

Комбинаторика — олимпиаднику

Содержание

1	Перебор вариантов	3
1.1	Задачи	5
2	Цепочки и множества	7
2.1	Упорядоченные наборы	7
2.2	Неупорядоченные наборы	7
2.3	Операции над множествами	8
2.4	Задачи	9
3	Правила суммы и произведения	11
3.1	Правило суммы	11
3.2	Правило произведения	11
3.3	Задачи	15
4	Размещения, перестановки и сочетания	18
4.1	Размещения	18
4.2	Перестановки	18
4.3	Сочетания	19
4.4	Перестановки с повторениями	23
4.5	Сочетания с повторениями	24
4.6	Маршруты	26
4.7	Бином Ньютона	26
4.8	Три задачи о функциях	28
4.9	Задачи	29
5	Формула включений и исключений	36
5.1	Переход к дополнению	36
5.2	Формула включений и исключений	37
5.3	Задача о беспорядках	40
5.4	Функция Эйлера	41
5.5	Числа Стирлинга второго рода	42
5.6	Задачи	43
6	Разные комбинаторные приёмы	46
6.1	Подсчёт двумя способами	46
6.2	Рекуррентные соотношения	46
6.3	Задачи	48

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для школьников 8–11 классов, желающих научиться комбинаторике.

В отличие от имеющейся литературы (например, [1]–[7]) данное пособие нацелено в первую очередь на подготовку к текущим олимпиадам; оно, в частности, содержит **почти все**¹ задачи по комбинаторике, предлагавшиеся на олимпиадах «Физтех», «Высшая проба», «Покори Воробьёвы горы!» и «Ломоносов» в 2011–2014 годах (больше всего комбинаторных задач встречается именно на этих олимпиадах, в особенности на их дистанционных этапах).

Олимпиадные задачи публикуются с указанием названия олимпиады, года её проведения и классов, в которых задача предлагалась. В каждой задаче, где требуется получить число, приведён численный ответ без комбинаторной формулы (содержащей в себе подсказку); поэтому, размышляя над задачами, читатель оказывается в условиях, максимально приближенных к олимпиадным (в частности, к условиям отборочных онлайн-туров, где в поле ответа нужно вписать число).

Никаких предварительных знаний по комбинаторике у читателя не предполагается. Материал изложен с нуля и достаточен для решения приведённых олимпиадных задач. Мы, однако, не ограничились необходимым минимумом и включили в пособие некоторые вопросы, выходящие за рамки традиционной олимпиадной тематики. Сюда относятся красивые приложения формулы включений и исключений — задача о беспорядках, функция Эйлера и числа Стирлинга второго рода; эти разделы адресованы заинтересованному школьнику, стремящемуся расширить свой кругозор.

Список литературы

- [1] Н. Я. Виленкин и др. Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2013.
- [2] С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. Ленинградские математические кружки. Киров: «АСА», 1994. Главы «Комбинаторика-1» и «Комбинаторика-2».
- [3] Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002. Глава 2. Комбинаторика.
В свободном доступе: <http://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf>.
- [4] В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2007. Глава 14. Комбинаторика.
В свободном доступе: <ftp://ftp.mccme.ru/users/prasolov/algebra/algebra.pdf>.
- [5] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006. Глава 27, § 2. Комбинаторика.
В свободном доступе: <http://ilib.mccme.ru/pdf/planim5.pdf>.
- [6] В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии. М.: МЦНМО, 2010. Глава 19, § 3. Комбинаторика.
В свободном доступе: <ftp://ftp.mccme.ru/users/prasolov/stereo/stereo.pdf>.
- [7] Сайт problems.ru, раздел «Комбинаторика».

¹Исключены задачи параллельных вариантов, несущественно отличающиеся от данной задачи.

1 Перебор вариантов

Основной вопрос комбинаторики — «сколько?», основная задача — подсчёт числа элементов конечного множества. В комбинаторных задачах нас обычно интересует, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов.

В простейших случаях мы можем выписать все нужные нам комбинации и непосредственно подсчитать их. Однако при бессистемном выписывании легко упустить какую-то комбинацию или, наоборот, посчитать некоторую комбинацию дважды. Поэтому при переборе вариантов желательно придерживаться двух правил.

1. Обозначаем наши комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.
2. Выписываем комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию чисел (при обозначении цифрами).

При таком переборе ни один вариант не ускользнёт от нас и, с другой стороны, будет исключена возможность повторения вариантов.

ЗАДАЧА. Маша собирается съесть яблоко, сливу и мандарин, но пока не решила, в какой последовательности. Сколькими способами Маша может выбрать эту последовательность?

РЕШЕНИЕ. Обозначаем буквами: Я — яблоко, С — слива, М — мандарин. Тогда, например, СМЯ — это вариант, когда Маша сначала съест сливу, потом — мандарин, потом — яблоко. Выпишем варианты в алфавитном порядке:

МСЯ, МЯС, СМЯ, СЯМ, ЯМС, ЯСМ.

Получилось 6 вариантов.

ЗАДАЧА. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых меньше 4?

РЕШЕНИЕ. Здесь обозначать нечего — мы и так имеем дело с числами. Остаётся лишь выписать по возрастанию все четырёхзначные числа, сумма цифр которых равна 1, 2 или 3:

1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1020, 1100, 1101, 1110, 1200, 2000, 2001, 2010, 2100, 3000.

Всего получилось 15 чисел.

ЗАДАЧА. (Леонард Эйлер) Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу?

РЕШЕНИЕ. Занумеруем гостей цифрами 1, 2, 3, 4 и так же занумеруем их шляпы. Считаем, что шляпа с данным номером принадлежит гостю с этим же номером (то есть, например, шляпа 2 принадлежит гостю 2).

Тогда каждый вариант получения шляп обозначается четырёхзначным числом, составленным из цифр 1, 2, 3 и 4, в котором *номер позиции* цифры есть номер гостя, а *сама цифра* есть номер полученной им шляпы (номера позиций будем считать слева направо).

Например, комбинация 4132 означает, что первый гость получил четвертую шляпу, второй — первую, третий — третью, а четвертый — вторую. Такой вариант не годится по условию, поскольку третий получил свою шляпу.

Теперь понятно, что нужно сделать — выписать по возрастанию все четырёхзначные числа, содержащие по одной цифре 1, 2, 3 и 4, такие, что никакая цифра не стоит на позиции со своим номером. Эти числа выписаны ниже под чертой. Красные цифры над чертой — номер позиции (номер гостя), с которым не должна совпадать цифра в соответствующем столбце (номер шляпы).

1	2	3	4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

Как видим, всего имеется 9 вариантов нужной раздачи шляп.

Вариантов может быть довольно много, но в некоторых случаях, тем не менее, самый быстрый способ решения задачи — разумно организованный перебор.

ЗАДАЧА. («Высшая проба», 2013, 8) Сколько одночленов окажется в многочлене

$$(1 + t^3 + t^6 + \dots + t^{30})(1 + t^5 + t^{10} + \dots + t^{30})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

РЕШЕНИЕ. Раскроем скобки и (не приводя подобные члены) выпишем в таблицу все получающиеся степени одночленов. Первая строка таблицы — это степени, получающиеся при умножении первого многочлена-сомножителя на первое слагаемое второго многочлена (равное 1); вторая строка — это степени, получающиеся при умножении первого многочлена на второе слагаемое второго многочлена (равное t^5), и т. д.

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40
15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50
25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60

Всего в таблице 77 чисел, из них 24 входят в таблицу более одного раза (блоки повторяющихся чисел обведены рамкой). Следовательно, после приведения подобных членов получится $77 - 24 = 53$ одночлена.

В некоторых ситуациях не представляется возможным непосредственно выписать все варианты, но тем не менее очевидно, сколько их на самом деле.

ЗАДАЧА. («Физтех», 2013, 8) Сколько пар натуральных чисел удовлетворяет равенству

$$2x + 5y = 90000?$$

РЕШЕНИЕ. Переписав данное равенство в виде $2x = 90000 - 5y$, мы видим, что правая часть делится на 5. Тогда $2x$ делится на 5, а значит, и x делится на 5; то есть $x = 5n$ для некоторого натурального n . Аналогично заключаем, что $y = 2k$ для некоторого натурального k .

Теперь исходное равенство принимает вид: $10n + 10k = 90000$, то есть $n + k = 9000$. Спрашивается: сколько пар (n, k) удовлетворяют полученному равенству?

Понятно, что n может принимать значения от 1 до 8999. Число k однозначно определяется выбором n (поскольку $k = 9000 - n$). Следовательно, имеется 8999 пар чисел (n, k) .

Но число x однозначно определяется по n , а число y однозначно определяется по x (или по k). Значит, искомое количество пар (x, y) также равно 8999.

1.1 Задачи

1. («Высшая проба», 2013, 9–10) На шахматной доске 7×7 посчитайте количество всех квадратов, границы которых проходят по границам клеток.

141

2. («Высшая проба», 2014, 11) Найдите количество натуральных чисел $n \leq 10^{12}$ таких, что $\text{НОК}(16, n) = 16n$.

5 · 10¹¹

3. (Математический праздник, 1997, 7) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

Поровну

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8) Найдите количество натуральных чисел от 1 до 100, имеющих ровно четыре натуральных делителя, не менее чем три из которых не превосходят 10.

8

5. («Высшая проба», 2014, 9) Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбираются три различных натуральных числа a, b, c . Сколько существует способов сделать это так, чтобы число $a^{(b^c)}$ делилось на 4?

01

6. («Высшая проба», 2013, 9) Сколько одночленов окажется в многочлене

$$(1 + t^4 + t^8 + \dots + t^{40})(1 + t^5 + t^{10} + \dots + t^{40})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

69

7. («Высшая проба», 2011, 9) На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером 3×3 клеточки. Требуется закрасить в этом квадрате три клеточки так, чтобы никакие две закрашенные клеточки не имели общей стороны. Сколькими способами это можно сделать? Два способа раскраски считаются одинаковыми, если один можно получить из другого поворотом квадрата.

9

8. («Высшая проба», 2013, 9) В стране четыре города: А, Б, В и Г. Их хотят связать тремя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

91

9. («Высшая проба», 2014, 9, 11) Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу? (Разбиения, отличающиеся только перестановкой групп, считаются одинаковыми.)

101

10. (Турнир Ломоносова, 1991) Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Сколько неправильных шеренг можно построить

а) из четырёх;

б) из пяти

солдат разного роста?

32 (9; 6) 32

11. (ОММО, 2014) Скуперфильд хочет выплатить наложенный на него штраф в 1000 фертингов монетами в 7 и 13 фертингов. Сколькими способами он может это сделать?² Каким наименьшим количеством монет он может обойтись?

11 способов; минимум 28 монет

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 8–9) Сколькими способами можно поставить цифры от 1 до 9 вместо букв так, чтобы все неравенства выполнялись?

$$a > b > c$$

$$\vee \quad \vee \quad \vee$$

$$d > e > f$$

$$\vee \quad \vee \quad \vee$$

$$g > h > i$$

42

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 9) Сколькими способами можно выписать в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы для любых трёх подряд идущих чисел a , b , c величина $ac - b^2$ была кратна 7?

12

²На олимпиаде этого вопроса не было.

2 Цепочки и множества

Исчерпывающий перебор конечного числа вариантов является совершенно законным способом решения задач. Однако в задачах с большим числом вариантов следует искать другие подходы. Ниже мы подробно рассмотрим наиболее распространённые комбинаторные схемы — размещения и сочетания. Однако прежде нам нужно обсудить понятия цепочки и множества (то есть упорядоченных и неупорядоченных наборов), которые лежат в основе этих схем.

2.1 Упорядоченные наборы

В некоторых ситуациях порядок следования объектов важен для нас, а в некоторых — не важен. Пусть, например, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Легко находим решение: $x = 2$, $y = 1$ и пишем ответ в виде пары: $(2, 1)$. По общепринятому соглашению, первым числом нашей пары является значение x , а вторым числом — значение y . Такую пару называют *упорядоченной*, поскольку порядок следования чисел важен; записывая ответ, мы не можем поменять числа местами! Запись $(1, 2)$ означала бы, что $x = 1$ и $y = 2$; эта пара, заметим, не является решением данной системы. Пары $(2, 1)$ и $(1, 2)$ — это две разные упорядоченные пары.

Упорядоченный набор объектов мы называем *цепочкой*³, а сами объекты — *элементами* цепочки. Цепочка, составленная по порядку из элементов a_1, a_2, \dots, a_k , записывается $a_1 a_2 \dots a_k$ или (a_1, a_2, \dots, a_k) ; число k называется *длиной* цепочки. При изменении порядка следования элементов мы, вообще говоря, получим другую цепочку (той же длины). Рассмотрим некоторые примеры цепочек.

- Пусть точка на координатной плоскости имеет абсциссу $x = 0$ и ординату $y = 1$. В таком случае мы записываем координаты точки в виде упорядоченной пары $(0, 1)$. Это — цепочка длины 2, составленная из чисел 0 и 1 в указанном порядке. Порядок следования чисел важен: ведь $(1, 0)$ — это уже другая точка плоскости (то есть другая упорядоченная пара или другая цепочка).
- Аналогично, пусть точка координатного пространства имеет координаты $x = 0$, $y = 1$ и $z = 2$. Мы записываем её координаты в виде $(0, 1, 2)$. Это — цепочка длины 3, составленная из чисел 0, 1 и 2; она называется также *упорядоченной тройкой* чисел 0, 1 и 2. Порядок следования чисел важен: при изменении порядка мы получим другую точку координатного пространства (другую упорядоченную тройку, другую цепочку).
- Слово *автор* является цепочкой длины 5, составленной из букв $a, в, т, о, р$. Порядок следования букв важен: например, слово *отвар*, составленное из тех же букв, — это уже другое слово (другая цепочка).

2.2 Неупорядоченные наборы

Допустим теперь, что требуется решить квадратное уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

³Другое название упорядоченного набора — *кортеж*.

Его корнями служат числа 1 и 2. Мы записываем пару этих корней в виде $\{1, 2\}$. Такую пару называют *неупорядоченной*, поскольку порядок следования чисел в данной записи не играет роли; в самом деле, мы можем записать ответ и в виде $\{2, 1\}$, перечислив те же корни в другом порядке. Пары $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ — это одна и та же неупорядоченная пара.

Всякий неупорядоченный набор объектов есть не что иное, как *множество*; сами объекты являются *элементами* множества. Множество, состоящее из элементов a_1, a_2, \dots, a_k , записывается $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Порядок следования элементов не важен; при изменении порядка мы получим то же множество. Например, как мы видели выше, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Рассмотрим некоторые примеры множеств.

- Множество корней уравнения $x(x-1)(x-2) = 0$ есть $A = \{0, 1, 2\}$. Это — неупорядоченная тройка чисел 0, 1 и 2, которые являются элементами множества A . Множество A можно записать и в любом другом порядке, например: $A = \{2, 0, 1\}$.
- Множество букв русского алфавита состоит из 33 элементов: $\{а, б, в, \dots, ю, я\}$.
- Множество букв слова «математика» есть $M = \{м, а, т, е, и, к\}$. Множество букв слова «физика» есть $F = \{ф, и, з, к, а\}$.

Запись $a \in A$ означает, что объект a является элементом множества A , и читается « a принадлежит множеству A ». Если a не является элементом множества A (a не принадлежит A), то это записывается так: $a \notin A$.

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subset B$), если любой элемент множества A является элементом множества B . Например, $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ясно, что для любого множества A выполнено $A \subset A$.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Иными словами, множество A равно множеству B в том и только в том случае, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Например, $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.

Имеется множество, которое не содержит элементов: это *пустое множество*, которое обозначается \emptyset . Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$ пусто.

Любопытно, что *пустое множество является подмножеством любого множества*. Докажем данное утверждение от противного. Предположим, что это не так, то есть пустое множество не является подмножеством некоторого множества A . Тогда найдётся элемент пустого множества, который не принадлежит множеству A . Но пустое множество не содержит элементов. Противоречие.

2.3 Операции над множествами

Наиболее важные для нас операции над множествами — объединение, пересечение и разность множеств.

Объединение множеств A и B есть множество $A \cup B$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B . Так, для множеств M и F из рассмотренного выше примера имеем: $M \cup F = \{м, а, т, е, и, к, ф, з\}$. Аналогично определяется объединение трёх и большего числа множеств.

Пересечение множеств A и B есть множество $A \cap B$, которое состоит из всех элементов, принадлежащих как множеству A , так и множеству B . Например, для тех же множеств M и F имеем: $M \cap F = \{а, и, к\}$. Множества, у которых нет общих элементов (то есть пересечение которых пусто), называются *непересекающимися*.

Разность множеств A и B есть множество $A \setminus B$, которое состоит из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B . Например, $M \setminus F = \{м, т, е\}$.

ЗАДАЧА. («Высшая проба», 2014, 9) В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных — «НЯ». Каждый ребёнок взял три карточки и

стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 25 детей, слово «НЯНЯ» — 30 детей, а слово «МАНЯ» — 36 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

РЕШЕНИЕ. Возможны четыре вида наборов из трёх карточек:

- МА, МА, МА; пусть a детей имеют такой набор;
- МА, МА, НЯ; пусть b детей имеют такой набор;
- МА, НЯ, НЯ; пусть c детей имеют такой набор;
- НЯ, НЯ, НЯ; пусть d детей имеют такой набор.

Очевидно, что $a + b = 25$, $c + d = 30$, $b + c = 36$. Нас интересует величина $a + d$. Имеем:

$$a + d = (a + b) + (c + d) - (b + c) = 25 + 30 - 36 = 19.$$

Итак, три карточки одинаковы у 19 детей.

2.4 Задачи

1. Докажите, что для любых трёх множеств A , B и C выполнены равенства:

- | | |
|--|--|
| а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; | б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; |
| в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; | г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. |

2. (*Математический праздник, 1990, 6–7*) Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше — философов или математиков?

(иниявялсэшлс хи иинэжолопшэпп я) яофослиф

3. (*«Физтех», 2013, 8*) На маленьком острове $2/3$ всех мужчин женаты и $3/5$ всех женщин замужем. Сколько жителей острова состоят в браке, если всего там проживает 1900 человек?

0071

4. (*«Физтех», 2014, 7–8*) На данный момент в классе 20 учеников, получивших с начала учебного года хотя бы одну двойку, 17 учеников, получивших не менее двух двоек, 8 учеников, получивших не менее трёх двоек, три ученика, получивших не менее четырёх двоек, один ученик, получивший пять двоек. Больше пяти двоек нет ни у кого. Сколько всего двоек в журнале?

64

5. (*«Физтех», 2014, 9–10*) Сколько одинаковых членов находится среди первых 2000 членов арифметических прогрессий 9, 11, 13, ... и 3, 8, 13, ...?

400

6. (*«Высшая проба», 2014, 9*) В детский сад завезли карточки трёх видов для обучения чтению: на некоторых написано «па», на некоторых «сть», и на некоторых «ко». Каждый из 40 детей взял три карточки (не обязательно разные) и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «папа» могут сложить из своих карточек 23 ребёнка, слово «пасть» — 19 детей, слово «кость» — 11 детей, слово «пакость» — 4 ребёнка. При этом каждый ребёнок может сложить хотя бы одно слово из перечисленных. Сколько детей взяли себе три карточки со слогами «па», «па», «сть»?

6

7. (Московская математическая олимпиада, 1985, 10) Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

17828

8. (Всероссийская олимпиада по математике, 1997, 11) Члены Государственной Думы образовали фракции так, что для любых двух фракций A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — тоже фракция (через \overline{C} обозначается множество всех членов Думы, не входящих в C). Докажите, что для любых двух фракций A и B $A \cup B$ — также фракция.

3 Правила суммы и произведения

Правило суммы и правило произведения — основные комбинаторные принципы, которые используются в комбинаторике повсеместно.

3.1 Правило суммы

Правило суммы мы уже фактически использовали в задаче про карточки, разобранный в конце предыдущего раздела. Проиллюстрируем его ещё на двух элементарных задачах.

ЗАДАЧА. На подносе лежат 5 яблок и 3 груши. Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?

РЕШЕНИЕ. Яблоко можно выбрать пятью способами. Грушу можно выбрать тремя способами. Стало быть, один из этих фруктов можно выбрать $5 + 3 = 8$ способами.

ЗАДАЧА. На полке стоят десять томов Пушкина, четыре тома Лермонтова и шесть томов Голя. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

РЕШЕНИЕ. Понятно, что $10 + 4 + 6 = 20$ способами.

Правило суммы. Пусть объект a можно выбрать m способами, а объект b можно выбрать n способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a , либо b » можно сделать $m + n$ способами.

Более общим образом, пусть объект a_1 можно выбрать n_1 способами, объект a_2 можно выбрать n_2 способами, ..., объект a_k можно выбрать n_k способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a_1 , либо a_2 , ..., либо a_k » можно осуществить $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Правило суммы отражает тот очевидный факт, что число элементов в объединении попарно непересекающихся множеств равно сумме числа элементов в каждом из множеств. Так, в первой задаче множество яблок ($Я$) состоит из пяти элементов, а множество груш ($Г$) состоит из трёх элементов; эти множества не пересекаются, так что множество фруктов ($Я \cup Г$) состоит из $5 + 3$ элементов. Аналогично, во второй задаче множество $П \cup Л \cup Г$ (обозначения очевидны) состоит из $10 + 4 + 6$ элементов. Соответственно, имеем вторую (эквивалентную) формулировку правила суммы.

Правило суммы в терминах множеств. Пусть множество A состоит из m элементов, а множество B состоит из n элементов, причём множества A и B не пересекаются. Тогда множество $A \cup B$ состоит из $m + n$ элементов.

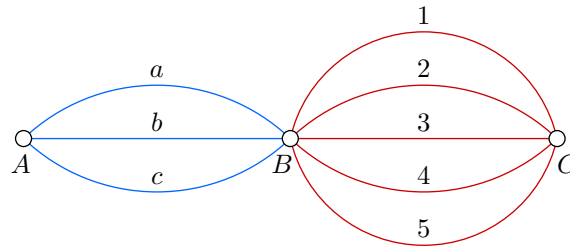
Более общим образом, пусть множество A_1 состоит из n_1 элементов, множество A_2 состоит из n_2 элементов, ..., множество A_k состоит из n_k элементов, и множества A_1, A_2, \dots, A_k попарно не пересекаются. Тогда множество $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ состоит из $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ элементов.

3.2 Правило произведения

При решении комбинаторных задач часто приходится умножать число способов выбора одного объекта на число способов выбора другого объекта. Рассмотрим некоторые примеры.

ЗАДАЧА. Имеются три города: A , B и C . Из A в B ведут три дороги, из B в C — пять дорог. Сколько различных путей ведут из A в C ? Прямого пути между A и C нет.

РЕШЕНИЕ. Обозначим дороги буквами и цифрами. Именно, дороги из A в B назовём a, b, c ; дороги из B в C назовём $1, 2, 3, 4, 5$.



Тогда любой маршрут из A в C получает уникальное имя в виде пары из буквы и цифры. Например, маршрут $b4$ означает, что из A и B мы пошли по дороге b , а из B в C — по дороге 4. Выпишем все такие пары в виде таблицы:

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$
$b1$	$b2$	$b3$	$b4$	$b5$
$c1$	$c2$	$c3$	$c4$	$c5$

Всего получилось $3 \cdot 5 = 15$ маршрутов. Как видим, число маршрутов равно *произведению* числа дорог из A в B на число дорог из B в C .

ЗАДАЧА. В магазине есть 7 видов пиджаков, 5 видов брюк и 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

РЕШЕНИЕ. Предположим, что пиджак уже выбран (это можно сделать 7 способами). К пиджаку выбираем брюки 5 способами. Итого пару (пиджак, брюки) можно выбрать $7 \cdot 5$ способами. К этой паре можно купить галстук 4 способами. Следовательно, для покупки пиджака, брюк и галстука имеется $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ способов.

ЗАДАЧА. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры чётные?

РЕШЕНИЕ. Представим себе пять последовательных позиций для цифр пятизначного числа. На первую позицию можно поставить четыре цифры: 2, 4, 6 или 8. На вторую позицию можно поставить пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. На третью, четвёртую и пятую позиции можно поставить те же пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. Всего имеем $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ вариантов заполнения позиций; именно столько и будет искомым чисел.

Вы уже, несомненно, уловили суть второго правила комбинаторики — правила произведения. Остаётся дать его строгую формулировку.

Правило произведения. Пусть объект a можно выбрать m способами, после чего объект b можно выбрать n способами. Тогда упорядоченную пару (a, b) можно выбрать mn способами; иными словами, существует mn различных упорядоченных пар (a, b) .

Более общим образом, пусть объект a_1 можно выбрать n_1 способами, после чего объект a_2 можно выбрать n_2 способами, ..., после чего объект a_k можно выбрать n_k способами. Тогда цепочку (a_1, a_2, \dots, a_k) можно выбрать $n_1 n_2 \dots n_k$ способами; иными словами, существует $n_1 n_2 \dots n_k$ цепочек (a_1, a_2, \dots, a_k) .

ЗАДАЧА. Сколько подмножеств у 5-элементного множества? У n -элементного?

РЕШЕНИЕ. Пусть имеется множество из 5 элементов $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Каждому его подмножеству B можно дать уникальное имя в виде упорядоченной пятёрки нулей и единиц по следующему правилу: если на i -й позиции пятёрки стоит единица, то $a_i \in B$; если же на i -й позиции пятёрки стоит нуль, то $a_i \notin B$.

Например, пятёрка 10010 обозначает подмножество $\{a_1, a_4\}$. Пятёрки 00000 и 11111 обозначают соответственно пустое множество и само множество A .

Таким образом, у множества A имеется ровно столько подмножеств, сколько существует упорядоченных пятёрок из нулей и единиц. Каждую позицию пятёрки можно заполнить двумя

способами (0 или 1), поэтому таких пятёрок $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$. Это и есть число подмножеств 5-элементного множества.

Для n -элементного множества рассуждение аналогично. Каждое его подмножество получает уникальное имя (по тому же правилу) в виде цепочки длины n , состоящей из нулей и единиц. Всего таких цепочек 2^n . Следовательно, *число всех подмножеств n -элементного множества равно 2^n .*

ЗАДАЧА. (*Размещения с повторениями*) Сколькими способами можно разложить m различных шаров в n различных ящиков? На число шаров в ящике ограничений нет.

РЕШЕНИЕ. Представим себе m клеток (это шары). В каждую клетку можно вписать любое число от 1 до n (номер ящика, в который кладётся шар). Всего получится n^m всевозможных способов заполнить клетки, то есть разложить шары по ящикам.

Число разложений m различных шаров по n различным ящикам (без ограничений на число шаров в ящике) называется иногда *числом размещений с повторениями из n по m* и обозначается \bar{A}_n^m . Таким образом, $\bar{A}_n^m = n^m$. О более содержательном понятии — числе размещений (без повторений) — речь пойдёт в следующем разделе.

ЗАДАЧА. Сколько делителей у числа 720?

РЕШЕНИЕ. Разложим на простые множители: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Следовательно, всякий делитель числа 720 должен иметь вид $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, где $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$, $c \in \{0, 1\}$. Мы видим, что каждому делителю соответствует единственная упорядоченная тройка (a, b, c) и наоборот — каждой упорядоченной тройке (a, b, c) с элементами из данных множеств отвечает единственный делитель числа 720. Можно сказать, что (a, b, c) — это уникальное имя делителя, и потому делителей будет ровно столько же, сколько получится упорядоченных троек (a, b, c) .

Но число a можно выбрать 5 способами, число b можно выбрать 3 способами, число c можно выбрать 2 способами; значит, упорядоченную тройку (a, b, c) можно выбрать $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ способами. Таким образом, у числа 720 имеется 30 делителей.

Решение последней задачи можно обобщить и найти количество делителей произвольного натурального числа, представленного своим разложением на простые множители.

ЗАДАЧА. Пусть p_1, p_2, \dots, p_n — различные простые числа; k_1, k_2, \dots, k_n — целые неотрицательные числа. Сколько делителей у числа $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$?

РЕШЕНИЕ. Каждый делитель числа a имеет вид $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$, где целые числа m_1, m_2, \dots, m_n удовлетворяют условиям $0 \leq m_1 \leq k_1$, $0 \leq m_2 \leq k_2$, \dots , $0 \leq m_n \leq k_n$. Следовательно, цепочка (m_1, m_2, \dots, m_n) есть уникальное имя делителя, и потому делителей будет столько же, сколько получится цепочек (m_1, m_2, \dots, m_n) . Первый элемент этой цепочки можно выбрать $k_1 + 1$ способами, второй элемент $k_2 + 1$ способами, \dots , n -й элемент $k_n + 1$ способами. Значит, всего имеется $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$ делителей числа a .

В комбинаторной задаче могут использоваться также факты, связанные с делимостью.

ЗАДАЧА. («Физтех», 2013, 9–11) Сколько пар натуральных чисел (x, y) удовлетворяют равенству $\text{НОД}(x, y) + \text{НОК}(x, y) = 2011$?

РЕШЕНИЕ. Напомним для начала некоторые простые факты касательно НОД и НОК. Они наверняка пригодятся вам на олимпиадах.

Пусть $\text{НОД}(x, y) = d$. Тогда $x = ad$ и $y = bd$ для некоторых натуральных a и b . При этом числа a и b являются взаимно простыми (то есть не имеют общих делителей, кроме 1). В самом деле, если у a и b есть общий делитель $c > 1$, то число cd будет общим делителем чисел x и y . Но это противоречит тому, что d — наибольший общий делитель этих чисел.

Пусть z есть общее кратное чисел x и y (не обязательно наименьшее). Поскольку z делится на x и на y , имеем: $z = kx = kad$ и $z = my = mbd$ для некоторых натуральных k и m . Отсюда

$kad = mbd$, то есть $ka = mb$; но так как a и b взаимно просты, то m делится на a : $m = na$ для некоторого натурального n . Следовательно, $z = nabd$, откуда видно, что *наименьшее* общее кратное получается при $n = 1$: $\text{НОК}(x, y) = abd$.

Заметим попутно, что $\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y) = d \cdot abd = ad \cdot bd = xy$. Мы доказали тем самым известный факт: *произведение НОД и НОК двух чисел равно произведению этих чисел*.

Теперь переходим к решению задачи. Имеем:

$$2011 = d + abd = d(1 + ab).$$

Отсюда следует, что 2011 делится на $1 + ab > 1$. Однако 2011 — простое число (убедитесь в этом самостоятельно), поэтому единственным его делителем, большим единицы, может быть лишь оно само: $1 + ab = 2011$, откуда $ab = 2010$. Тогда $d = 1$, то есть $x = a$ и $y = b$.

Задача свелась к следующему вопросу: сколько пар натуральных чисел (a, b) удовлетворяют равенству $ab = 2010$? Из этого равенства b однозначно определяется по a ; поэтому фактически нам надо выяснить, сколько делителей a имеется у числа 2010.

Для этого раскладываем 2010 на простые множители: $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Дальнейшее рассуждение вам уже знакомо: каждый делитель числа 2010 имеет вид $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 67^s$, где числа p, q, r, s могут принимать значения 0 или 1. Поэтому количество делителей числа 2010 равно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Это и есть искомое число пар (x, y) .

Часто в задачах работают одновременно оба правила — суммы и произведения.

ЗАДАЧА. Сколько трёхзначных чисел содержат ровно одну цифру 7?

РЕШЕНИЕ. Единственная цифра 7 может стоять либо на первом месте, либо на втором, либо на третьем. Соответственно находим количества чисел в каждом из этих случаев, после чего пользуемся правилом суммы.

Найдём количество n_1 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 будет первой. На второй и третьей позициях может стоять любая из цифр, кроме 7; следовательно, вторую и третью позицию мы можем заполнить $9 \cdot 9 = 81$ способами. Итак, $n_1 = 81$.

Теперь найдём количество n_2 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на втором месте. Первая цифра может быть любой, кроме 0 и 7 (то есть 8 способов выбора). Вторая цифра — любая, кроме 7 (это 9 способов). Следовательно, $n_2 = 8 \cdot 9 = 72$.

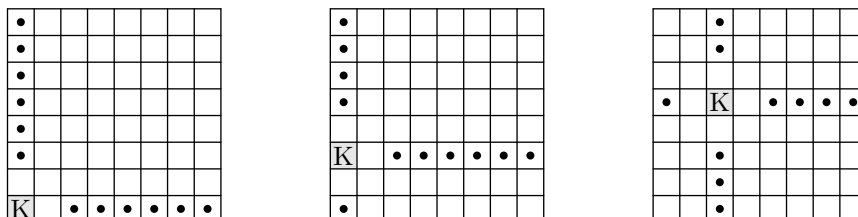
Аналогично находим количество n_3 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на третьем месте: $n_3 = 8 \cdot 9 = 72$.

По правилу суммы искомое количество чисел равно $n_1 + n_2 + n_3 = 81 + 72 + 72 = 225$.

ЗАДАЧА. («Высшая проба», 2014, 8) Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8×8 белую ладью и чёрного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются разными.

РЕШЕНИЕ. Где бы ни стояла на доске ладья, она держит под боем ровно 14 клеток — 7 по горизонтали и 7 по вертикали.

Если король стоит в углу доски (таких клеток 4), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт две клетки. Значит, ладью можно поставить на 12 клеток (рисунок слева).



Если король стоит на краю доски, но не в углу (таких клеток 24), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт три клетки. Значит, ладью можно поставить на 11 клеток (рисунок в центре).

Если же король стоит не на краю доски (таких клеток 36), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт четыре клетки. В этом случае ладью можно поставить на 10 клеток (рисунок справа).

Всего требуемых расстановок короля и ладьи получается

$$4 \cdot 12 + 24 \cdot 11 + 36 \cdot 10 = 672.$$

3.3 Задачи

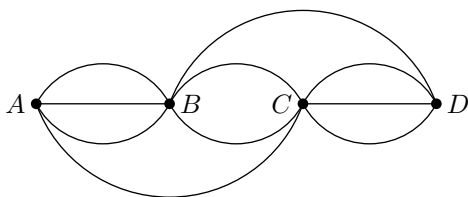
1. (*Математический праздник, 1998, 6*) На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

432

2. (*Математический праздник, 1996, 6*) Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

Порочно

3. (*«Ломоносов», 2012, 7*) Города A , B , C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке.



Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D , побывав в каждом городе ровно по одному разу?

20

4. (*«Высшая проба», 2014, 8*) Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8×8 белого слона и чёрного короля так, чтобы слон бил короля, но король не бил слона?

364

5. (*«Высшая проба», 2014, 9*) Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбираются три натуральных числа a , b , c (не обязательно различных). Сколько существует способов сделать это так, чтобы число $a^{(b^c)}$ делилось на 4?

28

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 11*) Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

081

7. («Ломоносов», 2013, 7) Сколькими различными способами шахматный король может пройти с поля $e1$ на поле $h5$, если ему разрешается ходить только на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо вверх?

671

8. («Физтех», 2014, 7–8) Сколько различных натуральных делителей у числа 15552?

42

9. («Высшая проба», 2013, 8, 10) Сколько различных делителей у числа 999^{999} ?

0008962

10. («Физтех», 2014, 9–11) Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей может иметь куб этого числа?

100

11. («Ломоносов», 2013, 7) а) Сколько натуральных делителей имеет число $N = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{99}$?

б) Найдите количество натуральных делителей числа N , не являющихся точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел).

0092 (9) 00001 (8)

12. («Физтех», 2012, 9–11) Какое количество натуральных чисел a обладает следующим свойством: «Наименьшее общее кратное чисел 16, 50 и a равняется 1200»?

15

13. («Физтех», 2012, 9–10) Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?

73

14. («Физтех», 2013, 8–11) Имеется желоб, по которому в обе стороны могут кататься одинаковые шарики с фиксированной скоростью. Если два шарика соударяются, каждый из них меняет направление своего движения на противоположное. С одного конца желоба двигаются пять шариков на равных расстояниях друг от друга, с другого конца — семь шариков (тоже на равных расстояниях друг от друга). Сколько всего будет соударений?

93

15. («Физтех», 2011, 9–11) Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких, что точка $(14; 22)$ содержится внутри (но не на границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты — натуральными и меньше, чем 31.

92503

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9) Числа $1, 2, \dots, 9$ расставлены в квадрате 3×3 . Будем называть *фэншуйными* такие расстановки, у которых при выборе любых трёх клеток, расположенных в разных столбцах и разных строках, сумма чисел, стоящих в выбранных клетках, будет равна 15. Пример фэншуйной расстановки приведён на рисунке.

4	1	7
6	3	9
5	2	8

$$1 + 6 + 8 = 15$$

Найдите число всех фэншуйных расстановок.

72

17. («Физтех», 2012, 11) Найдите количество пар целых чисел (a, b) таких, что $1 \leq a \leq 700$, $1 \leq b \leq 700$, сумма $a + b$ делится на 7, а произведение ab делится на 5. (При $a \neq b$ пары (a, b) и (b, a) считаются различными.)

25200

18. («Физтех», 2012, 11) На клетчатой доске размера 31×19 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 5 и 7 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

2592

19. («Физтех», 2014, 11) Найдите, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^7 y^2 = 12^{55} \cdot 15^{30}.$$

144

20. («Высшая проба», 2014, 9) Клетки шахматной доски раскрашиваются в три цвета — белый, серый и чёрный — таким образом, чтобы соседние клетки, имеющие общую сторону, отличались цветом, однако резкая смена цвета (то есть соседство белой и чёрной клеток) запрещена. Найдите число таких раскрасок шахматной доски (раскраски, совпадающие при повороте доски на 90 и 180 градусов, считаются разными).

28

4 Размещения, перестановки и сочетания

Некоторые комбинации объектов встречаются наиболее часто и имеют определённые названия: *размещения*, *перестановки* и *сочетания*. В этом разделе мы научимся подсчитывать количества таких комбинаций.

4.1 Размещения

Выше нам уже встретились *размещения с повторениями*. Однако повторения возможны не всегда. В некоторых ситуациях бывает, что выбор, сделанный на данном этапе, ограничивает число вариантов выбора на следующем этапе.

ЗАДАЧА. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать: а) капитана и его ассистента; б) капитана, первого ассистента и второго ассистента?

РЕШЕНИЕ. а) Капитаном можно выбрать любого из 11 футболистов. Ассистентом — любого из 10 оставшихся. Поэтому капитана и ассистента можно выбрать $11 \cdot 10 = 110$ способами.

б) Капитана и первого ассистента мы уже выбрали $11 \cdot 10$ способами. Для выбора второго ассистента остаётся 9 способов. Поэтому капитана, первого ассистента и второго ассистента можно выбрать $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ способами.

В этой задаче мы фактически нашли число упорядоченных пар и упорядоченных троек, которые можно выбрать из 11-элементного множества. Теперь рассмотрим данный вопрос в общем виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется *размещением из n элементов по k элементов* (или просто размещением из n по k).

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (читается «а из эн по ка»). Это число упорядоченных наборов из k элементов (или число цепочек длины k), выбранных из n -элементного множества. Найдём, чему равно это число.

Рассуждаем так же, как и в задаче про футболистов. Для выбора первого элемента цепочки имеется n способов, для выбора второго элемента имеется $n - 1$ способов, для выбора третьего элемента имеется $n - 2$ способов и т. д. Для выбора последнего, k -го элемента цепочки имеется $n - k + 1$ способов. Следовательно,

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1). \quad (1)$$

Данную формулу можно записать в более компактном виде, если правую часть умножить и разделить на $(n-k)!$:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!},$$

то есть

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2)$$

(напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, и по определению $0! = 1$).

4.2 Перестановки

Перестановка есть простой частный случай размещения, однако настолько важный, что заслуживает отдельного рассмотрения.

ЗАДАЧА. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

РЕШЕНИЕ. Для выбора первой цифры имеется пять способов, для выбора второй — четыре, для выбора третьей — три, для выбора четвертой — два, и для выбора последней цифры остаётся один способ. Всего чисел получается $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

ЗАДАЧА. Имеется n разноцветных шаров. Сколькими способами их можно выложить в ряд?

РЕШЕНИЕ. Первый шар можно выбрать n способами, второй шар можно выбрать $n - 1$ способами и т. д. Для выбора последнего, n -го шара остаётся один способ. Всего получается

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

способов выложить наши n шаров в ряд.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольная цепочка длины n , составленная из всех элементов данного множества, называется *перестановкой* этого множества (или перестановкой n элементов).

Иными словами, перестановка n элементов — это размещение из n по n . Число перестановок n -элементного множества обозначается P_n ; мы нашли это число в последней задаче (про разноцветные шары):

$$P_n = n!$$

Данная формула легко получается также из формул (1) и (2) при $k = n$.

4.3 Сочетания

Переходим к рассмотрению *сочетаний*. Вернёмся к нашей футбольной команде, в которой мы выбрали капитана и ассистента.

ЗАДАЧА. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать из них двух игроков для прохождения допинг-контроля?

РЕШЕНИЕ. На первый взгляд кажется, что ситуация аналогична выбору капитана и ассистента: первого человека выбираем 11 способами, второго — 10 способами, так что всего имеется $11 \cdot 10$ способов. Однако в данном случае это не так.

В самом деле, пара «капитан и ассистент» является *упорядоченной*: выбрать Петю капитаном, а Васю ассистентом — это не то же самое, что выбрать Васю капитаном, а Петю ассистентом. С другой стороны, пара человек, отправленных на допинг-тест, является *неупорядоченной*: отправить Петю и Васю на тест — это ровно то же самое, что отправить Васю и Петю на тест. Соответственно, в данной задаче нас интересует именно число неупорядоченных пар футболистов, выбираемых из 11 человек.

Давайте представим себе, что неупорядоченная пара {Петя, Вася} как бы склеивается из двух упорядоченных пар (Петя, Вася) и (Вася, Петя). Иными словами, любые две упорядоченные пары, отличающиеся лишь порядком следования объектов, дают одну и ту же неупорядоченную пару. Следовательно, число неупорядоченных пар будет в два раза меньше числа упорядоченных пар и окажется равным

$$\frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

Таким образом, двух футболистов можно выбрать для допинг-контроля 55 способами.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно выбрать троих футболистов из 11 для прохождения допинг-контроля?

РЕШЕНИЕ. Произведение $11 \cdot 10 \cdot 9$ (число способов выбора капитана, первого ассистента и второго ассистента) есть число *упорядоченных* троек футболистов. В данном же случае, как и в предыдущей задаче, порядок не важен, поэтому нам нужно найти число *неупорядоченных* троек футболистов, выбираемых из 11 человек.

В одну неупорядоченную тройку склеиваются те и только те упорядоченные тройки, которые отличаются лишь порядком следования элементов. Число таких троек равно числу перестановок трёх элементов, то есть $3! = 6$. Например, в одну неупорядоченную тройку

$$\{\text{Петя, Вася, Коля}\}$$

склеиваются ровно шесть упорядоченных троек

$$\begin{aligned} &(\text{Вася, Коля, Петя}), \quad (\text{Вася, Петя, Коля}), \quad (\text{Коля, Вася, Петя}), \\ &(\text{Коля, Петя, Вася}), \quad (\text{Петя, Вася, Коля}), \quad (\text{Петя, Коля, Вася}). \end{aligned}$$

Следовательно, число неупорядоченных троек в $3!$ раз меньше числа упорядоченных троек. Соответственно, имеется

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 165$$

способов выбрать троих человек для допинг-контроля.

В последних двух задачах о футболистах, выбираемых на допинг-контроль, мы нашли число неупорядоченных пар и неупорядоченных троек, которые можно выбрать из 11-элементного множества. Теперь мы можем рассмотреть данный вопрос в общем виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный неупорядоченный набор, состоящий из k различных элементов данного множества, называется *сочетанием из n элементов по k элементов* (или просто сочетанием из n по k).

Иными словами, сочетание из n элементов по k элементов — это просто k -элементное подмножество n -элементного множества.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (читается «це из эн по ка»). Это число неупорядоченных наборов из k элементов, выбранных из n -элементного множества (то есть число k -элементных подмножеств n -элементного множества). Найдём, чему равно это число.

Число упорядоченных наборов из k элементов (то есть число цепочек длины k) есть число размещений A_n^k . Те и только те цепочки, которые отличаются лишь порядком следования элементов, склеиваются в один неупорядоченный набор. Число таких цепочек равно числу перестановок k элементов, то есть $k!$. Следовательно, искомое число неупорядоченных наборов из k элементов будет в $k!$ раз меньше числа цепочек длины k :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Согласно формулам (1) или (2) имеем:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3)$$

Теперь, зная, что такое число сочетаний, мы можем сразу сказать, что двух футболистов из одиннадцати для допинг-теста можно выбрать $C_{11}^2 = (11 \cdot 10)/2!$ способами; аналогично, трёх футболистов из одиннадцати можно выбрать $C_{11}^3 = (11 \cdot 10 \cdot 9)/3!$ способами.

ЗАДАЧА. Монету подбрасывают восемь раз. При этом получается некоторая последовательность «орлов» и «решек» длины 8. Сколько всего существует таких последовательностей?

РЕШЕНИЕ. Пусть О означает «выпал орёл», а Р — «выпала решка». Тогда в результате восьми подбрасываний мы получим восьмибуквенное слово, состоящее из букв О и Р. Например, слово РОРРООРР означает, что орёл выпал при втором, пятом и шестом подбрасываниях, а в остальных случаях выпала решка.

Теперь ясно, что вопрос ставится так: сколько восьмибуквенных слов можно составить из трёх букв О и пяти букв Р? Заметим, что слово однозначно определяется выбором позиций для трёх букв О (остальные позиции автоматически заполняются буквами Р). Поэтому число наших слов есть число способов выбрать три позиции из восьми, то есть $C_8^3 = (8 \cdot 7 \cdot 6)/3! = 56$. Это и есть ответ.

Заметим также, что позиции можно было бы выбирать не для букв О, а для букв Р. А именно, слово однозначно определяется выбором позиций для пяти букв Р, что можно сделать $C_8^5 = 56$ способами. Как видите, $C_8^3 = C_8^5$, и это частный случай общего свойства числа сочетаний (см. следующую задачу).

ЗАДАЧА. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

РЕШЕНИЕ. Каждому k -элементному подмножеству A n -элементного множества M однозначно соответствует его дополнение, то есть $(n - k)$ -элементное множество, состоящее из все тех элементов, которые не входят в A . Поэтому число k -элементных подмножеств множества M равно числу его $(n - k)$ -элементных подмножеств; но первое число есть C_n^k , а второе равно C_n^{n-k} .

(Попросту говоря, выбрать k элементов — это всё равно, что выбрать $n - k$ дополнительных элементов; поэтому число способов выбора первых равно числу способов выбора вторых.)

Данное равенство можно доказать и алгебраически с помощью формулы (3):

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

ЗАДАЧА. Докажите, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

РЕШЕНИЕ. Алгебраическое доказательство с помощью формулы (3) оставляется читателю в качестве самостоятельного упражнения. Приведём комбинаторное доказательство данного равенства.

Рассмотрим множество A , состоящее из $n + 1$ элементов. Тогда C_{n+1}^k — это число k -элементных подмножеств множества A .

Выделим в множестве A некоторый элемент и назовём его x . Всякое подмножество множества A либо содержит элемент x , либо не содержит его.

Сколько k -элементных подмножеств множества A не содержит x ? Чтобы сформировать такое подмножество, нам нужно из оставшихся n элементов множества A выбрать k элементов. Это можно сделать C_n^k способами. Значит, имеется C_n^k подмножеств множества A , состоящих из k элементов и не содержащих x .

Теперь найдём число k -элементных подмножеств множества A , содержащих элемент x . Чтобы сформировать такое подмножество, надо из оставшихся n элементов множества A выбрать $k - 1$ элементов (ведь x уже включён в подмножество). Это можно сделать C_n^{k-1} способами. Значит, число подмножеств множества A , состоящих из k элементов и содержащих элемент x , равно C_n^{k-1} .

Для завершения доказательства остаётся воспользоваться правилом суммы.

Доказанное равенство объясняет, почему числа C_n^k можно расположить по строкам *треугольника Паскаля*. Этот треугольник изображён ниже на рисунке. По боковым сторонам треугольника стоят единицы, числа внутри треугольника расположены в шахматном порядке, и каждое внутреннее число равно сумме двух чисел, стоящих непосредственно над ним.

						1											
							1		1								
							1		2		1						
							1		3		3		1				
							1		4		6		4		1		
							1		5		10		10		5		1

Строки треугольника нумеруются сверху начиная с нуля. Числа в строках нумеруются слева также с нуля. Число C_n^k стоит в n -й строке k -м по счёту (например, $6 = C_4^2$).

В следующих задачах нужно не просто находить числа сочетаний, но и одновременно использовать правила произведения и суммы.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно из семи человек выбрать комиссию из трёх человек во главе с председателем?

РЕШЕНИЕ. Председателя можно выбрать семью способами. Остальных двоих мы выбираем из шести человек $C_6^2 = 15$ способами. Поэтому число способов выбора комиссии равно $7 \cdot 15 = 105$.

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если имеется 6 маляров и 8 штукатуров?

РЕШЕНИЕ. Маляров можно выбрать C_6^3 способами. Штукатуров можно выбрать C_8^4 способами. Значит, для формирования бригады имеется $C_6^3 C_8^4 = 20 \cdot 70 = 1400$ способов.

ЗАДАЧА. («Высшая проба», 2014, 7–8) Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?

РЕШЕНИЕ. Описанные в условии числа будем называть *хорошими*. Трёхзначных хороших чисел, очевидно, девять: 111, 222, ..., 999.

Ищем количество четырёхзначных хороших чисел. Ровно двух нулей в записи хорошего числа быть не может. Остаются следующие варианты: три нуля, один нуль, нет нулей.

Хороших четырёхзначных чисел с тремя нулями девять: 1000, 2000, ..., 9000.

Предположим, что среди цифр хорошего четырёхзначного числа ровно один нуль. Остальные три (совпадающие) цифры можно выбрать 9 способами. При этом нуль может стоять на втором, третьем или четвёртом месте. Всего получается $9 \cdot 3 = 27$ хороших четырёхзначных чисел с одним нулём.

Предположим, что среди цифр хорошего четырёхзначного числа нуля нет. Тройку совпадающих цифр можно выбрать 9 способами; три позиции для этой тройки можно выбрать $C_4^3 = 4$ способами; четвёртую цифру можно выбрать 8 способами. Всего хороших четырёхзначных чисел без нуля получается $9 \cdot 4 \cdot 8 = 288$.

Искомое количество хороших чисел равно $9 + 9 + 27 + 288 = 333$.

ЗАДАЧА. («Физтех», 2011, 9–11) На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках?

РЕШЕНИЕ. Будем для краткости называть 10 точек на первой прямой *красными*, а 12 точек на второй прямой — *синими*.

У треугольника может быть: 1) одна красная вершина и две синих; 2) одна синяя вершина и две красных. В первом случае мы выбираем красную вершину 10 способами, а синюю — $C_{12}^2 = 12 \cdot 11/2 = 66$ способами. Во втором случае мы выбираем синюю вершину 12 способами, а красную — $C_{10}^2 = 45$ способами. Всего треугольников получается $10 \cdot 66 + 12 \cdot 45 = 1200$.

У четырёхугольника лишь одна возможность: две красные вершины и две синие. Число четырёхугольников получается равным $C_{10}^2 \cdot C_{12}^2 = 45 \cdot 66 = 2970$.

4.4 Перестановки с повторениями

Идея склеивания упорядоченных наборов (отличающихся лишь порядком следования элементов) в один неупорядоченный набор является весьма плодотворной и даёт не только формулу для числа сочетаний, но и гораздо больше.

ЗАДАЧА. Анаграмма — это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв. Например, *бьорд* является анаграммой слова *дробь*. Сколько всего анаграмм у слова *дробь*? У слова *класс*? У слова *колобок*?

РЕШЕНИЕ. У слова *дробь* имеется $5!$ анаграмм — именно столько существует перестановок множества из пяти объектов.

В слове *класс* две буквы одинаковы. Давайте временно считать их различными, приписав им индексы: *клас₁с₂*. У этого нового слова $5!$ анаграмм. А теперь во всех анаграммах нового слова сотрём индексы. Каждые две анаграммы слова *клас₁с₂*, которые отличались лишь перестановкой букв c_1 и c_2 , склеятся в одну анаграмму слова *класс*. Поэтому анаграмм получится $5!/2 = 60$.

Аналогично рассмотрим слово *к₁о₁лo₂бо₃к₂*. У него $7!$ анаграмм. После стирания индексов у букв o_1 , o_2 , o_3 склеятся в одно слово каждые $3!$ анаграмм, отличающиеся лишь перестановкой этих трёх букв. Затем после стирания индексов у букв k_1 и k_2 склеятся в одно слово каждые $2!$ анаграмм, отличающиеся лишь перестановкой этих двух букв. Таким образом, после стирания всех индексов склеятся в одно слово $3! \cdot 2!$ анаграмм, и число анаграмм у слова *колобок* будет равно

$$\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420.$$

У слов *класс* и *колобок* анаграмм получилось меньше, чем $5!$ и $7!$ соответственно, по той причине, что в этих словах присутствуют повторяющиеся буквы. Учитывая повторы и деля на соответствующий коэффициент, мы находим количество так называемых *перестановок с повторениями*.

Идея нахождения числа перестановок с повторениями иногда называется *методом кратного подсчёта*. Суть метода проста: чтобы посчитать нужное количество комбинаций, мы сначала находим количество других комбинаций, превосходящее количество исходных комбинаций в некоторое число раз, а потом делим на это число.

Формула для числа сочетаний немедленно получается с помощью метода кратного подсчёта. В самом деле, число способов выбора k объектов из n объектов равно числу анаграмм n -буквенного слова

$$\underbrace{aa \dots a}_k \underbrace{bb \dots b}_{n-k},$$

состоящего из k букв a и $n - k$ букв b (ведь каждая анаграмма — это определённый выбор k позиций из n для букв a). Из сказанного выше ясно, что у данного слова имеется

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

анаграмм; столько же получается и сочетаний из n по k .

Теперь сформулируем общую задачу о перестановках с повторениями.

ЗАДАЧА. Имеются m различных шаров и n различных ящиков. Сколькими способами можно разложить шары по ящикам так, чтобы m_1 шаров оказались в первом ящике, m_2 шаров — во втором, \dots , m_n шаров — в n -м ящике ($m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$)?

РЕШЕНИЕ. Искомое число способов обозначим $P(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Оно равно количеству анаграмм n -буквенного слова

$$\underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{m_1} \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_{m_2} \dots \underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{m_n}. \quad (4)$$

В самом деле, выбрать m_1 шаров для первого ящика есть то же самое, что выбрать m_1 позиций для букв a_1 ; затем, выбрать m_2 шаров для второго ящика есть то же самое, что выбрать m_2 позиций для букв a_2 , и т. д.

Все буквы слова (4) можно переставить $m!$ способами. Это число надо разделить на $m_1!$ (перестановок букв a_1 , которые ничего не меняют), на $m_2!$ (перестановок букв a_2 , которые ничего не меняют), \dots , на $m_n!$ (перестановок букв a_n , которые ничего не меняют). Итого получается

$$P(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_n!} = \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)!}{m_1! m_2! \dots m_n!}$$

способов.

Нетрудно видеть, что данная формула обобщает формулу для числа сочетаний. В самом деле, мы просто имеем $C_n^m = P(m, n - m)$.

4.5 Сочетания с повторениями

Как мы знаем, число способов разложить m различных шаров в n различных ящиков (без каких-либо дополнительных ограничений) есть число размещений с повторениями: $\bar{A}_n^m = n^m$. А сколько получится способов, если шары *одинаковые*?

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.

РЕШЕНИЕ. Представим себе, что ящики стоят вплотную друг к другу. Три таких ящика — это фактически две перегородки между ними. Обозначим шар нулём, а перегородку — единицей. Тогда любому способу раскладывания пяти шаров по трём ящикам однозначно соответствует последовательность из пяти нулей и двух единиц; и наоборот, каждая такая последовательность однозначно определяет некоторый способ раскладывания. Например, 0010010 означает, что в первом ящике лежат два шара, во втором — два шара, в третьем — один шар; последовательность 0000011 соответствует случаю, когда все пять шаров лежат в первом ящике.

Теперь ясно, что способов разложить пять шаров по трём ящикам существует ровно столько же, сколько имеется последовательностей из пяти нулей и двух единиц. А число таких последовательностей равно C_7^2 .

ЗАДАЧА. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + y + z = 5$?

РЕШЕНИЕ. Если вдуматься, то это — в точности предыдущая задача, только по-другому сформулированная. В самом деле, рассмотрим пять одинаковых шаров и три различных ящика. Тогда числа x , y и z есть просто количества шаров, положенных соответственно в первый, второй и третий ящик, причём любое из этих чисел может равняться нулю. Следовательно, данное уравнение имеет C_7^2 решений.

ЗАДАЧА. В магазине продаётся апельсиновый, виноградный, персиковый и яблочный сок. Нужно купить семь пакетов сока. Сколько различных наборов можно составить?

РЕШЕНИЕ. Четыре вида сока — это четыре различных ящика, в которые нужно положить семь шаров. Снова обозначаем шары нулём, а перегородки — единицей. Тогда, например, последовательность 0000110100 означает, что куплены четыре пакета апельсинового, один пакет персикового и два пакета яблочного сока (виноградный сок не покупали — второй ящик пуст).

Поэтому число способов покупки семи пакетов сока четырёх видов — это число способов разложить семь одинаковых шаров по четырём ящикам, то есть число последовательностей из семи нулей и трёх единиц. Число таких последовательностей равно C_{10}^3 .

В данной задаче мы могли купить *несколько* пакетов сока данного вида (хоть все семь). Поэтому в подобных ситуациях говорят о *сочетаниях с повторениями*. Сформулируем общую задачу о числе сочетаний с повторениями.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно выбрать m пакетов сока, если в продаже имеется n видов сока? Иными словами, сколькими способами можно разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам (в ящике может быть любое количество шаров)?

РЕШЕНИЕ. Рассуждаем, как и выше: имеем m шаров и $n - 1$ перегородок, то есть последовательность из m нулей и $n - 1$ единиц. Всего таких последовательностей будет C_{m+n-1}^m .

Число способов, которыми можно разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам, называется *числом сочетаний с повторениями из n по m* и обозначается \bar{C}_n^m . Таким образом,

$$\bar{C}_n^m = C_{m+n-1}^m.$$

Теперь немного изменим условие исходной задачи о раскладывании шаров по ящикам.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам так, чтобы ни один ящик не пустовал?

РЕШЕНИЕ. Положим вначале по одному шару в каждый ящик — тогда ни один ящик пустым не будет. У нас остались два шара, которые надо разложить по трём ящикам произвольным образом. Число таких раскладываний есть число последовательностей из двух нулей и двух единиц, то есть C_4^2 .

Можно рассуждать и по-другому. Положим в ряд пять шаров. Перегородки могут быть только в промежутках между шарами. Таким образом, нам нужно поместить две перегородки в какие-то два из четырёх промежутков, а выбрать две позиции из четырёх можно C_4^2 способами.

ЗАДАЧА. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x + y + z = 5$?

РЕШЕНИЕ. Это — в точности предыдущая задача, поскольку ни одна из переменных теперь не может равняться нулю. Уравнение имеет $C_4^2 = 6$ решений в натуральных числах. Нетрудно решить задачу и непосредственным перебором (сделайте это).

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам так, чтобы ни один ящик не пустовал ($m \geq n$)?

РЕШЕНИЕ. Рассуждаем, как и выше. Сначала кладем по одному шару в каждый ящик, а остальные $m - n$ шаров раскладываем произвольным образом. Получается $\bar{C}_n^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}$ способов.

Знание сочетаний с повторениями (то есть схемы шаров и перегородок) поможет не «изобретать велосипед» на олимпиаде.

ЗАДАЧА. («Физтех», 2011, 9) 19 депутатов Городского Собрания выбирают Председателя из 5 кандидатов. Каждый голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол заседания, в котором указывается лишь количество голосов за каждого кандидата (без указания, кто за кого проголосовал). Сколько различных протоколов может получиться?

РЕШЕНИЕ. Пусть за первого кандидата проголосовало x_1 депутатов, за второго — x_2 депутатов, ..., за пятого — x_5 депутатов. Тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19, \tag{5}$$

поскольку каждый депутат голосовал лишь за одного кандидата. Теперь ясно, что искомое количество протоколов равно количеству решений уравнения (5) в целых неотрицательных

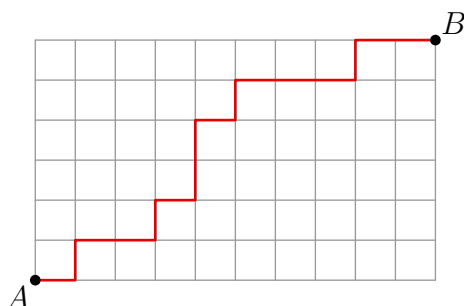
числах. А это количество, в свою очередь, есть число способов разложить 19 одинаковых шаров по пяти различным ящикам, то есть число последовательностей из 19 нулей (шаров) и 4 единиц (перегородок). Таких последовательностей имеется $C_{23}^4 = 8855$.

4.6 Маршруты

Маршрутом мы будем называть ломаную, у которой вершины имеют целочисленные координаты, а звенья направлены либо вправо, либо вверх.

ЗАДАЧА. Сколько маршрутов ведут из точки $A(0, 0)$ в точку $B(10, 6)$? Сколько таких маршрутов проходит через точку $M(6, 4)$?

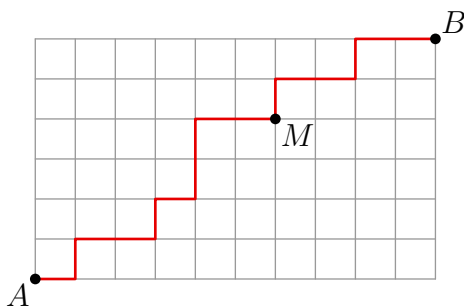
РЕШЕНИЕ. Возможный маршрут из A в B показан на рисунке.



Каждый такой маршрут состоит из 16 звеньев — 10 горизонтальных и 6 вертикальных. Поэтому любой маршрут можно закодировать словом из 16 букв Г и В, в котором будет 10 букв Г и 6 букв В. Так, изображённый выше маршрут обозначается словом ГВГГВГВВГВГГГВГГ.

Следовательно, маршрутов будет столько же, сколько имеется 16-буквенных слов из 10 букв Г и 6 букв В, то есть C_{16}^6 .

Ограничимся теперь маршрутами, проходящими через точку $M(6, 4)$.



Каждый такой маршрут состоит из двух частей: маршрута из A в M и маршрута из M в B . Рассуждая, как и выше, находим, что маршрутов из A в M будет C_{10}^4 , а маршрутов из M в B будет C_6^2 . Всего маршрутов из A в B , проходящих через M , будет $C_{10}^4 C_6^2$.

4.7 Бином Ньютона

Вам известны формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Выведем общую формулу для $(a + b)^n$.

ЗАДАЧА. (*Бином Ньютона*) Доказать, что

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

РЕШЕНИЕ. Начнём со следующей записи, иллюстрирующей основную идею:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb.$$

Точно так же раскроем скобки в произведении

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_n,$$

просто записывая получающиеся одночлены как слова длины n , состоящие из букв a и b (можно упорядочить их по алфавиту, как и выше, но это не обязательно). После приведения подобных членов слагаемое $a^{n-k}b^k$ дадут те и только те слова, которые составлены из k букв b и $n-k$ букв a . Таких слов C_n^k ; это и будет коэффициент при $a^{n-k}b^k$ в получившейся сумме. Поэтому числа C_n^k называются ещё *биномиальными коэффициентами*.

ЗАДАЧА. («Высшая проба», 2014, 10) Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1+x^2)^{100}(1+x^5)^{100}$?

РЕШЕНИЕ. Бином Ньютона для нашего выражения даёт:

$$\begin{aligned} (1 + C_{100}^1 x^2 + C_{100}^2 x^4 + \dots + C_{100}^{99} x^{198} + x^{200}) (1 + C_{100}^1 x^5 + C_{100}^2 x^{10} + \dots + C_{100}^{99} x^{495} + x^{500}) = \\ = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k x^{2k} \sum_{m=0}^{100} C_{100}^m x^{5m} = \sum_{k,m=0}^{100} a_{km} x^{2k+5m}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $a_{km} = C_{100}^k C_{100}^m$ (вид этих коэффициентов на самом деле не важен). Итак, после раскрытия скобок получается сумма одночленов со всевозможными показателями степени вида $2k+5m$, где k и m пробегает целые значения от 0 до 100.

Имеем очевидную оценку: $0 \leq 2k+5m \leq 700$, и если бы каждое промежуточное значение достигалось, то после приведения подобных членов в сумме оказалось бы 701 слагаемое. Выясним, какие промежуточные значения достигаются на самом деле, а какие запрещены.

Мы рассмотрим всевозможные остатки, которые может давать $2k+5m$ при делении на 10. Имеем, соответственно, 10 случаев.

1. Пусть $2k+5m = 10n$. Тогда $k = 5p$, $m = 2q$ (p и q — целые неотрицательные числа), откуда $p+q = n$. Имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leq 5p \leq 100 &\Rightarrow 0 \leq p \leq 20; \\ 0 \leq 2q \leq 100 &\Rightarrow 0 \leq q \leq 50. \end{aligned}$$

Следовательно, величина $2k+5m = 10(p+q)$ может принимать любые целые значения от 0 до $700 = 10(20+50)$. В этом случае запрещённых промежуточных значений нет.

2. Пусть $2k+5m = 10n+1$. Перебор остатков от деления на 5 и на 2 показывает, что возможен лишь вариант $k = 5p+3$, $m = 2q-1$ (и тогда снова $p+q = n$). Имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leq 5p+3 \leq 100 &\Rightarrow 0 \leq p \leq 19; \\ 0 \leq 2q-1 \leq 100 &\Rightarrow 1 \leq q \leq 50. \end{aligned}$$

Поэтому величина $2k+5m = 10(p+q)+1$ может принимать любые целые значения от 11 до 691. Значение 1 оказывается запрещённым (что очевидно — уравнение $2k+5m = 1$ не имеет решений в натуральных числах).

Оставшиеся случаи разбираются по той же схеме и описываются менее подробно.

3. $2k + 5m = 10n + 2 \Rightarrow k = 5p + 1, m = 2q, p + q = n$. Получаем: $0 \leq p \leq 19, 0 \leq q \leq 50$, откуда $2 \leq 10(p + q) + 2 \leq 692$. Запрещённых значений нет.
4. $2k + 5m = 10n + 3 \Rightarrow k = 5p + 4, m = 2q - 1, p + q = n$. Имеем: $0 \leq p \leq 19, 1 \leq q \leq 50$, откуда $13 \leq 10(p + q) + 3 \leq 693$. Значение 3 не достигается.
5. $2k + 5m = 10n + 4 \Rightarrow k = 5p + 2, m = 2q, p + q = n$. Имеем: $0 \leq p \leq 19, 0 \leq q \leq 50$, откуда $4 \leq 10(p + q) + 4 \leq 694$. Запрещённых значений нет.
6. $2k + 5m = 10n + 5 \Rightarrow k = 5p, m = 2q + 1, p + q = n$. Имеем: $0 \leq p \leq 20, 0 \leq q \leq 49$, откуда $5 \leq 10(p + q) + 5 \leq 695$. Запрещённых значений нет.
7. $2k + 5m = 10n + 6 \Rightarrow k = 5p + 3, m = 2q, p + q = n$. Имеем: $0 \leq p \leq 19, 0 \leq q \leq 50$, откуда $6 \leq 10(p + q) + 6 \leq 696$. Запрещённых значений нет.
8. $2k + 5m = 10n + 7 \Rightarrow k = 5p + 1, m = 2q + 1, p + q = n$. Имеем: $0 \leq p \leq 19, 0 \leq q \leq 49$, откуда $7 \leq 10(p + q) + 7 \leq 687$. Значение 697 не достигается.
9. $2k + 5m = 10n + 8 \Rightarrow k = 5p + 4, m = 2q, p + q = n$. Имеем: $0 \leq p \leq 19, 0 \leq q \leq 50$, откуда $8 \leq 10(p + q) + 8 \leq 698$. Запрещённых значений нет.
10. $2k + 5m = 10n + 9 \Rightarrow k = 5p + 2, m = 2q + 1, p + q = n$. Имеем: $0 \leq p \leq 19, 0 \leq q \leq 49$, откуда $9 \leq 10(p + q) + 9 \leq 689$. Значение 699 не достигается.

Итак, величина $2k + 5m$ при $0 \leq k, m \leq 100$ принимает все значения от 0 до 700, кроме 1, 3, 697 и 699. Значит, в сумме (6) окажется $701 - 4 = 697$ слагаемых.

4.8 Три задачи о функциях

Мы уже видели выше, что задачи с внешне непохожими формулировками могут оказаться в сущности одной и той же задачей. Приведём ещё три примера такого рода.

Напомним, что функцией f из множества A в множество B (обозначается $f: A \rightarrow B$) называется правило, по которому каждому элементу x множества A сопоставляется единственный элемент $f(x)$ множества B . При этом элемент $f(x)$ называется *образом* элемента x , а сам элемент x называется *прообразом* элемента $f(x)$.

ЗАДАЧА. Найти число всех функций $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

РЕШЕНИЕ. Каждую такую функцию можно описать следующим образом. Представим себе m клеток с номерами $1, 2, \dots, m$. В клетку с номером i впишем число $f(i)$ — образ числа i . Таким образом, любая наша функция f однозначно задаётся полоской из m клеток, заполненных числами от 1 до n . Очевидно, что число таких полосок (а значит, и искомое число функций) равно n^m .

Нетрудно видеть, что данная задача есть по сути задача о разложении m различных шаров в n различных ящиков (без ограничений на число шаров в ящике). Число наших функций — это число размещений с повторениями \bar{A}_n^m .

ЗАДАЧА. Пусть $m \leq n$. Найти число возрастающих функций $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ (удовлетворяющих условию $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$).

РЕШЕНИЕ. Возрастающая функция полностью задаётся множеством своих значений; то есть, любое m -элементное подмножество множества $\{1, \dots, n\}$ определяет единственную возрастающую функцию $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Поэтому таких функций столько же, сколько имеется m -элементных подмножеств у n -элементного множества, то есть число сочетаний C_n^m .

ЗАДАЧА. Найти число неубывающих функций $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ (удовлетворяющих условию $i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$).

РЕШЕНИЕ. Чтобы проще было разобраться в общей ситуации, начнём с частного случая. Именно, найдём число неубывающих функций $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$.

Каждая такая функция однозначно кодируется неубывающей последовательностью длины 4, составленной из чисел 1, 2 и 3. Например, последовательность 1123 задаёт функцию f , для которой $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3$; аналогично, последовательность 1222 задаёт функцию f , для которой $f(1) = 1, f(2) = f(3) = f(4) = 2$.

А каждую такую последовательность можно описать в терминах шаров и ящиков. Представим себе три ящика (это числа 1, 2 и 3, из которых составляются последовательности) и четыре одинаковых шара. Число единиц в последовательности — это число одинаковых шаров в первом ящике; число двоек — это число одинаковых шаров во втором ящике; число троек — это число одинаковых шаров в третьем ящике. Так, последовательность 1123 означает, что в первом ящике лежат два шара, во втором — один и в третьем — один; аналогично, последовательность 1222 означает, что в первом ящике находится один шар, во втором — три шара, а третий ящик пуст.

Следовательно, искомое число функций равно числу способов разложить четыре одинаковых шара по трём ящикам, то есть числу сочетаний с повторениями $\bar{C}_3^4 = C_6^4$.

Теперь, разобравшись в этом примере, нетрудно перейти к общему случаю. Число неубывающих функций $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ равно числу неубывающих последовательностей длины m , составленных из чисел 1, 2, ..., n . Возьмём m одинаковых шаров и n различных ящиков. Число единиц в последовательности — это число шаров в первом ящике; число двоек в последовательности — это число шаров во втором ящике, и так далее. Следовательно, количество наших неубывающих последовательностей равно числу способов разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам (без ограничений на число шаров в ящике), то есть числу сочетаний с повторениями $\bar{C}_n^m = C_{m+n-1}^m$.

4.9 Задачи

1. На прямой отметили 10 различных точек. Сколько при этом получилось отрезков?

45

2. На окружности отметили 12 различных точек. Сколько при этом получилось дуг?

132

3. Сколько диагоналей в выпуклом 12-угольнике?

54

4. На плоскости проведены 10 прямых так, что никакие две прямые не параллельны и никакие три прямые не пересекаются в одной точке.

а) Найдите число точек пересечения этих прямых.

б) Сколько треугольников образовано этими прямыми?

45; 6) 120

5. («Высшая проба», 2013, 11) В классе 12 учеников. Их нужно разбить на две группы (первую и вторую), состоящие из чётного числа учеников. Сколькими способами это можно сделать?

2046

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трёх нападающих, если в его распоряжении есть два вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?

1120

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдёт семь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

1591

8. («Физтех», 2014, 7–9) Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

45

9. («Высшая проба», 2014, 7–8) Трамвайный билет состоит из шести цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат ровно 5 одинаковых цифр?

540

10. («Физтех», 2014, 7–8) Сколько существует способов составить комиссию из семи человек, выбирая её членов из восьми супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

1024

11. («Физтех», 2014, 9) У Васи есть семь книг по математике, а у Вани — девять. Все 16 книг разные. Сколькими способами они смогут обменяться тремя книгами (то есть дать три книги в обмен на три книги)?

2940

12. («Физтех», 2014, 10) Сколько существует 23-значных чисел, сумма цифр которых равна четырём?

2300

13. («Физтех», 2014, 7–8) Лёша принес в класс 36 орехов и решил разделить их между собой, Максом и Борей. Сколькими способами существует это сделать, если у каждого в итоге должен оказаться хотя бы один орех?

595

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 80 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 15 монет. Сколькими способами это сделать?

999

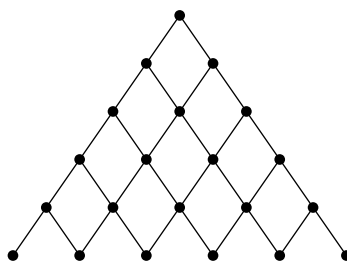
15. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9) У Игоря Горшкова есть все семь книг про Гарри Поттера. Сколькими способами Игорь может расставить эти семь томов на три различные книжные полки так, чтобы на каждой полке стояла хотя бы одна книга? (Расстановки, которые отличаются порядком книг на полке, считаются различными.)

00992

16. («Физтех», 2014, 11) Найдите количество семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встречаться только цифры 4, 5, 6, 7 и таких, что каждая цифра не меньше предыдущей.

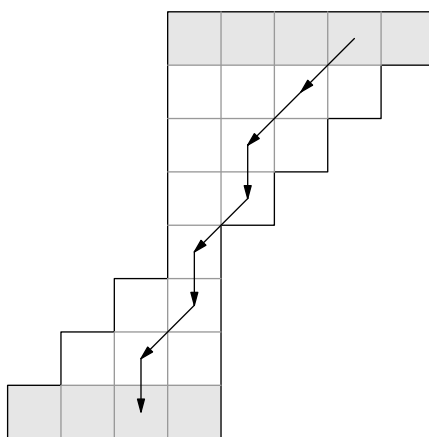
1021

17. В треугольнике Паскаля заменим числа точками и соединим точки отрезками следующим образом:



Пути́м назовём ломаную с началом в вершине треугольника, звенья которой идут по линиям получившейся сетки только вниз. Докажите, что количество путей, ведущих в k -ю точку n -й строки, равно C_n^k (строки нумеруются сверху с нуля; точки в строке нумеруются слева с нуля).

18. («Высшая проба», 2014, 9, 11) Приведённая ниже диаграмма состоит из 24 единичных квадратов. Лягушка из каждой клетки может прыгнуть либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево-вниз по диагонали (не выходя при этом за границы диаграммы). Сколько существует путей лягушки, ведущих из верхнего ряда квадратов в нижний? (На рисунке показан один из путей лягушки. Верхний и нижний ряды квадратов выделены серым фоном.)



128

19. («Высшая проба», 2014, 9–10) В выражении

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{1000})$$

раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

109009

20. («Высшая проба», 2014, 11) В выражении

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{13})(1+x^{14})(1+x^{1000})^{18}$$

раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

7102

21. («Высшая проба», 2014, 9) Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1+x^2)^{100}(1+x^3)^{100}$?

697

22. («Высшая проба», 2014, 11) Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1+x^3)^{100}(1+x^4)^{100}$?

699

23. («Физтех», 2014, 9–10) Дан выпуклый 15-угольник, никакие три диагонали которого не имеют общих точек, отличных от вершин. Найдите число точек пересечения диагоналей (не считая вершин).

1365

24. («Физтех», 2014, 9, 11) Отметили все вершины правильного 12-угольника. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся семизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках?

33792

25. («Высшая проба», 2013, 9) Сколькими способами можно заполнить цифрами 0, 1, ..., 9 (можно с повторениями) таблицу 3×3 так, чтобы сумма цифр в каждой строке и каждом столбце равнялась 4?

120

26. («Высшая проба», 2013, 10) Сколькими способами можно заполнить цифрами 0, 1, ..., 9 (можно с повторениями) таблицу 3×3 так, чтобы сумма цифр в каждой строке и каждом столбце равнялась 5?

231

27. («Высшая проба», 2013, 11) Сколькими способами можно заполнить цифрами 0, 1, ..., 9 (можно с повторениями) таблицу 3×3 так, чтобы сумма цифр в каждой строке и каждом столбце равнялась 6?

406

28. («Физтех», 2014, 9–10) На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — 19 параллельных между собой прямых, в другом — 23 параллельных между собой прямых, в третьем — 36 параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг?

8202

29. («Физтех», 2013, 10–11) Тест по английскому языку сдавали 10 школьников. Известно, что любые пять школьников ответили вместе на все вопросы, а любые четыре школьника ответили вместе не на все вопросы. При каком наименьшем количестве вопросов теста такое могло случиться?

012

30. («Высшая проба», 2011, 11) Сколькими способами можно раскрасить грани куба в чёрный и белый цвета (каждую грань в один цвет, и оба цвета должны быть использованы)? Раскраски считаются одинаковыми, если одну можно получить из другой, повернув куб в руках.

8

31. («Физтех», 2013, 11) Число 84605 написали семь раз подряд, при этом получилось 35-значное число

84605846058460584605846058460584605.

Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

216

32. («Физтех», 2013, 11) Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45° . (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

384

33. («Физтех», 2013, 11) Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90° . (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

762

34. («Физтех», 2014, 11) Есть семь карточек с цифрами 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5. Сколько существует различных шестизначных чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

622

35. («Физтех», 2014, 11) В выпуклом 17-угольнике проводят все его диагонали. На какое наибольшее число частей они могут его разбить?

2500

36. («Физтех», 2011, 10) 26 солдат выстроены в одну шеренгу. Сколько существует различных способов выбрать 11 из них так, что никакие двое из них не стоят рядом?

4368

37. («Физтех», 2011, 11) В Городском Собрании 24 депутата. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют, причём известно, что каждый дружит ровно с 7 другими. Каждые три депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно дружат или все трое попарно враждуют.

089

38. («Высшая проба», 2011, 9) В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

09E

39. («Высшая проба», 2011, 9) Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

450

40. («Физтех», 2012, 9–11) Прямоугольник, составленный из одинаковых квадратных клеток, назовём *чётным*, если он содержит чётное число клеток. Из одинаковых квадратных клеток составлен прямоугольник длиной 9 клеток и шириной 4 клетки. Сколько в нём содержится чётных прямоугольников?

00E

41. («Физтех», 2012, 9–11) Сколькими способами можно выложить в ряд три красных, четыре синих и пять зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

9507

42. («Физтех», 2012, 10) Сколько существует способов раскрасить вершины правильного пятиугольника в восемь цветов, если раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми?

09569

43. («Высшая проба», 2012, 9) На плоскости отмечены восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли быть так, что более одной пятой всех выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках — параллелограммы?

87

44. («Высшая проба», 2014, 10) На плоскости даны восемь различных точек. Нумерацию этих точек числами от 1 до 8 назовём *хорошей*, если выполнено следующее условие:

существует такая прямая, что все точки лежат по одну сторону и на разных расстояниях от неё, и при этом расстояния от точек до этой прямой возрастают с возрастанием номера (т. е. ближайшая точка — номер 1, следующая по удалённости — номер 2 и т. д.).

Какое максимальное количество различных хороших нумераций может быть у заданной восьмёрки точек?

9E

45. («Высшая проба», 2012, 11) В одной из вершин правильного $2n$ -угольника ($n \geq 2$) поставлено число 1. Для данной расстановки чисел $2, 3, \dots, 2n$ в остальные вершины $2n$ -угольника поставим на каждой его стороне знак $+$, если число на конце стороны (при движении по часовой стрелке) больше числа на её начале, и знак $-$, если оно меньше. Докажите, что модуль разности между числом расстановок чисел $2, 3, \dots, 2n$ с чётным количеством плюсов на сторонах и числом расстановок с нечётным количеством плюсов равен числу расстановок, в которых плюсы и минусы чередуются, при (а) $n = 3$; (б) $n = 4$; (в) произвольном n .

5 Формула включений и исключений

Не всякая задача комбинаторики решается непосредственным применением основных комбинаторных принципов — правила суммы или произведения, подсчётом числа размещений или сочетаний. В некоторых случаях приходится идти окольным путем и действовать своеобразным «методом решета», который состоит в следующем: для нахождения числа элементов интересующего нас множества мы сначала находим число элементов некоторого большего множества, а потом «просеиваем» нужные элементы, постепенно отбрасывая лишние.

5.1 Переход к дополнению

Простейшим примером «метода решета» является переход к дополнению: число «хороших» элементов равно общему числу элементов минус число «плохих» элементов.

ЗАДАЧА. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 7?

РЕШЕНИЕ. Найдём сначала, сколько всего имеется четырёхзначных чисел. Первую цифру мы можем выбрать девятью способами, каждую из остальных цифр — десятью. Стало быть, количество четырёхзначных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Теперь найдём, сколько четырёхзначных чисел не содержат ни одной семёрки. Для выбора первой цифры имеется 8 способов, для выбора каждой из остальных цифр — 9 способов. Следовательно, всего будет $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ четырёхзначных чисел, в записи которых нет ни одной цифры 7.

Ну а чисел, в которых хотя бы одна семёрка имеется, будет $9000 - 5832 = 3168$.

Здесь мы действовали по схеме, которую, выражаясь неформально, можно описать так: «*хотя бы один*» равно общему числу минус «*ни одного*». В других ситуациях можно действовать наоборот: «*ни одного*» равно общему числу минус «*хотя бы один*».

ЗАДАЧА. Дан выпуклый n -угольник ($n \geq 5$). Сколькими способами можно выбрать в нём две непересекающиеся диагонали? Порядок выбора не важен.

РЕШЕНИЕ. Идея подсчёта такова: искомое число пар непересекающихся диагоналей равно общему числу пар диагоналей минус число пар пересекающихся (внутри n -угольника) диагоналей минус число пар смежных (выходящих из одной вершины) диагоналей.

Из каждой вершины n -угольника исходят $n - 3$ диагонали, поэтому всего диагоналей имеется $n(n - 3)/2$. Значит, число неупорядоченных пар диагоналей равно:

$$N_0 = C_{n(n-3)/2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-3)}{2} \left(\frac{n(n-3)}{2} - 1 \right) = \frac{n(n-3)(n^2 - 3n - 2)}{8}.$$

Теперь найдём число пар пересекающихся диагоналей. Каждой такой паре отвечает четвёрка вершин n -угольника — концов этих диагоналей. Наоборот, каждым четырёх вершинам n -угольника соответствует единственная пара пересекающихся диагоналей. Поэтому число пар пересекающихся диагоналей есть число неупорядоченных четвёрок вершин n -угольника:

$$N_1 = C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Осталось найти число N_2 пар смежных диагоналей. Из каждой вершины выходят C_{n-3}^2 пар диагоналей, поэтому

$$N_2 = nC_{n-3}^2 = \frac{n(n-3)(n-4)}{2}.$$

Искомое число пар непересекающихся диагоналей: $N = N_0 - N_1 - N_2$, и после несложных преобразований получим:

$$N = \frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}.$$

Бывает так, что в условии задачи ничто не намекает на «*хотя бы один*» или «*ни одного*», и тем не менее задача проще всего решается переходом к дополнению.

ЗАДАЧА. («*Высшая проба*», 2013, 10) В стране пять городов: А, Б, В, Г и Д. Их хотят связать четырьмя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

РЕШЕНИЕ. Найдём сначала общее количество соединений пяти городов четырьмя авиалиниями. Всего пар городов имеется $C_5^2 = 10$. Из них нужно выбрать четыре пары для соединения. Это можно сделать $C_{10}^4 = 210$ способами.

Теперь ищем количество *плохих* соединений (когда найдутся два города таких, что из одного никак нельзя долететь до другого). Плохие соединения могут быть двух видов: 1) есть изолированный город (из которого не выходит ни одна авиалиния); 2) нет изолированного города (то есть из каждого города выходит авиалиния).

Пусть изолированный город есть (его можно выбрать 5 способами). Тогда четыре авиалинии проложены (как угодно) между четырьмя остальными городами. Из $C_4^2 = 6$ пар городов мы выбираем 4 пары для соединения; это можно сделать $C_6^4 = 15$ способами. Следовательно, плохих соединений с изолированным городом получается $5 \cdot 15 = 75$.

Теперь предположим, что в плохом соединении изолированного города нет. Выясним, как устроено такое соединение. Допустим, что из города А нельзя попасть в город Д. Пусть А соединён линией с Б, а Д соединён линией с Г. Имеются лишь две возможности провести оставшиеся линии: достроить треугольник АБВ (он не будет связан с отрезком ГД) или достроить треугольник ВГД (он не будет связан с отрезком АБ).

Итак, плохое соединение без изолированного города — это треугольник плюс не связанный с ним отрезок, и таких соединений столько же, сколько существует способов соединить два города отрезком (тогда оставшиеся три города автоматически замкнутся треугольником). Таким образом, нужно просто выбрать два города из пяти; для этого имеется $C_5^2 = 10$ способов.

Всего плохих соединений получается $75 + 10 = 85$. Следовательно, искомое число соединений равно $210 - 85 = 125$.

5.2 Формула включений и исключений

Действуя по схеме «*ни одного*» равно общему числу минус «*хотя бы один*», мы должны уметь вычислять «*хотя бы один*», то есть находить число объектов, обладающих хотя бы одним из указанных свойств. С теоретико-множественной точки зрения речь идёт о нахождении числа элементов в объединении нескольких множеств. В такой ситуации часто приходит на помощь формула включений и исключений.

В качестве элементарного примера рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА. Каждый ученик класса побывал в театре или в кино. В театр ходили 22 человека. В кино были 15 человек. И в театре, и в кино были 7 человек. Сколько учеников в классе?

РЕШЕНИЕ. Если мы найдём сумму $22 + 15$, то окажется, что каждого, кто побывал и в театре, и в кино, мы посчитали дважды (например, если Вася ходил и в театр, и в кино, то один раз он вошёл в эту сумму в числе 22 «театралов», а второй раз — в числе 15 «киношников»). Поэтому найденная сумма на 7 больше количества учеников в классе. Следовательно, в классе $22 + 15 - 7 = 30$ человек.

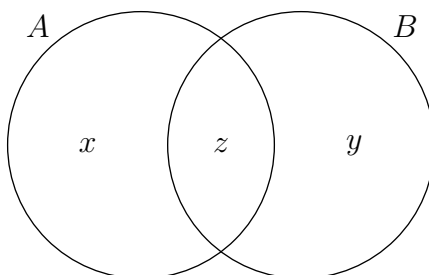
Число элементов конечного множества A называется *мощностью* этого множества и обозначается $|A|$. Формула включений и исключений даёт возможность находить мощность объединения любого конечного набора множеств.

Формула включений и исключений для двух множеств. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (7)$$

Доказательство формулы (7) почти дословно повторяет решение последней задачи: суммируя мощности множеств A и B , мы дважды учитываем каждый элемент в их пересечении (один раз — со стороны множества A , второй раз — со стороны множества B). Поэтому мощность пересечения надо вычесть.

Можно также доказать формулу (7) с помощью следующего наглядного рисунка.



Пусть x — число элементов множества A , не входящих в B ; y — число элементов B , не входящих в A ; z — число элементов в пересечении A и B . Тогда $x + z = |A|$, $y + z = |B|$, и мы имеем:

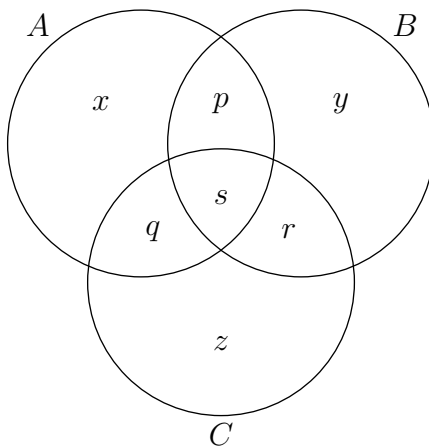
$$|A \cup B| = x + y + z = (x + z) + (y + z) - z = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Формула включений и исключений для трёх множеств. Для любых конечных множеств A , B и C справедливо равенство

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (8)$$

Почему так получается? Назовём *двукратными* элементы, входящие в пересечение ровно двух множеств, и *трёхкратными* — элементы, входящие в пересечение трёх множеств. Сложив мощности A , B и C , мы дважды учли каждый двукратный элемент и трижды — каждый трёхкратный. Вычтя три попарных пересечения, мы «восстановили справедливость» в отношении двукратных элементов, но теперь оказались полностью неучтёнными трёхкратные элементы. Поэтому надо добавить мощность тройного пересечения.

Приведём также доказательство формулы (8) с помощью следующего рисунка.



Здесь x, y, z — количества однократных элементов (входящих лишь в одно из данных множеств); p, q, r — количества двукратных элементов; s — число трёхкратных элементов. Имеем:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= x + y + z + p + q + r + s = \\ &= (x + p + q + s) + (y + p + r + s) + (z + q + r + s) - (p + s) - (q + s) - (r + s) + s = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.\end{aligned}$$

ЗАДАЧА. В группе 40 туристов. Из них 20 человек говорят по-английски, 15 — по-французски, 11 — по-испански. Английский и французский знают семь человек, английский и испанский — пятеро, французский и испанский — трое. Два туриста говорят на всех трёх языках. Сколько человек группы не знают ни одного из этих языков?

РЕШЕНИЕ. Пусть A — множество туристов группы, знающих английский, F — французский, I — испанский. Тогда $|A| = 20$, $|F| = 15$, $|I| = 11$, $|A \cap F| = 7$, $|A \cap I| = 5$, $|F \cap I| = 3$, $|A \cap F \cap I| = 2$. Сколько человек говорят *хотя бы на одном* из этих языков? По формуле включений и исключений для трёх множеств имеем:

$$\begin{aligned}|A \cup F \cup I| &= |A| + |F| + |I| - |A \cap F| - |A \cap I| - |F \cap I| + |A \cap F \cap I| = \\ &= 20 + 15 + 11 - 7 - 5 - 3 + 2 = 33.\end{aligned}$$

Значит, ни одного из данных языков не знают $40 - 33 = 7$ человек.

Теперь мы готовы привести формулу включений и исключений для любого конечного числа множеств, которая обобщает формулы (7) и (8).

Формула включений и исключений. Для любых конечных множеств A_1, A_2, \dots, A_n справедливо равенство

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ &\quad - \sum_{i < j < k < l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \quad (9)\end{aligned}$$

Выглядит формула (9) громоздко, но суть её проста: сначала суммируем мощности всех множеств (n слагаемых), затем вычитаем мощности всех попарных пересечений (C_n^2 слагаемых), затем прибавляем мощности всех тройных пересечений (C_n^3 слагаемых) и так далее, чередуя знаки, до последнего слагаемого — мощности пересечения всех n множеств.

Для доказательства формулы (9) нам понадобится вспомогательное тождество.

ЛЕММА. Для любого натурального m справедливо равенство

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m+1} C_m^m = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$0 = (1 - 1)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \cdot 1^{m-k} \cdot (-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k = 1 - \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k,$$

откуда

$$1 = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k = C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m+1} C_m^m.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ. Возьмём произвольный элемент $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Покажем, что x учитывается правой частью формулы (9) в точности один раз.

Предположим, что x принадлежит пересечению ровно m наших множеств; не ограничивая общности, можно считать, что x принадлежит множествам A_1, \dots, A_m и не принадлежит множествам A_{m+1}, \dots, A_n . Тогда:

- в первой сумме $\sum_i |A_i|$ элемент x посчитан $m = C_m^1$ раз (в слагаемых $|A_1|, \dots, |A_m|$);
- во второй сумме $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j|$ элемент x посчитан C_m^2 раз (ведь количество попарных пересечений $A_i \cap A_j$, для которых $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, равно C_m^2);
- в третьей сумме $\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ элемент x посчитан C_m^3 раз (ведь количество пересечений $A_i \cap A_j \cap A_k$, для которых $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, равно C_m^3);
- ...
- в m -й сумме $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}|$ элемент x посчитан $1 = C_m^m$ раз (он войдёт только в слагаемое $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$);
- суммы, содержащие $m + 1$ и более пересечений, не учитывают элемент x , поскольку x не входит в пересечение более чем m множеств.

Таким образом, элемент x оказывается посчитанным $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m+1} C_m^m$ раз. Согласно лемме это выражение равно единице, что и требовалось. Формула (9) тем самым доказана.

Перейдём к рассмотрению задач, которые можно решить с помощью формулы включений и исключений.

5.3 Задача о беспорядках

Ранее мы привели [частный случай задачи о шляпах](#) (для четырёх гостей) и решили её непосредственным перебором. Теперь рассмотрим данную задачу в общем виде.

ЗАДАЧА. (Леонард Эйлер) Войдя в ресторан, n гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?

РЕШЕНИЕ. Занумеруем гостей числами $1, 2, \dots, n$ и так же занумеруем шляпы (при этом i -я шляпа принадлежит i -му гостю). Тогда любая перестановка $k_1 k_2 \dots k_n$ чисел $1, 2, \dots, n$ обозначает вариант разбора шляп, при котором i -й гость получил k_i -ю шляпу. Например, в случае четырёх человек перестановка 4132 означает, что первый получил четвертую шляпу ($k_1 = 4$), второй — первую ($k_2 = 1$), третий — третью (свою, $k_3 = 3$) и четвертый — вторую ($k_4 = 2$). Наоборот, каждый вариант разбора шляп обозначается единственной перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$.

Будем говорить, что в перестановке $k_1 k_2 \dots k_n$ чисел $1, 2, \dots, n$ число i стоит на своём месте, если $k_i = i$ (например, в перестановке 4132 тройка стоит на своём месте). Нас интересует количество *беспорядков*, то есть таких перестановок, в которых ни одно из чисел не стоит на своём месте. Число беспорядков можно найти, вычитая из общего количества перестановок, равного $n!$, количество тех перестановок, в которых хотя бы одно из чисел стоит на своём месте.

Пусть A_i — множество перестановок, в которых число i стоит на своём месте ($i = 1, 2, \dots, n$). Искомое число N беспорядков, таким образом, равно

$$\begin{aligned} N &= n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \\ &= n! - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Ясно, что $|A_i| = (n-1)!$, поэтому

$$\sum_i |A_i| = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Точно так же $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ и

$$\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}.$$

Аналогично $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$ и

$$\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}.$$

Теперь мы приходим к нужной формуле:

$$N = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

При $n = 4$ найденная формула даёт:

$$N = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 12 - 4 + 1 = 9.$$

Этот результат мы получили ранее прямым перебором.

Заметим, что если шляпы разбираются случайным образом, то вероятность беспорядка оказывается равной:

$$\frac{N}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

При $n \rightarrow \infty$ данная сумма стремится к пределу, равному $1/e$, где $e = 2,718\dots$ — одна из самых распространённых математических констант (наряду с числом π), получившая обозначение также в честь Эйлера. Таким образом, если гостей много, то вероятность, что каждый уйдёт в чужой шляпе, приблизительно равна $1/e \approx 0,37$.

5.4 Функция Эйлера

Напомним, что два натуральных числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей (кроме 1).

Функция Эйлера — это функция $\varphi(n)$ натурального аргумента n , равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n (при этом $\varphi(1) = 1$ по определению). Например, $\varphi(15) = 8$, поскольку имеется 8 натуральных чисел, меньших 15 и взаимно простых с ним: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Функция Эйлера играет важную роль в теории чисел и криптографии.

Пусть $n \geq 2$. Значение функции Эйлера числа n можно найти из разложения этого числа на простые множители:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$$

(p_1, p_2, \dots, p_r — все различные простые делители числа n). Покажем, что

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Если число k взаимно просто с n , то k не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_r . Мы найдём величину $\varphi(n)$, вычитая из n количество чисел, меньших n и делящихся хотя бы на одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_r .

Пусть A_i — множество чисел, меньших n и делящихся на p_i ($i = 1, 2, \dots, r$). Имеем:

$$\begin{aligned} N &= n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| = \\ &= n - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^r |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k},$$

и так далее. Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i < j < k} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \dots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_r} = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось.

5.5 Числа Стирлинга второго рода

В качестве ещё одного примера применения формулы включений и исключений рассмотрим следующую комбинаторную задачу (далее предполагается, что $k \geq n$).

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n различным ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым?

РЕШЕНИЕ. Если ящики могут быть пустыми, то число способов разложить m различных шаров по n различным ящикам равно n^m — это просто число [размещений с повторениями](#).

Пусть A_i — множество разложений шаров, при которых i -й ящик пуст ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда искомое число $D(m, n)$ разложений шаров, при которых все ящики непусты, равно:

$$\begin{aligned} D(m, n) &= n^m - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \\ &= n^m - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$|A_i| = (n-1)^m, \quad |A_i \cap A_j| = (n-2)^m, \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)^m$$

и так далее. Получаем:

$$D(m, n) = n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - C_n^3 (n-3)^m + \dots + (-1)^n \cdot 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Задача решена.

Данная задача известна также и в другой формулировке. Прежде всего, дадим определение: функция $f: A \rightarrow B$ называется *сюръекцией*, если **каждый** элемент множества B имеет прообраз (то есть **для любого** $y \in B$ найдётся такой элемент $x \in A$, что $f(x) = y$). Например, функция $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$, задаваемая формулой $f(x) = \sin x$, является сюръекцией, а функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая той же формулой $f(x) = \sin x$, сюръекцией уже не будет, так как число 2 не имеет прообраза.

ЗАДАЧА. Найти число сюръекций из m -элементного множества в n -элементное.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим функцию $f: A \rightarrow B$, где $|A| = m$ и $|B| = n$. Представим себе, что элементы множества A — это шары, а элементы множества B — это ящики. Тогда функция f есть некоторый способ разложить m различных шаров в n различных ящиков; при этом f будет сюръекцией в том и только в том случае, если при соответствующем разложении ни один ящик не окажется пустым. Следовательно, число сюръекций из A в B равно $D(m, n)$,

Интересна также ситуация, когда ящики *неразличимы*. Она приводит к отдельной комбинаторной задаче о числе разбиений множества.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n неразличимым ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым? Иными словами, сколькими способами можно представить m -элементное множество в виде объединения n непустых непересекающихся подмножеств?

РЕШЕНИЕ. Если ящики неразличимы, то любая перестановка n ящиков ничего не меняет, и поэтому число $D(m, n)$ разложений m различных шаров по n различным ящикам нужно разделить на $n!$:

$$S(m, n) = \frac{D(m, n)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Получилось число способов разложить m шаров по n неразличимым ящикам, или число способов представления m -элементного множества в виде объединения n непересекающихся непустых подмножеств. Числа $S(m, n)$ называются *числами Стирлинга второго рода*.

Теперь допустим, что ящики могут быть пустыми.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n неразличимым ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.

РЕШЕНИЕ. При произвольной раскладке наши m шаров окажутся лежащими в каких-то k ящиках ($1 \leq k \leq n$), а остальные $n - k$ ящиков будут пустовать. Такое разложение можно осуществить $S(m, k)$ способами. Суммируя по k , получим искомое число способов:

$$\sum_{k=1}^n S(m, k).$$

5.6 Задачи

1. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

9238

2. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковых цифры?

763920

3. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две единицы?

8797

4. («Высшая проба», 2013, 11) В стране шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Их хотят связать пятью авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

9671

5. (Московская математическая олимпиада, 2006, 6, окружной этап) В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

8

6. (Московская математическая олимпиада, 2008, 7, окружной этап) По данным опроса, проведённого в 7 «Е» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются ещё и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

96

7. Пусть A — множество букв слова «абракадабра», B — множество букв слова «бригантина», C — множество букв слова «каракатица». Выпишите множества A , B и C , найдите их всевозможные пересечения и проверьте формулу включений и исключений для трёх множеств.

8. (Московская математическая олимпиада, 1938) Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

989

9. («Физтех», 2014, 7, 8, 10) На столе рубашкой вверх была разложена колода из 36 игровых карт. Лёша перевернул 30 карт, затем Макс перевернул 19 карт, а после этого Боря — 21 карту. В результате вся колода оказалась рубашкой вниз. Сколько карт было перевернуто трижды?

21

10. («Физтех», 2013, 8–9) Трое ребят принялись красить лист ватмана, каждый — в свой цвет. Один покрасил красным 75% листа, второй покрасил зелёным 70% листа, а третий покрасил синим 65% листа. Сколько процентов листа будет заведомо закрашено всеми тремя цветами?

901%

11. («Ломоносов», 2013, 9) Найдите количество натуральных делителей числа $N = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{40}$,

а) не являющихся ни точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами; б) не представимых в виде m^n , где m и n — натуральные числа, причём $n > 1$.

186 (9 '8601 (a

12. («Высшая проба», 2014, 10) В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 19 человек знают польский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные — ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?

79

13. («Высшая проба», 2014, 11) В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 21 человек знает польский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

97

14. («Физтех», 2014, 11) Прямоугольный параллелепипед $35 \times 40 \times 56$, разбитый на 78400 единичных кубиков, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков протыкает игла?

711

6 Разные комбинаторные приёмы

В данном разделе рассмотрены два приёма решения комбинаторных задач — подсчёт двумя способами и составление рекуррентных соотношений.

6.1 Подсчёт двумя способами

В некоторых задачах можно получить нужное уравнение, если вычислить двумя способами одну и ту же величину. Трудность состоит в том, чтобы додуматься — какую именно величину подсчитывать двумя способами.

ЗАДАЧА. Тридцать школьников — семиклассников и восьмиклассников — обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый семиклассник пожал руку восьми восьмиклассникам, а каждый восьмиклассник пожал руку семи семиклассникам. Сколько было семиклассников и сколько восьмиклассников?

РЕШЕНИЕ. Пусть x — число семиклассников, y — число восьмиклассников; тогда $x + y = 30$. Второе уравнение мы получим, если подсчитаем двумя способами общее количество рукопожатий. С одной стороны, число рукопожатий равно $8x$, поскольку от каждого семиклассника «исходит» 8 рукопожатий. С другой стороны, число рукопожатий равно $7y$, так как от каждого восьмиклассника «исходит» 7 рукопожатий. Следовательно, $8x = 7y$. Решая полученную систему уравнений, находим: $x = 14$, $y = 16$.

ЗАДАЧА. (*Турнир Ломоносова, 1985*) Было 7 пустых ящиков. В некоторые из них положили еще по 7 пустых ящиков и т. д. В итоге стало 10 непустых ящиков. Сколько всего стало ящиков?

РЕШЕНИЕ. Если ящик A лежит непосредственно в ящике B , то будем говорить, что из ящика A в ящик B идёт стрелка. Пусть всего стало x ящиков. Подсчитаем двумя способами общее количество стрелок. С одной стороны, оно равно $x - 7$, поскольку из каждого ящика, кроме начальных семи, выходит ровно одна стрелка. С другой стороны, число стрелок равно $10 \cdot 7 = 70$, поскольку в каждый из 10 непустых ящиков входит ровно 7 стрелок (а ни в какой пустой ящик стрелка не входит). Следовательно, $x - 7 = 70$, откуда $x = 77$.

Данную задачу можно решить и по-другому. На каждом шаге процесса заполняется ровно один ящик — в него кладутся 7 ящиков. Поскольку вначале все ящики пусты, сделано 10 шагов, то есть добавлено 70 ящиков. Плюс семь начальных — итого 77 ящиков.

6.2 Рекуррентные соотношения

Говорят, что последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ задана *рекуррентно*, если существует формула, выражающая n -й член этой последовательности через один или несколько предыдущих членов; такая формула называется *рекуррентным соотношением*.

Например, рекуррентное соотношение $a_{n+1} = a_n + 3$ с начальным условием $a_1 = 2$ задаёт арифметическую прогрессию 2, 5, 8, 11, ...

ЗАДАЧА. («Физтех», 2014, 8–9) На доску выписаны числа a_1, a_2, \dots, a_{200} . Известно, что $a_1 = 3$, $a_2 = 9$. Найдите a_{200} , если для любого натурального n справедливо равенство $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

РЕШЕНИЕ. Начнём выписывать члены нашей последовательности:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = -3, \quad a_5 = -9, \quad a_6 = -6, \quad a_7 = 3, \quad a_8 = 9, \quad \dots$$

Как видим, последовательность «зацикливается» — она периодична с периодом 6 (то есть $a_{n+6} = a_n$). Иными словами, равны все члены последовательности, номера которых дают при делении на 6 одинаковые остатки. Номер 200 имеет остаток 2 от деления на 6. Значит, $a_{200} = a_2 = 9$.

Некоторые задачи комбинаторики можно решить, если составить для искомой величины рекуррентное соотношение, после чего вычислить эту величину вплоть до нужного значения n . Посмотрим, как это делается.

ЗАДАЧА. Сколько существует строк длины 10, состоящих из нулей и единиц, таких, что никакие два нуля не стоят рядом?

РЕШЕНИЕ. Говоря в решении этой задачи о строках, мы имеем в виду строки, описанные в условии, то есть составленные из нулей и единиц так, что никакие два нуля не стоят рядом.

Обозначим через x_n число строк длины n . Ясно, что $x_1 = 2$ (это строки 0 и 1), $x_2 = 3$ (это строки 01, 10 и 11). Будем искать рекуррентное соотношение, задающее последовательность x_n .

Предположим, что $n \geq 3$. Пусть N_1 — число строк длины n , которые начинаются с единицы. Вторым числом такой строки может быть либо 0, либо 1; иными словами, к первой цифре 1 «пристыковывается» любая строка длины $n - 1$. Поэтому строк, начинающихся с единицы, столько же, сколько существует строк длины $n - 1$, то есть $N_1 = x_{n-1}$.

Пусть теперь N_0 — число строк длины n , которые начинаются с нуля. Вторым числом такой строки обязательно служит единица, а к этой единице уже «пристыковывается» любая строка длины $n - 2$. Поэтому $N_0 = x_{n-2}$.

В результате получаем:

$$x_n = N_1 + N_0 = x_{n-1} + x_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Теперь с учётом начальных условий $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ находим:

$$x_3 = x_2 + x_1 = 5; \quad x_4 = x_3 + x_2 = 8; \quad x_5 = x_4 + x_3 = 13,$$

и так далее вплоть до интересующего нас значения $x_{10} = 144$. Таким образом, строк длины 10 получается 144.

Заметим, что полученная последовательность 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... — это знаменитые *числа Фибоначчи*.

ЗАДАЧА. Сколько слов длины 5 можно составить из букв a , b и c так, чтобы буквы a и b не стояли рядом?

РЕШЕНИЕ. Пусть x_n — число слов длины n (описанных в условии). Ясно, что $x_1 = 3$ (это слова a , b и c). Если $n = 2$, то все возможные слова суть aa , ac , bb , bc , ca , cb , cc ; таким образом, $x_2 = 7$.

Обозначим a_n , b_n и c_n число слов длины n , начинающихся с буквы a , b и c соответственно. Тогда, очевидно,

$$x_n = a_n + b_n + c_n. \quad (10)$$

Предположим, что $n \geq 3$. Пусть слово длины n начинается с буквы a . Поскольку на втором месте не может быть b , к букве a «пристыковывается» любое слово длины $n - 1$, начинающееся с a или c . Поэтому

$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1}. \quad (11)$$

Аналогично:

$$b_n = b_{n-1} + c_{n-1}, \quad (12)$$

$$c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = x_{n-1}. \quad (13)$$

Сложим (11) и (12), после чего используем (13):

$$a_n + b_n = (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) + c_{n-1} = x_{n-1} + c_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Подставляем это в (10):

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + c_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Итак, имеем рекуррентное соотношение:

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} \quad (n \geq 3; x_1 = 3, x_2 = 7).$$

Последовательно вычисляем: $x_3 = 17$, $x_4 = 41$ и, наконец, $x_5 = 99$. Итак, слов длины 5 получается 99.

ЗАДАЧА. Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Сколько неправильных шеренг можно построить из n солдат разного роста?

РЕШЕНИЕ. Случаи $n = 4$ и $n = 5$ предлагались в качестве задачи к разделу 1 (её можно решить перебором вариантов). Сейчас мы рассмотрим данную задачу в общем виде.

Пусть x_n — число неправильных шеренг длины n . Как и в предыдущих задачах, ищем рекуррентное соотношение для x_n .

Рассмотрим неправильную шеренгу длины $n + 1$ ($n \geq 1$). Пусть Z — самый высокий солдат шеренги. Он может стоять на любом месте от 1 до $n + 1$ (перечисляем солдат слева направо). Предположим, что Z стоит на $(k + 1)$ -м месте ($k = 0, 1, \dots, n$); то есть, слева от Z стоят k солдат (которых можно выбрать C_n^k способами), а справа от Z стоят оставшиеся $n - k$ солдат.

Заметим, что слева от Z стоит неправильная шеренга длины k , но не произвольная, а такая, у которой предпоследний солдат X выше последнего солдата Y (в противном случае солдаты X , Y и Z окажутся стоящими по росту). Ясно, что таких шеренг вдвое меньше общего числа неправильных шеренг длины k ; стало быть, слева от Z можно выстроить $x_k/2$ шеренг. Чтобы это было справедливо при $k = 0$ и $k = 1$ (одна шеренга в обоих случаях), мы полагаем $x_0 = x_1 = 2$.

Аналогично, справа от Z стоит неправильная шеренга длины $n - k$, но не произвольная, а такая, у которой второй солдат выше первого. Таких шеренг будет $x_{n-k}/2$.

Остаётся заметить, что k солдат слева от Z можно выбрать C_n^k способами (и при каждом таком способе однозначно выбраны $n - k$ солдат справа от Z). Таким образом, если Z стоит на k -м месте, то число неправильных шеренг будет равно

$$C_n^k \cdot \frac{x_k}{2} \cdot \frac{x_{n-k}}{2} = \frac{1}{4} C_n^k x_k x_{n-k}.$$

Суммируя по k , находим число неправильных шеренг длины $n + 1$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n C_n^k x_k x_{n-k} \quad (n = 1, 2, \dots; x_0 = x_1 = 2).$$

Читатель может самостоятельно убедиться, что выполнены равенства $x_4 = 10$ и $x_5 = 32$ — это результат задачи 10 раздела 1.

6.3 Задачи

1. (*Математический праздник, 1996, 7*) Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

20

2. (*«Физтех», 2014, 7–8*) Про группу из пяти человек известно, что: Андрей на 5 лет старше Андреева, Борис на 3 года старше Борисова, Василий на 2 года старше Васильева, Григорий на 1 год старше Григорьева. Ещё в этой группе есть Дмитрий и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дмитрий или Дмитриев? В ответе укажите возраст Дмитрия минус возраст Дмитриева.

11–

3. («Физтех», 2014, 7–8) Олег с папой пошли в тир. Они договорились, что Олег делает шесть выстрелов и за каждое попадание в цель получает право сделать ещё два выстрела. Всего Олег сделал 20 выстрелов. Сколько раз он попал в цель?

2

4. («Физтех», 2014, 7–8) У Царя Гороха было четверо сыновей, а дочерей не было. Его потомки тоже не имели дочерей, среди них 25 имели каждый по три сына, а у остальных вообще не было детей. Сколько потомков было у царя Гороха?

62

5. («Физтех», 2013, 8–11) В большую коробку положили 10 коробок поменьше. В некоторые из них положили 10 коробок ещё поменьше. В некоторые из этих последних коробок положили 10 коробок ещё меньшего размера и так далее. В результате оказалось, что имеется ровно 2000 коробок, в которых что-то лежит. Какое наибольшее число коробок могут при этом быть пустыми?

10081

6. (Всероссийская олимпиада по математике, 2012, 11 класс, II этап) Туристическая фирма провела акцию: «Купи путёвку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путёвку, и получи стоимость путёвки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

62

7. («Физтех», 2014, 10–11) Последовательность a_n такова, что $a_1 = 4$, $a_2 = 25$. Найдите a_{200} , если для любого натурального n справедливо равенство $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$.

27

8. Сколько семибуквенных слов можно составить из букв a и b так, чтобы после буквы a стояла хотя бы одна буква b ? (Букве a разрешается быть последней.)

33

9. Сколько имеется разбиений отрезка длины 8 на отрезки длины 1, 2 и 3? (Разбиения, отличающиеся порядком следования отрезков, считаются различными.)

18

10. («Ломоносов», 2014, 10–11) Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 9 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной её ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

22

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–8) Мария Ивановна — строгая учительница по алгебре. Она ставит в журнал только двойки, тройки и четвёрки, причём никогда не ставит одному ученику две двойки подряд. Известно, что она поставила Вовочке 6 оценок за четверть. Сколькими различными способами она могла это сделать?

448

12. («Физтех», 2014, 11) Кузнечик прыгает по вершинам правильного треугольника ABC , прыгая каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами он может попасть из вершины A обратно в вершину A за 9 прыжков?

021

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11) Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в два слоя по шесть карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

781

14. («Высшая проба», 2014, 11) На клетчатой доске размером $2 \times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной.

Пусть A_n — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения $A_n - B_n$.

17