удовлетворяющие условию (1).

Исследуем на дифференцируемость эти функции при $x=0$. С этой целью вычислим $\varphi'_-(0)$. Имеем

$$\varphi'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}}-\Delta x^2-\frac{a^2}{2}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}-\Delta x^4-\Delta x^2a^2-\frac{a^4}{4}}}{\Delta x\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}}+\Delta x^2+\frac{a^2}{2}}}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|\Delta x|\sqrt{a^2-\Delta x^2}}{\Delta x\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}}+\Delta x^2+\frac{a^2}{2}}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\sqrt{a^2-\Delta x^2}}{\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2+\frac{a^4}{4}}+\Delta x^2+\frac{a^2}{2}}}=-1.$$

Аналогично находим $\varphi'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}{\Delta x}=1$. Отсюда сразу следует, что функции y_3 и y_4 не имеют производной при $x=0$. Поскольку $y'_{1-}(0)=-\varphi'_-(0)=1, y'_{1+}(0)=\varphi'_+(0)=1$, то функция y_1 имеет производную при $x=0$, равную единице. Аналогично из равенств $y'_2(0)=\varphi'(0)=-1$, $y'_{2+}(0)=-\varphi'_+(0)=-1$ следует дифференцируемость функции y_2 при $x=0$, причем $y'_2(0)=-1$. ►

100. Найти y' при $x=0$ и $y=0$, если

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3. \tag{1}$$

◄ Представим кривую, определяемую уравнением (1), в параметрическом виде. С этой целью положим $y=tx$. Тогда из уравнения (1) найдем $x=\frac{3t^2-t^3}{(1+t^2)^2}$. Подставив найденное значение x в равенство $y=tx$, получим $y=\frac{3t-t^3}{(1+t^2)^2}$. Заметим, что $x=0$ и $y=0$ при трех значениях параметра $t: t_1=0,\ t_2=\sqrt{3},\ t_3=-\sqrt{3}$. Остается вычислить производную от параметрически заданной функции при этих значениях параметра, т.е. при $x=0$. Имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+t^2)(6t-4t^3)-4t(3t^2-t^4)}{(1+t^2)(3-3t^2)-4t(3t-t^3)}.$$

Отсюда при $t=0$, $t=\sqrt{3}$ и $t=-\sqrt{3}$ находим

$$y'_1(0)=0,\ y_2(\sqrt{3})=\sqrt{3},\ y'_3(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}. ►$$

101. Найти y', y'' и y''', если $x^2+xy+y^2=3$.

◄ Пользуясь формулой $\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}$, получаем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y},\quad x\neq -2y;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(x+2y)(2+y')-(2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}=-\frac{18}{(x+2y)^3},\quad x\neq -2y;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{54}{(x+2y)^4}(1+2y')=-\frac{162x}{(x+2y)^5},\quad x\neq -2y; ►$$

102. Найти y', y'' и y''' при $x=0$, $y=1$, если

$$x^2-xy+2y^2+x-y-1=0. \tag{1}$$

◄ Трижды дифференцируя равенство (1):

$$2x-y-xy'+4yy'+1-y'=0,$$

$$2-2y'-xy''+4y'^2+4yy''-y''=0,$$

$$-3y''-xy'''+12y'y''+4yy'''-y'''=0$$

и подставляя в результаты значения $x = 0$ и $y = 1$, получаем систему уравнений $3y' = 0$, $2 + 3y'' = 0$, $2 + 3y''' = 0$, из которой находим $y' = 0$, $y'' = -\frac{2}{3}$, $y''' = -\frac{2}{3}$. ►

103. Доказать, что для кривой второго порядка

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

справедливо равенство

$$\frac{d^3}{dx^3}\left((y'')^{-\frac{2}{3}}\right) = 0. \tag{1}$$

◄ Из уравнения кривой получаем

$$y = \frac{1}{c}\left(-(bx+e) \pm \sqrt{(b^2-ac)x^2 + 2(be-cd)x + e^2 - cf}\right).$$

Находим вторую производную:

$$y' = \frac{1}{c}\left(-b \pm \frac{(b^2-ac)x + (be-cd)}{\sqrt{(b^2-ac)x^2 + 2(be-cd)x + e^2 - cf}}\right),$$

$$y'' = \pm\frac{1}{c}\frac{(b^2-ac)(e^2-cf) - (be-cd)^2}{\sqrt{((b^2-ac)x^2 + 2(be-cd)x + e^2 - cf)^3}}.$$

Отсюда получаем равенство

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = \left(\pm\frac{(b^2-ac)(e^2-cf) - (be-cd)^2}{c}\right)^{-\frac{2}{3}} ((b^2-ac)x^2 + 2(be-cd) + e^2 - cf),$$

из которого следует равенство (1). ►

Для функции $z = z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если:

104. $z^3 - 3xyz = a^3$.

◄ Частные производные функции z, определяемой уравнениям $F(x, y, z) = 0$, находим по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

Для нашего случая имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}, \quad z^2 \neq xy.$$

Учитывая, что $z = z(x, y)$, находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(z^2-xy)y\frac{\partial z}{\partial x} - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)}{(z^2-xy)^2} = \frac{(z^2-xy)\frac{yz}{z^2-xy} - yz\left(2z\frac{yz}{z^2-xy} - y\right)}{(z^2-xy)^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2yx^3z}{(x^2-xy)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{(z^2-xy)\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2-xy)^2} =$$

$$= \frac{(z^2-xy)\left(z + \frac{xyz}{x^2-xy}\right) - yz\left(\frac{2xz^2}{z^2-xy} - x\right)}{(z^2-xy)^2} = \frac{z(z^4 - 2z^2xy - x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}, \quad z^2 \neq xy. ►$$

105. $z = \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.