Práctica 7: Distribuciones condicionales y esperanza condicional

Ejercicio 1.

a) Sean X e Y variables aleatorias independientes con $X \sim Bi(n,p)$ e $Y \sim Bi(m,p)$, respectivamente. Probar que $X|X+Y=k \sim \mathcal{H}(m+n,n,k)$ y hallar $E(X|X+Y=k)$.

b) Sean X e Y dos variables aleatorias definidas en un mismo espacio con $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Probar que $X|X+Y=k \sim Bi(k,p)$ para cierto $0<p<1$ si y sólo si X e Y son independientes y tienen distribución $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$, respectivamente.

Ejercicio 2. Se tienen dos urnas numeradas 0 y 1 con bolas blancas y negras, con 10 bolas cada una. La urna 0 tiene 2 bolas blancas, mientras que la urna 1 tiene 7 bolas blancas.

a) Se elige una urna al azar. Luego sacamos de ella, con reposición, 5 bolas. Definimos las variables aleatorias

$$\begin{aligned} X &= \text{ cantidad de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones.} \\ Y &= \text{ urna elegida.} \end{aligned}$$

Calcular $\mathbb{E}(X|Y=0)$, $\mathbb{E}(X|Y=1)$ y $\mathbb{E}(X)$. Compararlas entre sí.

b) Ahora cambiamos el procedimiento. Elegimos una urna al azar, y de ella extraemos 1 bola, que luego reponemos en la urna correspondiente. Luego repetimos el experimento 5 veces, de manera independiente. Sea $Z =$ cantidad de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones. Hallar $\mathbb{E}(Z)$ y compararla con la $\mathbb{E}(X)$ hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 3. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se define la varianza condicional de X dada Y como la variable aleatoria

$$\operatorname{Var}(X|Y) := \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X|Y)\big)^2 \Big| Y\Big).$$

Probar que

$$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}[E(X|Y)] + \mathbb{E}\big(\operatorname{Var}(X|Y)\big).$$

Ejercicio 4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X e Y variables aleatorias en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

a) Supongamos que (X,Y) es un vector discreto con probabilidad conjunta p_{XY}. Sea $g : \mathcal{R}_Y \to \mathbb{R}$ medible Borel tal que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ y definamos $\sigma^2 : \mathcal{R}_Y \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$\sigma^2(y) = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} (x - g(y))^2 p_{X|Y=y}(x).$$

Es decir, para cada $y \in \mathcal{R}_Y$, $\sigma^2(y)$ denota la varianza condicional de X dado el evento $\{Y=y\}$. Probar que $\operatorname{Var}(X|Y) = \sigma^2(Y)$.

b) Supongamos que (X, Y) es un vector absolutamente continuo con función de densidad conjunta f_{XY}. Si $\text{sop}(Y) = \{y \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y)\, dx > 0\}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible Borel es tal que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ definamos $\sigma^2 : \text{sop}(Y) \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$\sigma^2(y) = \int_{\mathbb{R}} (x - g(y))^2 f_{X|Y=y}(x)\, dx.$$

Probar que $\text{Var}(X|Y) = \sigma^2(Y)$.

Observación. Este ejercicio nos presenta una receta para calcular varianzas condicionales en términos de las distribuciones condicionales. Mediante la ecuación a probar en el ejercicio 3, esto nos permite calcular de manera eficiente varianzas a partir de las distribuciones condicionales.

Ejercicio 5. Sean X e Y variables aleatorias definidas en un mismo espacio con Y discreta. Probar que $E(X|Y) = g(Y)$ donde $g : \mathcal{R}_{\mathcal{Y}} \to \mathbb{R}$ se define para cada $y \in \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}$ mediante la fórmula

$$g(y) = \frac{1}{P(Y = y)} \mathbb{E}(X 1_{\{Y=y\}}).$$

Ejercicio 6. Sean X e Y variables aleatorias tales que para cada $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $P(Y \leq y|X)$ es una constante $F(y)$ que no depende de X. Probar que $F_Y(y) = F(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y que X e Y son independientes.

Ejercicio 7. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con esperanza y varianza finitas y N una variable aleatoria a valores en $\mathbb{N}$ con esperanza y varianza finitas e independiente de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Probar que $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

b) Probar que

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}(N)\text{Var}(X_1) + \mathbb{E}^2(X_1)\text{Var}(N).$$

c) El número de reclamos recibido por una compañía de seguros en una semana es una variable aleatoria Poisson de parámetro λ. El monto pagado por cada uno de esos reclamos es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Hallar la esperanza y la varianza del total pagado por la compañía en concepto de reclamos en una semana. ¿Qué hipótesis se están haciendo? ¿Son razonables?

Ejercicio 8. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias discretas independientes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Observar que S_n es una variable discreta para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Dados números naturales $k < n < m$, mostrar que S_k y S_m son condicionalmente independientes dado S_n, i.e., para todo $x_k \in \mathcal{R}_{S_k}$ y $x_m \in \mathcal{R}_{S_m}$ se verifica

$$P(S_k = x_k, S_m = x_m|S_n) = P(S_k = x_k|S_n)P(S_m = x_m|S_n).$$

Sugerencia: Mostrar que $P(S_k = x_k, S_m = x_m|S_n = x_n) = P(S_k = x_k|S_n = x_n)P(S_m = x_m|S_n = x_n)$ para todo $x_n \in \mathcal{R}_{S_n}$.

b) Mostrar que si $\mathbb{E}(X_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces dados $n < m$ se verifica $\mathbb{E}(S_m|S_n) = S_n$.

Ejercicio 9. La llegada de un tren a la estación se produce con distribución uniforme entre las 10 am y las 10:20 am. La partida del mismo se produce con distribución uniforme entre su llegada y las 11 am. Sean X la hora de llegada de dicho tren e Y la hora de su partida.

a) Calcular $\mathbb{E}(Y)$ y $\operatorname{Cov}(X,Y)$.

b) Hallar la función de densidad de Y.

c) Calcular la probabilidad de que el tren haya llegado a la estación entre las 10:10 am y las 10:15 am sabiendo que partió después de las 10:25 am.

Ejercicio 10.

a) Sean X e Y dos variables aleatorias definidas en un mismo espacio con $X+Y \sim \Gamma(2,\lambda)$ para $\lambda > 0$. Probar que $X|X+Y=z \sim \mathcal{U}[0,z]$ para todo $z>0$ si y sólo si X e Y son independientes y tienen distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

b) Sean X y Z variables aleatorias que satisfacen $Z \sim \Gamma(2,1)$ y $X|Z=z \sim \mathcal{U}[0,z]$ para todo $z>0$.

   i) Calcular $P(Z \geq 2|X \leq 1)$.

   ii) Calcular $P(Z-X \geq 2|X \leq 1)$.

Ejercicio 11. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional tal que $f_{X|Y=y}(x) = \frac{3x^2}{y^3}\mathbb{1}_{(0,y)}(x)$ y $f_Y(y) = 5y^4\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$.

a) Calcular la función de densidad del cociente $\frac{X}{Y}$ y probar que es independiente de Y sin apelar al teorema de cambio de variables.

b) Hallar la densidad condicional $f_{Y|X=x}$ para cada $x \in (0,1)$.

Ejercicio 12. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \sim \mathcal{U}[2,3]$ y para cada $y \in [2,3]$ se verifica

$$p_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{3-y}{2} & \text{si } x=-1 \\ y-2 & \text{si } x=0 \\ \frac{3-y}{2} & \text{si } x=1 \end{cases}$$

a) Hallar p_X.

b) Calcular la función de distribución $F_{Y|X=x}(y)$ para cada $x \in \mathcal{R}_X$.

Ejercicio 13. Sean X e Y variables aleatorias tales que X es discreta con distribución dada por $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{4}$ y $\mathbb{P}(X=2)=\frac{3}{4}$, y la distribución condicional de Y dada X es $\varepsilon(X)$.

a) Calcular $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$.

b) Calcular $P(X=x, Y \leq y)$ para $y>0$ y $x \in \mathcal{R}_X$.

c) Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ sea $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación medible Borel tal que $P(X=x|Y) = g_x(Y)$. Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ expresar $P(X=x, Y \leq y)$ en términos de g_x .

d) Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ calcular explícitamente $P(X=x|Y)$.