

1. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим численно дифференцируемую функцию $u(x)$ с большими градиентами, представимую в виде:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [0, 1],$$

где $p(x)$ - регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, $\Phi(x)$ - погранслойная составляющая, являющаяся функцией общего вида и имеющая большие градиенты, γ - константа.

Вычислим $u(x + \delta)$, предполагая, что $\delta > 0$, на основе применения классического разложения в ряд Тейлора и модифицированного разложения в ряд Тейлора. Классическое разложение в ряд Тейлора:

$$u(x) \approx G_k(u, x) = \sum_{j=0}^k \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Модифицированное разложение:

$$u(x) \approx G_k(u, x) = \sum_{j=0}^k \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \left[\Phi(x) - \sum_{j=0}^k \frac{\Phi^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j \right] \frac{u^{(k+1)}(x_0)}{\Phi^{(k+1)}(x_0)}.$$

Оценим погрешности вычисления $u(x + \delta)$ для классической формулы Тейлора:

$$\Delta_1^k = u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \dots - \frac{\delta^k}{k!} u^{(k)}(x),$$

и для модифицированной формулы:

$$\Delta_2^k = u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \dots - \frac{\delta^k}{k!} u^{(k)}(x) - \left[\Phi(x + \delta) - \Phi(x) - \Phi'(x)\delta - \dots - \frac{\Phi^{(k)}(x)}{k!} \delta^k \right] \frac{u^{(k+1)}(x)}{\Phi^{(k+1)}(x)}.$$

Тогда для $k = 1$:

$$\Delta_1^1 = \left| u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) \right|.$$

$$\Delta_2^1 = \left| u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \left(\Phi(x + \delta) - \Phi(x) - \Phi'(x)\delta \right) \frac{u''(x)}{\Phi''(x)} \right|.$$

Для $k = 2$:

$$\Delta_1^2 = \left| u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \frac{\delta^2}{2} u''(x) \right|.$$

$$\Delta_2^2 = \left| u(x + \delta) - u(x) - \delta u'(x) - \frac{\delta^2}{2} u''(x) - \left(\Phi(x + \delta) - \Phi(x) - \Phi'(x)\delta - \Phi''(x)\frac{\delta^2}{2} \right) \frac{u'''(x)}{\Phi'''(x)} \right|.$$

Табл. 1

Погрешность вычисления $u(x + \delta)$ в точке $x = 0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + e^{-x/\varepsilon}$, $x \in [0, 1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$7.47e-03$	$7.35e-05$	$7.34e-07$	$7.34e-09$	$7.34e-11$
	$3.76e-04$	$4.08e-07$	$4.11e-10$	$4.11e-13$	$4.44e-16$
10^{-1}	$3.56e-01$	$4.71e-03$	$4.86e-05$	$4.87e-07$	$4.88e-09$
	$3.23e-03$	$4.01e-06$	$4.10e-09$	$4.11e-12$	$4.22e-15$
10^{-2}	$8.99e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$	$4.98e-05$	$5.00e-07$
	$1.01e-02$	$3.26e-05$	$4.01e-08$	$4.10e-11$	$4.11e-14$
10^{-3}	$9.90e+01$	$9.00e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$	$4.98e-05$
	$1.21e-02$	$1.01e-04$	$3.26e-07$	$4.01e-10$	$4.10e-13$
10^{-4}	$9.99e+02$	$9.90e+01$	$9.00e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$
	$1.23e-02$	$1.21e-04$	$1.01e-06$	$3.26e-09$	$4.01e-12$

Табл. 2

Погрешность вычисления $u(x + \delta)$ в точке $x = 0$ с использованием формулы Тейлора третьего порядка Δ_1^2 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_1^2 (внизу), $u(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + e^{-x/\varepsilon}$, $x \in [0, 1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$1.37e-04$	$1.64e-07$	$1.66e-10$	$1.67e-13$	$2.22e-16$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-1}	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$	$1.67e-10$	$1.67e-13$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-2}	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$	$1.67e-10$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$0.00e+00$
10^{-3}	$4.90e+03$	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-4}	$4.99e+05$	$4.90e+03$	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.50e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$

Табл. 3

Погрешность вычисления $u(x + \delta)$ в точке $x = 0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + \sqrt{x + \varepsilon}$, $x \in [0, 1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$1.35e-02$	$1.36e-04$	$1.36e-06$	$1.36e-08$	$1.36e-10$
	$5.55e-04$	$6.10e-07$	$6.16e-10$	$6.16e-13$	$4.44e-16$
10^{-1}	$3.94e-02$	$5.00e-04$	$5.17e-06$	$5.18e-08$	$5.19e-10$
	$3.84e-03$	$5.81e-06$	$6.13e-09$	$6.16e-12$	$6.22e-15$
10^{-2}	$2.81e-01$	$8.70e-03$	$1.20e-04$	$1.26e-06$	$1.26e-08$
	$9.66e-03$	$3.87e-05$	$5.81e-08$	$6.13e-11$	$6.20e-14$
10^{-3}	$1.31e+00$	$8.50e-02$	$2.71e-03$	$3.77e-05$	$3.93e-07$
	$1.19e-02$	$9.69e-05$	$3.87e-07$	$5.81e-10$	$6.13e-13$
10^{-4}	$4.71e+00$	$4.10e-01$	$2.68e-02$	$8.58e-04$	$1.19e-05$
	$1.23e-02$	$1.19e-04$	$9.69e-07$	$3.87e-09$	$5.81e-12$

Табл. 4

Погрешность вычисления $u(x + \delta)$ в точке $x = 0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + \sqrt{x + \varepsilon}$, $x \in [0, 1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$8.42e-05$	$6.46e-08$	$6.27e-11$	$6.22e-14$	$0.00e+00$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$4.44e-16$	$0.00e+00$
10^{-1}	$1.24e-02$	$1.86e-05$	$1.96e-08$	$1.98e-11$	$1.95e-14$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-2}	$9.82e-01$	$3.92e-03$	$5.88e-06$	$6.21e-09$	$6.25e-12$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$0.00e+00$	$2.22e-16$
10^{-3}	$3.82e+01$	$3.10e-01$	$1.24e-03$	$1.86e-06$	$1.96e-09$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$0.00e+00$
10^{-4}	$1.25e+03$	$1.21e+01$	$9.82e-02$	$3.92e-04$	$5.88e-07$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$0.00e+00$	$2.22e-16$

Табл. 5

Погрешность вычисления $u(x + \delta)$ в точке $x = 0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + \ln(x + \varepsilon)$, $x \in [0, 1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$1.70e - 02$	$1.73e - 04$	$1.73e - 06$	$1.73e - 08$	$1.73e - 10$
	$7.40e - 04$	$8.14e - 07$	$8.22e - 10$	$8.22e - 13$	$1.11e - 15$
10^{-1}	$3.19e - 01$	$4.81e - 03$	$5.09e - 05$	$5.12e - 07$	$5.12e - 09$
	$4.74e - 03$	$7.65e - 06$	$8.16e - 09$	$8.22e - 12$	$8.44e - 15$
10^{-2}	$7.61e + 00$	$3.07e - 01$	$4.69e - 03$	$4.97e - 05$	$5.00e - 07$
	$1.04e - 02$	$4.77e - 05$	$7.65e - 08$	$8.16e - 11$	$8.22e - 14$
10^{-3}	$9.54e + 01$	$7.60e + 00$	$3.07e - 01$	$4.69e - 03$	$4.97e - 05$
	$1.21e - 02$	$1.05e - 04$	$4.77e - 07$	$7.65e - 10$	$8.16e - 13$
10^{-4}	$9.93e + 02$	$9.54e + 01$	$7.60e + 00$	$3.07e - 01$	$4.69e - 03$
	$1.23e - 02$	$1.21e - 04$	$1.05e - 06$	$4.77e - 09$	$7.65e - 12$

Табл. 6

Погрешность вычисления $u(x + \delta)$ в точке $x = 0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + \ln(x + \varepsilon)$, $x \in [0, 1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$3.36e - 04$	$3.33e - 07$	$3.33e - 10$	$3.33e - 13$	$2.22e - 16$
	$2.53e - 05$	$2.54e - 09$	$2.54e - 13$	$0.00e + 00$	$2.22e - 16$
10^{-1}	$1.93e - 01$	$3.10e - 04$	$3.31e - 07$	$3.33e - 10$	$3.33e - 13$
	$2.53e - 05$	$2.54e - 09$	$2.53e - 13$	$2.22e - 16$	$2.22e - 16$
10^{-2}	$4.24e + 01$	$1.93e - 01$	$3.10e - 04$	$3.31e - 07$	$3.33e - 10$
	$2.53e - 05$	$2.54e - 09$	$2.54e - 13$	$0.00e + 00$	$0.00e + 00$
10^{-3}	$4.90e + 03$	$4.24e + 01$	$1.93e - 01$	$3.10e - 04$	$3.31e - 07$
	$2.53e - 05$	$2.54e - 09$	$2.53e - 13$	$0.00e + 00$	$0.00e + 00$
10^{-4}	$4.99e + 05$	$4.90e + 03$	$4.24e + 01$	$1.93e - 01$	$3.10e - 04$
	$2.53e - 05$	$2.54e - 09$	$2.50e - 13$	$8.88e - 16$	$0.00e + 00$

При сравнении полученных результатов мы видим существенный выигрыш модифицированной формулы Тейлора при возрастании градиента решения:

1. Модифицированная формула Тейлора значительно точнее классической. Во всех случаях (для разных значений ε и δ) погрешность Δ_τ (модифицированная формула) меньше, чем Δ_t (классическая формула).
2. Классическая формула Тейлора неустойчива при малых ε .
3. Модифицированная формула сохраняет точность даже для малых δ .