Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЁТ

по лабораторной работе №2

по дисциплине «Математическая Статистика»

на тему: «Интервальные оценки»

Студент группы ИУ7-65Б	(Подпись, дата)	Турчанинов А. М. (Фамилия И.О.)
Преподаватель	(Подпись, дата)	Власов П. А. (Фамилия И.О.)
Преподаватель	(Подпись, дата)	Саркисян П. С. (Фамилия И.О.)

Москва — 2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

    (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

    (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ - доверительного интервала для математического ожидания MX;

    (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ - доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

    (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

    (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1 Теоретическая часть

1.1 Определение γ - доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть: 1) X – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Закон распределения с.в. X известен с точностью до θ означает, что известен общий вид закона распределения с.в. X, но этот закон зависит от неизвестного параметра θ. Если задать некоторое значение θ, то закон распределения с.в. X будет известен полностью

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ - доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

1.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Статистику $\hat{\theta}(\vec{X})$ называют точечной оценкой параметра θ, если ее выборочное значение принимается в качестве параметра θ. Т.е. $\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{1.1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{1.2}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания; $S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из точечной оценки дисперсии; n – объем выборки; γ – уровень доверия; $t_{\alpha}^{St(n-1)}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{\chi^2(n-1)}} \tag{1.3}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t_{\frac{1-\gamma}{2}}^{\chi^2(n-1)}} \tag{1.4}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии; n – объем выборки; γ – уровень доверия; $t_{\alpha}^{\chi^2(n-1)}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

2 Практическая Часть

В данной части представлен листинг и результат работы программы.

2.1 Листинг программы

```
function lab2()
X = [11.89,9.60,9.29,10.06,9.50,8.93,9.58,6.81,8.69,9.62,9.01,
10.59,10.50,11.53,9.94,8.84,8.91,6.90,9.76,7.09,11.29,11.25,
10.84,10.76,7.42,8.49,10.10,8.79,11.87,8.77,9.43,12.41,9.75,
8.53,9.72,9.45,7.20,9.23,8.93,9.15,10.19,9.57,11.09,9.97,8.81,
10.73,9.57,8.53,9.21,10.08,9.10,11.03,10.10,9.47,9.72,9.60,8.21,
7.78,10.21,8.99,9.14,8.60,9.14,10.95,9.33,9.98,9.09,10.35,8.61,
9.35,10.04,7.85,9.64,9.99,9.65,10.89,9.08,8.60,7.56,9.27,10.33,
10.09,8.51,9.86,9.24,9.63,8.67,8.85,11.57,9.85,9.27,9.69,10.90,
8.84,11.10,8.19,9.26,9.93,10.15,8.42,9.36,9.93,9.11,9.07,7.21,
8.22,9.08,8.88,8.71,9.93,12.04,10.41,10.80,7.17,9.00,9.46,10.42,
10.43,8.38,9.01];

    N = 1:length(X);

    gamma = 0.9;
    alpha = (1 - gamma)/2;

    mu = expectation(X);
    sSqr = variance(X);

    fprintf('mu = %.4f\n', mu);
    fprintf('S^2 = %.4f\n\n', sSqr);

    muArray = expectationArray(X, N);
    varArray = varianceArray(X, N);

    figure
    plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'm');
    hold on;
    plot(N, muArray, 'g');
```

```
     Ml = muArray - sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Ml, 'b');

    fprintf('mu_low = %.4f\n', Ml(end));

    Mh = muArray + sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Mh, 'r'), legend('y=mu', 'y=mu_n', 'y=mu-low_n',
       'y=mu-high_n');
    grid on;
    hold off;

    fprintf('mu_high = %.4f\n', Mh(end));

    figure
    plot([N(1), N(end)], [sSqr, sSqr], 'm');
    hold on;
    plot(N, varArray, 'g');

    Sl = varArray.*(N - 1)./chi2inv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Sl, 'b');

    Sh = varArray.*(N - 1)./chi2inv(alpha, N - 1);
    plot(N, Sh, 'r'), legend('z=S^2', 'z=S^2_n', 'z=S^2-low_n',
       'z=S^2-high_n');
    grid on;
    hold off;


    fprintf('sigma^2_low = %.4f\n', Sl(end));
    fprintf('sigma^2_high = %.4f\n', Sh(end));
end

function mu = expectation(X)
   mu = mean(X);
end

function sSqr = variance(X)
    sSqr = var(X);
end
```

```
    function muArray = expectationArray(X, N)
    muArray = zeros(1, length(N));
    for i = 1:length(N)
        muArray(i) = expectation(X(1:N(i)));
    end
end

function varArray = varianceArray(X, N)
    varArray = zeros(1, length(N));
    for i = 1:length(N)
        varArray(i) = variance(X(1:N(i)));
    end
end
```

2.2 Результаты работы программы

$$\hat{\mu} = 9.4872$$
$$S^2 = 1.2173$$
$$\underline{\mu} = 9.3202$$
$$\overline{\mu} = 9.6541$$
$$\underline{\sigma^2} = 0.9959$$
$$\overline{\sigma^2} = 1.5279$$

2.3 Графики

Построение на координатной плоскости O_{yn} прямой $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графиков функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

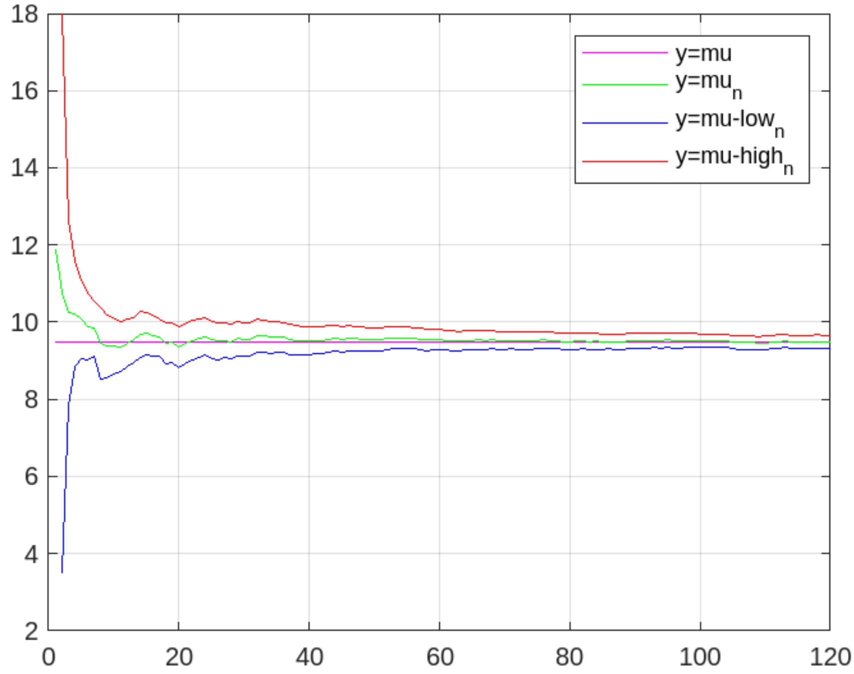

Рисунок 2.1 – График для μ

Построение на другой координатной плоскости O_{zn} прямой $z = S^2(\vec{x}_n)$, а также графиков функций $z = S^2(\vec{x}_N)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $\overline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

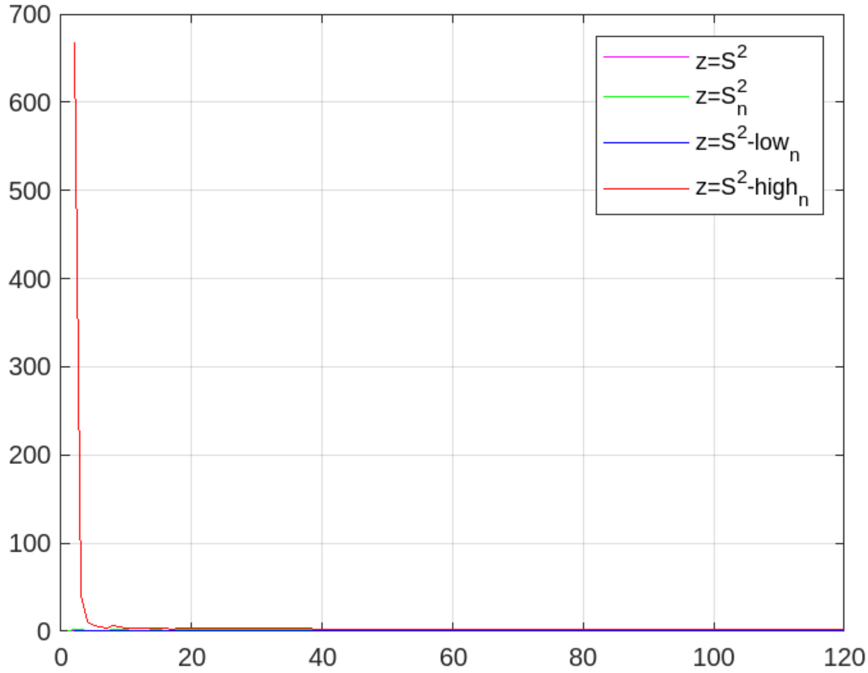

Рисунок 2.2 – График для σ