Las reglas de divisibilidad

Por: Enrique Díaz González

Introducción

Desde la escuela elemental a los estudiantes se les enseña cuando un entero es divisible, por ejemplo, por 2 ó por 3 ó por 5. Sin embargo, no se dan las justificaciones correspondientes porque se necesita un nivel de conocimiento más avanzado.

En este artículo queremos justificar, usando el razonamiento deductivo, las reglas de divisibilidad más utilizadas. El fundamento matemático descansa en la noción de "congruencia numérica" introducida por Gauss.

<u>Definición.</u>

Se dice que dos enteros a y b son congruentes módulo d, donde d es entero mayor que 1, si a y b dan el mismo residuo al dividirlos por d. Si a es congruente con b módulo d , se anota $a \equiv b$ (mód d)

Ejemplos. 1) $5 \equiv 9$ (mód 2) pues 5 = 2x2 + 1 y 9 = 2x4 + 1 (el residuo es 1)

2) $7 \equiv -8$ (mód 5) pues 7 = 1x5 + 2 y -8 = (-2) x5 + 2 (el residuo es 2)

3) $-6 \equiv -12$ (mód 6) pues -6 = (-1)x6 + 0 y -12 = (-2)x6 + 0 (el residuo es 0)

<u>Lema 1.</u>

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $a \equiv b$ (mód. d)

2) a = b + sd , para algún entero s

3) d divide a – b

<u>Demostración.</u>

1) $\Rightarrow$ 2). Si $a \equiv b$ (mód d) entonces a = md + r , b = nd + r

Restando : a – b = (m – n) d = s d , donde s = m – n

Luego a = b + sd , para algún entero s

2) $\Rightarrow$ 3) Si a = b + sd , entonces a – b = sd y ésto implica que d divide a – b

3) $\Rightarrow$ 1) Si d divide a – b , existe entero s tal que a – b = sd

Supongamos que a = kd + r_1 donde $0 \le r_1 < d$ y que

b = ld + r_2 donde $0 \le r_2 < d$

Restando : a – b = (k – l)d + ($r_1 - r_2$)

sd = (k – l)d + ($r_1 - r_2$) . Esto implica que d divide a $r_1 - r_2$ lo cual es imposible a menos que $r_1 - r_2$ sea cero y por lo tanto $r_1 = r_2$.

<u>Corolario.</u> $a \equiv 0$ (mód d) si y sólo si a es divisible por d

<u>Demostración</u>. Resulta de inmediato por la condición 3) del Lema 1.

<u>Lema 2.</u>

Si $z \equiv 0$ (mód m) y $z \equiv 0$ (mód n) , donde m y n son primos relativos, entonces $z \equiv 0$ (mód $m \cdot n$)

<u>Demostración</u>

i) Si $z \equiv 0$ (mód m) entonces z es divisible por m y luego $z = k \cdot m$, k entero

ii) Si $z \equiv 0$ (mód n) entonces z es divisible por n y luego $z = k' \cdot n$, k' entero

De donde se obtiene $k \cdot m = k' \cdot n$

y luego $$k = \frac{k' \cdot n}{m}$$

Como m y n son primos relativos, m debe dividir k', es decir, $\frac{k'}{m} = k''$, k" entero

Por lo tanto, $k = k'' \cdot n$

Reemplazando en i) se tiene $z = k'' \cdot n \cdot m$ y esto significa que $z \equiv 0$ (mód $m \cdot n$)

En otras palabras, el lema dice que si un entero z es divisible por enteros m y n, primos relativos entre sí, entonces z es divisible por el producto mn.

La utilidad de la notación de congruencia estriba en el hecho de que, con respecto a un módulo fijo, tiene las propiedades de la relación de igualdad, es decir ,

1) $a \equiv a$ (mód d) Propiedad Reflexiva

2) Si $a \equiv b$ (mód d) entonces $b \equiv a$ (mód d) Propiedad Simétrica

3) Si $a \equiv b$ (mód d) y $b \equiv c$ (mód d) entonces $a \equiv c$ (mód d) Propiedad Transitiva.

Se deja al lector verificar estas propiedades.

<u>Lema 3.</u> Si $a \equiv a'$ (mód. d) y $b \equiv b'$ (mód. d) , entonces :

1) $a + b \equiv a' + b'$ (mód. d)

2) $a - b \equiv a' - b'$ (mód. d)

3) $a \cdot b \equiv a' \cdot b'$ (mód. d)

4) $c \cdot a \equiv c \cdot a'$ (mód. d) para cualquier número real c

<u>Demostración.</u>

Si $a = a' + rd$ y $b = b' + sd$, para ciertos enteros r y s, entonces:

1) $a + b = a' + b' + (r + s)d$

2) $a - b = a' - b' + (r - s)d$

3) $a \cdot b = a' \cdot b' + (a's + b'r + rsd)d$

4) $c \cdot a = c \cdot a' + (rc)d$

De estas igualdades se obtienen las afirmaciones del lema.

II. Las reglas de divisibilidad.

Sea z cualquier entero expresado en el sistema decimal en la forma

$$z = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots\dots + a_n \cdot 10^n \qquad \text{, donde } 0 \le a_i \le 9 \text{ , i =0,1,…n y } a_n \ne 0$$

A. Divisibilidad por 2

Tenemos que $10^k \equiv 0$ (mód. 2) para k = 1,2,…..n , por Corolario del Lema 1

Por lo tanto, $a_k \cdot 10^k \equiv 0$ (mód. 2) , por la propiedad 4) del Lema 3

Si $a_0 \equiv 0$ (mód. 2) (es decir, si a_0 es número par) , entonces

$$a_0 \equiv 0 \pmod{2}$$
$$a_1 \cdot 10 \equiv 0 \pmod{2}$$
$$a_2 \cdot 10^2 \equiv 0 \pmod{2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod{2}$$

Sumando estas congruencias se tiene

$$z \equiv 0 \pmod{2}$$

lo cual significa que z es divisible por 2.

De aquí se obtiene la regla :

A) Si un entero termina en cifra par, entonces es divisible por 2.

B. Divisibilidad por 3.

Tenemos que $10^k \equiv 1$ (mód. 3) para k = 1,2,3,…….,n

Además $a_0 \equiv a_0$ (mód. 3)

$a_1 \cdot 10 \equiv a_1$ (mód. 3) por la propiedad 4) del lema 3

……………………..

$a_n \cdot 10^n \equiv a_n$ (mód. 3)

Sumando estas congruencias, resulta

$$z \equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \quad (\text{ mód. } 3)$$

De aquí se obtiene la regla :

B) Si la suma de los dígitos de un número es divisible por 3, entonces el número es divisible por 3.

C. Divisibilidad por 4.

Tenemos que $10^k \equiv 0$ (mód. 4) para k = 2,3,4,…..,n

Si $a_0 + a_1 \cdot 10 \equiv 0$ (mód. 4) entonces

$$a_0 + a_1 \cdot 10 \equiv 0 \quad (\text{ mód. } 4)$$

$$a_2 \cdot 10^2 \equiv 0 \quad (\text{ mód } 4)$$

....

$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \quad (\text{ mód. } 4)$$

Sumando estas congruencias, resulta

$$z \equiv 0 \quad (\text{ mód. } 4)$$

De aquí se obtiene la regla:

C) Si el número formado por las dos últimas cifras de un entero es divisible por 4 , entonces el entero es divisible por 4.

Usando el mismo argumento, se obtiene la regla de la divisibilidad por 25 : si el número formado por las dos últimas cifras de un entero es divisible por 25, entonces el entero es divisible por 25.

D. Divisibilidad por 5

Se tiene que $10^k \equiv 0$ (mód. 5) para k = 1,2,3,…...,n

Entonces si $a_0 \equiv 0$ (mód. 5) , resulta que $a_0 = 5t$ y como $0 \leq a_0 \leq 9$ se obtiene

t = 0 ó t = 1 . En consecuencia, $a_0 = 0$ ó $a_0 = 5$

Por lo tanto : $a_0 \equiv 0$ (mód. 5)

$a_1 \cdot 10 \equiv 0$ (mód. 5)

……………………..

$a_n \cdot 10^n \equiv 0$ (mód. 5)

Sumando: $z \equiv 0$ (mód. 5)

De aquí se obtiene la regla :

D) Si un número termina en 0 ó en 5 , entonces es divisible por 5

E. Divisibilidad por 6

Se tiene que $10^k \equiv -2$ (mód. 6) para k = 1,2,3,…..,n

En efecto, $10 \equiv -2$ (mód. 6)

Elevando al cuadrado $10^2 \equiv 4 \equiv -2$ (mód. 6)

Multiplicando miembro a miembro $10^3 \equiv 4 \equiv -2$ (mód. 6) y así sucesivamente.

Además $a_0 \equiv a_0$ (mód. 6)

$a_1 \cdot 10 \equiv -2a_1$ (mód. 6)

………………………..

$a_n \cdot 10^n \equiv -2a_n$ (mód. 6)

Sumando : $z \equiv a_0 - 2a_1 - 2a_2 - ..... - 2a_n$ (mód. 6)

$\equiv a_0 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$ (mód. 6)

$\equiv 3a_0 - 2(a_0 + a_1 + ... + a_n)$ (mód. 6)

Si $a_0 + a_1 + ... + a_n$ es divisible por 3 y si a_0 es par , el segundo miembro es divisible por 2 y por 3 y , por lema 2, es divisible por 6 . Se deduce que z es divisible por 6. De donde se tiene la regla:

E) Si un entero es divisible por 2 y por 3, entonces es divisible por 6.

F. Divisibilidad por 7

Tenemos que $10 \equiv 3$ (mód 7)

$10^2 \equiv 2$ (mód 7)

$10^3 \equiv -1$ (mód 7)

$10^4 \equiv -3$ (mód 7)

$10^5 \equiv -2$ (mód 7)

$10^6 \equiv 1$ (mód 7)

$10^7 \equiv 3$ (mód 7) y así sucesivamente

Por lo tanto , $a_0 \equiv a_0$ (mód 7)

$a_1 \cdot 10 \equiv 3 \cdot a_1$ (mód 7)

$$a_2 \cdot 10^2 \equiv 2 \cdot a_2 \quad (\text{ mód } 7)$$

$$a_3 \cdot 10^3 \equiv -a_3 \quad (\text{ mód } 7)$$

$$a_4 \cdot 10^4 \equiv -3 \cdot a_4 \quad (\text{ mód } 7)$$

$$a_5 \cdot 10^5 \equiv -2 \cdot a_5 \quad (\text{ mód } 7)$$

$$a_6 \cdot 10^6 \equiv a_6 \quad (\text{ mód } 7)$$

$$a_7 \cdot 10^7 \equiv 3 \cdot a_7 \quad (\text{ mód } 7)$$

Sumando se obtiene: $z \equiv a_0 + 3 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - a_3 - 3 \cdot a_4 - 2 \cdot a_5 + a_6 + 3 \cdot a_7 + ...$

Por lo tanto, se obtiene la regla :

F) Si la expresión : $a_0 + 3 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - a_3 - 3 \cdot a_4 - 2 \cdot a_5 + a_6 + 3 \cdot a_7 + ...$

es divisible por 7, entonces el número $z = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_n \cdot 10^n$

también lo es.

Ejemplo. El número 3927 es divisible por 7 porque

$$7 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 9 - 3 = 7 + 6 + 18 - 3 = 31 - 3 = 28 \text{ es divisible por 7}$$

G. Divisibilidad por 8

Tenemos que $10^n \equiv 0 \quad (\text{ mód } 8)$ para $n \geq 3$

Por lo tanto, $a_0 \equiv a_0 \quad (\text{ mód } 8)$

$$a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \cdot 10 \quad (\text{ mód } 8)$$

$$a_2 \cdot 10^2 \equiv a_2 \cdot 10^2 \quad (\text{ mód } 8)$$

$$a_3 \cdot 10^3 \equiv 0 \qquad (\text{ mód } 8\ )$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \qquad (\text{ mód } 8\ )$$

Sumando $\qquad z \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 \quad (\text{ mód } 8\ )$

Por lo tanto si $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2$ es divisible por 8, entonces z es divisible por 8.

De aquí la regla :

G) Si el número formado por lo tres últimos dígitos de un entero es divisible por 8, entonces el entero es divisible por 8.

<u>H. Divisibilidad por 9</u>

Tenemos que $\qquad 10 \equiv 1 \quad (\text{ mód } 9\ )$

$$10^2 \equiv 1 \quad (\text{ mód } 9\ )$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$10^n \equiv 1 \quad (\text{ mód } 9\ )$$

de donde se obtiene $\qquad a_0 \equiv a_0 \quad (\text{ mód } 9\ )$

$$a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \quad (\text{ mód } 9\ )$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n \cdot 10^n \equiv a_n \quad (\text{ mód } 9\ )$$

Sumando $\qquad z \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots. + a_n \quad (\text{ mód } 9\ )$

De donde resulta la regla:

H) Si la suma de las cifras de un número es divisible por 9, entonces el número es divisible por 9.

I. Divisibilidad por 10

Tenemos que $10^k \equiv 0 \quad (\text{mód } 10)$ para $k = 1,2,\ldots\ldots,n$

Si $a_0 \equiv 0 \quad (\text{mód } 10)$ entonces $a_0 = 0$, ya que $0 \le a_0 \le 9$

De donde se obtiene la regla

I) Si un entero termina en 0, entonces es divisible por 10

J. Divisibilidad por 11

Se tiene que $10 \equiv -1 \quad (\text{mód } 11)$

$10^2 \equiv 1 \quad (\text{mód } 11)$

$10^3 \equiv -1 \quad (\text{mód } 11)$

$10^4 \equiv 1 \quad (\text{mód } 11)$

……….

$10^k \equiv \pm 1 \quad (\text{mód } 11)$ dependiendo si k es par o impar

Por lo tanto, $a_0 \equiv a_0 \quad (\text{mód } 11)$

$a_1 \cdot 10 \equiv -a_1 \quad (\text{mód } 11)$

$a_2 \cdot 10^2 \equiv a_2 \quad (\text{mód } 11)$

……………

$a_n \cdot 10^n \equiv \pm a_n \quad (\text{mód } 11)$, dependiendo si n es par o impar

Resulta entonces $z \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \ldots. \pm a_n$

De aquí se obtiene la regla

J) Si la suma de los dígitos de un entero alternados en signos es divisible por 11 , entonces el número es divisible por 11.

Ejemplo : el número 3162819 es divisible por 11 ya que 9-1+8-2+6-1+3 = 22 es divisible por 11

K. Divisibilidad por 12

Se tiene $10 \equiv -2 \quad (\text{mód } 12)$

$10^2 \equiv 4 \quad (\text{mód } 12)$

$10^3 \equiv -8 \equiv 4 \quad (\text{mód } 12)$

………..

$10^n \equiv 4 \quad (\text{mód } 12)$ para $n \geq 2$

Entonces $a_0 \equiv a_0 \quad (\text{mód } 12)$

$a_1 \cdot 10 \equiv -2 \cdot a_1 \quad (\text{mód } 12)$

$a_2 \cdot 10^2 \equiv 4 \cdot a_2 \quad (\text{mód } 12)$

$a_3 \cdot 10^3 \equiv 4 \cdot a_3 \quad (\text{mód } 12)$

……………..

$a_n \cdot 10^n \equiv 4 \cdot a_n \quad (\text{mód } 12)$

Sumando $z \equiv a_0 - 2 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 + 4 \cdot a_3 + \ldots\ldots.. + 4 \cdot a_n \qquad (\text{mód } 12)$

$z \equiv -3 \cdot a_0 - 6 \cdot a_1 + 4 \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots. + a_n) \quad (\text{mód } 12)$

Si el paréntesis es divisible por 3, entonces z es divisible por 3. Si $-3 \cdot a_0 - 6 \cdot a_1$ es divisible por 4 , entonces z es divisible por 4 porque las dos últimas cifras de z se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 + 10 \cdot a_1 &= a_0 - 3 \cdot a_0 + 3 \cdot a_0 + 10 \cdot a_1 \\ &= 4 \cdot a_0 - 3 \cdot a_0 + 10 \cdot a_1 - 6 \cdot a_1 + 6 \cdot a_1 \\ &= 4 \cdot a_0 + 16 \cdot a_1 + (-3 \cdot a_0 - 6 \cdot a_1) \end{aligned}$$

Lo cual implica que z es divisible por 4. Por lo tanto z es divisible por 3 y por 4. De acuerdo al lema 2 , z es divisible por 12. De aquí resulta la regla

K) Si un entero es divisible por 3 y por 4 , entonces es divisible por 12

L. Divisibilidad por 13

Se tiene que $1 \equiv 1 \pmod{13}$

$10 \equiv -3 \pmod{13}$

$10^2 \equiv 9 \equiv -4 \pmod{13}$

$10^3 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$

$10^4 \equiv 3 \pmod{13}$

$10^5 \equiv 4 \pmod{13}$

$10^6 \equiv -12 \equiv 1 \pmod{13}$

$10^7 \equiv -3 \pmod{13}$

Se comienza a repetir la secuencia $(1,-3,-4,-1,3,4,\ldots)$ en ese orden.

Por lo tanto, $z \equiv a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 \ldots.$ (mód 13)

De donde resulta la regla

L) Si $a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + \ldots$ es divisible por 13 , entonces z es divisible por 13

Ejemplo: El número 3,341 es divisible por 13 ya que $1 - 12 - 12 - 3 = -26$ es divisible por 13

Bibliografía.

Courant, Richard and Robbins, Herbert:What is Mathematics? Second Edition, Oxford University Press, 1996

Enrique Díaz González, ediaz@ponce.inter.edu Catedrático Auxiliar de Matemáticas de la Universidad Interamericana de Puerto Rico –Recinto de Ponce. M.S. University of Illinois.