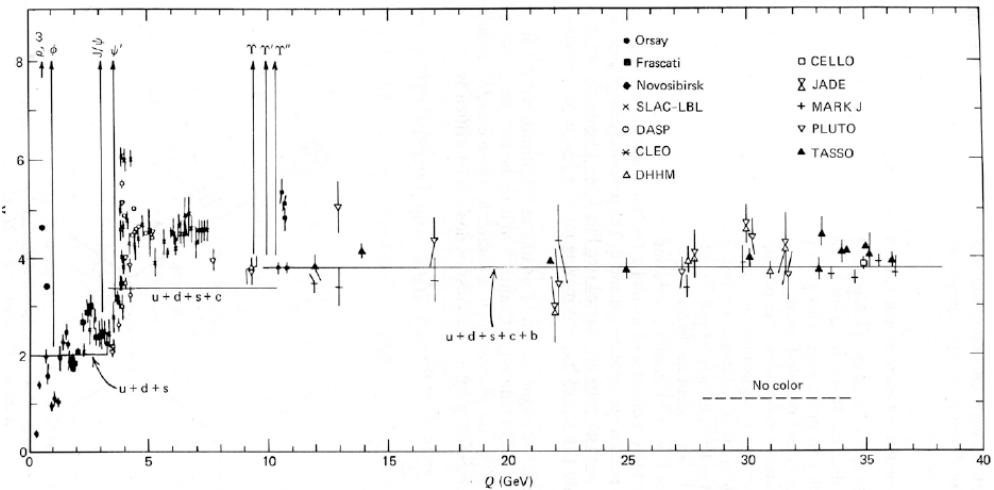


Abbildung 9.9: Ratio R als Funktion der totalen  $e^+e^-$ -Schwerpunktenergie. Die scharfen Peaks stimmen mit der Produktion der schmalen  $1^-$ -Resonanzen gerade unter oder in der Nähe der Flavour-Schwellen überein.

## 9.4 Elastische $ep$ -Streuung, Formfaktoren

Weiterhin wird die elektromagnetische Wechselwirkung betrachtet, diesmal jedoch in einem Prozess mit Elektronen und Hadronen. Je nach Impulsübertrag wird eine Substruktur der Nukleonen sichtbar (großer Impulsübertrag), die nicht immer aufgelöst werden kann (zu kleiner Impulsübertrag). Mit steigendem Impulsübertrag geht die Streuung von einer elastischen Lepton-Proton-Streuung zur elastischen Lepton-Quark-Streuung über (elastische Lepton-Quark-Streuung  $\hat{=}$  tief inelastische Lepton-Nukleon-Streuung).

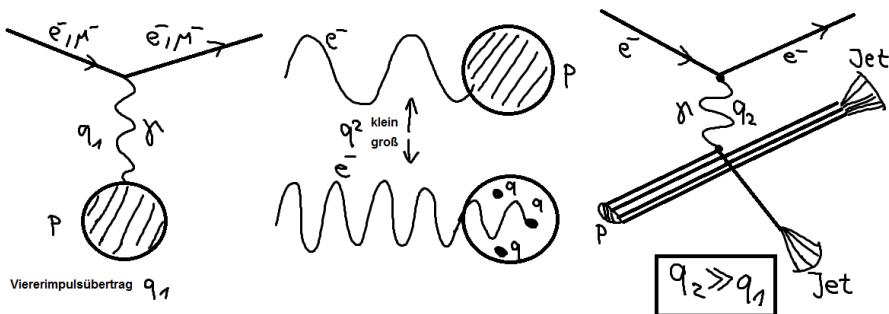


Abbildung 9.10: Feynman-Diagramme bei kleinem und großem Impulsübertrag. Anschaulich wird die Wechselwirkung mit dem gesamten Proton oder einzelnen Quarks beim Betrachten der deBroglie-Wellenlänge der Elektronen: Diese muss klein genug sein, um die Substruktur des Protons auflösen zu können.

Der Viererimpulsübertrag ist durch  $q = (k - k')$  gegeben, wobei  $k$  und  $k'$  die Vierervektoren der Leptonen darstellen. Wie bereits behandelt wurde, lässt sich der

Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem ausgedehnten Objekt als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Punkt}} \cdot |F(q)|^2 \quad (9.12)$$

schreiben.

- Für punktförmige Ladungsverteilungen ist  $|F(q^2)|^2 = 1$  für alle  $q^2$ .
- Einen wichtigen Grenzfall stellt  $|\vec{q}| \rightarrow 0$  dar: In diesem Grenzfall ist  $F(0) = 1$  für jede Ladungsverteilung, d.h. im Grenzfall großer Wellenlänge sieht das Proton wieder punktförmig aus (Streuung an Ladung  $+1e$ ).

Im vorliegenden Fall der  $e^-p$ -Streuung liegt eine Streuung eines punktförmigen Spin- $1/2$  Teilchens an einem (nicht punktförmigen) Spin- $1/2$  Teilchen vor. Folglich kommt es zu Beiträgen durch

- (i) Wechselwirkung über die elektrische Ladung
- (ii) Aus der QED (Dirac) ergibt sich eine Wechselwirkung über Spins (Spin-Spin, magnetische Wechselwirkung).

Entsprechend ergibt sich dann aus der QED im Laborsystem, wobei wir annehmen, dass (analog zu Rutherford) das Elektron auf ein ruhendes Proton geschossen wird:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left( \frac{\alpha^2}{4E^2 \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right)_{\text{Rutherford}} \frac{E'}{E} \left\{ \begin{array}{ll} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \text{Korrekturterm} \\ -\frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} & \text{Spin-Spin-Beitrag} \end{array} \right\}_{\substack{\text{für Spin-}1/2 \\ \text{Projektile}}} \quad (9.13)$$

Der Korrekturfaktor  $E'/E$  berücksichtigt einen möglichen Energieübertrag an das Target, im Rutherfordexperiment ist dieser Term  $\approx 1$ , da  $m_\alpha \ll m_{\text{Au}}$ . Der Korrekturterm für ein Spin- $1/2$  Projektile beschreibt die Unterdrückung der Rückwärtsstreuung, die aufgrund der negativen Helizität der Elektronen einen Spinflip erfordern würde, der durch die Drehimpulserhaltung verboten ist.

Für die Streuung von  $e^-$  (Spin- $1/2$ ) an einem Spin-0 Atomkern ergibt sich hingegen die Mott-Formel

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab}} = \left( \frac{\alpha^2}{4E^2 \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (9.14)$$

Es müssen jedoch noch Modifikationen angebracht werden. Die ausgedehnte Ladungsverteilung, sowie das anormale magnetische Moment werden durch die Formfaktoren  $G_1(q^2)$  und  $G_2(q^2)$  berücksichtigt, sodass sich schließlich für die  $e^-p$  Streuung

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab,ep}} = \left( \frac{\alpha^2}{4E^2 \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left\{ G_1(q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_2(q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (9.15)$$

ergibt, wobei

$$\tau := -\frac{q^2}{4M^2} \quad (9.16)$$

ist. Im Allgemeinen werden die sogenannten *elektrischen* und *magnetischen Formfaktoren*  $G_E(q^2) = \int \rho(r) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3r$  und  $G_M(q^2) = \int \mu(r) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3r$  eingeführt, die Informationen über die

- Verteilung der elektrischen Ladung (elektrische Ladungsdichte  $\rho(r)$ )
- Verteilung der Beiträge zum magnetischen Moment (Dichte der magnetischen Momente  $\mu(r)$ )

liefern. Man erhält somit die *Rosenbluth-Formel*:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab}} = \left( \frac{\alpha^2}{4E^2 \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \left( \frac{E'}{E} \right) \left\{ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (9.17)$$

Es sind:

$$\begin{aligned} G_E^p(0) &= 1 & G_E^n(0) &= 0 \\ G_M^p(0) &= 2.79 & G_M^n(0) &= -1.91 \end{aligned} \quad (9.18)$$

Gemessen wird der differentielle Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  als Funktion vom Viereimpulsübertrag  $q$  und dem Streuwinkel  $\theta$  des Elektrons. In elastischer Streuung bleiben  $e^-$  und  $p$  erhalten, aus der Anpassung an die Messdaten erhält man schließlich die Formfaktoren:

$$G_E^p(q^2) = \frac{G_M^p(q^2)}{2.79} = \frac{G_M^n(q^2)}{-1.91} = \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{0.71(\text{GeV})^2}\right)^2} \quad \text{Hofstaeder (SLAC)} \quad (9.19)$$

Interpretation: Es liegt eine gleiche Verteilung der elektrischen Ladung und der Beiträge zum magnetischen Moment vor da es eine sehr gute Übereinstimmung zwischen elektrischen und magnetischen Formfaktoren gibt.

- Die Formfaktoren des Neutrons können aus Messungen an einem Deuteriumtarget bestimmt werden; Protonen-Beiträge werden subtrahiert.
- Bei kleinen  $q^2$  wird wenig Energie auf das Nukleon übertragen;  $q$  hat im wesentlichen nur eine 3-er Komponente  $\vec{q}$ .

Nukleonen können durch eine exponentiell fallende Dichteverteilung beschrieben werden:

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\mu/r}, \quad \mu^2 = 0.71 \text{ GeV} \quad (9.20)$$

Der mittlere Radius ergibt sich hierbei zu

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{12(\hbar c)^2 / \mu^2} = 0.81 \text{ fm} \quad (9.21)$$

Der Formfaktor fällt rasch ab, für  $q^2 = 20 \text{ GeV}$  ist der Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung  $10^6$  mal geringer als an einem Punktkern. Bei großem  $q^2$  bricht das Proton also auf, es dominieren inelastische Prozesse, bei denen das Target-Nukleon zerstört wird.

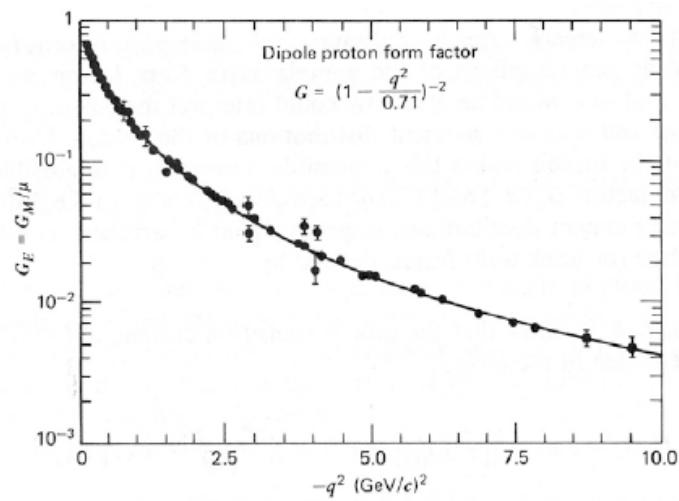


Abbildung 9.11: Formfaktor des Protons in Abhängigkeit von  $q^2$

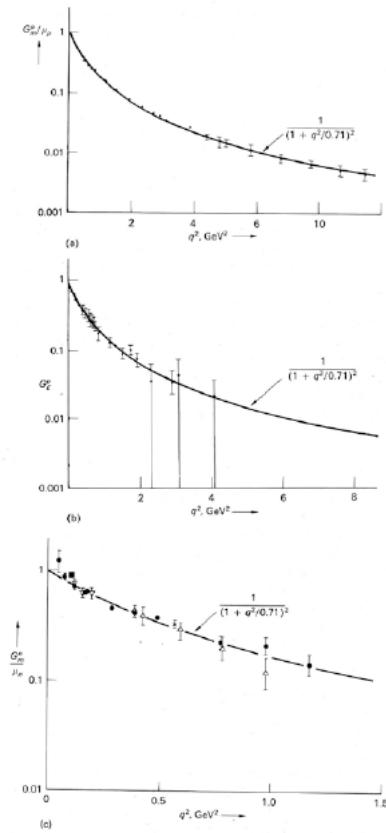


Abbildung 9.12: Vergleich der el. und magn. Formfaktoren von Proton und Neutron.  
a) Magn. Formfaktor Proton ; b) El. Formfaktor Proton ; c) Magn. Formfaktor Neutron (nach Weber 1967)

## 9.5 Inelastische Lepton-Nukleon-Streuung

Wir betrachten im Folgenden den im rechten Teil von Abb. 9.10 dargestellten Prozess, d.h. die Lepton-Nukleon-Streuung bei hohen Impulsüberträgen. Dabei sei

- der Viererimpuls des einlaufenden  $e^-$ :  $k = (E, \vec{k})$
- der Viererimpuls des auslaufenden  $e^-$ :  $k' = (E', \vec{k}')$
- der Viererimpuls des Protons  $p = (M, \vec{0})$
- die Masse des hadronischen Systems (resultierend aus den Jets)  $W$

Ist  $W^2 = M^2$ , so fand eine elastische Streuung statt, ist  $W^2 = M_\Delta^2$ , so wurde die  $\Delta$ -Resonanz getroffen (Spin-Flip). Für  $W^2 \gg M^2$  liegt eine tief inelastische Streuung vor!

Bei der inelastischen Streuung liegen zwei unabhängige Variablen vor:

- Der Impulsübertrag  $q := (k - k')$
- Die invariante Masse des Hadronischen Systems:

$$\begin{aligned} W^2 &:= (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \\ &= M^2 + q^2 + 2M \cdot \nu, \quad \text{wobei } \nu := (E - E') \end{aligned} \quad (9.22)$$

Dabei wurde verwendet, dass unter Annahme eines ruhenden Protons  $pq = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - E' \\ \vec{q} \end{pmatrix} = M(E - E')$  ist. Für die elastische Streuung gilt, dass

$$W^2 = M^2 + q^2 + 2M\nu \stackrel{!}{=} M^2 \quad (9.23)$$

, d.h. die Variablen sind nicht mehr unabhängig und

$$\boxed{\nu = -\frac{q^2}{2M} = \frac{Q^2}{2M}} \quad (9.24)$$

( $Q^2 = -q^2$ ). In elastischer Streuung liegt der Energieübertrag für vorgegebenes  $q^2$  also fest. Oft wird hierbei eine Skalenvariable eingeführt:

$$\boxed{x := \frac{-q^2}{2pq} = \frac{-q^2}{2M\nu}} \quad (9.25)$$

In experimentellen Messungen wird im Allgemeinen das gestreute Lepton gemessen (Richtung, Energie  $\rightarrow k' = (E', \vec{k}')$ ), sodass aus  $\theta$  und  $E'$  die Werte von  $\theta$  und  $\nu$  berechnet werden können (da  $E$  bekannt ist). In der inelastischen Streuung sind  $\theta$  und  $E'$  unabhängige Variablen für eine vorgegebene Strahlenergie  $E$ .

Die Verallgemeinerung der elastischen Streuformel ergibt:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' \cdot d\Omega} = \left( \frac{\alpha^2}{4E^2 \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \left\{ W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (9.26)$$

$W_1(\nu, q^2)$  und  $W_2(\nu, q^2)$  stellen Formfaktoren dar, werden bei der tief inelastischen Streuung jedoch auch als *Strukturfunktionen* bezeichnet.

Experimentell findet man, dass  $W_1(\nu, q^2)$  und  $W_2(\nu, q^2)$  nur von der dimensionslosen Größe  $x := \left(\frac{-q^2}{2m\nu}\right)$  abhängen, was als *Bjorken-Scaling* bezeichnet wird. Beachte: Es tritt hierbei keine Längenskala auf! Es stellt sich somit die Frage nach einer Interpretation dieses Befunds:

Bei *elastischer* Streuung an punktförmigen Objekten, z.B.  $e^- q$  Streuung (Streuung zweier punktförmiger Spin- $1/2$ -Teilchen) ist mit der Quarkmasse  $m$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} &= \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \cdot \sin^4 \frac{\theta}{2}}\right) \left\{ 1 \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \cdot \frac{q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ \Leftrightarrow 2W_1^{\text{Punkt}} &= \frac{Q^2}{2m^2} \cdot \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) \Rightarrow 2mW_1^{\text{Punkt}}(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{2m\nu} \cdot \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) \\ W_2^{\text{Punkt}} &= \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) \Rightarrow \nu W_2^{\text{Punkt}}(\nu, Q^2) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) \end{aligned} \quad (9.27)$$

, wobei verwendet wurde, dass  $\delta(x/a) = a\delta(x)$ . Für punktförmige Objekte erwartet man also dass die Strukturformen nur von  $x$  abhängen.

Für große  $Q^2$  gehen die Funktionen zu

$$\begin{aligned} MW_1(\nu, Q^2) &\rightarrow F_1(x) \\ \nu W_2(\nu, Q^2) &\rightarrow F_2(x) \end{aligned} \quad (9.28)$$

über, wobei die Proton-Masse  $M$  eingeführt wurde (Redefinition der Skalenvariablen). Folglich liegen elastische Streuungen an punktförmigen Objekten vor<sup>3</sup>!

## 9.6 Das Quark-Parton-Modell

Im Quark-Parton-Modell wird das Proton als ein Bündel von Partonen ( $u, d, \dots$ , Gluonen) interpretiert, jedes Parton trägt einen Impulsanteil  $x$  des gesamten Protonenimpulses.

Die Interpretation ist nur für sich schnell bewegende Protonen  $|\vec{p}| \gg M$  sinnvoll. Die Impulse der einzelnen Partonen  $x \cdot \vec{p}$  (Energien  $x \cdot E$ , Masse  $m = c \cdot M$ ) sind nicht fest, sondern folgen einer Verteilung  $f_i(x)$  für das  $i$ -te Parton. Diese gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das Parton  $i$  einen Impulsanteil im Intervall  $[x, x + dx]$  hat. Der Gesamtimpuls des Protons ist auf alle Partonen verteilt:

$$\sum_i \int_0^1 x \cdot f_i(x) dx = 1 \quad (9.29)$$

---

<sup>3</sup>Bei großen Impulsüberträgen werden die einzelnen Quarks immer besser aufgelöst, d.h. die Ladungsdichten der einzelnen Quarks überlappen immer weniger.

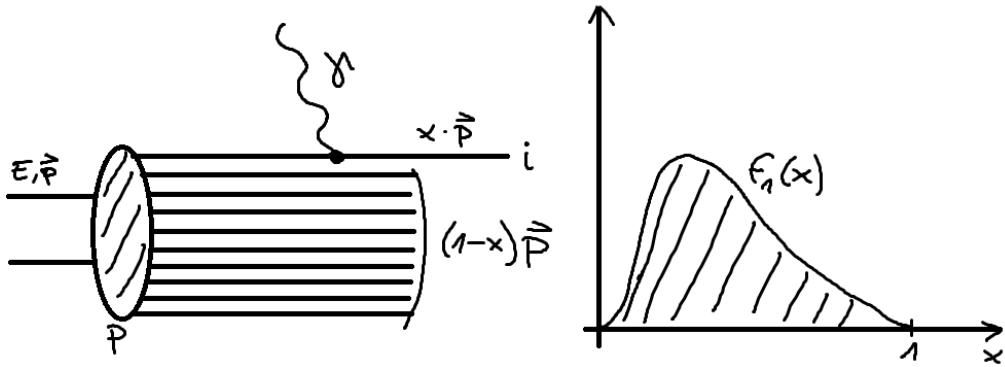


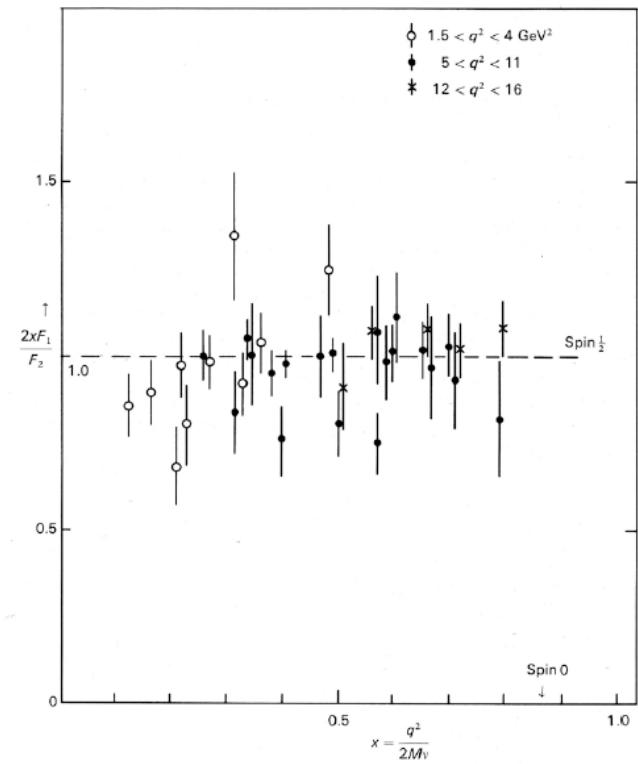
Abbildung 9.13: Proton (Impuls  $\vec{p}$ ) zusammengesetzt aus Partonen, Parton  $i$  mit Impuls  $x \cdot \vec{p}$ . Die Partonenimpulse sind nicht fest, sondern es existiert eine Verteilungsfunktion von  $x$  für das  $i$ -te Parton,  $f_i(x)$

Man kann zeigen (z.B. siehe Halzen-Martin), dass die Strukturfunktionen durch

$$\boxed{\begin{aligned} \nu \cdot W_2(\nu, Q^2) &\rightarrow F_2(x) = \sum_i e_i^2 \cdot x \cdot f_i(x) \\ M \cdot W_1(\nu, Q^2) &\rightarrow F_1(x) = \frac{1}{2x} \cdot F_2(x) \end{aligned}} \quad (9.30)$$

gegeben sind, wobei  $x := \frac{Q^2}{2M\nu}$  und  $e_i$  die Ladung des  $i$ -ten Partons in Einheiten der Elementarladung sind. Die diesen Beziehungen zugrundeliegende Ableitung nimmt an, dass die Partonen Spin  $1/2$  besitzen! Somit bietet sich eine Möglichkeit, diese Annahme zu überprüfen, in Form der *Callan-Gross-Relation*:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2xF_1(x)}{F_2(x)} = 1} \quad \text{Spin } 1/2 \quad (9.31)$$



The ratio  $2xF_1/F_2$  measured in SLAC electron-nucleon scattering experiments. For spin- $\frac{1}{2}$  partons, with  $g = 2$ , a ratio of unity is expected in the limit of large  $q^2$ —the Callan-Gross relation. (Data compiled from published SLAC data.)

Abbildung 9.14: Test der Callan-Gross-Relation

### Quarkverteilungen im Proton

Die Verteilungsfunktionen der Quarks entstehen durch Wechselwirkung der Quarks untereinander (Gluonenaustausch). Die Bestandteile des Protons umfassen

- (i) Valenzquarks ( $u, u, d$ )
- (ii) Seequarks ( $u\bar{u}, d\bar{d}, \dots$ ) aus Gluon-Splitting
- (iii) Gluonen entstehend

Diese können theoretisch *nicht* berechnet werden und sind experimentell zu bestimmen! Mit  $u(x)$  als Wahrscheinlichkeitsdichte für ein  $u$ -Quark im Proton, sowie analogen Bezeichnungen für die weiteren Quarks (und unter Vernachlässigung von  $c, b$ ) sind die Strukturfunktionen im QPM gegeben durch

$$\frac{1}{x} F_2^{ep}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u(x) + \bar{u}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d(x) + \bar{d}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s(x) + \bar{s}(x)] \quad (9.32)$$

# 10 Experimentelle Tests der Quantenchromodynamik

## 10.1 QCD-Effekte in $e^+e^-$ -Kollisionen

Bislang wurde der Prozess  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  betrachtet, der sich besonders als Referenzprozess eignet, da keine QCD Korrektur notwendig ist. Für hohe Energien ist der Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  ohne QCD-Korrekturen

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) &= 3 \cdot e_q^2 \cdot \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \\ \sigma^{[0]} &= 3 \cdot e_q^2 \cdot \left( \frac{4}{3} \pi \frac{\alpha^2}{s} \right)\end{aligned}\quad (10.1)$$

, wobei  $\sigma^{[0]}$  die führende Ordnung ist. Im Gegensatz zur Produktion von Myonen, kann an Quarks jedoch die starke Wechselwirkung angreifen, es kommt hierbei also zu sichtbaren QCD-Effekten, z.B. durch Gluonenabstrahlung, die zu 3-Jet-Ereignisse<sup>1</sup> führt.

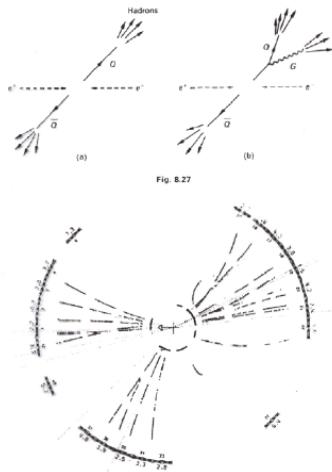


Abbildung 10.1: 1977 wurden am DESY die Gluonen sichtbar gemacht.

Diese Korrekturen können theoretisch berechnet werden und ihre experimentelle Messung stellt einen wichtigen Test der Theorie dar.

In Abb. 10.3 ist die erste Ordnung der QCD-Korrekturen für die  $q\bar{q}$  Produktion dargestellt.

---

<sup>1</sup>Die erste Beobachtung von 3-Jet-Ereignissen am DESY 1977 gilt als Entdeckung des Gluons.

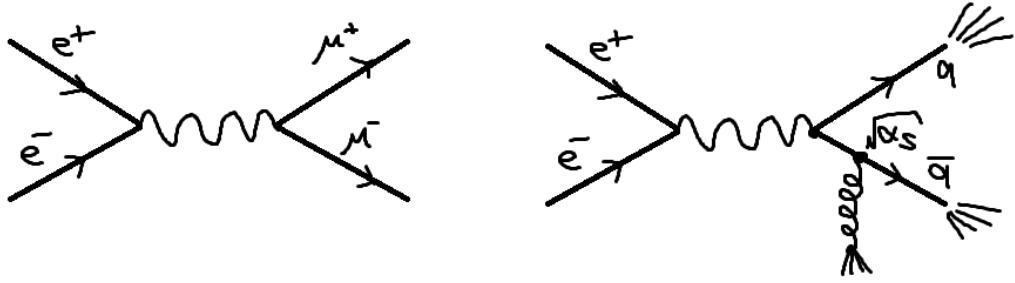


Abbildung 10.2: Myonen und Quark-Antiquark-Produktion in  $e^+e^-$ -Kollisionen. Bei der Produktion von Quarks kommen noch Korrekturen durch die starke Wechselwirkung hinzu.

$$\sigma_{\text{reell}}^{[1]} = \left\{ \text{Feynman diagram for real gluon radiation} \right\}^2 \sim \alpha_s$$

$$\sigma_{\text{virtuell}}^{[1]} = \left\{ \text{Feynman diagram A} + \text{Feynman diagram B} + \text{Feynman diagram C} + \text{Feynman diagram D} \right\}^2$$

Abbildung 10.3: Beiträge der ersten Ordnung in der  $q\bar{q}$ -Produktion aus  $e^+e^-$

Die Änderung im Wirkungsquerschnitt ist dabei

$$\sigma^{[1]} = \sigma^{[0]} + \sigma^{[0]} \cdot \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} = \sigma^{[0]} \left( 1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right) \quad (10.2)$$

Die Korrektur enthält Beiträge von:

- Reeller Gluon-Abstrahlung, der divergiert, wenn  $E(g) \rightarrow 0$  und somit  $\cos g, q \rightarrow 1$  geht, man spricht von Infrarotdivergenzen.
- Virtuelle Korrekturen

Der Interferenzterm ist  $A \cdot B = O(\alpha_s)$ . Problem: Die einzelnen Beiträge divergieren! Es wurde jedoch bewiesen, dass sich die Terme Ordnung für Ordnung wegheben, d.h. gleich stark divergieren, jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen. Für die erste Ordnung der QCD-Korrektur ist:

$$\sigma^{(1)} = \sigma_{\text{reell}}^{(1)} + \sigma_{\text{virtuell}}^{(1)} = \sigma^{[0]} \cdot \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (10.3)$$

Die Kompensation von Singularitäten zwischen reellen und virtuellen Korrekturen findet statt

- in jeder Ordnung
- unabhängig vom Prozess (z.B.  $pp \rightarrow W + \dots$ )

Die QCD ist somit berechenbar, Tests der QCD sind im Experiment möglich, sofern  $Q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ , d.h.  $Q^2 \gtrsim 4 \text{ GeV}^2$  (hohe Energien, kleine  $\alpha_S$ ). Das Verzweigungsverhältnis ist in erster Ordnung

$$R^{[1]} = 3 \cdot \sum_q e_q^2 \left( 1 + \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} \right) \quad (10.4)$$

Heute sind Korrekturen bis zur 3. Ordnung ( $\alpha_S^3$ ) berechnet:

$$R^{[3]} = 3 \cdot \sum_q e_q^2 \left( 1 + \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} + 1.411 \left( \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} \right)^2 - 12.8 \left( \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} \right)^3 + \dots \right) \quad (10.5)$$

Es bietet sich somit die Möglichkeit  $\alpha_S$  experimentell zu bestimmen!  $R_{\text{Exp}}^{[3]} \stackrel{!}{=} R_{\text{Theo}}^{[3]}$

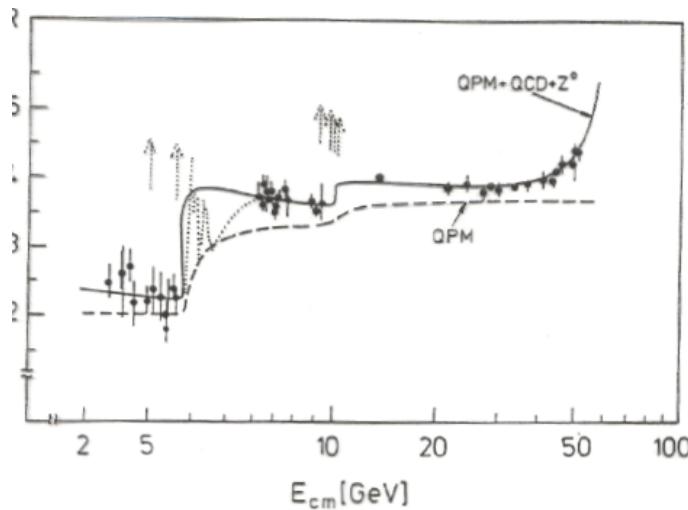


Abbildung 10.4: Daten für das Verhältnis R (Marshall 1989)

Die Grafik zeigt die Daten für das Verhältnis R und die Vorhersagen im Quark-Parton-Modell (QPM) und der QCD. Die  $\phi$ - und  $\Psi$ -Resonanzen sind dabei gestrichelt angedeutet.

Die folgende Abbildung soll einen Eindruck geben, wie vielfältig die Beiträge höherer Ordnung (2-,3- und 4- Jet-Ereignisse) zur Jet-Produktion in  $e^+e^-$ -Kollisionen sind.

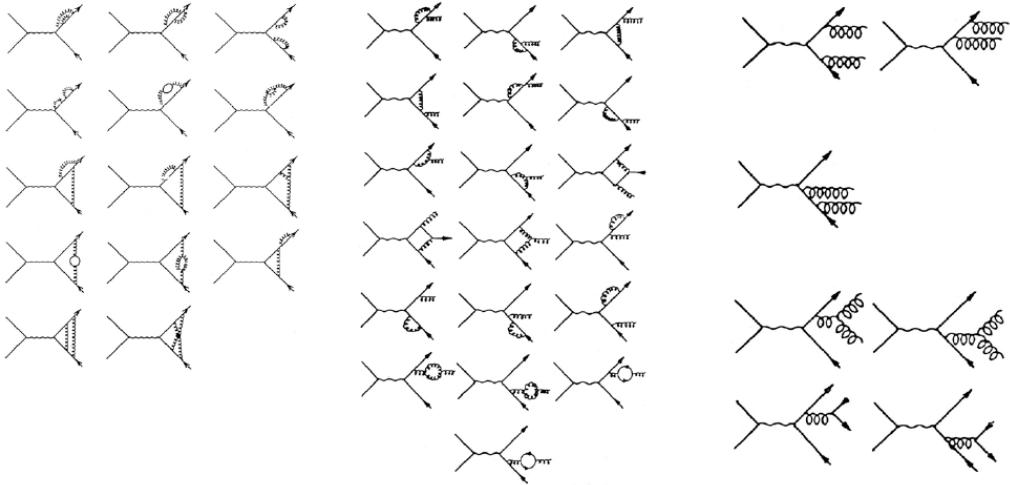


Abbildung 10.5: Beiträge höherer Ordnungen zur Jet-Produktion

Die Messungen des Verhältnis  $R$  sind kompatibel mit  $N_C = 3$ , solange man sich außerhalb der Resonanzbereiche befindet:

$$R = \frac{e^+ e^- \rightarrow \text{Hadrons}}{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-}.$$

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{Hadrons}) \propto \sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-).$$

$$R = N_c \sum_{q=u,d,s} e_q^2,$$

$$R = \begin{cases} \frac{2}{3} N_c & (\text{u, d, s}), \\ \frac{10}{9} N_c & (\text{u, d, s, c}), \\ \frac{11}{9} N_c & (\text{u, d, s, c,b}), \end{cases}$$

The R measurements are compatible with  $N_c=3$  (outside of the resonance region).

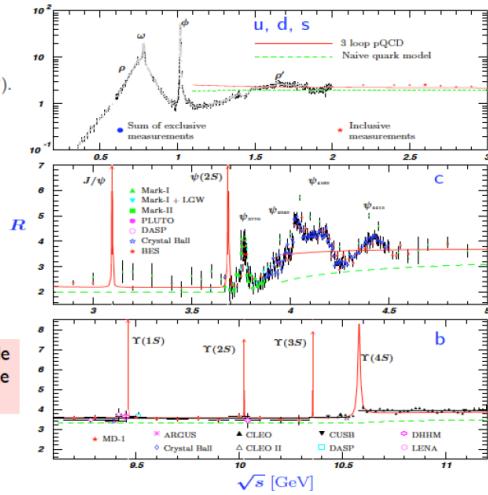


Abbildung 10.6: Experimentelle Übereinstimmungen des Verhältnis R

Die Messergebnisse für den Wirkungsquerschnitt der Hadronen-Produktion durch  $e^+ e^-$ -Kollisionen zeigen gute Übereinstimmungen mit der Theorie. Dargestellt sind hier der gemessene Verlauf und der berechnete Verlauf mit und ohne QCD-Korrekturen.

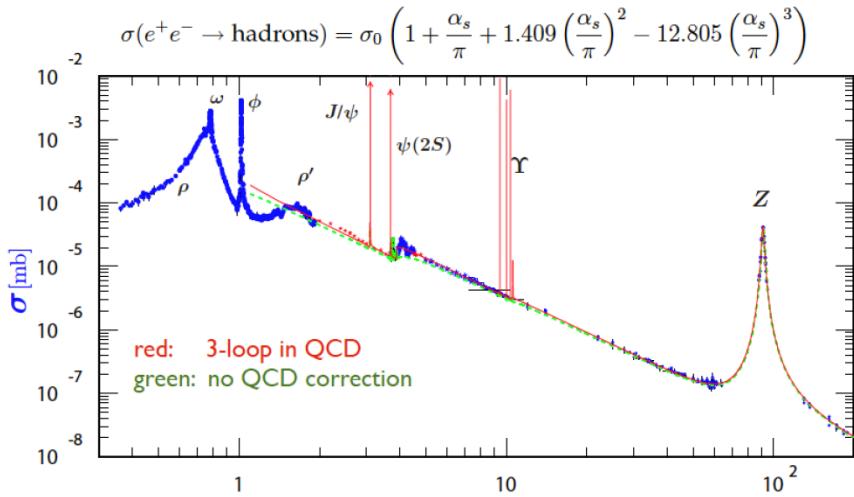


Abbildung 10.7: Wirkungsquerschnitt der Hadronenproduktion in  $e^+e^-$ -Kollisionen

QCD-Korrekturen zum Prozess  $e^+e^- \rightarrow$  Hadronen  
Die allgemeine Korrektur wird beschrieben durch:

$$\delta_{\text{QCD}}(Q) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \left( \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} \right) \quad (10.6)$$

Die ersten vier Terme in der  $\alpha_S$  Reihenentwicklung sind dabei

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1.9857 - 0.1152 n_f$$

$$c_3 = -6.63694 - 1.20013 n_f - 0.00518 n_f^2 - 1.240 \eta$$

$$c_4 = -156.61 + 18.77 n_f - 0.7973 n_f^2 + 0.0215 n_f^3 + C \eta$$

, wobei  $\eta = (\sum e_q)^2 / 3 \sum e_q^2$  ist und der Koeffizient C im  $\eta$ -abhängigen Term der  $\alpha_S^4$ -Korrektur noch nicht bestimmt wurde.

## 10.2 QCD-Effekte in der tief-inelastischen Lepton-Nukleon- Streuung

- Die Struktur des Protons lässt sich durch Strukturfunktionen  $F_2(x, Q^2)$  und  $F_1(x, Q^2)$  beschreiben
- Im naiven Quark-Parton-Modell geht  $F_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x)$  über:

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 \cdot x \cdot f_i(x) \quad (10.7)$$

- Die Parton-Verteilungsfunktionen  $f_i(x)$  können im Rahmen der QCD nicht berechnet werden, sondern müssen experimentell bestimmt werden, was Parametrisierungen erfordert.

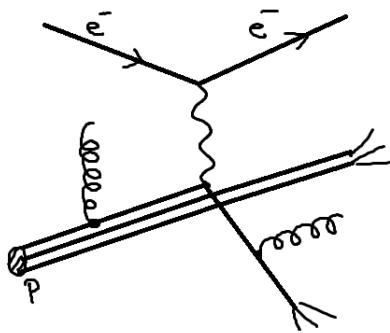


Abbildung 10.8:  $e^- p$ -Streuung mit (nur) zwei der möglichen QCD-Korrekturen

- QCD-Effekte führen dazu, dass  $f_i(x)$  und damit  $F_2(x, Q^2)$  eine leichte (=logarithmische)  $Q^2$ -Abhängigkeit zeigen.  $\Rightarrow F_2(x, Q^2)$

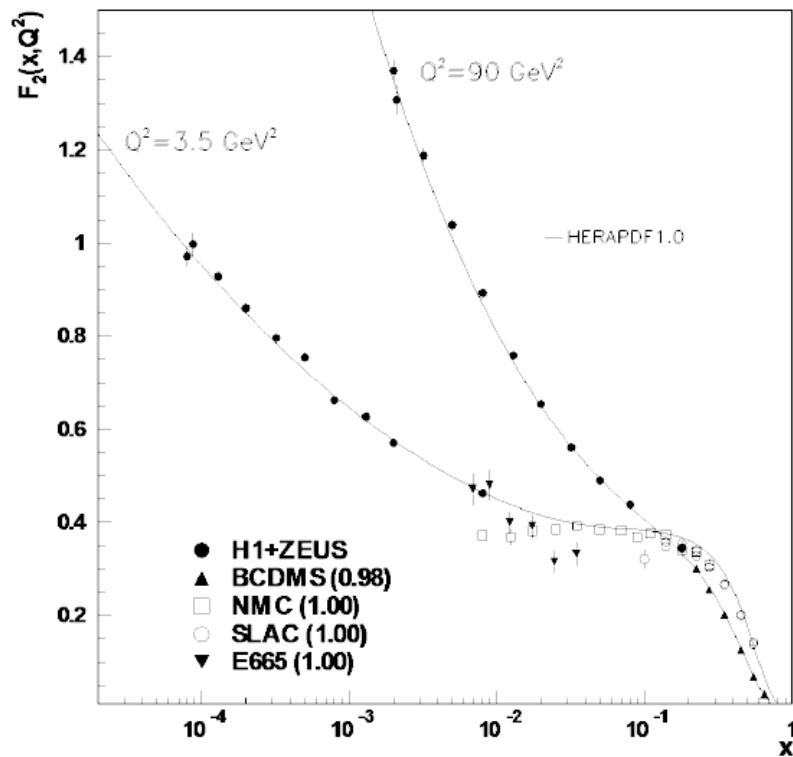


Abbildung 10.9: Strukturfunktion  $F_2$  in Abhängigkeit von  $x$  bei verschiedenen  $Q^2$ , gemessen an verschiedenen Kollidern.

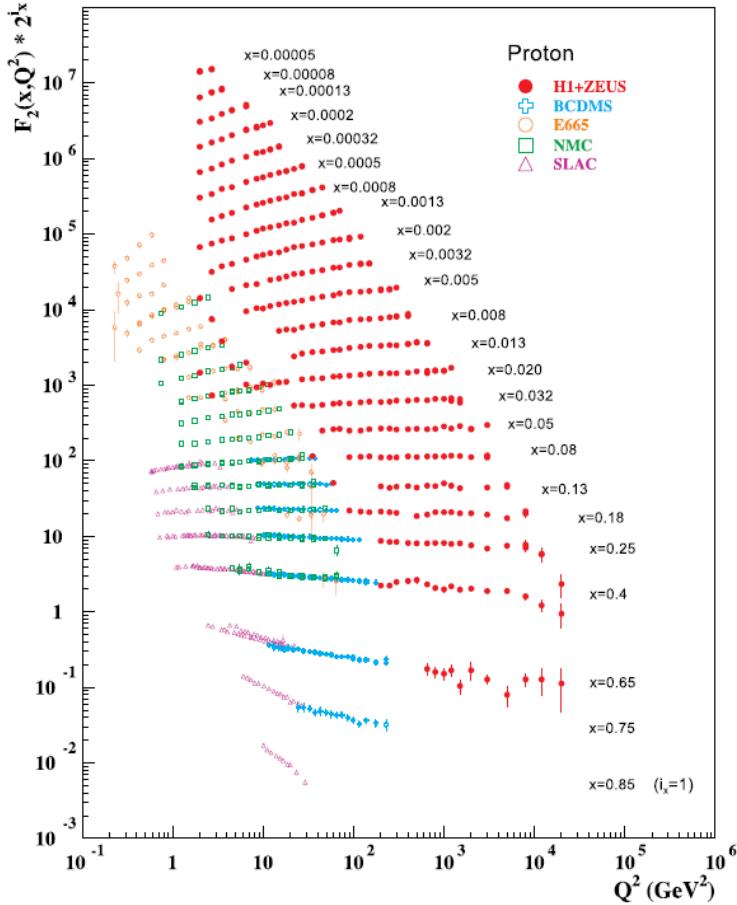


Abbildung 10.10: Strukturfunktion  $F_2$  in Abhängigkeit von  $Q^2$ , gemessen bei verschiedenen  $x$ -Werten und unterschiedlichen Kollidern.

#### Interpretation:

Das Auflösungsvermögen des Experiments hängt von der Wellenlänge der Probe , d.h. vom  $Q^2$  des virtuellen Photons, ab. Ein Photon niedriger Energie kann beispielsweise ein Quark nicht so genau auflösen, wie eines höherer Energie. Unterhalb des Auflösungsvermögens des niederenergetischen Photons kann nun das Quark noch ein Gluon abstrahlen (vgl. Abb. 10.11).

Was sagt die QCD?

- $f_i(x, Q^2)$  ist nicht berechenbar
- Die Änderung der Verteilungsfunktion als Funktion von  $Q^2$  ist in der perturbativen QCD berechenbar. Die Änderung der Quarkverteilungen zum Beispiel durch Gluon-Abstrahlung ist

$$\frac{df_i(x, Q^2)}{d(\log Q^2)} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \cdot \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y, Q^2) \cdot P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) \quad (10.8)$$

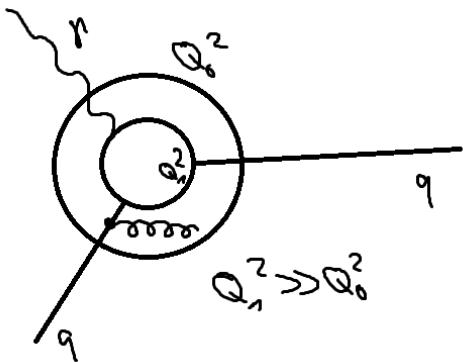


Abbildung 10.11: Abhängig von der Energie des Photons kann das Quark feiner aufgelöst werden, d.h. es können auch mehr QCD-Effekte beobachtet werden, beispielsweise, wenn ein Gluon unterhalb der Auflösungsgrenze für  $Q_0^2$  abgestrahlt wird, jedoch noch überhalb der Grenze für  $Q_1^2$ .

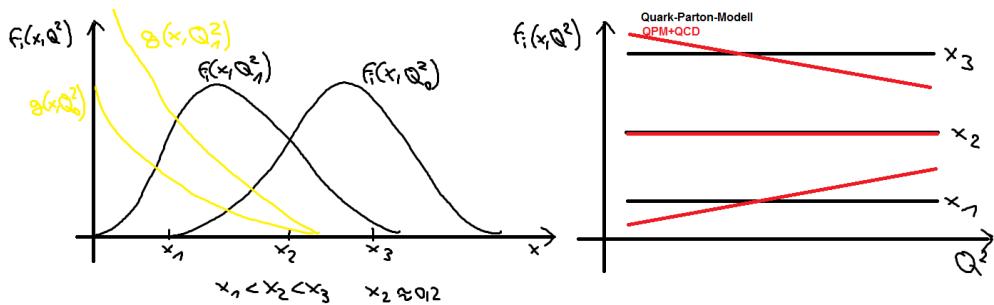


Abbildung 10.12: Erwartete Partonverteilungsfunktion als Funktion von  $x$  bzw.  $Q^2$  (jew. andere Größe fest, für verschiedene  $Q_i$  bzw.  $x_i$  Werte).

$P_{qg}$  wird dabei als *Splitting-Funktion* bezeichnet und beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass das Quark mit Impulsanteil  $y$  ein Gluon abstrahlt und nach Abstrahlung den Impulsanteil  $x$  trägt. Diese Gleichung wurde früher als *Altarelli-Parisi Gleichung* bezeichnet, heute wird sie als *DGLAP Gleichung* bezeichnet.

Die Beschreibung der  $Q^2$ -Abhängigkeit der Verteilungsfunktion und damit der Strukturfunktion bietet Möglichkeiten für den Test der QCD. Darüber hinaus kann auch hieraus  $\alpha_S(Q^2)$  bestimmt werden.

## 10.3 QCD-Tests in Proton-(Anti)Proton-Kollisionen

### 10.3.1 Berechnung von Wirkungsquerschnitten

- Protonen/Antiprotonen sind aus Partonen aufgebaut, die Beschreibung erfolgt durch Parton-Verteilungsfunktionen.

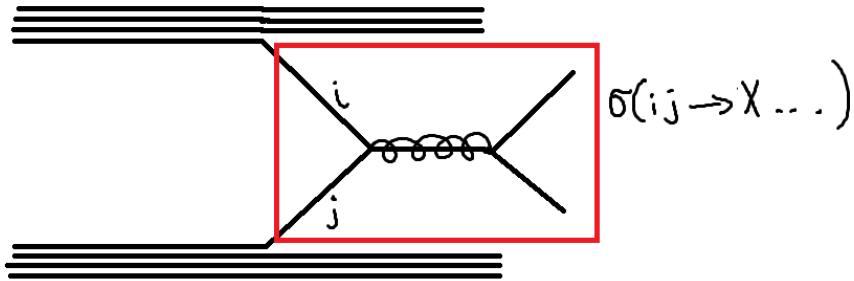


Abbildung 10.13: *Proton-Proton-Kollision im Feynman-Diagramm*

⇒ Summation über alle möglichen Partonkombinationen  $i, j$ , die zu dem gewünschten Endzustand führen, z.B.  $W^+$ -Produktion:  $u\bar{d} + u\bar{s}$ .

- Zwischen den Konstituenten der Protonen finden elementare, harte (=große Vierimpulsüberträge) Streuprozesse statt.
- Zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten werden neben den Partonverteilungsfunktionen  $f_i^A(x, Q^2)$  die Art des Nukleons  $A = p, \bar{p}$  und die Partontypen  $i, j$  benötigt. Für die Berechnung des Proton-Proton/Antiproton Wirkungsquerschnitts ergibt sich dann durch Summation über alle möglichen Beiträge (z.B.  $u\bar{d}, u\bar{s}, c\bar{d}, c\bar{s}$  für die  $W^+$ -Produktion):

$$\sigma = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_i^A(x_1, Q^2) \cdot f_j^B(x_2, Q^2) \cdot \hat{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, \alpha_S(Q^2)) \quad (10.9)$$

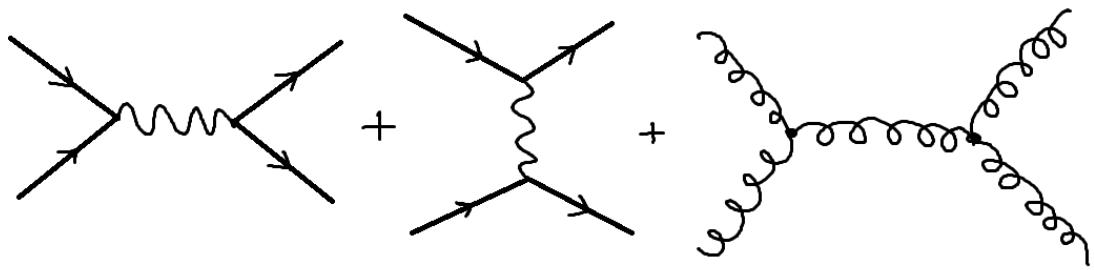


Abbildung 10.14: Beiträge zur 2-Jet-Produktion

- Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts für den harten Streuprozess  $\hat{\sigma}$  erfolgt in perturbativer QCD, z.B. 2-Jet-Produktion (vgl. Abb. 10.14)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{[n]} &= c_0 \alpha_S^k \cdot \{1 + c'_1 \alpha_S + c'_2 \alpha_S^2\} \\ &= \underset{\substack{\text{Führende Ordnung} \\ (\text{LO, leading order})}}{c_0 \alpha_S^k} + \underset{\substack{\text{Beitrag der nächst-} \\ \text{führenden Ordnung} \\ (\text{NLO, next-to-} \\ \text{leading order})}}{c_1 \alpha_S^{k+1}} + c_2 \cdot \alpha_S^{k+2} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Die folgende Grafik zeigt, wie enorm hoch die Produktionsrate für das leichte b-Quarks ist, auch W- und Z-Bosonen werden in sehr großer Zahl produziert. Das t-Quarks wird nur aufgrund seiner großen Masse deutlich weniger häufig erzeugt.

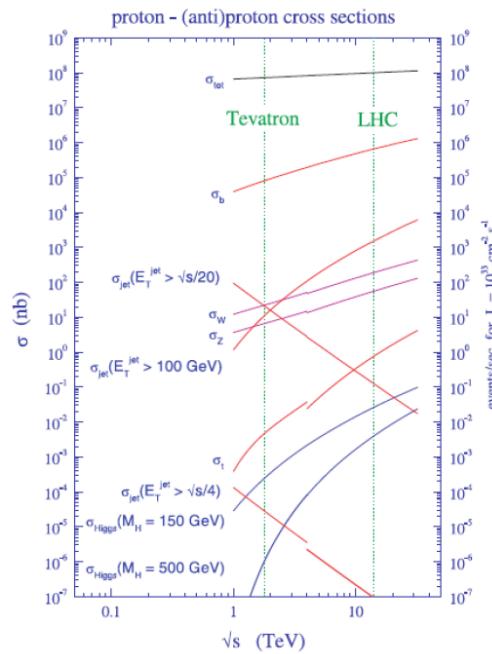


Abbildung 10.15: Wirkungsquerschnitte für wichtige harte Streuprozesse im Standard-Modell am TeVatron und dem LHC

### 10.3.2 Produktion von Jets mit hohen Transversalimpulsen

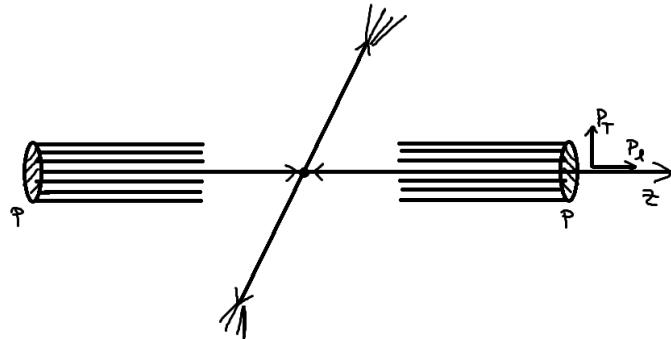


Abbildung 10.16: *Proton-Proton-Kollision*

- Neben den in Abb. 10.14 (beispielhaft, nicht vollständig) dargestellten Prozessen führender Ordnung (leading order, LO) in Proton-Proton-Kollisionen kommen Korrekturen höherer Ordnung (vgl. Abb. 10.17) sowie virtuelle Korrekturen hinzu. Üblicherweise werden die Wirkungsquerschnitte in LO oder NLO berechnet. Beiträge der führenden Ordnung besitzen starke Beiträge von  $gg \rightarrow gg$  (hohe Gluonendichte im Proton, Test/Hinweis auf Gluon-Selbstkopplung).

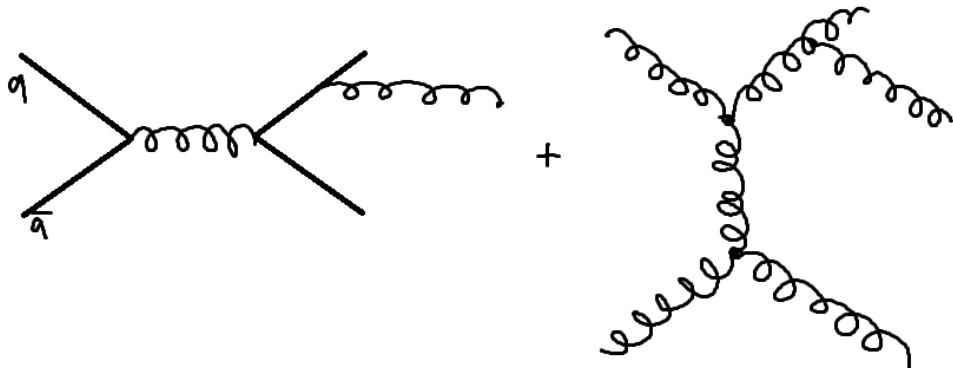


Abbildung 10.17: *Beispiele für Korrekturen*

Die Wirkungsquerschnitte sind dann

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{LO}} &= c_0 \cdot \alpha_S^k, \quad k = 2 \\ \sigma^{[n]} &= c_0 \cdot \alpha_S^2 \left\{ 1 + c_1 \cdot \alpha_S + c_2 \cdot \alpha_S^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (10.11)$$

- Tests der QCD sind durch den Vergleich der gemessenen Jet-Raten mit den theoretischen Vorhersagen möglich. Die Observable ist dabei  $\frac{d\sigma}{dP_T}$ , mit dem Transversalimpuls  $P_T$  der Jets. Oft wird auch der doppelt-differentielle Wirkungsquerschnitt betrachtet:

$$\frac{d^2\sigma}{dP_T d\eta} = \frac{N}{\varepsilon \cdot L \cdot \Delta p_T \cdot \Delta \eta} \quad (10.12)$$

, wobei  $\eta$  als *Pseudorapidität* bezeichnet wird:

$$\eta := -\ln \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (10.13)$$

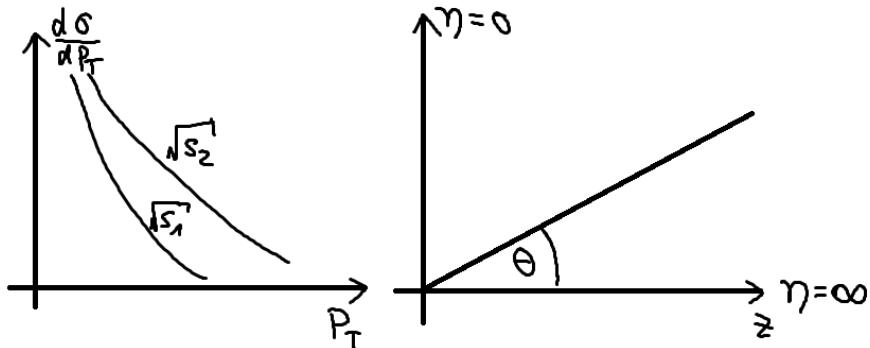


Abbildung 10.18: *Differentieller Wirkungsquerschnitt für verschiedene Schwerpunktsenergien als Funktion des Transversalenimpulses und Skizze zur Definition der Rapidität.*

Eine weitere Observable zum Test der QCD ist die Winkelverteilung  $\frac{d\sigma}{d\Delta\phi}$  ( $\Delta\phi$  = Winkel zwischen d. Flugbahn zweier Teilchen).

- Experimentelle Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung der Daten mit NLO-QCD-Rechnungen im Rahmen der experimentellen und theoretischen Unsicherheiten. Die dominierende Unsicherheit der experimentellen Seite liegt in der Energiemessung der Jets, die dominierenden Unsicherheiten der theoretischen Seite sind Unsicherheiten der Strukturfunktionen sowie (fehlende) Beiträge höherer Ordnung der Störungstheorie.

Die folgende Grafik zeigt die Aufnahme des mit der höchsten Masse detektierten 2-Jet-Events aus dem Jahr 2010, wo die führenden Jets eine Masse von 3.1 TeV besaßen. Der Transversalimpuls betrug  $P_T = 1.3$  TeV bzw. 1.2 TeV, der y-Wert war  $-0.68$  bzw. 0.64. Die fehlende Transversalenergie in diesem Ereignis war 46 GeV.

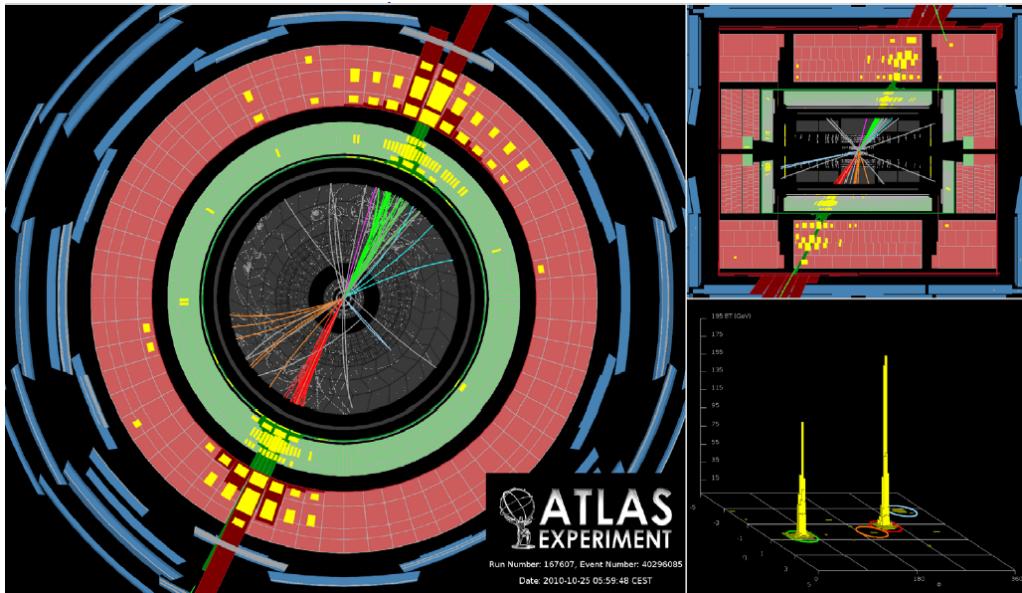


Abbildung 10.19: Zwei-Jet Aufnahme im ATLAS-Experiment am LHC

Neben Jet-Ereignissen mit hoher Masse wurden auch Viel-Jet-Ereignisse detektiert. Am 5.10.2010 wurde das im Folgenden abgebildete Event aufgenommen. Es wurden dabei 8 Jets mit einem Transversalimpuls größer 60 GeV detektiert. Der erste Jet hatte die Daten:  $P_T = 290 \text{ GeV}$ ,  $\eta = -0.9$ ,  $\phi = 2.7$ , der zweite Jet besaß  $P_T = 220 \text{ GeV}$ ,  $\eta = 0.3$ ,  $\phi = -0.7$ . Die fehlende Transversalenergie betrug  $E_T = 21 \text{ GeV}$ ,  $\phi = -1.9$ . Die gesamte transversale Energie war  $E_T^{\text{ges}} = 890 \text{ GeV}$ .

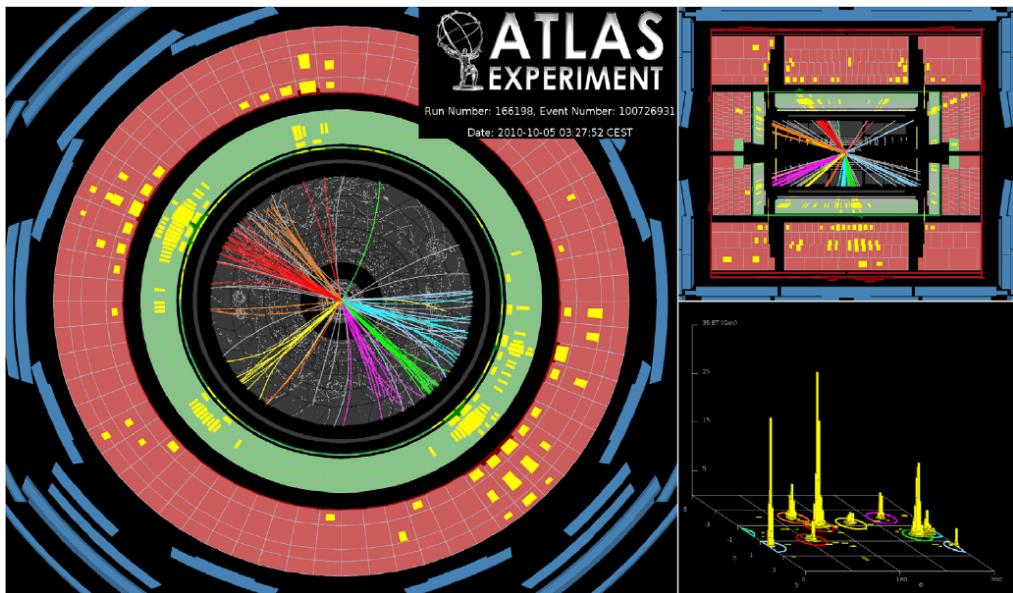


Abbildung 10.20: Größte bisher detektierte Jet-Multiplizität: 8-Jet-Ereignis

### 10.3.3 $W/Z$ -Produktion

Der Prozess der führenden Ordnung zur Produktion der Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung ist der *Drell-Yan-Prozess*. Dabei fusionieren ein  $u$  und ein  $\bar{d}$ -Quark zu einem  $W^+$ -Boson. Die hierfür benötigte Schwerpunktsenergie der beiden Quarks entspricht der Masse des  $W$ -Bosons:  $m_W = 80.4 \text{ GeV} = \hat{s}$ . Am LHC sind  $x_1 \approx x_2$  und der Erwartungswert  $\langle x \rangle = \frac{80}{8000} = 0.01$ . In niedrigster Ordnung ist

$$\hat{\sigma} = 2\pi \frac{G_F}{\sqrt{2}} m_W^2 |V_{qq'}| \cdot \delta(\hat{s} - m_W^2) \quad (10.14)$$

$G_F$  bezeichnet die Fermi-Konstante ( $\alpha_W \sim G_F$ ),  $|V_{qq'}|$  das entsprechende CKM-Matrixelement.

Korrekturen höherer Ordnung umfassen beispielsweise das Abstrahlen eines Gluons durch eines der Quarks ( $\Rightarrow$  Jet) vor der Vernichtung zu  $W$ . Aufgrund der kleinen  $x$ -Werte sind diese Gluon-Beiträge wichtig. Bislang wurden QCD-Korrekturen der Ordnungen  $\alpha_S$  und  $\alpha_S^2$  berechnet

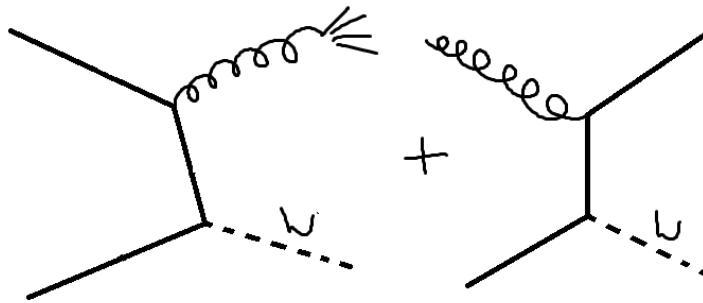


Abbildung 10.21: Beispiele für Korrekturen erster Ordnung in der  $W$ -Produktion

$$\begin{aligned} \sigma^{[1]} &= \sigma^{[0]} (1 + c_1 \cdot \alpha_S) = \begin{cases} 1.30 \cdot \sigma^{[0]} & \text{Tevatron} \\ 1.25 \cdot \sigma^{[0]} & \text{LHC} \end{cases} \\ \sigma^{[2]} &= \sigma^{[0]} \left( 1 + c_1 \alpha_S + c_2 \alpha_S^2 \right) = \begin{cases} 1.35 \cdot \sigma^{[0]} \\ 1.28 \cdot \sigma^{[0]} \end{cases} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Die experimentellen Tests der QCD in diesem Rahmen umfassen:

- $W$  bzw.  $Z$  Produktionswirkungsquerschnitte
- Rate der beobachteten  $W/Z + \text{Jet}$ -Ereignisse (assoziierte Produktion), nur möglich aufgrund von QCD Effekten
- Gemessene Transversalimpulsverteilungen der assoziierten Jets:  $\frac{d\sigma}{dP_T}$

All diese Tests zeigen wiederum gute Übereinstimmung zwischen Experimenten und Theorie, die QCD wird bestätigt.

### 10.3.4 Produktion von Top-Quarks

Die Produktion von Top-Quarks stellt einen Spezialfall der 2-Jet-Produktion dar, wobei wir verlangen, dass  $t\bar{t}$  produziert wird. Die Besonderheit ist die große Masse der Quarks:  $m_t \approx 172$  GeV. Prozesse zur Produktion von  $t$ -Quarks sind in Abb. 10.22 dargestellt. Am LHC treten große Gluon-Beiträge auf, da das Top-Quark für die Verhältnisse am LHC ein leichtes Teilchen ist, d.h. kleine  $x$ -Werte sind wichtig:

$$\text{Tevatron: } \langle x \rangle = \frac{2 \cdot 172 \text{ GeV}}{1960 \text{ GeV}} \approx 0.18$$

$$\text{LHC: } \langle x \rangle = \frac{2 \cdot 172 \text{ GeV}}{14\,000 \text{ GeV}} \approx 0.025 \quad (10.16)$$

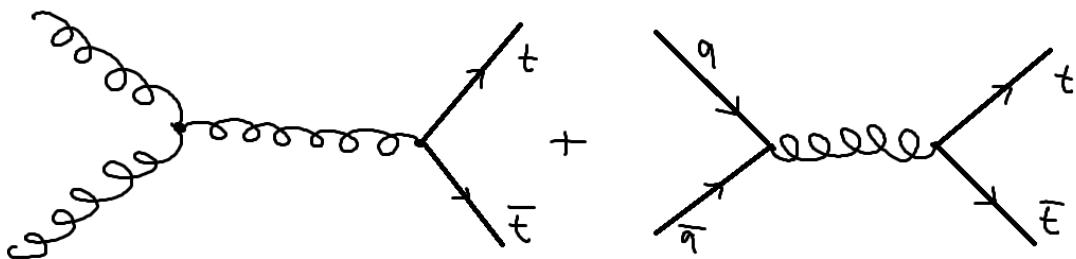


Abbildung 10.22: Die zwei wichtigsten Mechanismen zur Produktion von  $t\bar{t}$ . Am LHC macht die Produktion durch zwei Gluonen ca. 90% aus, der  $q\bar{q}$ -Anteil beträgt rund 10% .

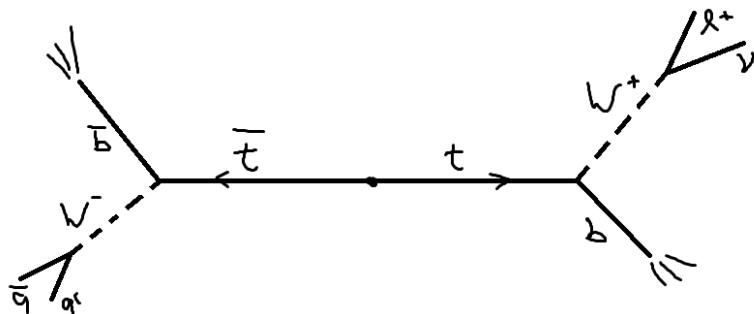


Abbildung 10.23: Möglicher Zerfall von  $t\bar{t}$  (Aufgrund der geringen Lebensdauer der  $t$ -Quarks existieren keine gebundenen Zustände mit Top-Anteil.)

Die Wirkungsquerschnitte sind in führender und nächst-führender Ordnung (zumindest die dominanten Terme) berechnet, experimentelle Tests sind die gemessenen Wirkungsquerschnitte.

Zu beachten ist, dass das Top-Quark innerhalb von  $\tau \approx 10^{-24}$  s zerfällt:  $t \rightarrow W^+ b$ . Bei der Selektion von Ereignissen verlangt man:

- mindestens ein geladenes Lepton ( $W \rightarrow \ell\nu_\ell$ )
- fehlende transversale Energie (Neutrino)
- Zwei markierte/ identifizierte  $b$ -Jets (sekundäre Zerfallsvertices)

Der Untergrund wird vorrangig durch  $W+Jet$  Produktion hervorgerufen.

#### Zusammenfassung

- $p\bar{p}$  und  $p\bar{p}$ -Kollisionen stellen einen guten Test der QCD dar.
- Bislang sind alle experimentellen Ergebnisse im Einklang mit den theoretischen Vorhersagen.

## 10.4 Experimentelle Bestimmung der starken Kopplungsstärke $\alpha_S$

Von Seiten der Theorie kann kein Wert für  $\alpha_S$  berechnet werden. Daher wird  $\alpha_S$  aus dem Vergleich von theoretischen Vorhersagen mit experimentellen Daten bestimmt. Hierfür kommen experimentelle Messgrößen infrage, sofern QCD-Korrekturen berücksichtigt werden, wodurch diese von  $\alpha_S$  abhängen.

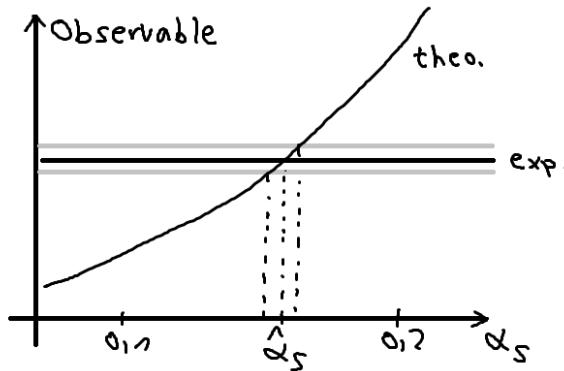


Abbildung 10.24: Bestimmung von  $\alpha_S$  aus dem Vergleich theoretischer Modelle mit experimentellen Daten.

Mögliche Prozesse zur Bestimmung von  $\alpha_S$  sind:

- Die Rate von 3-Jet-Ereignissen in  $e^+e^-$ -Kollisionen.
- Das  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$   $R$ -Verhältnis

$$R = 3 \cdot \sum_q e_q^2 \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} + 1.411 \left( \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} \right)^2 - 12.8 \left( \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} \right)^3 + \dots \right] \quad (10.17)$$

Es erfolgt dann ein Vergleich der von  $R_{\text{exp}}$  mit dem theoretischen Wert  $R_{\text{theo}}(\alpha_s(Q^2))$ .

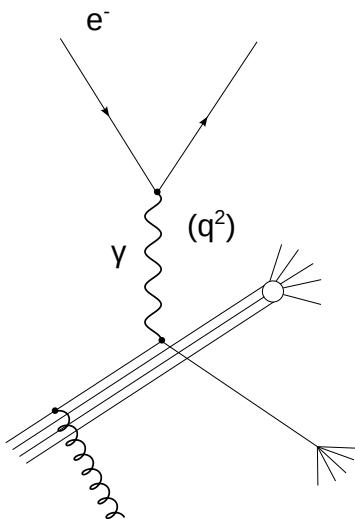


Abbildung 10.25:  $Q^2$ - Abhängigkeit der Strukturfunktion

- Die  $Q^2$ -Abhängigkeit der Strukturfunktionen

$$\frac{df_i(x, Q^2)}{d \ln Q^2} \sim \alpha_S \quad (10.18)$$

Die Messung von  $F_2(x, Q^2)$  liefert also über deren Steigung mit Gleichung 10.18 den Wert für  $\alpha_s(Q^2)$ .

- Die Jet-Produktionsraten in tief-inelastischer Lepton-Nukleon-Streuung
- Die Rate von ( $W+Jet$ )-Ereignissen in  $p\bar{p}$ -Kollisionen. Hier ist mittlerweile die NLO-Rechnung vorhanden, sodass man über die Produktionswirkungsquerschnitte  $\alpha_s(Q^2)$  erhält. Da jedoch nur eine weitere Ordnung berechnet ist, ist der Fehler relativ groß.
- Zerfall von  $\tau$ -Leptonen  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$ ,  $\bar{\nu}_\tau \tau^- \rightarrow \pi^-$ : Aufgrund der niedrigen Energieskala der  $\tau$ -Leptonen ( $E \sim m_\tau = 1.78$  GeV) kann die vorhergesagte Energieabhängigkeit der starken Kopplung  $\alpha_S$  getestet werden.

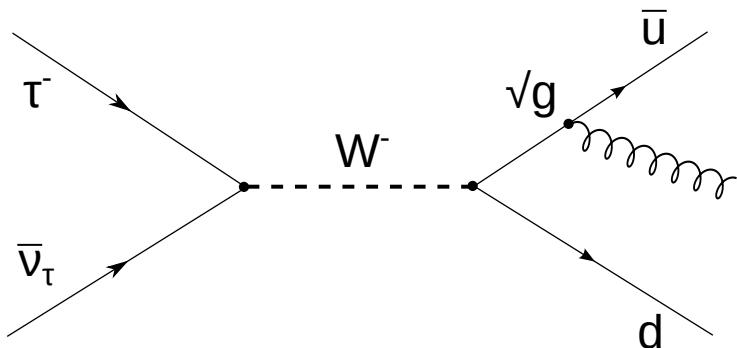


Abbildung 10.26: Zerfall des  $\tau$ - Leptons in Hadronen

Betrachtet wird hierbei das Verhältnis

$$R_\tau := \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{Hadronen})}{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \mu\bar{\nu})} = \underset{\text{Theorie}}{3.058 \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha_S}{\pi} + 5.2 \left( \frac{\alpha_S}{\pi} \right)^2 + 26.4 \left( \frac{\alpha_S}{\pi} \right)^3 + \dots \right\}} \quad (10.19)$$

Beachte: Im leptonischen Endzustand treten keine hadronischen Korrekturen auf.

Die allgemeine Vorgehensweise ist der Vergleich der experimentellen Ergebnisse  $R_{\text{exp}} \pm \Delta R_{\text{exp}}$  mit dem theoretisch vorhergesagten Wert:

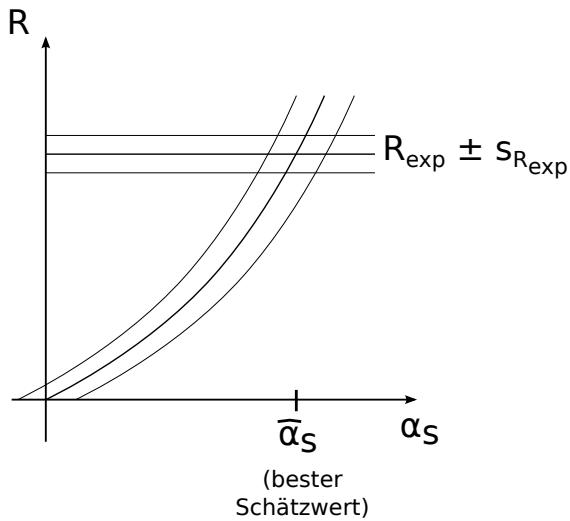


Abbildung 10.27: Bestimmung des besten Schätzwerts für  $\alpha_s$

Dies gestaltet sich jedoch nicht ganz einfach:

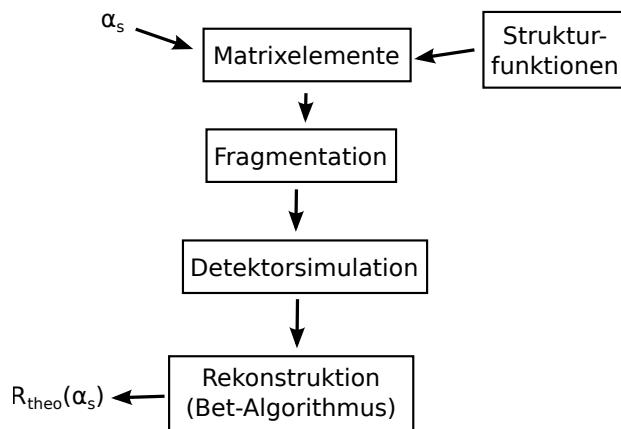


Abbildung 10.28: Bestimmung von  $\alpha_s$  in der Praxis

Theoretisch wird eine starke Energieabhängigkeit von  $\alpha_S$  vorhergesagt:

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}} \quad (10.20)$$

$\Lambda_{\text{QCD}}$  wird als Skalenparameter bezeichnet,  $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200$  MeV. Tests der QCD umfassen neben der Überprüfung der Energieabhängigkeit der Kopplung auch die Prüfung der Prozessunabhängigkeit.

Experimentelle Ergebnisse:

- (1) Der relative Anteil von 3-Jet-Ereignissen in  $e^+e^-$ -Kollisionen in Abhängigkeit der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$ :  
 $R_3^{\text{exp}}$  sinkt von 27% bei  $\sqrt{s} = 20$  GeV auf 18% bei  $\sqrt{s} = 92$  GeV. Die ist eine erste Evidenz für die Energieabhängigkeit von  $\alpha_S$ , sodass  $\alpha_S = \text{const.}$  mit hoher Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden kann.
- (2)  $R$ -Verhältnis in  $e^+e^-$ -Kollisionen
- (3)  $\alpha_S$  aus der Jet-Produktion in tief-inelastischer Streuung liefert eine starke Evidenz für *laufende Kopplung* (Energieabhängigkeit) innerhalb eines Experiments.
- (4) Die Zusammenfassung der Ergebnisse aus verschiedenen Experimenten (konsistente Ergebnisse) liefert

$$\alpha_S^2(m_Z^2) = 0.118 \pm 0.003 \quad (10.21)$$

# 11 Experimentelle Tests der elektroschwachen Wechselwirkung

Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung  $W^\pm$  und  $Z^0$  koppeln an die fundamentalen Vertices, wobei beispielsweise ein Elektron  $e^-$  unter Aussendung eines  $W^-$  in ein Neutrino  $\nu_e$  übergeht. Während die Austauschteilchen der elektromagnetischen und starken Kraft masselos sind, besitzen die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung Masse:

$$m_W = 80.385 \pm 0.015 \text{ GeV} \quad m_Z = 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV} \quad (11.1)$$

Werden  $W^\pm$  ausgetauscht, so spricht man von *geladenen Strömen*, bei  $Z^0$  von *neutralen Strömen*. Ein Beispiel für das Auftreten von  $W$ -Bosonen als Austauschteilchen ist der Myonenerfall  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ .

## 11.1 Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung in Grenzfall niedriger Energien

Fermi ging davon aus, dass der Myonenerfall im Grenzfall niedriger Energien zu einer Punktwechselwirkung wird:

$$\begin{aligned} \mu^- &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \\ \mu^- \nu_e &\rightarrow e^- \nu_\mu \end{aligned} \quad (11.2)$$

Die Kopplungskonstante ist in diesem Modell der Parameter  $G_F$ .

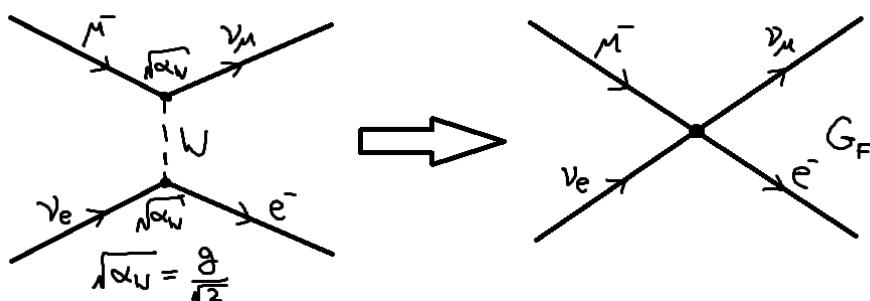


Abbildung 11.1: Fermi vermutete, dass bei niedrigen Energien der Myonenerfall zu einer Punktwechselwirkung übergeht mit Kopplungskonstante  $G_F$ .  $g$  bezeichnet die Kopplungskonstante im Glashow-Salam-Weinberg-Modell (GSW).

In der QED (Photonenaustausch) ist der Beitrag (Matrixelement) im Wirkungsquerschnitt

$$\mathfrak{m} \sim \left( \frac{1}{q^2} \right) \quad (11.3)$$

, wobei  $q^2$  die Energie des Prozesses ist. Analog ist im GSW-Modell

$$\mathfrak{m} \sim \left( \frac{1}{m_W^2 - q^2} \right) \quad (11.4)$$

, was im Grenzfall niedriger Energien  $q^2 \ll m_W$  zu

$$\mathfrak{m} \sim \left( \frac{1}{m_W^2} \right) \quad (11.5)$$

wird. Somit erhalten wir eine Relation zwischen  $G_F$  und der Kopplungsstärke  $\sqrt{\alpha_W} = g/\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \quad (11.6)$$

Die Voraussagen der Fermi-Theorie umfassen:

- Paritätsverletzung (per Konstruktion), (V-A)-Theorie → nur linkshändige Neutrinos / rechtshändige Anti-Neutrinos
- Es existieren nur geladenen Ströme (keine neutralen schwachen Ströme).
- Vorhersagen für Lebensdauer, Zerfallsraten bei kleinen Energien ( $q^2 \ll m_W^2$ ), z.B. Myon-Lebensdauer:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G_F^2 \cdot m_\mu^5}{192 \cdot \pi^3} \quad (11.7)$$

Heute wird die Myonen-Lebensdauer  $\tau_\mu$  verwendet, um  $G_F$  festzulegen:

$$G_F(\mu\text{-Zerfall}) = (1.16632 \pm 0.00002) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (11.8)$$

- Pion-Zerfall:  $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$  bzw.  $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ :

$$\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu) = \frac{G_F^2}{8\pi} \cdot f_\pi^2 \cdot m_\pi \cdot m_\mu^2 \left( 1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right)^2 \quad (11.9)$$

Dabei bezeichnet  $f_\pi$  eine Zerfallskonstante, welche die Wahrscheinlichkeit dafür berücksichtigt, dass sich die  $\bar{u}$ - und  $d$ -Wellenfunktionen überlappen. Der Zerfall  $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$  ist stark unterdrückt:

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left( \frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left( \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right) = 1.28 \cdot 10^{-4} \quad (11.10)$$

Entgegen der naiven Erwartung zerfällt ein Pion etwa 10 000 mal häufiger in ein schweres Myon als in ein leichtes Elektron, was experimentell sehr gut bestätigt

ist. Der Grund hierfür liegt in der Helizität: Durch das Neutrino wird das Myon dazu gezwungen, Spin in Flugrichtung zu haben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein geladenes Fermion positive Helizität besitzt ist

$$\left(1 - \frac{v_f}{c}\right) = (1 - \beta) = 1 - \frac{p}{E} \quad (11.11)$$

Die Fermi-Theorie ist eine sog. *effektive Theorie*, die nur gültig ist für  $q^2 \ll m_W^2$ . Beispielsweise liefert die Fermi-Theorie

$$\sigma(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-) = \frac{G_F^2 s}{\pi} \quad (11.12)$$

, d.h. der Wirkungsquerschnitt würde für  $s \rightarrow \infty$  ( $s \doteq$  Schwerpunktsenergie<sup>2</sup>) divergieren, was zu einer Verletzung der *Unitarität* (Wahrscheinlichkeit für Streuung  $> 1$ ) führt.

- Die Divergenz kann durch die Einführung von schweren  $W$ -Bosons behoben werden. GSW liefert (mit  $W$ -Teilchen):

$$\sigma(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-) = \frac{G_F^2 \cdot m_W^2}{\pi} \quad (11.13)$$

Wenn nur  $W$ -Teilchen vorliegen, dann divergiert nun jedoch der Prozess  $e^+ e^- \rightarrow W^+ W^-$ . Die Lösung dieses Problems besteht in der Einführung eines neutralen Austauschteilchens  $Z^0$ .

## 11.2 Elektroschwache Vereinheitlichung

**1961** schlug Glashow vor, die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zu vereinheitlichen. Während die elektromagnetische Wechselwirkung die Parität erhält, ist die Parität jedoch durch die schwache Wechselwirkung verletzt (Kopplung an linkshändige Fermionen, die elektromagnetische Wechselwirkung ist links/rechts-symmetrisch). Um Divergenzen aufzulösen werden  $W^\pm$  und  $Z^0$ -Teilchen eingeführt. Die nicht verschwindenden Massen  $m_W, m_Z \neq 0$  sind jedoch nicht erklärbar.

**1964** Higgs: *Brout-Englert-Higgs-Mechanismus*

**1967** Weinberg und Salam führen den Higgs-Mechanismus im Glashow-Modell ein  
 $\rightarrow m_W, m_Z \neq 0$  (Testbare Reaktionen für  $W/Z$ -Mesonen)

**1973** G. t’Hooft und M. Veltmann zeigen, dass die Theorie renormierbar ist, d.h. sie besitzt Vorhersagekraft und keine Divergenzen-  
 $\Rightarrow$  Elektroschwacher Teil des Standardmodells.

### Glashow-Salam-Weinberg-Modell

- Es postuliert ein Triplet von Austauschteilchen, die an *linkshändige* Fermionen koppeln:  $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$ .

- Die Kopplung erfolgt an den sog. *schwachen Isospin*  $T$  ( $\hat{=}$  schwache Ladung), die Kopplungsstärke ist  $g$ , die Symmetriegruppe  $SU(2)$ . Linkshändige Fermionen sind in Dubletts angeordnet:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \quad T = 1/2 \quad T_3 = \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad T = 1/2 \quad T_3 = \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

Rechtshändige Fermionen hingegen sind in Singulett angeordnet:

$$(e^-)_R \ (\mu^-)_R \ (\tau^-)_R \ (u)_R \ (d)_R \dots \quad T = 0 \quad (11.16)$$

- Postulat eines weiteren Austauschteilchens  $B_\mu$ , das an die sog. *Hyperladung*  $Y$  koppelt:

$$Y := 2 \cdot Q - 2 \cdot T_3 \quad (11.17)$$

, wobei  $Q$  die elektrische Ladung bezeichnet. Die Kopplungsstärke ist  $g'$ , die Symmetriegruppe ist  $U(1)_Y$  (entspricht QED). Während  $B_\mu$  an  $Y$  koppelt, koppelt  $\gamma$  an  $Q$  und  $W_\mu^i$  an  $T_3$ . Somit lässt sich das  $\gamma$ -Feld als Kombination von  $B_\mu$  und neutralen Anteilen der  $W_\mu^i$  schreiben.

Tabelle 11.1: Elektroschwache Ladungen der Leptonen und Quarks der ersten Generation

Leptonen	$T$	$T_3$	$Q$	$Y$	Quarks	$T$	$T_3$	$Q$	$Y$
$\nu_e$	1/2	1/2	0	-1	$u_L$	1/2	+1/2	2/3	1/3
$e_L^-$	1/2	-1/2	-1	-1	$d_L$	1/2	-1/2	-1/3	1/3
$e_R^-$	0	0	-1	-2	$u_R$	0	0	2/3	4/3
					$d_R$	0	0	-1/3	-2/3

- Die Mischung der eingeführten Felder ( $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu$ ) ergibt die physikalischen Felder ( $W^\pm, Z^0, \gamma$ )

$$\begin{aligned} W^\pm : \quad W_\mu^\pm &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ W_\mu^1 \mp W_\mu^2 \right\} \\ \gamma : \quad A_\mu &:= B_\mu \cdot \cos \theta_w + W_\mu^3 \sin \theta_w \\ Z^0 : \quad Z_\mu &:= -B_\mu \cdot \sin \theta_w + W_\mu^3 \cdot \cos \theta_w \end{aligned} \quad (11.18)$$

$\theta_W$  ist der *schwache Mischungswinkel* (*weak mixing angle*) und muss experimentell bestimmt werden.

Die Zuweisung erfordert wichtige Relationen zwischen den Kopplungen:

$$\boxed{\begin{aligned} e &= g \cdot \sin \theta_w \\ e &= g' \cdot \cos \theta_w \end{aligned}} \quad (11.19)$$

- Die  $W$ - und  $Z$ -Massen können nun vorhergesagt werden durch den Vergleich der Kopplungsstärke  $G_F$  der Fermi-Theorie mit der GSW-Theorie:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \Rightarrow m_W^2 = \frac{\sqrt{2} \cdot g^2}{8 \cdot G_F} = \frac{\sqrt{2} \cdot e^2}{8 \cdot G_F \cdot \sin^2 \theta_w} = \frac{\alpha \pi}{\sqrt{2} G_F \sin^2(\theta_W)} \quad (11.20)$$

Aus Experimenten ist  $\sin^2 \theta_w = 0.233$  bekannt, somit sagt die Theorie voraus, dass

$$m_W \approx 77.4 \text{ GeV} \text{ (Born-Niveau)} \quad (11.21)$$

Die Berücksichtigung weiterer Korrekturen liefert ein besseres Ergebnis.

- Der Higgs-Mechanismus sagt vorher, dass

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W} = 88.3 \text{ GeV} \text{ (Born-Niveau)} \quad (11.22)$$

Quantenkorrekturen liefern Beiträge zur Masse, beispielsweise, indem sich ein  $W$  kurzzeitig in  $t\bar{b}$  zerlegt. Diese Korrekturen sind abhängig von der Masse der kurzzeitig erzeugten Teilchen, also u.a. von der des  $t$ -Quarks.

### 11.3 Vorhersagen der GSW-Theorie

- Kopplungen der Fermionen an die Vektorbosonen (Austauschteilchen) → Zerfälle der  $W/Z$ -Bosonen

$$\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = \frac{G_F \cdot m_W^3}{6\pi\sqrt{2}} = 227 \text{ MeV} \left( \frac{m_W}{80.2 \text{ GeV}} \right)^3 \quad (11.23)$$

$$\Gamma_{W \rightarrow \mu\nu} = \Gamma_{W \rightarrow e\nu} = \Gamma_{W \rightarrow \tau\nu} \text{ (Lepton-Universalität)}$$

$$\Gamma_{W \rightarrow q_i \bar{q}_j} = \Gamma_{W \rightarrow e\nu} \cdot \frac{3}{\text{Farbladung}} \cdot \frac{|V_{ij}|^2}{\text{CKM-Faktor}} \cdot \frac{K_{\text{QCD}}}{\text{Korrektur-faktor für QCD-Korrekturen}} \quad (11.24)$$

Die Gesamtzerfallsbreite ist somit

$$\Gamma_W = 3 \cdot \Gamma_{W \rightarrow e\nu} + 2 \left( 3 \cdot \Gamma_{W \rightarrow e\nu} \cdot K_{\text{QCD}} \right) = 2.097 \text{ GeV} \quad (11.25)$$

Die Breite des  $Z^0$  setzt sich zusammen aus

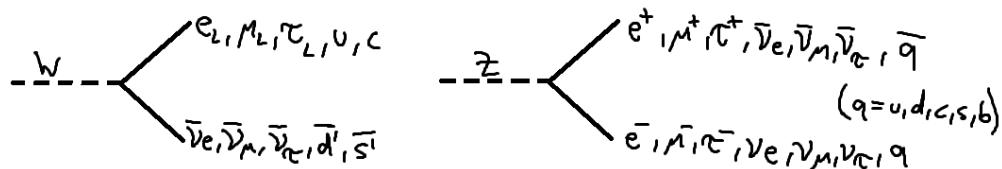


Abbildung 11.2: Mögliche Zerfälle von  $W$ - und  $Z$ -Bosonen

$$\begin{aligned}\Gamma_{Z \rightarrow e^+ e^-} &= \frac{G_F m_Z^3}{24\pi\sqrt{2}} \left\{ 1 + \left( 1 - 4 \cdot \sin^2 \theta_w |Q_f| \right)^2 \right\} \approx 83 \text{ MeV} \\ \Gamma_{Z \rightarrow \nu \bar{\nu}} &= \frac{G_F \cdot m_Z^3}{12\pi\sqrt{2}} \approx 167 \text{ MeV}\end{aligned}\quad (11.26)$$

und Quarkbeiträgen, sodass die Gesamtzerfallsbreite

$$\Gamma_Z = 3 \cdot \Gamma_{\nu \bar{\nu}} + 3 \cdot \Gamma_{e^+ e^-} + 2\Gamma_{u \bar{u}} + 3\Gamma_{d \bar{d}} = 2.437 \text{ GeV} \quad (11.27)$$

Die Verzweigungsverhältnisse für leptonische Zerfälle der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen sind

$$BR(W \rightarrow e\nu) = \frac{\Gamma_{e\nu}}{\Gamma_W} \approx 10.5\% \quad (11.28)$$

$$BR(W \rightarrow q\bar{q}) = 1 - 3\Gamma_{e\nu} \approx 68\%$$

$$BR(Z^0 \rightarrow e^+ e^-) = \frac{\Gamma_{e^+ e^-}}{\Gamma_Z} \approx 3.3\% \quad (11.29)$$

$$BR(Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu}) = 6 \cdot BR(Z \rightarrow e^+ e^-) \approx 20\%$$

## 11.4 Test der elektroschwachen Theorie bei LEP

Beim LEP handelte es sich um einen  $e^+ e^-$ -Beschleunigerring mit Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 91 \text{ GeV}$  ( $Z^0$ -Resonanz) bis  $\sqrt{s} = 208 \text{ GeV}$ .

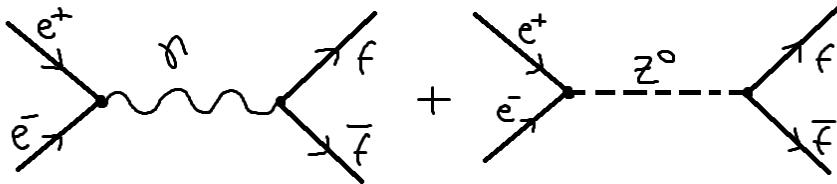


Abbildung 11.3: Feynman-Diagramm der Prozesse am LEP

Nach der QED ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für Myon-Antimyon-Produktion

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \Big|_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \left( 1 + \cos^2 \theta \right) \quad (11.30)$$

Im GSW-Modell wird zusätzliche der  $Z^0$ -Beitrag berücksichtigt, so dass der differentielle Wirkungsquerschnitt gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-} &= \frac{\pi\alpha^2}{2s} \left\{ F_\gamma(\cos\theta) \right. \\ &\quad \left. + F_{\gamma Z}(\cos\theta) \frac{s \cdot (s - m_Z^2)}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2} + F_Z(\cos\theta) \frac{s^2}{(s - M_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2} \right\}\end{aligned}\quad (11.31)$$

Der erste Term beschreibt den  $\gamma$ -Beitrag, der zweite Term die Interferenz zwischen  $\gamma$  und  $Z^0$  und der letzte Term den  $Z^0$ -Beitrag. Für andere Fermionen  $f$  ist

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} \Big|_{e^+ e^- \rightarrow f \bar{f}} = \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \Big|_{e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-} \cdot N_C^f \cdot (1 + \delta_{\text{QCD}}) \quad (11.32)$$

, wobei  $N_C^f$  den Farbfaktor bezeichnet und  $\delta_{\text{QCD}}$  QCD-Korrekturen einbringt.

Für  $s = m_Z^2$  findet man die  $Z^0$ -Resonanz:

- Der  $Z$ -Beitrag wird dominierend
- Die  $\gamma/Z$ -Interferenz verschwindet
- Der  $\gamma$ -Beitrag ist nahezu verschwindend ( $\sim 1\%$ )

### Vermessung der $Z^0$ -Linienform

Der Gesamtwirkungsquerschnitt in  $e^+ e^-$ -Kollisionen ist

$$\sigma_{e^+ e^- \rightarrow f \bar{f}}(s) = \underbrace{\frac{12\pi}{m_Z^2} \frac{\Gamma_e \cdot \Gamma_f}{\Gamma_Z^2}}_{=\sigma^0} \cdot \frac{s \cdot \Gamma_Z^2}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_Z^2} \quad (11.33)$$

, wobei  $\sigma^0$  den *Pol-Wirkungsquerschnitt* bezeichnet, d.h. den Wirkungsquerschnitt bei  $s = m_Z^2$ .

Die Messgrößen in einem solchen Experiment sind

- Position der Resonanz  $\rightarrow m_Z$
- Halbwertsbreite  $\rightarrow \Gamma_Z$
- Wirkungsquerschnitte für alle Fermionen:  $e^+, e^-, \mu^+, \mu^-, \tau^+, \tau^-$ ,  $\sum q\bar{q}, b\bar{b}, c\bar{c}$ .  
 $\sigma^0, m_Z, \beta_Z \rightarrow \Gamma_e, \Gamma_f, \dots$  (d.h. die Kopplungen sind sensitiv auf GSW-Vorhersagen)
- Verhältnisse der Polwirkungsquerschnitte

$$R_l := \frac{\sigma_{\text{had}}^0}{\sigma_l^0} = \frac{\Gamma_{\text{had}}}{\Gamma_l} \quad \text{für } l = e, \mu, \tau$$

$$R_q := \frac{\sigma_{q\bar{q}}}{\sigma_{\text{had}}} = \frac{\Gamma_q}{\Gamma_{\text{had}}} \quad \text{für } q = c, b \quad (\text{schwere, identifizierbare Quarks}) \quad (11.34)$$

Der Vorteil dieser Verhältnisse ist, dass sich systematische Fehler verringern lassen (Luminosität, Unsicherheit in Korrekturen höherer Ordnung heben sich weg).

Aus diesen Werten konnte die Masse des Z-Bosons zu

$$m_Z = 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV} \quad (11.35)$$

und die Zerfallsbreite zu

$$\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV} \quad (11.36)$$

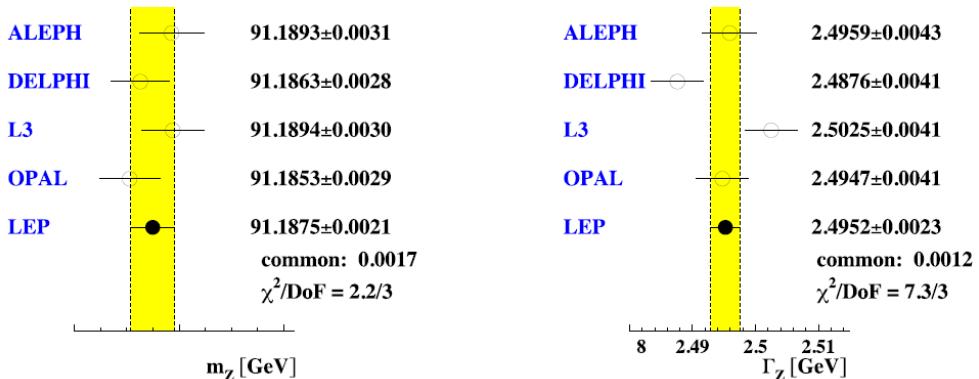


Abbildung 11.4: Gemessene Parameter des Z-Bosons

bestimmt werden.

Zur Bestimmung der Anzahl der Neutrinos misst man die sog. *unsichtbare Breite*

$$\Gamma_{\text{inv}} := \Gamma_Z - \Gamma_{\text{had}} - \Gamma_e - \Gamma_\mu - \Gamma_\tau \quad (11.37)$$

Experimentell findet man

$$\Gamma_{\text{inv}} = 500.1 \pm 1.8 \text{ MeV} \quad (11.38)$$

Interpretiert man diese durch Neutrinozerfälle, so erhält man

$$N_\nu = \frac{\Gamma_{\text{inv}}(\text{exp})}{\Gamma_\nu(\text{theo})} = 2.984 \pm 0.0082 \quad (11.39)$$

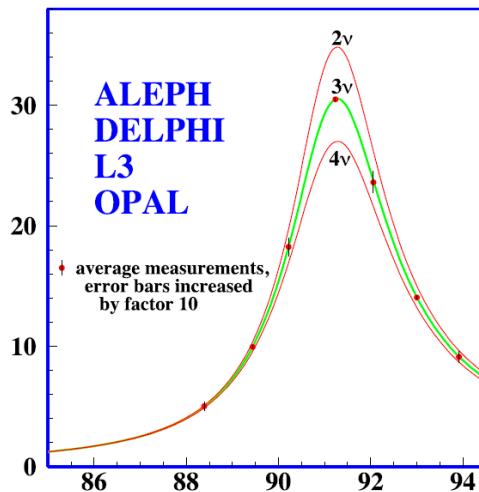


Abbildung 11.5: Messung der Anzahl existierende Neutrinogenerationen

Weitere wichtige Messgrößen zum Test der GSW-Kopplungsstruktur sind Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien. Man definiert hierzu die Wirkungsquerschnitte in Vorwärts-/Rückwärtsrichtung:

$$\sigma_F := \int_0^1 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta, \quad \sigma_B := \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta \quad (11.40)$$

und hiermit

$$A_{FB} := \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} \quad (11.41)$$

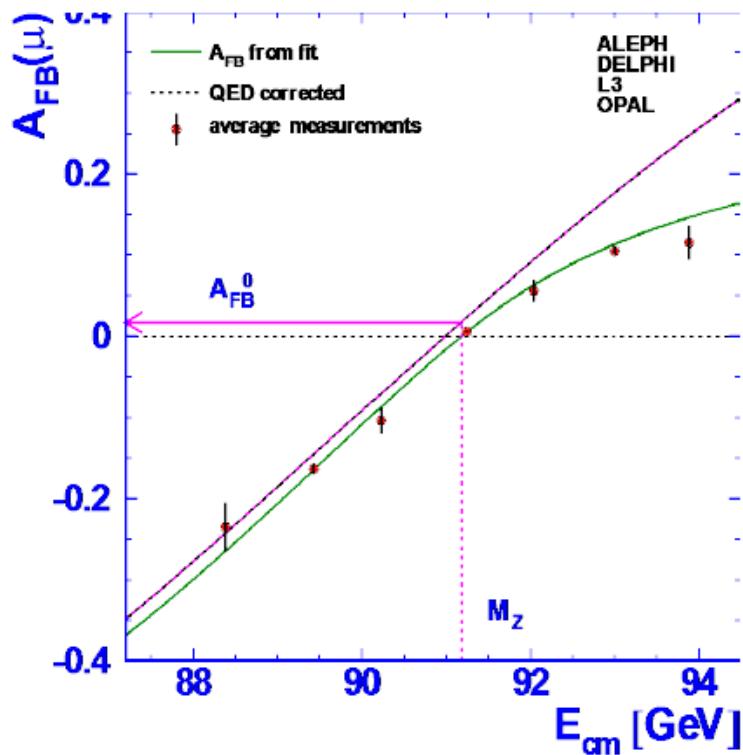


Abbildung 11.6: Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien

### Ergebnisse einer globalen Anpassung

Eine globale Anpassung zeigt gute Übereinstimmung der verschiedenen Experimente, sodass die Ergebnisse der LEP-Experimente kombiniert werden. Alle experimentellen Ergebnisse sind in sehr guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen des Standardmodells, was in der folgenden Abbildung zu sehen ist.



March 2012

Abbildung 11.7: LEP-Messungen im Vergleich zu den Vorhersagen des Standard-Modells.

W-Boson-Paarproduktion bei LEP-II:

W-Bosonen werden bei LEP-II in Paaren produziert:  $e^+e^- \rightarrow W^+W^- \rightarrow f\bar{f} f'\bar{f}'$ .

Wichtige Messgrößen hierbei sind

- die  $W$ -Masse, sowie
- die Selbstkopplung der Vektorbosonen.

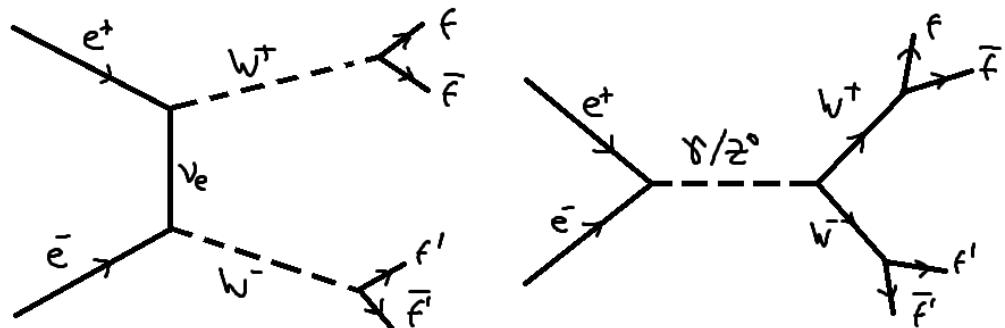


Abbildung 11.8: Prozesse zur  $W^+W^-$ -Produktion am LEP

# Literaturverzeichnis

- [1] Th. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik*, Teuber Verlag
- [2] J. Bleck-Neuhaus, Elementare Teilchen - Moderne Physik von den Atomen bis zum Standardmodell, Springer Verlag
- [3] B. Povh, K.Rith, C.Scholz und F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, Springer Verlag
- [4] K. Bethge, G. Walter und B. Wiedemann, *Kernphysik*, Springer Verlag
- [5] D. Griffith, *Introduction to Elementary Particles*, Verlag Wiley-VCH
- [6] F. Halzen und A.D. Martin, *Quarks & Leptons*, Verlag J. Wiley
- [7] D.H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics - Revised, enlarged and reset*, Adison Wesley Publishing Company
- [8] C. Grupen, *Teilchendetektoren*, BI Wissenschaftsverlag
- [9] W. R. Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer Verlag
- [10] K. Kleinknecht, *Detektoren für Teilchenstrahlung*, Teuber Verlag
- [11] E. Bodenstedt, *Experimente der Kernphysik und ihre Deutung*, BI Wissenschaftsverlag (1978)
- [12] P. A. Tipler und R. A. Llewellyn, *Moderne Physik*, Oldenburg Verlag (2002)
- [13] W. Demtröder, *Experimentalphysik 4, Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, Springer Verlag
- [14] *Reaktorphysik*, Universität Bonn, (1982)