

1. Результаты численных экспериментов

Зададим функцию $u(x)$ с большими градиентами:

$$u(x) = e^{-x/\varepsilon} + \cos \frac{\pi x}{2}, \quad x \in [0, 1].$$

Вычислим $u(x + \delta)$, предполагая, что $\delta > 0$, на основе применения классического разложения в ряд Тейлора и модифицированного разложения в ряд Тейлора. Классическое разложение в ряд Тейлора:

$$u(x) \approx G_k(u, x) = \sum_{j=0}^k \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Модифицированное разложение:

$$u(x) \approx G_k(u, x) = \sum_{j=0}^k \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \left[\Phi(x) - \sum_{j=0}^k \frac{\Phi^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j \right] \frac{u^{(k+1)}(x_0)}{\Phi^{(k+1)}(x_0)}.$$

Оценим погрешности вычисления $u(x + \delta)$ для классической формулы Тейлора:

$$\Delta_1^k = u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \dots - \frac{\delta^k}{k!} u^{(k)}(x),$$

и для модифицированной формулы:

$$\Delta_2^k = u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \dots - \frac{\delta^k}{k!} u^{(k)}(x) - \left[\Phi(x + \delta) - \Phi(x) - \Phi'(x)\delta - \dots - \frac{\Phi^{(k)}(x)}{k!} \delta^k \right] \frac{u^{(k+1)}(x)}{\Phi^{(k+1)}(x)}.$$

Тогда для $k = 1$:

$$\Delta_1^1 = \left| u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) \right|.$$

$$\Delta_2^1 = \left| u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - (\Phi(x + \delta) - \Phi(x) - \Phi'(x)\delta) \frac{u''(x)}{\Phi''(x)} \right|.$$

Для $k = 2$:

$$\Delta_1^2 = \left| u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \frac{\delta^2}{2} u''(x) \right|.$$

$$\Delta_2^2 = \left| u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \frac{\delta^2}{2} u''(x) - (\Phi(x + \delta) - \Phi(x) - \Phi'(x)\delta - \Phi''(x)\frac{\delta^2}{2}) \frac{u'''(x)}{\Phi'''(x)} \right|.$$

При сравнении полученных результатов мы видим существенный выигрыш модифицированной формулы Тейлора при возрастании градиента решения:

1. Модифицированная формула Тейлора значительно точнее классической. Во всех случаях (для разных значений ε и δ) погрешность Δ_τ (модифицированная формула) меньше, чем Δ_t (классическая формула).
2. Классическая формула Тейлора неустойчива при малых ε .
3. Модифицированная формула сохраняет точность даже для малых δ .

Табл. 1

Погрешность вычисления $u(x + \delta)$ в точке $x = 0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу)

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$7.47e-03$	$7.35e-05$	$7.34e-07$	$7.34e-09$	$7.34e-11$
	$3.76e-04$	$4.08e-07$	$4.11e-10$	$4.11e-13$	$4.44e-16$
10^{-1}	$3.56e-01$	$4.71e-03$	$4.86e-05$	$4.87e-07$	$4.88e-09$
	$3.23e-03$	$4.01e-06$	$4.10e-09$	$4.11e-12$	$4.22e-15$
10^{-2}	$8.99e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$	$4.98e-05$	$5.00e-07$
	$1.01e-02$	$3.26e-05$	$4.01e-08$	$4.10e-11$	$4.11e-14$
10^{-3}	$9.90e+01$	$9.00e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$	$4.98e-05$
	$1.21e-02$	$1.01e-04$	$3.26e-07$	$4.01e-10$	$4.10e-13$
10^{-4}	$9.99e+02$	$9.90e+01$	$9.00e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$
	$1.23e-02$	$1.21e-04$	$1.01e-06$	$3.26e-09$	$4.01e-12$

Табл. 2

Погрешность вычисления $u(x + \delta)$ в точке $x = 0$ с использованием формулы Тейлора третьего порядка Δ_1^2 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_1^2 (внизу)

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$1.37e-04$	$1.64e-07$	$1.66e-10$	$1.67e-13$	$2.22e-16$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-1}	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$	$1.67e-10$	$1.67e-13$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-2}	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$	$1.67e-10$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$0.00e+00$
10^{-3}	$4.90e+03$	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-4}	$4.99e+05$	$4.90e+03$	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.50e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$