1. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим численно дифференцируемую функцию $u(x)$ с большими градиентами, представимую в виде:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [0,1],$$

где $p(x)$- регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, $\Phi(x)$ - погранслойная составляющая, являющаяся функцией общего вида и имеющая большие градиенты, γ - константа.
Вычислим $u(x+\delta)$, предполагая, что $\delta > 0$, на основе применения классического разложения в ряд Тейлора и модифицированного разложения в ряд Тейлора. Классическое разложение в ряд Тейлора:

$$u(x) \approx G_k(u,x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Модифицированное разложение:

$$u(x) \approx G_k(u,x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \Big[\Phi(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\Phi^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j\Big] \frac{u^{(k+1)}(x_0)}{\Phi^{(k+1)}(x_0)}.$$

Оценим погрешности вычисления $u(x+\delta)$ для классической формулы Тейлора:

$$\Delta_1^k = u(x+\delta) - u(x) - \delta u'(x) - ... - \frac{\delta^k}{k!}u^{(k)}(x),$$

и для модифицированной формулы:

$$\Delta_2^k = u(x+\delta) - u(x) - \delta u'(x) - ... - \frac{\delta^k}{k!}u^{(k)}(x) - \Big[\Phi(x+\delta) - \Phi(x) - \Phi^{'}(x)\delta - ... - \frac{\Phi^{(k)}(x)}{k!}\delta^k\Big] \frac{u^{(k+1)}(x)}{\Phi^{(k+1)}(x)}.$$

Тогда для $k = 1$:

$$\Delta_1^1 = \Big|u(x+\delta) - u(x) - \delta u'(x)\Big|.$$

$$\Delta_2^1 = \Big|u(x+\delta) - u(x) - \delta u'(x) - (\Phi(x+\delta) - \Phi(x) - \Phi^{'}(x)\delta)\frac{u^{''}(x)}{\Phi''(x)}\Big|.$$

Для $k = 2$:

$$\Delta_1^2 = \Big|u(x+\delta) - u(x) - \delta u'(x) - \frac{\delta^2}{2}u''(x)\Big|.$$

$$\Delta_2^2 = \Big|u(x+\delta) - u(x) - \delta u'(x) - \frac{\delta^2}{2}u''(x) - (\Phi(x+\delta) - \Phi(x) - \Phi^{'}(x)\delta - \Phi^{''}(x)\frac{\delta^2}{2})\frac{u^{'''}(x)}{\Phi'''(x)}\Big|.$$

Табл. 1

Погрешность вычисления $u(x+\delta)$ в точке $x=0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1(внизу), $u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+e^{-x/\varepsilon}$, $x\in[0,1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$7.47e-03$	$7.35e-05$	$7.34e-07$	$7.34e-09$	$7.34e-11$
	$3.76e-04$	$4.08e-07$	$4.11e-10$	$4.11e-13$	$4.44e-16$
10^{-1}	$3.56e-01$	$4.71e-03$	$4.86e-05$	$4.87e-07$	$4.88e-09$
	$3.23e-03$	$4.01e-06$	$4.10e-09$	$4.11e-12$	$4.22e-15$
10^{-2}	$8.99e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$	$4.98e-05$	$5.00e-07$
	$1.01e-02$	$3.26e-05$	$4.01e-08$	$4.10e-11$	$4.11e-14$
10^{-3}	$9.90e+01$	$9.00e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$	$4.98e-05$
	$1.21e-02$	$1.01e-04$	$3.26e-07$	$4.01e-10$	$4.10e-13$
10^{-4}	$9.99e+02$	$9.90e+01$	$9.00e+00$	$3.68e-01$	$4.84e-03$
	$1.23e-02$	$1.21e-04$	$1.01e-06$	$3.26e-09$	$4.01e-12$

Табл. 2

Погрешность вычисления $u(x+\delta)$ в точке $x=0$ с использованием формулы Тейлора третьего порядка Δ_1^2 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_1^2(внизу), $u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+e^{-x/\varepsilon}$, $x\in[0,1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$1.37e-04$	$1.64e-07$	$1.66e-10$	$1.67e-13$	$2.22e-16$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-1}	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$	$1.67e-10$	$1.67e-13$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-2}	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$	$1.67e-10$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$0.00e+00$
10^{-3}	$4.90e+03$	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$	$1.66e-07$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-4}	$4.99e+05$	$4.90e+03$	$4.10e+01$	$1.32e-01$	$1.63e-04$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.50e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$

Табл. 3

Погрешность вычисления $u(x+\delta)$ в точке $x=0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+\sqrt{(x+\varepsilon)}$, $x\in[0,1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$1.35e-02$	$1.36e-04$	$1.36e-06$	$1.36e-08$	$1.36e-10$
	$5.55e-04$	$6.10e-07$	$6.16e-10$	$6.16e-13$	$4.44e-16$
10^{-1}	$3.94e-02$	$5.00e-04$	$5.17e-06$	$5.18e-08$	$5.19e-10$
	$3.84e-03$	$5.81e-06$	$6.13e-09$	$6.16e-12$	$6.22e-15$
10^{-2}	$2.81e-01$	$8.70e-03$	$1.20e-04$	$1.26e-06$	$1.26e-08$
	$9.66e-03$	$3.87e-05$	$5.81e-08$	$6.13e-11$	$6.20e-14$
10^{-3}	$1.31e+00$	$8.50e-02$	$2.71e-03$	$3.77e-05$	$3.93e-07$
	$1.19e-02$	$9.69e-05$	$3.87e-07$	$5.81e-10$	$6.13e-13$
10^{-4}	$4.71e+00$	$4.10e-01$	$2.68e-02$	$8.58e-04$	$1.19e-05$
	$1.23e-02$	$1.19e-04$	$9.69e-07$	$3.87e-09$	$5.81e-12$

Табл. 4

Погрешность вычисления $u(x+\delta)$ в точке $x=0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+\sqrt{(x+\varepsilon)}$, $x\in[0,1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$8.42e-05$	$6.46e-08$	$6.27e-11$	$6.22e-14$	$0.00e+00$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$4.44e-16$	$0.00e+00$
10^{-1}	$1.24e-02$	$1.86e-05$	$1.96e-08$	$1.98e-11$	$1.95e-14$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-2}	$9.82e-01$	$3.92e-03$	$5.88e-06$	$6.21e-09$	$6.25e-12$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$0.00e+00$	$2.22e-16$
10^{-3}	$3.82e+01$	$3.10e-01$	$1.24e-03$	$1.86e-06$	$1.96e-09$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$2.22e-16$	$0.00e+00$
10^{-4}	$1.25e+03$	$1.21e+01$	$9.82e-02$	$3.92e-04$	$5.88e-07$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$0.00e+00$	$2.22e-16$

Табл. 5

Погрешность вычисления $u(x+\delta)$ в точке $x=0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+\log(x+\varepsilon),\quad x\in[0,1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$1.70e-02$	$1.73e-04$	$1.73e-06$	$1.73e-08$	$1.73e-10$
	$7.40e-04$	$8.14e-07$	$8.22e-10$	$8.22e-13$	$1.11e-15$
10^{-1}	$3.19e-01$	$4.81e-03$	$5.09e-05$	$5.12e-07$	$5.12e-09$
	$4.74e-03$	$7.65e-06$	$8.16e-09$	$8.22e-12$	$8.44e-15$
10^{-2}	$7.61e+00$	$3.07e-01$	$4.69e-03$	$4.97e-05$	$5.00e-07$
	$1.04e-02$	$4.77e-05$	$7.65e-08$	$8.16e-11$	$8.22e-14$
10^{-3}	$9.54e+01$	$7.60e+00$	$3.07e-01$	$4.69e-03$	$4.97e-05$
	$1.21e-02$	$1.05e-04$	$4.77e-07$	$7.65e-10$	$8.16e-13$
10^{-4}	$9.93e+02$	$9.54e+01$	$7.60e+00$	$3.07e-01$	$4.69e-03$
	$1.23e-02$	$1.21e-04$	$1.05e-06$	$4.77e-09$	$7.65e-12$

Табл. 6

Погрешность вычисления $u(x+\delta)$ в точке $x=0$ с использованием формулы Тейлора второго порядка Δ_1^1 (вверху) и с использованием модифицированной формулы Тейлора Δ_2^1 (внизу), $u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+\log(x+\varepsilon),\quad x\in[0,1]$.

ε	δ				
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	$3.36e-04$	$3.33e-07$	$3.33e-10$	$3.33e-13$	$2.22e-16$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$0.00e+00$	$2.22e-16$
10^{-1}	$1.93e-01$	$3.10e-04$	$3.31e-07$	$3.33e-10$	$3.33e-13$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.53e-13$	$2.22e-16$	$2.22e-16$
10^{-2}	$4.24e+01$	$1.93e-01$	$3.10e-04$	$3.31e-07$	$3.33e-10$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.54e-13$	$0.00e+00$	$0.00e+00$
10^{-3}	$4.90e+03$	$4.24e+01$	$1.93e-01$	$3.10e-04$	$3.31e-07$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.53e-13$	$0.00e+00$	$0.00e+00$
10^{-4}	$4.99e+05$	$4.90e+03$	$4.24e+01$	$1.93e-01$	$3.10e-04$
	$2.53e-05$	$2.54e-09$	$2.50e-13$	$8.88e-16$	$0.00e+00$

При сравнении полученных результатов мы видим существенный выигрыш модифицированной формулы Тейлора при возрастании градиента решения:

1. Модифицированная формула Тейлора значительно точнее классической.
Во всех случаях (для разных значений ε и δ) погрешность Δ_τ (модифицированная формула) меньше, чем Δ_t (классическая формула).
2. Классическая формула Тейлора неустойчива при малых ε.
3. Модифицированная формула сохраняет точность даже для малых δ.