

## UNIVERSIDAD ESTATAL DE MILAGRO



### FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

#### DOCENTE:

JULIO CESAR VILLAVICENCIO

#### MATERIA:

Cálculo

#### TEMA DE TAREA:

Ejercicios de Integrales

#### INTEGRANTES:

Jordy David Pincay Murillo

Frank Giancarlo Borja Zalamea

Sergio Jesús Sánchez Castillo

Patrick Gabriel Villegas Terán

Miguel Ángel García Galarza

#### CURSO:

A1

## Contenido

1.	Introducción .....	3
2.	Objetivos .....	3
2.1	<b>Objetivo General:</b> .....	3
2.2	<b>Objetivos Específicos:</b> .....	3
3.	Volúmenes de sólidos de revolución .....	4
3.1	<b>Método del disco:</b> .....	5
	Fórmula del volumen por discos .....	6
3.2	<b>Método Arandela:</b> .....	6
	Métodos de Arandela .....	7
3.3	<b>Método de los Cascarones:</b> .....	8
	FÓRMULA PARA EL VOLUMEN .....	8
	ROTACIÓN ALREDEDOR DE EJES VERTICALES. ....	9
	ROTACIÓN ALREDEDOR DE EJES HORIZONTALES .....	9

## 1. Introducción

El cálculo de volúmenes de sólidos de revolución implica la integración de secciones transversales del sólido. El resultado final es una función matemática que representa el volumen total del sólido. Los métodos más comunes para calcular el volumen de un sólido de revolución son el método del disco y el método del cascarón.

El cálculo de volúmenes de sólidos de revolución es un tema importante en cálculo integral y es fundamental para el estudio de muchas áreas de la matemática y la física. Además, la comprensión de esta técnica es crucial para el diseño y la construcción de muchas estructuras, desde puentes y edificios hasta piezas de maquinaria complejas.

## 2. Objetivos

### 2.1 Objetivo General:

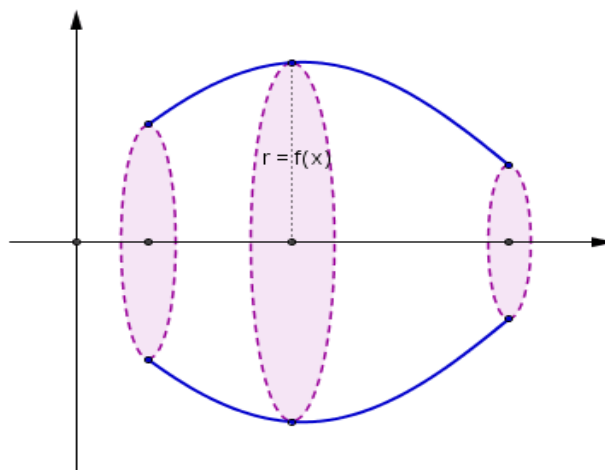
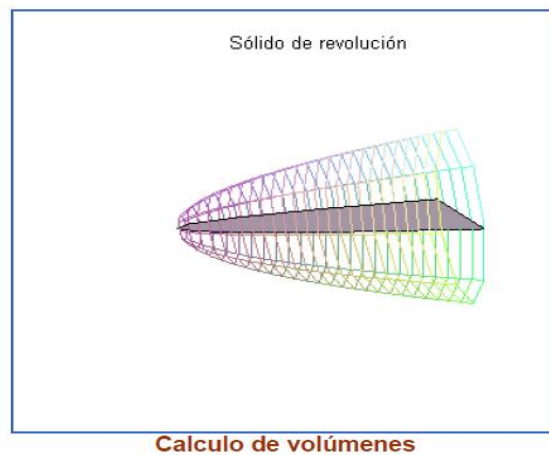
El objetivo es que el estudiante pueda utilizar este conocimiento para resolver problemas en situaciones reales y abstractas, relacionados con la ingeniería, arquitectura y otras áreas de aplicación, mejorando así su capacidad de análisis y resolución de problemas en general. Además, se espera que el estudiante pueda comprender la importancia y utilidad de este tema en el cálculo y su relación con otros temas y aplicaciones matemáticas. Para lograr este objetivo, se llevará a cabo un estudio exhaustivo del concepto de sólidos de revolución y su aplicación en el cálculo integral.

### 2.2 Objetivos Específicos:

Identificar los diferentes tipos de sólidos de revolución y cómo obtenerlos a partir de una región plana. Comprender los conceptos fundamentales de las integrales definidas y su relación con el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Aplicar las técnicas de integración para encontrar el volumen de sólidos de revolución alrededor de diferentes ejes utilizando tanto el método de discos como el de arandelas. Resolver problemas que involucren la determinación de volúmenes de sólidos de revolución en situaciones reales, como la construcción de tanques, bombas y otros dispositivos. Utilizar la geometría analítica para determinar las ecuaciones de las curvas generatrices y los ejes de rotación para facilitar la aplicación de las técnicas de integración en el cálculo de los volúmenes de sólidos de revolución. Comprender la importancia y utilidad de los volúmenes de sólidos de revolución en otras áreas del cálculo, como la longitud de arcos y la superficie de revolución. Resolver problemas de optimización que involucren el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, como determinar la forma de un contenedor que maximice su capacidad.

### 3. Volúmenes de sólidos de revolución

Los volúmenes de sólidos de revolución son un tema importante en el cálculo integral. Se refieren al cálculo del volumen de un sólido obtenido al girar una figura plana alrededor de un eje. El proceso para calcular el volumen de un sólido de revolución implica integrar una función en el intervalo apropiado. Hay dos métodos principales para calcular volúmenes de sólidos de revolución: el método de discos y el método de arandelas. Los sólidos de revolución son sólidos que se generan al girar una región plana alrededor de un eje. Por ejemplo: el cono es un sólido que resulta al girar un triángulo recto alrededor de uno de sus catetos, el cilindro surge al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Los volúmenes de sólidos de revolución son importantes en cálculo porque nos permiten calcular el volumen de un sólido tridimensional que se forma al girar una figura plana alrededor de un eje. Este cálculo es útil en muchas aplicaciones prácticas, como en la construcción y el diseño de objetos, en la ingeniería, en la física y en la química.



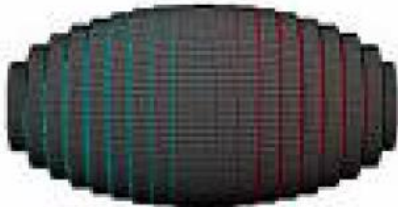
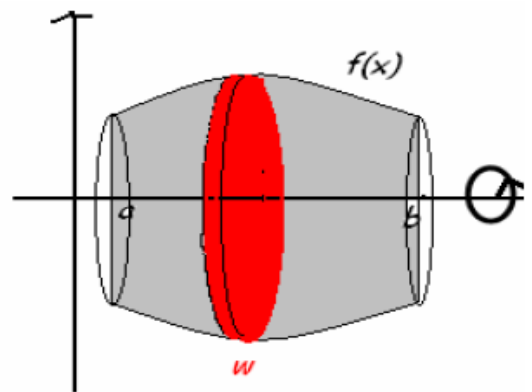
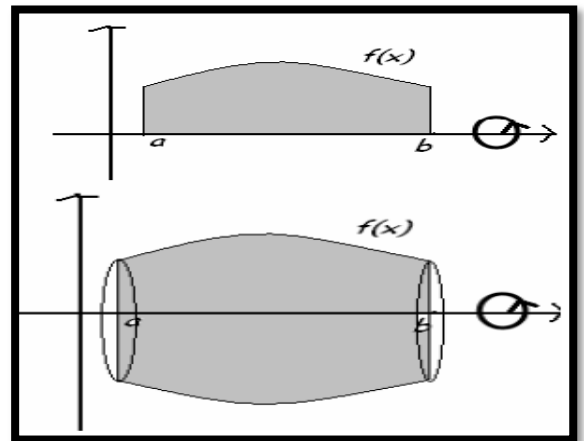
**3.1 Método del disco:** Este método se utiliza para encontrar el volumen de un sólido generado por la rotación de una curva alrededor de un eje, donde las secciones transversales del sólido son discos. Para utilizar este método, se divide la curva en intervalos pequeños, y para cada intervalo se calcula el área de un disco generado por la rotación de una sección transversal. Luego, se integra el resultado de todas las secciones transversales para obtener el volumen total del sólido.

Si giramos una región del plano alrededor de un eje obtenemos un sólido de revolución. El volumen de este disco de radio  $R$  y de anchura  $w$  es:

$$\text{Volumen del disco} = \pi R^2 w$$

Para ver cómo usar el volumen del disco y para calcular el volumen de un sólido de revolución general, se hacen  $n$  particiones en la gráfica.

Estas divisiones determinan en el sólido  $n$  discos cuya suma se aproxima al volumen del mismo. Teniendo en cuenta que el volumen de un disco es, la suma de Riemann asociada a la partición, y que da un volumen aproximado del sólido es:  $\pi R^2 w$



### Fórmula del volumen por discos

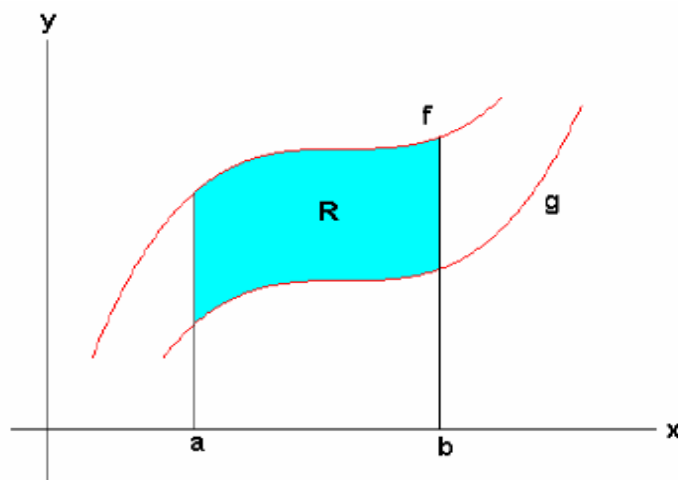
Por tanto, recordando la definición de integral definida de Riemann se obtiene que:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

**3.2 Método Arandela:** Este método consiste en hallar el volumen de un sólido generado al girar una región R que se encuentra entre dos curvas.

El método de la arandela es un enfoque para calcular volúmenes de sólidos de revolución mediante la integración de secciones transversales cilíndricas del sólido. Este método es similar al método del disco, pero en lugar de utilizar discos, se utilizan anillos o arandelas para aproximar la sección transversal del sólido.

El método de la arandela se utiliza para encontrar el volumen de un sólido de revolución generado por la rotación de una curva alrededor de un eje. Para utilizar este método, se divide la curva en intervalos pequeños y se aproxima cada sección transversal con una arandela cilíndrica de espesor  $\Delta x$ .



Sí la región que giramos para formar un sólido no toca o no cruza el eje de rotación, el sólido generado tendrá un hueco o agujero. Las secciones transversales que también son perpendiculares al eje de rotación son arandelas en lugar de discos. (Es por esto el nombre del método).

### Métodos de Arandela

- Si se gira esta región alrededor del eje x entonces el volumen del solido resultante es:

$$Vf(x) = \int_a^b \pi [Re^2 - Ri^2] dx$$

Donde:

$Re =$  Radio del disco mayor o el externo  $\rightarrow f(x)$

$Ri =$  Radio del disco menor o el interno  $\rightarrow g(x)$

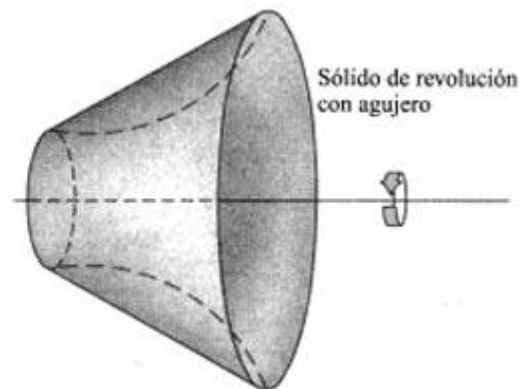
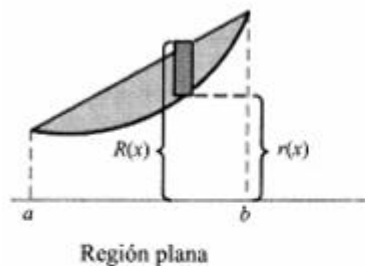
- Sí se gira esta región alrededor del eje y entonces el volumen del solido resultante es:

$$Vf(y) = \int_a^b \pi [Re^2 - Ri^2] dy$$

Donde:

$Re =$  Radio del disco mayor o el externo  $\rightarrow f(x)$

$Ri =$  Radio del disco menor o el interno  $\rightarrow g(x)$





**3.3 Método de los Cascarones:** El método de los cascarones, también conocido como el método de las capas o de la cascara, es una técnica utilizada en cálculo para encontrar la integral de una función de varias variables. Este método se basa en la idea de integrar una función a través de "cascarones" o capas concéntricas alrededor del origen.

El método de los cascarones se utiliza principalmente para calcular integrales de funciones radiales, que son aquellas en las que el valor de la función depende únicamente de la distancia al origen. Por lo tanto, el método puede ser aplicado a funciones de la forma  $f(r)$ , donde  $r$  es la distancia al origen.

Consideremos la región plana determinada por la gráfica de una función  $f(x)$ , y las rectas  $x = a, x = b$ . El volumen del solido de revolución obtenido al girar dicha región alrededor de un eje vertical  $x = x_0$  viene dado por:

#### FÓRMULA PARA EL VOLUMEN

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Donde:

$$X = \text{Radio}$$

$$F(x) = \text{Altura}$$

$$Dx = \text{Espesor}$$

Si consideramos la región plana determinada por la gráfica de una función  $f(y)$ , y las rectas  $y = a, y = b$ .

El método de los cascarones es un método eficaz para calcular integrales de funciones radiales en varias variables, especialmente en coordenadas esféricas. Sin embargo, su aplicación se limita a funciones de este tipo y no es adecuado para integrales de funciones generales.



Consiste en dividir el sólido de revolución en una serie de casquetes cilíndricos que se incrustan unos dentro de otros y en integrar luego los volúmenes de estos casquetes para obtener el volumen total.

### ROTACIÓN ALREDEDOR DE EJES VERTICALES.

- Bosqueje la región determinada
- Dibuje un segmento de recta que cruce de forma paralela al eje de la revolución
- Indique la longitud (altura del cascaron)
- Indique la distancia del eje de la revolución (radio del cascaron)
- Reemplace en la fórmula

### ROTACIÓN ALREDEDOR DE EJES HORIZONTALES

- Bosqueje la región determinada
- Dibuje un segmento de la recta que cruce de forma paralela al eje de revolución
- Indique la altura del segmento, indique la distancia al eje de revolución (radio del cascaron)
- Reemplace la fórmula.

