Matemática Discreta

Renato Carmo

15 de março de 2016

Sumário

Aula 1

Apresentação do Curso

1. nome, página
2. página da turma
3. lista de discussão
   (a) efetivamente inscrito só após confirmação.
   (b) só aceita mensagens enviadas a partir do endereço inscrito.
   (c) pode inscrever mais de um endereço.
   (d) mesma lista para ambas as turmas.
4. controle de presença
5. avaliação: 3 provas de pesos iguais
6. segunda chamada de provas
7. calendário

   1/3: início das aulas
   24/3: não haverá aula (quinta-feira santa)
   31/3: primeira prova
   21/4: não haverá aula (Feriado de Tiradentes)
   5/5: segunda prova
   26/5: não haverá aula (Feriado de Corpus Christi)
   30/6: terceira prova
   12/7: prova final

8. programa
    (a) Fundamentos
    (b) Indução
    (c) 1a prova
    (d) Recorrências
    (e) 2a prova
    (f) Contagem
    (g) 3a prova
9. bibliografia: notas de aula mais referências na página
10. listão de exercícios na página: alterações até passar os exercícios

Aula 2

Elementos de Lógica

Uma *proposição* é uma afirmação. Toda proposição é verdadeira ou é falsa.

Exercício 1 [default,ex:proposicoes]

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

1. "$2 \leq 3$".
2. "$10 > 20$".
3. "$x^2 \leq x$".

Resposta:

1. "$2 \leq 3$" é uma proposição verdadeira.
2. "$10 > 20$" é uma proposição falsa.
3. "$x^2 \leq x$" não é uma proposição, porque não é verdadeira nem falsa, uma vez que "não sabemos" o valor de x.

O fato de que duas proposições A e B tem o mesmo valor será denotado por $A \equiv B$.

Denotamos por $\underline{\mathsf{V}}$ e $\underline{\mathsf{F}}$, respectivamente, os valores de *verdadeiro* e *falso*.

Expressamos o fato de que a proposição A é verdadeira dizendo que "A é verdade" ou, mais abreviadamente, "$A \equiv \underline{\mathsf{V}}$" ou simplemente "$A$". Por exemplo, são equivalentes

- a proposição “$2 \leq 3$” é verdadeira,
- “$2 \leq 3$” é verdade,
- “$2 \leq 3$” $\equiv \underline{\mathsf{V}}$.
- “$2 \leq 3$”.

2.1 Conectivos

2.1.1 Negação, Conjunção e Disjunção

Definição 1. *Se A e B são proposições então*

não A *é uma proposição, chamada a* negação *de A.*

A proposição não *A é verdadeira quando a proposição A é falsa.*

A **e** B *é uma proposição, chamada a* conjunção *de A e B,*

A proposição A e *B é verdadeira quando A e B são ambas proposições verdadeiras.*

A **ou** B *é uma proposição, chamada a* disjunção *de A e B.*

A proposição A ou *B é verdadeira quando ao menos uma dentre as proposições A e B é verdadeira.*

2.1.2 Implicação

Definição 2. *Se A e B são proposições então $A \implies B$ é uma proposição chamada* implicação *de A para B.*

Lê-se “se A então B” ou “A implica B”.

A proposição A é chamada de antecedente *da implicação e a proposição B é chamada de* consequente *da implicação.*

A proposição $A \implies B$ é verdadeira quando A e B são ambas proposições verdadeiras ou quando A for uma proposição falsa, isto é,

$$A \implies B \equiv (A \text{ e } B) \text{ ou } (\text{ não } A).$$

Exercício 2 [default,ex:implicacoes]

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

1. $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
2. $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
3. $1 > 2 \implies 2 < 3$,
4. $1 > 2 \implies 2 > 3$.

Resposta:

Todas são verdadeiras.

Teorema 1. *A proposição* $\underline{\mathsf{F}} \implies A$ *é verdadeira qualquer que seja a proposição* A.

Demonstração. Exercicio 5. □

2.2 Dupla Implicação

Definição 3. *Se* A *e* B *são proposições então* A *se e somente se* B *é uma proposição chamada* dupla implicação *entre* A *e* B.

Lê-se "A se e somente se B*".*

A proposição A *se e somente se* B *é verdadeira se as implicações* $(A \implies B)$ *e* $(B \implies A)$ *forem ambas verdadeiras, ou seja,*

$$A \text{ se e somente se } B \equiv (A \implies B) \text{ e } (B \implies A).$$

2.3 Predicados

Um *predicado* é uma "proposição parametrizada". Por exemplo,

$P(x)$: $x \leq x^2$.

Neste exemplo, $P(x)$ é um predicado. O nome "predicado" vem da analogia com a gramática usual, onde x "faz o papel de sujeito" da afirmação. O símbolo x recebe o nome de *variável livre* do predicado.

Predicados podem ter várias variáveis livres, como por exemplo

$Q(x, y)$**:** $x \leq y^2$.

Predicados não são verdadeiros nem falsos e por isso não são proposições.

Quando as variáveis livres de um predicado são “especificadas” ou “instanciadas”, o resultado é uma proposição que, como tal, é verdadeira ou falsa.

Exercício 3 [default,ex:predicados]

Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x, y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

1. $P(2)$.
2. $P(1/2)$.
3. $Q(1, 1)$.
4. $R(t) = Q(1, t)$.

Resposta:

1. $P(2)$ é uma proposição verdadeira: “$2 \leq 2^2$”.
2. $P(1/2)$ é uma proposição falsa: “$1/2 \leq (1/2)^2$”.
3. $Q(1, 1)$ é uma proposição verdadeira: “$1 \leq 1^2$”.
4. $R(t) = Q(1, t)$ não é uma proposição. É o predicado “$1 \leq t^2$”, com uma variável livre.

2.4 Quantificadores

Definição 4. *Se $P(x)$ é um predicado e X é um conjunto, então*

- $P(x)$, *para todo* $x \in X$, *e*
- $P(x)$, *para algum* $x \in X$,

são proposições.

*"$P(x)$, **para todo** $x \in X$" é uma proposição verdadeira se a proposição $P(x)$ for verdadeira para todo elemento $x \in X$.*

*"$P(x)$, **para algum** $x \in X$" é uma proposição verdadeira se a proposição $P(x)$ for verdadeira para algum elemento $x \in X$.*

Exercício 4 [default,ex:ex-quantificadores]

Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
3. $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
4. $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

Resposta:

1. a proposição $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é falsa.
2. a proposição $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é verdadeira.
3. a proposição $P(x)$, para todo $x \geq 1$ é verdadeira.
4. a proposição $P(x)$, para algum $0 < x < 1$ é falsa.

Teorema 2. *Se $P(x)$ é um predicado, então*

$$\textit{não } (P(x),\ \textit{para todo } x \in X) \equiv (\textit{ não } P(x)),\ \textit{para algum } x \in X,$$

e

$$\textit{não } (P(x),\ \textit{para algum } x \in X) \equiv (\textit{ não } P(x)),\ \textit{para todo } x \in X.$$

Seja $P(x)$ um predicado qualquer e seja $X = \emptyset$.

Observe, em primeiro lugar que

$$P(x),\ \text{para algum } x \in X,$$

é uma proposição falsa.

Do mesmo modo,

$$(\text{ não } P(x)), \text{ para algum } x \in X,$$

também é uma proposição falsa e consequentemente

$$\text{não } ((\text{ não } P(x)), \text{ para algum } x \in X),$$

é uma proposição verdadeira.

Como (Teorema 2)

$$\begin{aligned} \text{não } ((\text{ não } P(x)), \text{ para algum } x \in X) &\equiv (\text{ não } (\text{ não } P(x)), \text{ para todo } x \in X) \\ &\equiv P(x), \text{ para todo } x \in X, \end{aligned}$$

então

$$P(x), \text{ para todo } x \in X,$$

é uma proposição verdadeira.

Em resumo, temos o seguinte.

Corolário 3. *Se $X = \emptyset$, então, para qualquer predicado $P(x)$ temos*

$$P(x), \textit{ para todo } x \in X \equiv \underline{\mathsf{V}},$$

e

$$P(x), \textit{ para algum } x \in X \equiv \underline{\mathsf{F}}.$$

Exercícios 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Aula 3

Conjuntos e Inteiros

1. quebrar esta aula em duas? onde quebrar? sugestaoDM: a parte de aproximacao merece uma única aula?
2. tem 25 exercícios só para esta aula. Tirar alguns?
3. separar a base do Ex. 35 em um exercício independente (isso não estaria na aula de Indução ou traríamos esta parte para a parte de conjuntos)
4. formular o exercício 1.
5. dar um nome melhor para a propriedade "integralizada".

3.1 Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação 1. *$\emptyset$ denota o conjunto vazio.*

$$\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A,\\
a \notin A &:= \textit{não } (a \in A),\\
A \subseteq B &:= a \in B, \textit{ para todo } a \in A,\\
A \not\subseteq B &:= \textit{não } (A \subseteq B),\\
A = B &:= (A \subseteq B) \textit{ e } (B \subseteq A),\\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \textit{ ou } x \in B\},\\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \textit{ e } x \in B\},\\
A - B &:= \{a \mid a \in A \textit{ e } a \notin B\}\\
|A| &:= \textit{número de elementos do conjunto } A.
\end{aligned}$$

Exercício 11.

3.2 Inteiros

$$
\begin{aligned}
A &: \text{conjunto} \\
z_1, z_2, z_3 &\in \mathbb{Z} \\
q &\in \mathbb{Q} \\
x &\in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Definição 5. *O* intervalo inteiro *de z_1 a z_2 é o conjunto dos inteiros entre z_1 e z_2, ou seja*

$$[z_1..z_2] := \{z \in \mathbb{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2\}.$$

Definição 6. *Dado $A \subseteq \mathbb{R}$,*

- *o* mínimo *de A é um elemento m de A satisfazendo*

$$m \leq a, \; \textsf{para todo } a \in A.$$

- *o* máximo *de A é um elemento m de A satisfazendo*

$$m \geq a, \; \textsf{para todo } a \in A.$$

O mínimo e o máximo de A são denotados $\min A$ e $\max A$, respectivamente.

Conjuntos podem não ter mínimo ou máximo. Por exemplo,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}.$$

Notação 2. $\lg x$ *denota* $\log_2 x$.

3.3 Somatórios e Produtórios

$f: A \to \mathbb{C}$

X**:** subconjunto finito de A.

a, b**:** inteiros.

Notação 3.

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

denota a soma dos valores de $f(x)$ *para cada* $x \in X$*.*

Se $X = \emptyset$*, então*

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) := \sum_{x \in [a..b]} f(x).$$

Teorema 4. *Dados um conjunto finito* X *e* $c \in \mathbb{C}$*,*

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Demonstração. Exercicio 47 □

Teorema 5. *Dados* $f, g: A \to \mathbb{C}$ *e* $X \subseteq A$ *finito,*

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Demonstração. Exercicio 49 □

Teorema 6. *Dada* $f: A \to \mathbb{C}$*,* $X \subseteq A$ *finito e* $c \in \mathbb{C}$*,*

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Demonstração. Exercicio 50 □

Notação 4.

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

denota o produto dos valores de $f(x)$ para cada $x \in X$.

Se $X = \emptyset$, então

$$\prod_{x \in X} f(x) = 1.$$

$$\prod_{i=a}^{b} f(i) := \prod_{x \in [a..b]} f(x).$$

Exercício 12.

3.4 Chão e Teto

Definição 7. *Dado $x \in \mathbb{R}$,*

o chão *de x é o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja,*

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}.$$

o teto *de x é o menor inteiro maior ou igual a x, ou seja,*

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}.$$

Exemplo 1.

$$\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2; \\
\lceil 2 \rceil &= 2; \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}; \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}; \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1; \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &= 2; \\
\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor &= -2 \\
\left\lceil \frac{-35}{23} \right\rceil &= -1.
\end{aligned}$$

Teorema 7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz*

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

É imediato que existe um único inteiro z no conjunto

$$\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}.$$

Consequentemente, todo inteiro maior que z será também maior que x.

Noutras palavras, z é o maior inteiro menor ou igual a x e, portanto, $z = \lfloor x \rfloor$. □

Teorema 8. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz*

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

Demonstração. Exercício 13 □

Corolário 9. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$ temos*

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor .$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor .$$

Do Teorema 7 temos que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x,$$

e, portanto, para todo $z \in \mathbb{Z}$,

$$(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z,$$

e, portanto,

$$(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z.$$

Como $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro, temos do Teorema 7 que

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor .$$

□

Teorema 10. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos*

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor .$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor .$$

Do Teorema 8 temos que

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

e, portanto,

$$-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1),$$

ou seja,

$$(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x,$$

e daí, do Teorema 7 temos que

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$$

$\square$

Corolário 11. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$ temos*

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil .$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil .$$

Temos que

$$z - \lfloor x \rfloor = -(\lfloor x \rfloor - z).$$

Pelo Teorema 9 temos que

$$\lfloor x \rfloor - z = \lfloor x - z \rfloor$$

e, portanto,

$$z - \lfloor x \rfloor = -\lfloor x - z \rfloor ,$$

e daí, pelo Teorema 10

$$-\lfloor x - z \rfloor = \lceil -(x - z) \rceil = \lceil z - x \rceil .$$

$\square$

Diremos que uma função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada (cfr. Ex. 6) se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Teorema 12. *Se $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função integralizada, contínua e crescente, então*

$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor , \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil , \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integralizada, contínua e crescente e seja $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que

1. $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$, e que
2. $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$.

1. Vamos provar que
$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$
Se x é inteiro, então
$$\lfloor x \rfloor = x,$$
e portanto,
$$f(\lfloor x \rfloor) = f(x).$$
e
$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$
Se x não é inteiro, então
$$\lfloor x \rfloor < x,$$
e como f é crescente, então
$$f(\lfloor x \rfloor) < f(x).$$
Além disso, não pode haver nenhum inteiro z tal que
$$f(\lfloor x \rfloor) < z < f(x),$$
pois como f é contínua, teríamos $z = f(a)$ para algum a tal que
$$\lfloor x \rfloor < a < x,$$
e como $f(a)$ é inteiro e f é integralizada, então a seria um inteiro entre $\lfloor x \rfloor$ e x, o que não é possível.
Como x não é inteiro e f é integralizada, então $f(x)$ não pode ser inteiro e então
$$\lfloor f(x) \rfloor < f(x),$$
Como $\lfloor f(x) \rfloor$ é inteiro, então
$$\lfloor f(x) \rfloor \leq f(\lfloor x \rfloor) < f(x),$$

e portanto,

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor \leq f(\lfloor x \rfloor) < f(x).$$

Finalmente, como $\lfloor f(x) \rfloor$ é um inteiro entre $f(\lfloor x \rfloor)$ e $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$, temos necessariamente

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$

2. A prova de que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil ,$$

segue um argumento em tudo análogo (Exercício 19).

□

Corolário 13. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo inteiro positivo k*

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor , \\ \left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil &= \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil . \end{aligned}$$

Demonstração. Seja k um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Basta provar (Exercício 20) que f é uma função crescente e integralizada, e daí, pelo Teorema 12 temos

$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor , \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil . \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor , \\ \left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil &= \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil . \end{aligned}$$

□

Exercícios 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22

3.5 Aproximação Assintótica

Dadas $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dizemos que f e g são *aproximadamente iguais* (cfr. Ex. 7) se

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Denotamos o fato de que f e g são aproximadamente iguais por

$$f(n) \approx g(n).$$

Teorema 14. *As funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Demonstração. Exercício 30 □

Aproximação de Stirling.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Os *Números Harmônicos* são os números dados pela função

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

A diferença $H(n) - \ln n$ converge e seu limite é conhecido como *constante de Euler–Mascheroni*, isto é,

$$\gamma = \lim H(n) - \ln n = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$$

Fazendo

$$f(n) = H(n) - \ln n - \gamma,$$

temos

$$\lim f(n) = 0,$$

e

$$H(n) = \ln n + \gamma + f(n) = \ln n \left(1 + \frac{\gamma + f(n)}{\ln n}\right),$$

e portanto,

$$H(n) \approx \ln n.$$

Exercícios 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34.

Aula 4

Indução

formular o Ex 2

Definição 8. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que*

1. $0 \in A$ *e,*
2. $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, *para todo* $a \in \mathbb{N}$,

então $A = \mathbb{N}$.

Formalmente,

$$((0 \in A) \text{ e } (([0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A), \text{ para todo } a \in \mathbb{N})) \implies (A = \mathbb{N})$$

Teorema 15.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

Demonstração. Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

ou seja,

vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.3}$$

Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

provando que

$$A = \mathbb{N},$$

onde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}.$$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$ provando que

1. $0 \in A$;
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$

1. Vamos provar que $0 \in A$,

   ou seja,

   vamos provar que a proposição $P(0)$ é verdadeira,

   isto é,

   vamos provar que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$

   Por um lado, temos que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = 0.$$

   Por outro lado,

   $$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

   E, portanto, é verdade que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$

   Portanto, a proposição $P(0)$ é verdadeira.

   Portanto, $0 \in A$.

2. Vamos provar que

$$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $[0..a] \subseteq A$.

Vamos provar que $a+1 \in A$,

isto é,

vamos provar que a proposição $P(a+1)$ é verdadeira

ou seja,

vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}.$$

Por um lado, temos

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1).$$

Como $[0..a] \subseteq A$, então $a \in A$,

ou seja,

a proposição $P(a)$ é verdadeira, isto é,

$$\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}.$$

Como

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1)\\ &= \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1)\\ &= \frac{a(a+1)+2(a+1)}{2}\\ &= \frac{(a+2)(a+1)}{2}\\ &= \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2}.$$

Portanto a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

Portanto $a+1 \in A$.

Portanto,

$$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Então $A = \mathbb{N}$, isto é,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = V\} = \mathbb{N},$$

e portanto a proposição

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

é verdadeira, ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Esquematicamente temos um predicado $P(n)$ e queremos uma prova da proposição

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

provando que

$$A = \mathbb{N},$$

onde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = V\}.$$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$ provando que,

1. $0 \in A$

2. $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in A.$

1. Vamos provar que $0 \in A$.

   ...

   Portanto, $0 \in A$.

2. Vamos provar que

$$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

   Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $[0..a] \subseteq A$.

   Vamos provar que $a+1 \in A$.

   ...

   Como $[0..a] \subseteq A$, então,

   ...

   Portanto, $a+1 \in A$.

Portanto,

$$A = \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

O conjunto A é desnecessário.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

provando que

1. A proposição $P(0)$ é verdadeira e,

2. $(P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1)), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$

1. Vamos provar que a proposição $P(0)$ é verdadeira.

   ...

   Portanto a proposição $P(0)$ é verdadeira.

2. Vamos provar que

$$P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a]$.

Vamos provar que a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

...

Como a proposição $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in [0..a]$, então,

...

Portanto, a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

Portanto,

$$P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

O esquema usual é o seguinte.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

1. Vamos provar que $P(0)$.

   ...

   Portanto, $P(0)$.

2. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k), \text{ para todo } 0 \leq k \leq a$.

   Vamos provar que $P(a+1)$.

   ...

   Como $P(k), \text{ para todo } 0 \leq k \leq a$ então ...

   ...

   Portanto, $P(a+1)$.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Nosso esquema será o seguinte.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: $P(k), \text{ para todo } 0 \leq k \leq a.$

Passo da Indução: Vamos provar que $P(a+1)$.

...

Da hipótese de indução temos que ...

...

Portanto $P(a+1)$.

Base da Indução: Vamos provar que $P(0)$.

...

Portanto $P(0)$.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Exercícios 35, 36, 37, 38.

Aula 5

Indução: Exemplos

1. Esta aula tem 31 exercícios. Diminuir?
2. trocar algum dos exemplos desta aula pelo Ex. 35 para ter um exemplo que
   (a) não é "numérico"
   (b) usa mais de uma vez a hipótese de indução
3. acrescentar o exercício 5 e colocar referência a ele no ex. 45
4. (Stolfi and Gomide, 2011, cap. 5) tem exercícios interessantes de indução?
5. outros exercícios como 54 e 84 usando séries e razões entre termos de séries. Ver exercícios de CI208
6. formular os Exs 3, 4

O esquema de uma prova por indução é

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que $P(a+1)$.

...

Da hipótese de indução temos que ...

...

Portanto $P(a+1)$.

Base da Indução: Vamos provar que $P(0)$.

...

Portanto $P(0)$.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Vamos reescrever a prova do Teorema 15.

Demonstração. Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.$$

Temos que

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1).$$

Pela Hipótese da Indução temos que

$$\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2},$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{a+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1) \\
&= \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) \\
&= \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+2)(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{i=1}^{0} i = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2},$$

$\square$

Uma maneira de olhar para uma prova por indução é vê-la como um *esquema de prova*, ou seja, um algoritmo recursivo para provar a proposição enunciada.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a prova do Teorema 15 é uma prova de que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Noutras palavras, uma prova por indução é um algoritmo recursivo para provar o enunciado.

Exercício 36 [default,ex:soma:potencias]

Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.

Resposta: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \notin \{0,1\}$.

Seja $c \notin \{0,1\}$. Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \frac{c^{(a+1)+1}-1}{c-1}.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) + c^{a+1},$$

e $a \in [0..a]$, então pela HI temos

$$\left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) = \frac{c^{a+1}-1}{c-1},$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} c^i i &= \left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) + c^{a+1} \\
&= \frac{c^{a+1}-1}{c-1} + c^{a+1} = \frac{c^{a+1}-1+c^{a+1}(c-1)}{c-1} \\
&= \frac{c^{a+1}(1+c-1)-1}{c-1} = \frac{c^{a+1}(c)-1}{c-1} = \frac{c^{a+2}-1}{c-1} \\
&= \frac{c^{(a+1)+1}-1}{c-1}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = \frac{c^{0+1}-1}{c-1}.$$

Basta verificar que, como $c \neq 0$,

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = c^0 = 1,$$

e como $c \neq 1$,

$$\frac{c^{0+1}-1}{c-1} = \frac{c-1}{c-1} = 1.$$

Exercício 37 [default,ex:2an¡n-fatorial]

Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $a \geq 4$ tal que

$$2^k < k!, \text{ para todo } 0 \leq k \leq a.$$

Passo da Indução: Vamos provar que $2^{a+1} < (a+1)!$.

Temos que

$$2^{a+1} = 2 \times 2^a.$$

Da Hipótese de Indução temos que

$$2^a < a!,$$

e portanto,

$$2^{a+1} = 2 \times 2^a < 2 \times a!.$$

Por outro lado,

$$(a+1)! = (a+1) \times a!$$

e como $a \geq 4$ temos que

$$(a+1)! \geq (4+1) \times a! = 5 \times a!,$$

ou seja,

$$2^{a+1} < 2 \times a! < 5 \times a! < (a+1)!$$

Portanto,

$$2^{a+1} < (a+1)!.$$

Base da Indução: Vamos provar que
$$2^4 < 4!.$$

Por um lado,
$$2^4 = 16.$$

Por outro lado,
$$4! = 24,$$

Portanto,
$$2^4 < 4!.$$

Definição 9. *A* sequência de Fibonacci *é a função* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dada por*

$$F(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Exercício 38 [default,ex:fibonacci:inducao]

A *sequência de Fibonacci* é a função $F \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

1. Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

2. Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Resposta:

1. Vamos provar que o n-ésimo número da sequência de Fibonacci é

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

por indução em n, isto é, vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \textsf{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(k) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \textsf{ para todo } k \in [0..n],$$

Passo: Vamos provar que

$$F(n+1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Pela definição de F temos que para todo $n \geq 1$,

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1).$$

Como $n \in [0..n]$, temos da HI que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right).$$

Como $n-1 \in [0..n]$, temos da HI que

$$F(n-1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Então

$$\begin{aligned}
&F(n+1) = F(n) + F(n-1) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right) \\
&\qquad\qquad = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \leq 1,$$

isto é, vamos provar que

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) \\ F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right). \end{aligned}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \\ F(1) &= 1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}(1-1) = \frac{\sqrt{5}}{5}(0) = 0,$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) \\ &\qquad = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\ &\qquad = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5}{5} \\ &\qquad = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) \\ F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n > 1,$$

2. Como
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \overset{\text{Ex. 28}}{\approx} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$
então
$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Exercícios 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46.

Exercícios 47, 48 (propriedades de somatórios), 49 e 50 por indução em $|X|$, 51, 52 (união disjunta).

Exercícios 53 (teorema-binomial), 54

Exercícios 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65 (recorrências).

Aula 6

Descrições Recursivas

escolher exemplos e exercícios de contagem

Seja $l\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n.

Queremos uma expressão para $l(n)$.
Idéia: descrever através de uma recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Temos,

n	$f(n)$	$l(n)$
1	1	1
2	2	2
3	2	2
4	3	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Será verdade que $f(n)$ é o número de dígitos na representação binária de n, para todo $n > 0$, isto é, será que

Teorema 16.

$$l(n) = f(n), \ \textsf{\textit{para todo}}\ n > 0.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$l(n) = f(n), \ \textsf{para todo } n > 0,$$

por indução em n

H.I.: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = f(k) \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = f(a+1)$$

Se $a + 1 > 1$, da definição de f temos que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e que

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq a,$$

e daí, temos pela HI que

$$l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$$

Seja então

$$m = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

e seja

$$d_0 d_1 \ldots d_{m-1},$$

a representação binária de $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$, isto é,

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = d_{m-1}2^0 + d_{m-2}2^1 + \ldots d_0 2^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i-1}.$$

Se $a + 1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i-1},$$

ou seja,

$$a+1=\sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i}. = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} + 0 2^0 = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{m-i},$$

para $d_m = 0$.

Noutras palavras,

$$d_0 d_1 \ldots d_m,$$

a representação binária de $a+1$, isto é,

$$l(a+1) = m+1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f(a+1).$$

Por argumento análogo concluímos que, também quando $a+1$ é ímpar, $l(a+1) = f(a+1)$.

Base: Vamos provar que

$$l(1) = f(1).$$

Por um lado, $l(1) = 1$ pois a representação binária de 1 tem 1 dígito.

Por outro lado, $f(1) = 1$.

Logo, é verdade $l(1) = f(1)$.

□

Teorema 17.

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Demonstração. Exercicio 43 □

Corolário 18. *Para todo $n > 0$, a representação binária de n tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ dígitos.*

Seja $b\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$b(n)$: número de dígitos 1 na representação binária de n.

Idéia:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ é par,} \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

ou mais concisamente

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

Teorema 19.

$$b(n) = f(n), \ \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Exercício 66 □

Exercícios 66 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75 77, 76.

Aula 7

Funções Iteradas

1. enunciar as versões induzidas dos Teoremas 21, 22 e 23; provar o T. 21 e deixar as provas dos outros dois e do C. 24 como exercícios.
2. reabilitar os Exs 7 e 8?

Definição 10. *Sejam A, B, C conjuntos e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. A* composição *de f com g é a função $f \circ g\colon A \to C$ dada por*

$$f \circ g(x) := g(f(x)).$$

Definição 11. *Seja A um conjunto e $f\colon A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n\colon A \to A$ como*

$$f^n(a) = (f \circ f \circ \ldots \circ f)(a) = f(f(\ldots f(a))).$$

Mais precisamente,

$$f^n := \begin{cases} I, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1} \circ f, & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

onde $I\colon A \to A$ denota a função identidade, dada por

$$I(a) = a \text{ para todo } a \in A.$$

Exemplo 2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$m, s \in \mathbb{R}$

$f(x) = x + 1$: $f^n(x) = x + n$

$f(x) = x + 2$: $f^n(x) = x + 2n$
$f(x) = x + 3$: $f^n(x) = x + 3n$
$f(x) = x + s$: $f^n(x) = x + ns$
$f(x) = 2x$: $f^n(x) = 2^n x$
$f(x) = 3x$: $f^n(x) = 3^n x$
$f(x) = mx$: $f^n(x) = m^n x$
$f(x) = s + mx$:

$$f^n(x) = m^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} m^i.$$

Se $m = 1$,

$$f^n(x) = 1^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} 1^i = x + sn.$$

e, se $m \neq 1$ *(Ex. 36),*

$$\sum_{i=0}^{n-1} m^i = \frac{m^n - 1}{m - 1},$$

e, portanto,

$$f^n(x) = m^n x + s\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Teorema 20. *Sejam* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $s, m \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

então, para todo $x \in \mathbb{R}$ *e todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n-1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Exercício 77 □

Teorema 21. *Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.*

Demonstração. Cálculo I. $\square$

Teorema 22. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Então $f \circ g\colon A \to C$ é crescente.*

Demonstração. Exercício 21 $\square$

Teorema 23. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções integralizadas, isto é, satisfazendo*

$$\begin{aligned} f(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A, \\ g(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B. \end{aligned}$$

Então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

Demonstração. Exercício 22 $\square$

Corolário 24. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas, crescentes e integralizadas. Então, para todo $x \in A$,*

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas, crescentes e integralizadas.

Pelos Teoremas 21, 22 e 23 temos que a função $f \circ g\colon A \to C$ também é contínua, crescente e integralizada, e daí, pelo Teorema 12 temos que

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$. $\square$

Corolário 25. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f\colon A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada. Então, para todo $x \in A$, e todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f\colon A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada. Vamos provar que

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$, e todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $x \in A$. Vamos provar por indução em $\mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \left\lfloor f^k(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x) \right\rfloor, \\ \left\lceil f^k(\lceil x \rceil) \right\rceil &= \left\lceil f^k(x) \right\rceil, \end{aligned}$$

para todo $k \in [0..a]$.

Passo: Vamos provar que

1. $\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f^{a+1}(x) \rfloor$, e
2. $\lceil f^{a+1}(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f^{a+1}(x) \rceil$.

1. Vamos provar que

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor.$$

Se $a + 1 > 0$, então

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f^a \circ f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(f^a(\lfloor x \rfloor)) \rfloor,$$

e da HI temos que

$$\left\lfloor f^1(x) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor$$

isto é

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$

então

$$\lfloor f(f^a(\lfloor x \rfloor)) \rfloor = \lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor) \rfloor,$$

ou seja,

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor) \rfloor .$$

Da HI temos também que

$$\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f^a(x) \rfloor$$

e portanto,

$$\lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor) \rfloor = \lfloor f(\lfloor f^a(x) \rfloor) \rfloor ,$$

ou seja,

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f(\lfloor f^a(x) \rfloor) \rfloor .$$

Finalmente, do Corolário 24 temos que

$$\left\lfloor f^1(\lfloor f^a(x) \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(f^a(x)) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor .$$

2. A prova de que

$$\left\lceil f^{a+1}(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^{a+1}(x) \right\rceil ,$$

segue um argumento em tudo análogo ao acima.

Base: Vamos provar que f^k satisfaz

$$\begin{aligned} \left\lfloor f^k(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x) \right\rfloor , \\ \left\lceil f^k(\lceil x \rceil) \right\rceil &= \left\lceil f^k(x) \right\rceil , \end{aligned}$$

para todo $k \leq 1$.

Para $k = 0$ temos

$$\left\lfloor f^0(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor ,$$

e

$$\left\lfloor f^0(x) \right\rfloor = \lfloor x \rfloor ,$$

e portanto,

$$\left\lfloor f^0(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^0(x) \right\rfloor .$$

Pelo mesmo argumento concluímos que

$$\left\lceil f^0(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^0(x) \right\rceil$$

Para $k = 1$ temos

$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor ,$$

e como a função f é contínua, crescente e integralizada, temos do Teorema 12 que

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$

Como

$$\left\lfloor f^1(x) \right\rfloor = \lfloor f(x) \rfloor ,$$

concluímos que

$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(x) \right\rfloor .$$

Pelo mesmo argumento concluímos que

$$\left\lceil f^1(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^1(x) \right\rceil$$

□

Corolário 26. *Sejam $k \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor .$$

Então

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor , \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Exercícios 78 □

Exercício 79.

Aula 8

Prova 1

Aula 9

Recorrências

1. enriquecer com recorrências mais variadas os Exercícios 81 e 82.
2. consertar o Ex. 84

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Queremos uma expressão não recursiva para f.

Para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + 1 \\
&= (f((n-1)-1)+1)+1 = f(n-2)+2 \\
&= (f((n-2)-1)+1)+2 = f(n-3)+3 \\
&= \ldots \\
&= f(n-u)+u,
\end{aligned}$$

onde u é o menor inteiro tal que

$$n - u < 1,$$

ou seja,

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}.$$

Como

$$n - k < 1$$

se e somente se

$$n - k \leq 0$$

se e somente se

$$k \geq n,$$

então

$$\min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} = n,$$

ou seja,

$$u = n,$$

e

$$f(n) = f(n - u) + u = f(n - n) + n = f(0) + n.$$

Então

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sejam $f, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Dado $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(n) = f(h(n)) + 1 \\ = (f(h(h(n))) + 1) + 1 = f(h^2(n)) + 2 \\ = (f(h(h^2(n)) + 1) + 2 = f(h^3(n)) + 3 \\ = \ldots \\ = f(h^u(n)) + u. \end{aligned}$$

Então,

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < 1 \right\}.$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $f, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h(n)) + 1 \\
&= (f(h(h(n))) + 1) + 1 = f(h^2(n)) + 2 \\
&= (f(h(h^2(n)) + 1) + 2 = f(h^3(n)) + 3 \\
&= \ldots \\
&= f(h^u(n)) + u,
\end{aligned}$$

Então,

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Exemplo 3.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \textit{ para todo } n \geq 2.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}
h(n) &= n - 2, \\
n_0 &= 1.
\end{aligned}$$

Então (Exerecício 79a)

$$h^k(n) = n - 2k,$$

e portanto,

$$f(n) = f(h^u(n)) + u = f(n - 2u) + u,$$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k < 2\}.$$

Como

$$n - 2k < 2$$

se e somente se

$$n - 2k \leq 1$$

se e somente se

$$2k \geq n - 1,$$

ou seja,

$$k \geq \frac{n-1}{2},$$

então

$$\min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k \leq 1\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq \frac{n-1}{2}\right\} = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil,$$

ou seja

$$u = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Então

$$\begin{aligned} f(n) = f(n-2u) + u \\ = f\left(n - 2\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)\right) + \left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) \\ = f\left(n - 2\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Para n par, temos

$$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \frac{n}{2},$$

e daí

$$f\left(n - 2\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = f\left(n - 2\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} = f(0) + \frac{n}{2}.$$

Para n ímpar, temos

$$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \frac{n-1}{2},$$

e daí

$$f\left(n - 2\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = f\left(n - 2\frac{n-1}{2}\right) + \frac{n-1}{2} = f(1) + \frac{n-1}{2}.$$

Então, para todo $n \geq 2$,

$$f(n) = \begin{cases} f(0) + \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par}, \\ f(1) + \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \end{cases}$$

ou seja,

$$f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ n_0 &= 2 \end{aligned}$$

e (Corolário 25)

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u.$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 1$$

se e somente se

$$\frac{n}{2^k} < 2,$$

ou seja,

$$2^{k+1} > n,$$

e portanto,

$$k + 1 > \lg n,$$

isto é

$$k > \lg n - 1,$$

então

$$\min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 1\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\right\}.$$

Do Exercício 17 temos

$$\min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > x\right\} = \lfloor x + 1 \rfloor, \ \textsf{para todo } x \in \mathbb{R},$$

de forma que

$$\min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\} = \lfloor \lg n \rfloor,$$

e portanto,

$$u = \lfloor \lg n \rfloor.$$

Então,

$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor$$

Do Exercício 18a temos

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n, \text{ para todo } n > 0,$$

então, para todo $n > 0$,

$$\frac{n}{\frac{n}{2}} > \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \geq \frac{n}{n}$$

isto é

$$1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2,$$

e portanto,

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1,$$

e

$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor = f(1) + \lfloor \lg n \rfloor = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Então

$$f(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h(n)) + s(n) \\
&= f(h(h(n)) + s(n) + s(h(n)) \\
&= f(h^2(n)) + s(n) + s(h(n)) \\
&= f(h(h^2(n))) + s(n) + s(h(n)) + s(h^2(n)) \\
&= f(h^3(n)) + s(n) + s(h(n)) + s(h^2(n)) \\
&= \ldots \\
&= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Exemplo 5. *Teorema 19 e Exercício 66 (número de 1s na expansão binária).*

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))$$

onde

$$\begin{aligned}
h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\
s(n) &= n \bmod 2, \\
u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\}, \\
n_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Então

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) \leq n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 0,$$

ou seja

$$\frac{n}{2^k} < 1$$

ou seja,

$$2^k > n,$$

e portanto,

$$k > \lg n.$$

Então

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n\right\} \overset{Ex\ 17}{=} \lfloor \lg n + 1 \rfloor \overset{T.\ 9}{=} \lfloor \lg n \rfloor + 1,$$

e

$$h^u(n) \overset{Ex\ 18a}{=} . \left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor$$

$$\begin{aligned} f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\ &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor + 1 - 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\ &= f(0) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right). \end{aligned}$$

Então

$$f(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Teorema 27. *tem uma correção a ser feita a ver com exigir $a > n_0$ ou algo parecido; a mesma correção tem que ser feita na resposta do Exercício 63*

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Demonstração. Exercício 63

[default,ex:teo:rec:2]

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq h(n_0).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Vamos provar que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \geq n_0$ tal que, para todo $l \in [n_0..a]$,

$$f(l) = f(h^u(l)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(l)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(l) < n_0\right\},$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = f(h^u(a+1)) + \sum_{i=0}^{(a+1)-1} s(h^i(a+1)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\right\},$$

Como $a+1 \geq n_0$, então

$$f(a+1) = f(h(a+1)) + s(a+1),$$

e além disso,

$$h(a+1) < a+1,$$

ou seja,

$$h(a+1) \leq a,$$

e daí, pela HI,

$$f(h(a+1)) = f(h^{u'}(h(a+1))) + \sum_{i=0}^{u'-1} s(h^i(h(a+1))),$$

onde

$$u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(h(a+1)) < n_0\right\},$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
f(h(a+1)) = f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=0}^{u'-1} s(h^{i+1}(a+1)) \\
= f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^{i}(a+1)),
\end{aligned}
$$

onde

$$u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\right\}.$$

Se $u' = 0$, então

$$
\begin{aligned}
f(h^{u'+1}(a{+}1)){+}\sum_{i=1}^{u'} s(h^{i}(a{+}1)) = f(h^{0+1}(a{+}1)){+}\sum_{i=1}^{0} s(h^{i}(a{+}1)) \\
= f(h(a+1)) + 0 = f(h(a+1)).
\end{aligned}
$$

Se $u' > 0$, por outro lado, então

$$
\begin{aligned}
u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\right\} \\
= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\} - 1 = u - 1,
\end{aligned}
$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\},$$

e portanto,

$$u = u' + 1.$$

Então

$$f(h(a{+}1)) = f(h^{u'+1}(a{+}1)){+}\sum_{i=1}^{u'} s(h^{i}(a{+}1)) = f(h^{u}(a{+}1)){+}\sum_{i=1}^{u-1} s(h^{i}(a{+}1)),$$

e

$$
\begin{aligned}
f(a+1) = f(h(a+1)) + s(a+1) \\
= f(h^{u}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u-1} s(h^{i}(a+1)) + s(h^{0}(a+1)) \\
= f(h^{u}(a+1)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^{i}(a+1)),
\end{aligned}
$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\}.$$

Base: Vamos provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} b+1 &< n_0, \text{ ou} \\ b &\leq n_0, \text{ ou} \\ h(b) &< n_0, \end{aligned}$$

temos

$$f(b) = f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$

Observe que $b+1 < n_0$ se e somente se $b \leq n_0$.
Do mesmo modo, se $b \leq n_0$, então $h(b) < n_0$.
Logo, basta provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$ temos

$$f(b) = f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$

Seja então $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$. Neste caso,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\} = 0,$$

e

$$\begin{aligned} f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)) &= f(h^0(b)) + \sum_{i=0}^{0-1} s(h^i(b)) \\ &= f(b) + \sum_{i=0}^{-1} s(h^i(b)) \\ &= f(b) + 0 = f(b). \end{aligned}$$

□

Exercício 80, 81, 82, 83, 84, 45.

Aula 10

Mais Recorrências

1. formular e acrescentar o Exercício 18.
2. exemplo de contagem de permutações? injeções?
3. enriquecer com mais e mais variadas recorrências o Exercício 90
4. Recorrência para desarranjos (Andreescu and Feng, 2004, p 129)

$$D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1} = nD_n + (D_n - (-1)^n) = n(D_n + D_{n-1}).$$

$$f(n) = m(n)f(h(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(n) &= m(n)f(h(n)) \\ &= m(n)m(h(n))f(h(h(n)) \\ &= m(n)m(h(n))f(h^2(n)) \\ &= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h(h^2(n))) \\ &= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h^3(n)) \\ &= \ldots = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)), \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Exercício 86 [default,ex:recorrencia-pg]

Dado $r \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão r é uma função $f\colon [a..b] \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = r, \text{ para todo } n \geq a.$$

1. Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.
2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. $$f(n) = rf(n-1), \text{ para todo } k > a.$$

2. $$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

   onde

   $$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ m(n) &= r, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= a+1. \end{aligned}$$

   e daí

   $$h^k(n) = n-k,$$

   e

   $$h^k(n) < n_0$$

   se e somente se

   $$n-k < a+1,$$

   ou seja,

   $$k > n-a-1$$

   e

   $$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq n_0\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n-a-1\} = n-a,$$

   e

   $$h^u(n) = h^{n-a}(n) = n-(n-a) = a,$$

   e

   $$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(a) \prod_{i=0}^{n-a-1} r = f(a)r^{n-a}.$$

Exercício 87 [default,ex:pre-fibonacci]

Resolva as seguintes recorrências

1. $f(n) = 2f(n-1)$, para todo $n \geq 2$.
2. $f(n) = 2f(n-2)$, para todo $n \geq 2$.

Resposta:

1. $$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

   onde

   $$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ m(n) &= 2, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

   e daí
   $$h^k(n) = n - k,$$
   e
   $$h^k(n) < n_0$$
   se e somente se
   $$n - k < 2,$$
   ou seja,
   $$k > n - 2$$
   e

   $$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n-1\} = n-1,$$

   e
   $$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n - (n-1) = 1,$$
   e

   $$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(1) \prod_{i=0}^{(n-1)-1} 2 = f(1) \prod_{i=0}^{n-2} 2 = f(1)2^{n-1}.$$

2.
$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ h(n) &= n - 2, \\ m(n) &= 2, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

e daí
$$h^k(n) = n - 2k,$$

e
$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se
$$n - 2k < 2,$$

ou seja,
$$k > \frac{n-2}{2}$$

e

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \frac{n-2}{2}\right\} = \left\lfloor \frac{n-2}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

e
$$h^u(n) = h^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Se n é par, então

$$n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - 2\left(\frac{n}{2}\right) = n - n = 0.$$

Se n é ímpar, então

$$n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - 2\left(\frac{n-1}{2}\right) = n - (n-1) = 1.$$

Então
$$h^u(n) = n \bmod 2,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(n \bmod 2) \prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} 2 = f(n \bmod 2) 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Se n é par, então

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{\frac{n}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^n (\sqrt{2})^n.$$

Se n é ímpar, então

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{\frac{n-1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{n-1} (\sqrt{2})^{n-1}.$$

Então

$$f(n) = f(n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-(n \bmod 2)} = \frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}} (\sqrt{2})^n$$

Se n é par,

$$\frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}} (\sqrt{2})^n = \frac{f(0)}{(\sqrt{2})^0} (\sqrt{2})^n = \frac{0}{1} (\sqrt{2})^n = 0.$$

Se n é ímpar,

$$\frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}} (\sqrt{2})^n = \frac{f(1)}{(\sqrt{2})^1} (\sqrt{2})^n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{n-1}$$

Então

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n \text{ é par}, \\ (\sqrt{2})^{n-1}, & \textsf{se } n \text{ é ímpar}, \end{cases}$$

ou seja

$$f(n) = (n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-1}$$

Teorema 28. *Sejam* $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e* $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$f(n) = m(n)f(h(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Demonstração. Exercício 64. □

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= m(n)f(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)(m(h(n))f(h^2(n) + s(h(n)))) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))f(h^2(n) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))(m(h^2(n))f(h^3(n)) + s(h^2(n))) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h^3(n)) + m(n)m(h(n))s(h^2(n)) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= \ldots \\
&= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Teorema 29. *Sejam* $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e* $f, m, s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

Demonstração. Exercicio 65. □

Exercício 88 [default,ex:recorrencia-mergesort]

O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Considere as seguintes recorrências.

$$T^{-}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^{-}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \tag{10.1}$$

e

$$T^{+}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^{+}\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \tag{10.2}$$

1. Prove que $T^{-}(n) \leq T(n) \leq T^{+}(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Resolva as recorrências.

3. Use as soluções obtidas para provar que $T^{-}(n) \approx n \lg n$ e $T^{+}(n) \approx n \lg n$.

4. Conclua que $T(n) \approx n \lg n$.

Resposta:

1.

2. Do Teorema 29, temos

$$T^{-}(n) = T^{-}(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

e

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ m(n) &= 2, \\ s(n) &= n - 1, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^u(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor.$$

Além disso, para todo $i \in [0..u-1]$,

$$m(h^i(n)) = 2,$$

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^j(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 2 = 2^u.$$

e

$$f(h^i(n)) = h^i(n) - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1$$

e

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 2 = 2^i.$$

Então

$$\begin{aligned}
T^-(n) = T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1\right) 2^i \\
= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \\
= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + \frac{2^{(u-1)+1} - 1}{2-1} \\
= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2^u \\
= 2^u \left(T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + 1\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor,
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\},$$

e portanto,

$$\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor < 2,$$

e

$$T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) = 0,$$

e

$$T^-(n) = 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2$$

se e somente se

$$\frac{n}{2^k} < 2$$

ou seja,

$$n < 2^{k+1},$$

isto é,

$$k > \lg n - 1,$$

então,

$$\begin{aligned} u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\} \\ = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\} = \lfloor \lg n - 1 \rfloor + 1 \\ = \lfloor \lg n \rfloor, \end{aligned}$$

e

$$T^-(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor.$$

Por desenvolvimento análogo chegamos a

$$T^+(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil.$$

3. Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor > \frac{n}{2^i} - 1,$$

então

$$2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor > 2^i \left(\frac{n}{2^i} - 1\right) = n - 2^i$$

e

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor > \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} (n - 2^i)$$

$$= n \lg n - \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i = n \lg n - \frac{2^{(\lfloor \lg n \rfloor - 1)+1}}{2-1} = n \lg n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$$

$$\geq n \lg n - 2^{\lg n} = n \lg n - n.$$

Então

$$T^-(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$$

$$> 2^{\lg n - 1} + (n-1) \lg n = \frac{n}{2} + (n-1) \lg n$$

$$= n \lg n + \frac{n}{2} - \lg n = n \lg n \left(1 + \frac{2}{\lg n} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\approx n \lg n.$$

Por argumento semelhante chegamos a

$$T^+(n) \approx n \lg n,$$

4. Como

$$T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

podemos concluir

$$T(n) \approx n \lg n.$$

Exercício 89 [default,ex:master-method]

O "Master Method" ou "Master Theorem"[1] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 88 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} T^-(n) & = & aT^-\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + f(n), \\ T^+(n) & = & aT^+\left(\lceil n/b \rceil\right) + f(n), \end{array}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

Resposta:

Usando a notação do Teorema 29, temos

$$\begin{array}{rcl} h(n) & = & \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor, \\ m(n) & = & a, \\ s(n) & = & f(n), \end{array}$$

e daí,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor,$$

e

$$T(n) = T(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}. = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor < n_0\right\}.$$

Como

$$h^u(n) = \left\lfloor \frac{n}{b^u} \right\rfloor$$

[1] Popularizado com este nome por Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein (2009).

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} a = a^u,$$

e

$$\sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) = \sum_{i=0}^{u-1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right)$$

e

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} a = a^i,$$

então,

$$T(n) = a^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor < n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \log_b \frac{n}{n_0}\right\} = \left\lfloor \log_b \frac{n}{n_0} \right\rfloor + 1.$$

Exercícios 87, 88, 89, 90, 45.

Aula 11

Recorrências Lineares Homogêneas

1. formular o ex. 6
2. incorporar os resultados no apêncice

Definição 12. *Uma recorrência linear homogênea (RLH) é uma recorrência da forma*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

onde $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

Exemplo 6.

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Observe que se $f^-, f, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ são tais que

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$, e ainda,

$$\begin{aligned} f^-(0) = f(0) = f^+(0) = 0, \text{ e} \\ f^-(1) = f(1) = f^+(1) = 1, \end{aligned}$$

então (Exercício 76)

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como (Exercício 87),

$$\begin{aligned} f^-(n) &= (n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-1}, \\ f^+(n) &= 2^{n-1}, \end{aligned}$$

então

$$(n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-1} \leq f(n) \leq 2^{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Notação 5. *Se A e B são conjuntos, B^A denota o conjunto das funções $A \to B$.*

Definição 13. *Dados $z \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definimos as funções $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dadas por*

$$\begin{aligned}(f+g)(n) &= f(n) + g(n),\\ (zf)(n) &= zf(n).\end{aligned}$$

Exemplo 7.

$$\begin{aligned}f(n) &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\\ g(n) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\\ z &= \frac{\sqrt{5}}{5},\\ f(n)+g(n) &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\\ zf(n) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\end{aligned}$$

Teorema 30. *$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.*

Demonstração. Exercicio 91. □

Teorema 31. *$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Exercicio 91. □

Exemplo 8. *Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\begin{aligned}f(n) &= f(n-1) + f(n-2),\\ g(n) &= g(n-1) + g(n-2),\end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$.

Então, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}(f+g)(n) &= f(n) + g(n)\\ &= (f(n-1) + f(n-2)) + (g(n-1) + g(n-2))\\ &= (f(n-1) + g(n-1)) + (f(n-2) + g(n-2))\\ &= (f+g)(n-1) + (f+g)(n-2)\end{aligned}$$

e para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$(zf)(n) = z(f(n)) = z(f(n-1) + f(n-2)) = (zf)(n-1) + (zf)(n-2).$$

O conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ das funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ de dimensão 2.

Se $\{f_1, f_2\}$ é uma base de $\mathcal{R}$, então toda função que satisfaz a recorrência de Fibonacci pode ser escrita como combinação linear de f_1 e f_2, isto é, para todo $f \in \mathcal{R}$ existem $c1, c_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja $r \in \mathbb{C} - \{0\}$ e seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(n) = r^n.$$

Se f é uma função da base de $\mathcal{R}$, então f satisfaz a recorrência de Fibonacci, isto é,

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2,$$

ou seja

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e portanto,

$$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e portanto,

$$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e como $r \neq 0$, então

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

ou seja,

$$r \in \left\{ r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Então as funções não nulas do tipo

$$f(n) = r^n,$$

que satisfazem a recorrência de Fibonacci são

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ f_2(n) &= r_2^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Como f_1 e f_2 são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ (Exercício 92) e $\mathcal{R}$ é um subespaço vetorial de dimensão 2 de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$, concluímos que o conjunto $\{f_1, f_2\}$ forma uma base de $\mathcal{R}$.

Consequentemente, toda função $F \in \mathcal{R}$ pode ser escrita como combinação linear das funções f_1 e f_2.

Noutras palavras, se F satisfaz a recorrência de Fibonacci, então existem $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$F = c_1 f_1 + c_2 f_2,$$

ou seja,

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para determinar os valores de c_1 e c_2, temos que

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) \\ F(1) &= c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 \\ F(1) &= c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1. \end{aligned}$$

Exemplo 9. *No caso da sequência de Fibonacci temos*

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= c_1 r_1 + c_2 r_2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$c_1 = -c_2,$$

e, consequentemente,

$$1 = -c_2 r_1 + c_2 r_2 = c_2(r_2 - r_1),$$

e, portanto,

$$c_2 = \frac{1}{r_2 - r_1},$$

e, consequentemente,

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{r_1 - r_2}.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) = \frac{1}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{1}{r_2 - r_1} r_2^n.$$

Como

$$r_2 > r_1,$$

fica melhor

$$F(n) = \frac{1}{r_2 - r_1}\left(r_2^n - r_1^n\right),$$

isto é,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Exercícios 91, 92.

Aula 12

Recorrências Lineares Homogêneas Passadas a Limpo

formular o Ex 9

Definição 14. *Dados $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, denotamos por $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ o conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k) := \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \\ f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \\ \text{para todo } n \geq k\}.\end{aligned}$$

Teorema 32. *Dados $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, o conjunto $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.*

Demonstração. Exercício 93 □

Definição 15. *O* polinômio característico *do espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é o polinômio*

$$X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k.$$

Exemplo 10. *O conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo*

$$f(n) = 2f(n-1) - f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2,$$

é o espaço vetorial $\mathcal{R}(2,-1)$*, cujo polinômio característico é* $X^2 - 2X + 1$.

O conjunto $\{r_1^n, r_2^n\}$*, onde* r_1 *e* r_2 *são as raízes de* $X^2 - 2X + 1$ *é linearmente independente em* $\mathcal{R}(2,-1)$.

Só que $r_1 = r_2 \ldots$

Teorema 33. *A função* $n^{m-1}r^n$ *pertence ao espaço vetorial* $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *se e somente se* $(X-r)^m$ *divide o polinômio característico de* $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Demonstração. $\boxed{\text{completar}}$ □

Teorema 34. *Se* $r \in \mathbb{C}$ *é uma raiz de multiplicidade* m *do polinômio característico de* $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$*, então o conjunto*

$$\left\{n^j r^n \mid 0 \leq j < m\right\}$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Exemplo 11. *O conjunto* $\{n^0 r_1^n, n^1 r_1^n\}$*, é linearmente independente em* $\mathcal{R}(2,-1)$.

Então toda função $f \in \mathcal{R}(2,-1)$ *pode ser escrita como uma combinação linear de* $n^0 r_1^n$ *e* $n^1 r_1^n$*, isto é, existem* $c_{1,0}, c_{1,1} \in \mathbb{C}$ *tais que*

$$f(n) = c_{1,0} n^0 r_1^n + c_{1,1} n^1 r_1^n.$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} r_1^n + c_{1,1} n r_1^n.$$

Os valores de $c_{1,0}$ *e* $c_{1,1}$ *podem ser determinados pelo sistema*

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} r_1^0 + c_{1,1}(0) r_1^0, \\ f(1) &= c_{1,0} r_1^1 + c_{1,1}(1) r_1^1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}, \\ f(1) &= c_{1,0} r_1 + c_{1,1} r_1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= f(0), \\ c_{1,1} &= \frac{f(1)}{r_1} - f(0), \end{aligned}$$

e portanto,

$$f = f(0)r_1^n + \left(\frac{f(1)}{r_1} - f(0)\right) nr_1^n = \left(f(0) + \left(\frac{f(1)}{r_1} - f(0)\right) n\right) r_1^n$$

No exemplo tínhamos $r_1 = 1$ e portanto,

$$f = (f(1) - f(0))n + f(0),$$

ou seja,

$$f(n) = (f(1) - f(0))n + f(0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Corolário 35. *Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_l$ as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_l$, respectivamente. Então o conjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{l} \left\{ n^j r_i^n \mid 0 \leq j < m_i \right\}$$

é uma base de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Corolário 36. *Se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ são as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_l$, respectivamente, e $\{c_{i,j} \mid 1 \leq i \leq l \text{ e } 0 \leq j < m_i\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} a^j r_i^a, 0 \leq a < k.$$

Exemplo 12.

Exemplo 13. *resolver com condições iniciais!*

A recorrência

$$f(n) = 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5)$$

define o subespaço $\mathcal{R}(7, -19, 25, -16, 4)$ *cujo polinômio característico é*

$$X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4 = (X-1)^3(X-2)^2,$$

que tem $l = 2$ *raízes distintas,*

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= 2, \end{aligned}$$

com multiplicidades

$$\begin{aligned} m_1 &= 3, \\ m_2 &= 2, \end{aligned}$$

respectivamente.

Pelo Corolário 36, temos que

$$\begin{aligned} f(n) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \\ &= \sum_{j=0}^{m_1-1} c_{1,j} n^j r_1^n + \sum_{j=0}^{m_2-1} c_{2,j} n^j r_2^n \\ &= \sum_{j=0}^{2} c_{1,j} n^j 1^n + \sum_{j=0}^{1} c_{2,j} n^j 2^n \\ &= c_{1,0} n^0 1^n + c_{1,1} n^1 1^n + c_{1,2} n^2 1^n + c_{2,0} n^0 2^n + c_{2,1} n^1 2^n \\ &= c_{1,0} + c_{1,1} n + c_{1,2} n^2 + c_{2,0} 2^n + c_{2,1} n 2^n, \end{aligned}$$

onde $c_{i,j} \colon 1 \leq i \leq 2, 0 \leq j < m_i$ *são determinados pelo sistema*

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{1,1}0 + c_{1,2}0^2 + c_{2,0}2^0 + c_{2,1}02^0 \\ f(1) &= c_{1,0} + c_{1,1}1 + c_{1,2}1^2 + c_{2,0}2^1 + c_{2,1}12^1 \\ f(2) &= c_{1,0} + c_{1,1}2 + c_{1,2}2^2 + c_{2,0}2^2 + c_{2,1}22^2 \\ f(3) &= c_{1,0} + c_{1,1}3 + c_{1,2}3^2 + c_{2,0}2^3 + c_{2,1}32^3 \\ f(4) &= c_{1,0} + c_{1,1}4 + c_{1,2}4^2 + c_{2,0}2^4 + c_{2,1}42^4, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0} \\ f(1) &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + 2c_{2,0} + 2c_{2,1} \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 4c_{2,0} + 8c_{2,1} \\ f(3) &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 8c_{2,0} + 24c_{2,1} \\ f(4) &= c_{1,0} + 4c_{1,1} + 16c_{1,2} + 16c_{2,0} + 64c_{2,1}. \end{aligned}$$

cuja solução é

$$
\begin{aligned}
c_{1,0} &= 8f(0) - 24f(1) + 30f(2) - 16f(3) + 3f(4), \\
c_{1,1} &= \frac{4f(0) - 20f(1) + 29f(2) - 16f(3) + 3f(4)}{2}, \\
c_{1,2} &= \frac{4f(0) - 12f(1) + 13f(2) - 6f(3) + f(4)}{2}, \\
c_{2,0} &= -7f(0) + 24f(1) - 30f(2) + 16f(3) - 3f(4), \\
c_{2,1} &= \frac{2f(0) - 7f(1) + 9f(2) - 5f(3) + f(4)}{2}.
\end{aligned}
$$

```
sage:~/svn/md->attach lib/md.sage
sage:~/svn/md->rsolve([7,-19,25,-16,4],verbose=True)
characteristic polynomial: X^5 - 7*X^4 + 19*X^3 - 25*X^2 + 16*X -
roots and multiplicities: [(2, 2), (1, 3)]
generic solution: n |--> 2^n*c11*n + c22*n^2 + 2^n*c10 + c21*n +
particular solution: n |--> 1/2*(2*f0 - 7*f1 + 9*f2 - 5*f3 + f4)*2
n |--> 1/2*(2*f0 - 7*f1 + 9*f2 - 5*f3 + f4)*2^n*n + 1/2*(4*f0 - 12
```

Exercícios 94 e 95.

Aula 13

Recorrências Lineares não Homogêneas

Definição 16. *Uma recorrência linear não homogênea é uma equação da forma*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

onde $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Teorema 37. *Sejam* $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k,$$

Se g satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é G, então f satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é

$$G(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-2} X^2 - a_{k-1} X - a_k).$$

Exercício 96 [default,ex:fibonacci+1]

Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ g(n) &= 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = g(n-1), \text{ para todo } n > 0,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 1)$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X - 1)(X^2 - X - 1),$$

e, portanto, pelo Corolário 36, sabemos que

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_i, i \in [1..l]$ são as distintas raízes de $(X - 1)(X^2 - X - 1)$ com multiplicidades $m_i, i \in [1..l]$, respectivamente.

Neste exemplo,

$$\begin{aligned} l &= 3, \text{ e} \\ m_i &= 1, \text{ para todo } i \in [1..3] \end{aligned}$$

e portanto temos

$$f(n) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{1-1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$f(n) = \sum_{i=1}^{3} c_{i,0} r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} r_1^n + c_{2,0} r_2^n + c_{3,0} r_3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0}\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = c_{1,0}r_1^a + c_{2,0}r_2^a + c_{3,0}r_3^a, 0 \leq a < 3,$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0, \\ f(1) &= c_{1,0}r_1^1 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1, \\ f(2) &= c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2. \end{aligned}$$

Como

$$f(2) = f(1) + f(0) + g(2) = f(1) + f(0) + 1,$$

fica

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0, \\ f(1) &= c_{1,0}r_1^1 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1, \\ f(0) + f(1) + 1 &= c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\ f(1) &= c_{1,0}r_1 + c_{2,0}r_2 + c_{3,0}r_3, \\ f(0) + f(1) + 1 &= c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2, \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ r_3 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + c_{3,0}\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\ 2 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -1, \\ c_{2,0} &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \\ c_{3,0} &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1.$$

```
sage:~/svn/md->sol=rsolve((X-1)*(X^2-X-1), init=[(0,0),(1,1),(2,2)]
characteristic polynomial: (X - 1)*(X^2 - X - 1)
roots and multiplicities: [(-1/2*sqrt(5) + 1/2, 1), (1/2*sqrt(5) +
generic solution: n |--> (-1/2*sqrt(5) + 1/2)^n*c10 + (1/2*sqrt(5)
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 2)]
particular solution: n |--> -1/10*(3*sqrt(5) - 5)*(-1/2*sqrt(5) + 1
```

Teorema 38. *Dados $k \in \mathbb{N}$ e $c, r \in \mathbb{C}$, a função*

$$f(n) = cn^k r^n,$$

satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$(X - r)^{k+1}.$$

Exemplo 14. *No exemplo anterior tínhamos*

$$g(n) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e observamos que g satisfaz a RLH

$$g(n) = g(n-1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

cujo PC é

$$X - 1.$$

Observando que

$$g(n) = 1n^0 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos diretamente do Teorema 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)^{0+1} = X - 1.$$

Exercício 97 [default,ex:rlnh-2]

Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ g(n) &= n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como
$$g(n) = 1n^1 1^n,$$
temos diretamente do Teorema 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é
$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$
e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-2) = (X-1)^2(X-2),$$
e daí, pelo Corolário 36, temos
$$f(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n1^n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
ou seja,
$$f(n) = c_{1,0} + +c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema
$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2f(0)+1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 2f(1)+2 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$
ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$
cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -2, \\ c_{1,1} &= -1, \\ c_{2,0} &= 2, \end{aligned}$$
e portanto,
$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n = 22^n - n - 2, = 2^{n+1} - n - 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

```
sage: X=var("X")
sage: rsolve((X-1)**2*(X-2), init=[(0,0),(1,1),(2,4)], verbose=sys.
characteristic polynomial: (X - 1)^2*(X - 2)
roots and multiplicities: [(1, 2), (2, 1)]
generic solution: n |--> 2^n*c_2_0 + c_1_1*n + c_1_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 4)]
particular solution: n |--> 2*2^n - n - 2
n |--> 2*2^n - n - 2
```

Mais um exemplo interessante?

Exercícios 83, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102.

Aula 14

Somatórios

exercícios de soma de pa e pg?

Corolário 39. *Se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é P, então a função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é $(X-1)P$.

Demonstração. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que f satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é P e seja $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i).$$

A função s satisfaz a recorrência

$$s(n) = s(n-1) + f(n),$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que s satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)P$. □

Exercício 103 [default,ex:sum-i]

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Resposta:

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

onde

$$f(n) = n,$$

e

$$f(n) = 1n^1 1^n,$$

temos do Teorema 38 que a função f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Corolário 39 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)P = (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n^1 1^n + c_{1,2}n^2 1^n = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2,$$

onde $(c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{1,1}0^1 + c_{1,2}0^2, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{1,1}1^1 + c_{1,2}1^2, \\ s(2) &= c_{1,0} + c_{1,1}2^1 + c_{1,2}2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2}, \\ 3 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 1 &= c_{1,1} + c_{1,2}, \\ 3 &= 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= 0, \\ c_{1,1} &= \frac{1}{2}, \\ c_{1,2} &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 = c_{1,0} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercício 104 [default,ex:sum-pg]

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} x^i$, onde $x \in \mathbb{C}$.

Resposta:

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

onde

$$f(n) = x^n,$$

e

$$f(n) = 1n^0 x^n,$$

temos do Teorema 38 que a função f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X - x)^{0+1} = (X - x),$$

e daí, pelo Corolário 39 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)P = (X - 1)(X - x).$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{2,0}x^n = c_{1,0} + c_{2,0}x^n$$

onde $(c_{1,0}, c_{1,1})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}x^0, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}x^1, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ x + 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}x, \end{aligned}$$

e portanto,

$$c_{1,0} = 1 - c_{2,0},$$

e

$$x + 1 = c_{1,0} + c_{2,0}x = 1 - c_{2,0} + c_{2,0}x = 1 + (x - 1)c_{2,0}$$

ou seja,

$$c_{2,0} = \frac{x}{x - 1},$$

e

$$c_{1,0} = 1 - c_{2,0} = 1 - \frac{x}{x-1},$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= c_{1,0} + c_{2,0}x^n \\ &= 1 - \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-1}x^n \\ &= 1 + \frac{x}{x-1}(x^n - 1) \\ &= 1 + \frac{x^{n+1} - x}{x-1} \\ &= \frac{(x^{n+1} - x) + (x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} \end{aligned}$$

O Exercício 26 sugere usar o fato de que

$$\sum_{j=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2,$$

para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor + 1\right).$$

Exercício 105 [default,ex:sum-i2i]

Dê uma expressão[1] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Resposta:

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

onde

$$f(n) = n2^n,$$

temos

$$f(n) = 1n^1 2^n,$$

e daí, do Teorema 38 temos que a função f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X-2)^{1+1} = (X-2)^2,$$

e daí, pelo Corolário 39 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)P = (X-1)(X-2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}n^0 1^n + c_{2,0}n^0 2^n + c_{2,1}n^1 2^n = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n$$

onde $(c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^0 + c_{2,1}02^0, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^1 + c_{2,1}12^1, \\ s(2) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^2 + c_{2,1}22^2, \end{aligned}$$

[1] cfr. Exercício 51

isto é,

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & c_{1,0} + c_{2,0}(1) + c_{2,1}(0)1, \\
0 + 12^1 & = & c_{1,0} + c_{2,0}(2) + c_{2,1}(1)2, \\
0 + 12^1 + 22^2 & = & c_{1,0} + c_{2,0}(4) + c_{2,1}2(4),
\end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & c_{1,0} + c_{2,0}, \\
2 & = & c_{1,0} + 2c_{2,0} + 2c_{2,1}, \\
10 & = & c_{1,0} + 4c_{2,0} + 8c_{2,1},
\end{array}$$

cuja solução é

$$\begin{array}{rcl}
c_{1,0} & = & 2, \\
c_{2,0} & = & -2, \\
c_{2,1} & = & 2.
\end{array}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Exercícios 106, 108, 107.

Aula 15

Algumas Aplicações

Exercício 99 [default,ex:linearizacao-matrizes]

Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n)-1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

1. Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.
2. Resolva esta recorrência.
3. Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i, j]$?

completar com itens pedindo código em C implementando esta idéia.

Resposta:

1.
$$N(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ N(n-1) + n, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

2. $N(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-1)P,$$

onde P é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = n.$$

Como

$$n = 1n^1 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X-1)^2,$$

e N satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3,$$

e

$$N(n) = c_{10}1^n + c_{11}n^1 1^n + c_{12}n^2 1^n = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2,$$

onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por

$$\begin{array}{rcl} N(0) & = & c_{10} + c_{11}0 + c_{12}0^2, \\ N(1) & = & c_{10} + c_{11}1 + c_{12}1^2, \\ N(2) & = & c_{10} + c_{11}2 + c_{12}2^2, \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{10}, \\ N(0)+1 & = & c_{10} + c_{11} + c_{12}, \\ N(1)+2 & = & c_{10} + 2c_{11} + 4c_{12}, \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{10}, \\ 1 & = & c_{11} + c_{12}, \\ 3 & = & 2c_{11} + 4c_{12}, \end{array}$$

e portanto,

$$c_{12} = 1 - c_{11},$$

e

$$2c_{11} + 4(1 - c_{11}) = 3,$$

ou seja

$$-2c_{11} = -1,$$

e portanto,

$$c_{11} = \frac{1}{2},$$

e

$$c_{12} = 1 - c_{11} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$N(n) = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Seja $p(i,j)$ a posição de v ocupada por $M[i,j]$, isto é

$$v[p(i,j)] = M[i,j], \text{ para todo } 1 \leq i,j \leq n.$$

Claramente

$$p(i,i) = N(i) - 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n,$$

e, em geral,

$$p(i,j) = p(i-1,i-1) + j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq i \leq n,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} p(i,j) &= p(i-1,i-1) + j \\ &= N(i-1) - 1 + j \\ &= \frac{(i-1)((i-1)+1)}{2} + j - 1 \\ &= \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & \text{se } 1 \leq j \leq i \leq n, \\ p(j,i), & \text{se } 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

Para a função inversa, se $M_{i,j}$ é a matriz procurada, uma forma fechada para ela é

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \underbrace{\sum_{k=0}^{i} k}_{\text{1o elem. da linha}} + \underbrace{\sum_{k=i+2}^{i+j+1} k}_{\text{deslocamento}} \\ &= T_i + T_{i+j+1} - T_{i+1} \\ &= \frac{i + i^2 + 2ij + j(j+3)}{2}, \end{aligned}$$

onde T_n é o n-ésimo número triangular, $T_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

15.1 Árvores Binárias

Exercício 109 [default,ex:altura-arvore]

Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dada por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Uma *árvore trivial* é uma árvore de tamanho 1.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ o maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

1. Expresse $h^+(h)$ como uma recorrência.

2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. Da definição de $h^+(n)$ temos

$$h^+(n) = \max\{h(T) \mid |T| = n\}.$$

Então,

$$h(T) \leq h^+(|T|), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Para todo $n > 0$, temos

$$\begin{aligned} h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\} \\ &= \max\{\max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1 \mid |T| = n\} \\ &= \max\{1 + \max\{h(E(T)), h(D(T))\} \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(E(T)), h(D(T)) \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(T) \mid |T| < n\} \\ &= 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\}. \end{aligned}$$

Como h^+ é uma função crescente, então

$$\max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} = h^+(n-1),$$

e daí,

$$h^+(n) = 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} = 1 + h^+(n-1),$$

ou seja

$$h^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 1 + h^+(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

2. h^+ satisfaz uma RLnH cuja solução é

referenciar o exercício em que esta recorrência é resolvida

$$h^+(n) = n.$$

Teorema 40. *Para toda árvore binária T,*

$$h(T) \leq |T|.$$

Demonstração. Fazendo

$$h^+(n) = \max\{h(T) \mid |T| = n\}.$$

temos que

$$h(T) \leq h^+(|T|),$$

para toda árvore binária T, e daí (Ex. 109)

$$h(T) \leq |T|,$$

para toda árvore binária T. □

Exercício 110 [default,ex:nos-arvore]

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[1] de altura n.

1. Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.

2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. Da definição de $t^+(n)$ temos

$$t^+(n) = \max\{|T| \mid h(T) = n\}.$$

Então

$$|T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B},$$

e portanto,

$$h(T) \leq |T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} &= \max\{|T| + |T| \mid h(T) < n\}\\ &= \max\{2|T| \mid h(T) < n\}\\ &= 2\max\{|T| \mid h(T) < n\}\\ &= 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\}.\end{aligned}$$

Como t^+ é uma função crescente, então

$$\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} = t^+(n-1),$$

e daí,

$$\max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} = 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} = 2t^+(n-1).$$

e

$$\begin{aligned}t^+(n) &= \max\{|T| \mid h(T) = n\}\\ &= \max\{|E(T)| + |D(T))| + 1 \mid h(T) = n\}\\ &= \max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} + 1\\ &= 1 + 2t^+(n-1).\end{aligned}$$

[1]Veja o Exercício 109.

Então
$$t^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2t^+(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

2. t^+ satisfaz uma RLnH cuja solução é

referenciar o exercício em que esta recorrência é resolvida

$$t^+(n) = (t^+(0) + 1)2^n - 1.$$

Teorema 41. *Para toda árvore binária T,*
$$\lfloor \lg |T| \rfloor + 1 \leq h(T) \leq |T|.$$

Demonstração. Fazendo
$$t^+(n) = \max \{|T| \mid h(T) = n\}.$$
temos,
$$|T| \leq t^+(h(T)),$$
para toda árvore binária T, e daí (Ex. 110)
$$|T| \leq 2^{h(T)} - 1,$$
para toda árvore binária T, e consequentemente,
$$\lg(|T| + 1) \leq h(T),$$
e portanto,
$$h(T) \geq \lg(|T| + 1),$$
e como $h(T)$ é inteiro, então
$$h(T) \geq \lceil \lg(|T| + 1) \rceil \overset{\text{Ex. 18a}}{=} \lfloor \lg |T| \rfloor + 1.$$
□

15.2 Árvores AVL

Exercício 111 [default,ex:avl]

Seja AVL o conjunto das árvores binárias[2] T satisfazendo

$$E(T) \in \mathsf{AVL} \text{ e } D(T) \in \mathsf{AVL}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

1. Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.
2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. Da definição temos

$$t^-(n) = \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\}.$$

Como

$$\begin{aligned}
t^-(n) &= \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= \min\{|E(T)| + |D(T)| + 1 \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= 1 + \min\{|E(T)| + |D(T)| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= 1 + \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n-1\} + \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n-2\} \\
&= 1 + t^-(n-1) + t^-(n-2),
\end{aligned}$$

então

$$t^-(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ t^-(n-1) + t^-(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

2. t^- satisfaz uma RLnH cuja solução é (Ex. 96)

$$t^-(n) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$$

[2] Veja o Exercício 109.

Teorema 42. *Para toda árvore* AVL *não trivial temos*

$$\lfloor \lg |T| \rfloor + 1 \le h(T) < 1.4405 \lg |T|.$$

Demonstração. Fazendo

$$t^-(n) = \min \{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\}.$$

temos

$$t^-(h(T)) \le |T|,$$

para toda árvore AVL T.

Como (Ex. 111)

$$\begin{aligned}
t^-(n) &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} + \frac{1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right) \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^n} + \frac{\frac{10}{5+3\sqrt{5}}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right) \\
&\approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Então, para toda árvore AVL T temos

$$|T| \ge t^-(h(T)) \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h(T)},$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\lg |T| \ge \lg t^-(h(T)) &\approx \lg\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h(T)}\right) \\
&= \lg \frac{5+3\sqrt{5}}{10} + h(T)\lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > h(T)\lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Noutras palavras, existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) h(T) \leq \lg|T|, \text{ para todo } T \mid h(T) \geq h_0,$$

ou seja, para toda árvore AVL T tal que $h(T) \geq h_0$,

$$h(T) < \frac{1}{\lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \lg|T| < 1.4405 \lg|T|.$$

Fazendo os cálculos chegamos a $h_0 = 2$. $\square$

A altura de uma árvore AVL nunca é mais que 44.05% maior que a da árvore binária do mesmo tamanho de menor altura possível.

15.3 Comparações no QuickSort Aleatorizado

quebrar as "mágicas" em exercícios

O QuickSort aleatorizado é a variante do QuickSort em que o índice do pivô é escolhido aleatoriamente de maneira uniforme.

Considere um vetor de n elementos distintos e seja

c**:** número de comparações na execução do QuickSort aleatorizado sobre um vetor de n elementos;

$C(n) := \mathbb{E}[c]$**:** número esperado de comparações na execução do QuickSort aleatorizado.

Se o pivô é o k-ésimo elemento do vetor, então o número de comparações será

$$c = (n-1) + C(k-1) + C(n-k)$$

O valor de k pode ser qualquer um de 1 a n. A média, que é o número esperado de comparações, será

$$\begin{aligned}
C(n) &= \frac{\sum_{k=1}^{n}\left((n-1) + C(k-1) + C(n-k)\right)}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(n-1) + \sum_{k=1}^{n} C(k-1) + \sum_{k=1}^{n} C(n-k)\right) \\
&\overset{\text{j=n-k+1}}{=} \frac{1}{n}\left(n(n-1) + \sum_{k=1}^{n} C(k-1) + \sum_{j=1}^{n} C(j-1)\right) \\
&= n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} C(k-1) \\
&= n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C(k).
\end{aligned}$$

Observe que, então,

$$nC(n) = n(n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} C(k),$$

e

$$(n-1)C(n-1) = (n-1)(n-2) + 2\sum_{k=0}^{n-2} C(k),$$

e daí,

$$\begin{aligned}
nC(n)-(n-1)C(n-1) &= n(n-1)+2\sum_{k=0}^{n-1}C(k)-\left((n-1)(n-2)+2\sum_{k=0}^{n-2}C(k)\right) \\
&= (n-1)(n-(n-2))+2\left(\sum_{k=0}^{n-1}C(k)-\sum_{k=0}^{n-2}C(k)\right) \\
&= 2(n-1)+2C(n-1),
\end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
C(n) &= \frac{(n-1)C(n-1)+2(n-1)+2C(n-1)}{n} \\
&= \frac{(n+1)C(n-1)+2(n-1)}{n} \\
&= \frac{(n+1)}{n}C(n-1)+\frac{2(n-1)}{n}
\end{aligned}$$

Exercício 112 [default,ex:quicksort]

Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo QuickSort.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n}C(n-1)+\frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Com a notação usual temos

$$\begin{aligned}
h(n) &= n-1, \\
n_0 &= 2, \\
m(n) &= \frac{n+1}{n}, \text{ e} \\
s(n) &= \frac{2(n-1)}{n},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$h^k(n) = n-k,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$n - k < 2,$$

isto é

$$k > n - 2,$$

e consequentemente,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > n-2\right\} = n - 1.$$

Como

$$C(n) = C(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),$$

e

$$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n - (n-1) = 1,$$

e

$$m(h^i(n)) = m(n-i) = \frac{n-i+1}{n-i}$$

e

$$s(h^i(n)) = s(n-i) = \frac{2(n-i-1)}{n-i}$$

então

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{n-i+1}{n-i} &= \prod_{i=0}^{n-2} \frac{n-i+1}{n-i} \\ &= \frac{n-0+1}{n-0}\,\frac{n-1+1}{n-1} \cdots \frac{n-(n-3)+1}{n-(n-3)}\,\frac{n-(n-2)+1}{n-(n-2)} \\ &= \frac{n-0+1}{n-(n-2)} = \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \frac{n-0+1}{n-(i-1)} = \frac{n+1}{n-i+1}$$

e daí

$$\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), = \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{2(n-i-1)}{n-i} \frac{n+1}{n-i+1}$$
$$= 2(n+1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n-i-1}{n-i} \frac{1}{n-i+1}$$
$$\overset{\text{j=n-i}}{=} 2(n{+}1) \sum_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j(j+1)} = 2(n{+}1) \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i(i+1)} = 2(n{+}1) \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i(i+1)} \right)$$
$$= 2(n+1) \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)$$
$$= 2(n+1) \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)$$

Observando que

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1},$$

temos

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{2(n+1)}$$

e

$$\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = 2(n+1) \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)$$
$$= 2(n+1) \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - \frac{n-1}{2(n+1)} \right) = 2(n+1) \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - (n-1)$$
$$= 2(n+1) \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - n + 1.$$

Observando que

$$\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} = H(n+1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = H(n) + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2},$$

temos

$$\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = 2(n+1) \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - n + 1$$

$$= 2(n+1) \left(H(n) + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2} \right) - n + 1 = 2(n+1)H(n) + 2 - \frac{6(n+1)}{2} - n + 1$$

$$= 2(n+1)H(n) - 3n - 3 - n + 3 = 2(n+1)H(n) - 4n$$

$$= 2nH(n) - 4n + 2H(n).$$

Finalmente,

$$C(n) = C(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))$$

$$= C(1)\frac{n+1}{2} + 2nH(n) - 4n + 2H(n)$$

$$= 2nH(n) - 4n + 2H(n) = 2nH(n) \left(1 - \frac{2}{H(n)} + \frac{1}{n} \right)$$

$$\approx 2nH(n) \approx 2n \ln n = \frac{2}{\lg e} n \lg n$$

$$< 1.39 n \lg n.$$

Aula 16

Prova 2

Aula 17

Fundamentos de Contagem

1. usar a ideia de $f(n) \ll g(n)$ para comparar tamanhos de conjuntos assintoticamente.
2. faltam exemplos e exercícios interessantes
3. trocar $|A|$ por "conjunto de n elementos" nos enunciados onde couber

$$[a..b] := \{z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b\}.$$

$$[n] := [1..n].$$

Observe que

$$[0] = [1..0] = \{z \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq z \leq 0\} = \emptyset.$$

17.1 Contagem

Contagem significa contagem do número de elementos de um conjunto.

Os conjuntos que sabemos contar são os conjuntos $[n] \colon n \in \mathbb{N}$. A maneira de comparar a quantidade de elementos entre conjuntos é o estabelecimento de bijeções.

Seja $f \colon A \to B$ uma função.

A *imagem* de um elemento $a \in A$ pela função f é o elemento $f(a) \in B$.

A imagem da função f é o conjunto

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Para cada $b \in B$ definimos a *imagem inversa de b por f* como sendo o conjunto dos elementos de a cuja imagem é b, isto é

$$f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

O conjunto das imagens inversas de A por f é uma partição de A que é denotada A/f e é chamada de *quociente* de A por f, isto é

$$A/f := \left\{f^{-1}(b) \mid b \in f(A)\right\}.$$

Observe que, como A/f é uma partição de A, então

$$A = \bigcup_{C \in A/f} C,$$

ou, equivalentemente,

$$A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b).$$

Exemplo 15. *$f\colon [3] \times [4] \to [4]$ dada por $f(a,b) = a$.*

A função f é

injetora se $f(a) = f(b) \implies a = b, \text{ para todo } a, b \in A$.

sobrejetora se $f(A) = B$.

bijetora se é injetora e sobrejetora.

Uma *injeção* (*sobrejeção*, *bijeção*) é uma função *injetora* (*sobrejetora*, *bijetora*).

$A \sim B$ denota o fato de que existe bijeção entre A e B.

Para cada conjunto finito A existe um único inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim [n]$. Tal inteiro é chamado *tamanho* (ou *cardinalidade* ou *número de elementos*) do conjunto A e é denotado por $|A|$.

Definição 17. *Uma* enumeração *de um conjunto finito A é uma bijeção $f\colon [|A|] \to A$.*

Para cada $i \in [|A|]$,

- *i é chamado de* índice *de $f(i)$ em A segundo f, e*
- *$f(i)$ é o i-ésimo elemento de A segundo f.*

Exemplo 16. *Quais são os divisores de 72?*

Fazendo

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n|72\}$$

temos

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\},$$

e

$$|D| = 12.$$

São enumerações do conjunto D dos divisores de 72:

$f(i)$	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	36	72
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$g(i)$	1	3	9	2	6	18	4	12	36	8	24	72
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Teorema 43. *A composição de bijeções é uma bijeção.*

Demonstração. Exercício 114 □

Corolário 44. *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Vamos provar que $\sim$ é uma relação de equivalência, isto é, que

1. a relação $\sim$ é reflexiva,
2. a relação $\sim$ é simétrica, e
3. a relação $\sim$ é transitiva.

1. Vamos provar que a relação $\sim$ é reflexiva, isto é que se A é um conjunto finito, então $A \sim A$, ou seja, que existe bijeção $A \to A$.

   Para tanto, basta observar que a função identidade $\iota\colon A \to A$, dada por

   $$\iota(a) = a, \text{ para todo } a \in A,$$

   é uma bijeção.

2. Vamos provar que a relação $\sim$ é simétrica, isto é, que dados conjuntos finitos A e B tais que $A \sim B$, então $B \sim A$.

   Sejam então A e B conjuntos finitos tais que $A \sim B$. Vamos provar que $B \sim A$, issto é, que existe bijeção $B \to A$.

   Como $A \sim B$, então existe bijeção $f\colon A \to B$. Consequentemente, a função $f^{-1}\colon B \to A$ é uma bijeção e, portanto, $B \to A$.

3. Vamos provar que a relação $\sim$ é transitiva, isto é, que dados conjuntos finitos A, B e C tais que $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

   Sejam então A, B e C conjuntos finitos tais que $A \sim B$ e $B \sim C$. Vamos provar que $A \sim C$, isto é, que existe bijeção $A \to C$.

   Como $A \sim B$, então existe bijeção $f\colon A \to B$.

   Como $B \sim C$, então existe bijeção $g\colon B \to C$.

   Então (T. 43) $f \circ g\colon A \to C$ é uma bijeção e, portanto, $A \sim C$.

□

Corolário 45. *Dados conjuntos finitos A e B, temos que $|A| = |B|$ se e somente se $A \sim B$.*

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $|A| = |B|$ se e somente se $A \sim B$, ou seja, que

1. se $|A| = |B|$, então $A \sim B$, e
2. se $A \sim B$, então $|A| = |B|$.

1. Vamos provar que se $|A| = |B|$, então $A \sim B$.

   Suponha que $|A| = |B|$ e seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = |A| = |B|$.

   Como $|A| = n$, então $A \sim [n]$.

   Como $|B| = n$, então $B \sim [n]$.

   Pelo Corolário 44 $A \sim B$.

2. Vamos provar que se $A \sim B$, então $|A| = |B|$.

   Suponha que $A \sim B$.

   Como A é finito, então $A \sim [|A|]$.

   Como B é finito, então $B \sim [|B|]$.

   Como $A \sim B$, pelo Corolário 44 $[|A|] \sim [|B|]$ e, portanto, $|A| = |B|$.

$\square$

Exercícios 113, 114.

Aula 18

União e Produto Cartesiano

faltam exemplos e exercícios interessantes

Teorema 46. *Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos disjuntos.

Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B|$ provando que $A \cup B \sim [|A| + |B|]$.

Sejam f e g enumerações de A e B, respectivamente, e seja $h\colon [|A|+|B|] \to A \cup B$ dada por

$$h(k) = \begin{cases} f(k), & \text{se } k \leq |A|, \\ g(k - |A|) & \text{se } k > |A|. \end{cases}$$

Para provar que $A \cup B \sim [|A|+|B|]$, basta provar que h é uma bijeção. □

Teorema 47. *A união de conjuntos é uma operação associativa.*

Demonstração. Exercício 25 □

Notação 6. *Se $n > 0$ é um inteiro e A_1, A_2, ..., A_n são conjuntos, denotamos*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Se $n = 0$,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset.$$

Corolário 48 (Princípio Aditivo)**.** *Se $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demonstração. Exercício 52 □

Corolário 49. *Se A é um conjunto finito e $f\colon A \to B$ é uma função, então*

$$|A| = \sum_{b \in f(A)} |f^{-1}(b)|$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $f\colon A \to B$ uma função. Como

$$A = \bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b),$$

então (C.45)

$$|A| = \left|\bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b)\right|$$

e como os conjuntos $f^{-1}(b) \mid b \in B$ são dois a dois disjuntos entre si, então (Teorema 46)

$$|A| = \sum_{b \in f(A)} |f^{-1}(b)|.$$

□

Corolário 50. *Se A é um conjunto finito e $B \subseteq A$, então*

$$|A - B| = |A| - |B|.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Vamos provar que $|A - B| = |A| - |B|$.

Observe que, como $B \subseteq A$, então (Ex. 11)

$$A = (A - B) \cup B,$$

de forma que

$$|A| = |(A - B) \cup B|,$$

e como $A - B$ e B são disjuntos, então (Teorema 46)

$$|(A - B) \cup B| = |A - B| + |B|,$$

e portanto,

$$|A| = |A - B| + |B|,$$

ou seja

$$|A - B| = |A| - |B|.$$

$\square$

Corolário 51. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Observe que

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B),$$

e como A e $B - A \cap B$ são disjuntos, então (Teorema 46)

$$|A \cup B| = |A| + |B - (A \cap B)|.$$

Como $A \cap B \subseteq B$, temos (Corolário 50) que

$$|B - (A \cap B)| = |B| - |A \cap B|,$$

e consequentemente

$$|A \cup B| = |A| + |B - A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$\square$

18.1 Produtos Cartesianos

Teorema 52. *Se A é um conjunto finito e U é um conjunto com um único elemento, então,*

$$|U \times A| = |A|.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $U = \{u\}$ um conjunto com um único elemento.

Vamos provar que

$$|U \times A| = |A|,$$

provando que (Corolário 45)

$$U \times A \sim A.$$

Para provar que $U \times A \sim A$ basta provar que a função $f\colon U \times A \to A$ dada por $f(u, a) = a$ é uma bijeção. $\square$

Teorema 53. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Seja $f\colon A \times B \to A$ a função dada por

$$f(a, b) = a.$$

Pelo Corolário 49 temos

$$A \times B = \bigcup_{a \in f(A \times B)} f^{-1}(a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a),$$

e para cada $a \in A$,

$$f^{-1}(a) = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in B\} = \{a\} \times B \overset{\text{T. }52}{\sim} B,$$

e portanto,

$$|f^{-1}(a)| \overset{\text{C. }45}{=} |B|,$$

e consequentemente,

$$|A \times B| = \left| \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a) \right| \overset{\text{C. }49}{=} \sum_{a \in A} |f^{-1}(a)| = \sum_{a \in A} |B| \overset{\text{T. }4}{=} |A| \times |B|.$$

$\square$

Exercício 116 [default,ex:divisores-72]

Quantos divisores naturais tem o número 72?

Resposta:

Seja D o conjunto dos divisores de 72. Queremos determinar $|D|$.

Os divisores primos de 72 são 2 e 3, pois

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

Cada divisor de 72 corresponde a um par de expoentes (a, b) onde

$$\begin{aligned} 0 \leq a \leq 3, &\ \texttt{e} \\ 0 \leq b \leq 2, & \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} a \in [0..3], &\ \texttt{e} \\ b \in [0..2], & \end{aligned}$$

ou seja,

$$(a, b) \in [0..3] \times [0..2].$$

Noutras palavras, $[0..3] \times [0..2] \sim D$ pela bijeção dada por $(a, b) \mapsto 2^a\, 3^b$.

Consequentemente (C. 45),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2]| = |[0..3]|\,|[0..2]| = 4 \times 3 = 12.$$

Definição 18. *Se $n > 0$ é um inteiro e A_1, A_2, ..., A_n são conjuntos, o* produto cartesiano *de A_1, A_2, ..., A_n é o conjunto das n-uplas ordenadas de elementos de A_1, A_2, ..., A_n respectivamente, ou seja,*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Denota-se

$$\prod_{i=1}^{n} A_i := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

e convenciona-se que

$$\prod_{i=1}^{0} A_i := \{()\}.$$

Corolário 54 (Princípio Multiplicativo)**.** *Se $A_i \colon 1 \leq i \leq n$ são conjuntos finitos, então*

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Demonstração. Exercício 115. □

Exercício 117 [default,ex:divisores-360]

Quantos divisores tem o número 360?

Resposta:

Seguindo o mesmo raciocínio do Exercício 116, temos

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1,$$

e daí, fazendo

$$D := \text{conjunto dos divisores de } 360,$$

temos

$$D \sim [0..3] \times [0..2] \times [0..1],$$

e consequentemente (C. 45),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2] \times [0..1]| \overset{\text{C. } 54}{=} |[0..3]| \times |[0..2]| \times |[0..1]| = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

Teorema 55. *O número de divisores positivos de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é*

$$\prod_{i=1}^{k} (m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

Demonstração. Exercício 118 $\square$

Aula 19

Sequências

1. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
2. exercícios
   (a) contar sequências com configurações proibidas,
      - palavras que começam e terminam com 'a'
      - palavras sem vogais consecutivas

   (b) loops encaixados de algoritmos (enumerativos?)

Definição 19. *Dados um conjunto A e um inteiro $n > 0$, o* conjunto das sequências *de tamanho n sobre A é o conjunto*

$$A^n := \prod_{i=1}^{n} A.$$

Observe que existe uma única sequência de comprimento 0 sobre A, isto é,

$$A^0 = \{()\}$$

Corolário 56. *Se $A \neq \emptyset$ é finito, então*

$$|A^n| = |A|^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto finito não vazio, e seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que

$$|A^n| = |A|^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se $n = 0$ temos que

$$|A^n| = |A^0| = |\{()\}| = 1 = |A|^0.$$

Se $n > 0$, temos que

$$|A^n| = \left|\prod_{i=1}^{n} A\right| \stackrel{\text{C. 54}}{=} \prod_{i=1}^{n} |A| \stackrel{\text{ex:produtorio:constante}}{=} |A|^n.$$

$\square$

Sequências de tamanho n sobre um conjunto A são também conhecidas pelos nomes de

- *arranjos de n elementos de A tomados com repetição*,
- *palavras de tamanho n sobre o alfabeto A*,
- *amostras ordenadas com reposição de tamanho n do conjunto A*.

Exercício 119 [default,ex:byte]

Um “bit” é um elemento de $\{0,1\}$.

Se um “byte” é uma sequência de 8 “bits”, quantos valores diferentes pode assumir um “byte”?

Resposta: Fazendo

$$B := \text{conjunto dos bytes.}$$

Como cada “byte” é uma sequência de 8 “bits”, isto é, um elemento de de $\{0,1\}^8$, então

$$B \sim \{0,1\}^8$$

e consequentemente (C. 45),

$$|B| = |\{0,1\}^8| \overset{\text{C. 56}}{=} |\{0,1\}|^8 = 2^8 = 256.$$

Exercício 120 [default,ex:senhas-convencionais]

Um teclado convencional tem 47 “teclas que geram caracteres”. Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla “shift”. Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

Considere um sistema de quebra de senhas à base de “força bruta”, isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 senha por segundo.

Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?

Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} T &:= \text{conjunto das teclas convencionais}, \\ C &:= \text{conjunto dos caracteres convencionais}, \\ S_n &:= \text{senhas convencionais de tamanho } n, \end{aligned}$$

temos

$$S_n = C^n.$$

Um dia tem $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ segundos e queremos

$$|S_n| > 86400.$$

Como

$$S_n = C^n,$$

então

$$|S_n| = |C^n| \overset{\text{C. 56}}{=} |C|^n$$

Como

$$C \sim \{0,1\} \times T,$$

então (C. 45),

$$|C| = |\{0,1\} \times T| \overset{\text{T.53}}{=} |\{0,1\}| \times |T| = 2 \times 47 = 94$$

e

$$|S_n| = |C|^n = 94^n.$$

Então, para ter

$$|S_n| > 86400,$$

precisamos ter

$$94^n > 86400,$$

ou seja

$$n \lg 94 > \lg 86400,$$

ou seja

$$n > \frac{\lg 86400}{\lg 94},$$

e portanto,

$$n = \left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil.$$

Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, o número de tentatvas num dia será um milhão de vezes maior, e precisamos de

$$|S_n| > 10^6 \times 86400,$$

ou seja

$$94^n > 10^6 \times 86400,$$

ou seja

$$n = \left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil$, observe que

$$\begin{aligned} 16 &< \lg 86400 < 17, \\ 6 &< \lg 94 < 7, \end{aligned}$$

então

$$2 < \frac{16}{7} < \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{17}{6} < 3.$$

e então

$$\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil = 3.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil$, observe que

$$\frac{\lg 10^6 \times 86400}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6 + \lg 86400}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94}$$

e

$$19 < \lg 10^6 < 20,$$

então

$$\frac{19}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} < \frac{20}{6}$$

e

$$5 = \frac{35}{7} = \frac{19}{7} + \frac{16}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{20}{6} + \frac{17}{6} < \frac{37}{6} < 6$$

e portanto

$$\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil = 6.$$

Corolário 57. *Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. O número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é*

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^{n} A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left| \bigcup_{i=0}^{n} A^i \right|.$$

Como os conjuntos $A^i \colon 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left| \bigcup_{i=0}^{n} A^i \right| \overset{\text{C. } 48}{=} \sum_{i=0}^{n} |A^i| \overset{\text{C. } 56}{=} \sum_{i=0}^{n} |A|^i \overset{\text{Ex. } 36}{=} \frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

$\square$

Exercício 121 [default,ex:dvd]

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} d &:= 4\,700\,372\,992, \\ s(n) &:= \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n, \end{aligned}$$

temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)|,$$

onde

$$A(n) := \text{conjunto dos arquivos de tamanho } n.$$

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 56}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 119}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 106f}}{=} \frac{256}{255}n256^n - \frac{256}{65025}256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

$$n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid |s(k)| \leq d\}.$$

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{65025}256^k + \frac{256}{65025} \leq d,$$

ou seja

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{65025}256^k \leq 4700372992 - \frac{256}{65025}$$

ou seja

$$65280k256^k - 256^{k+1} \leq 1198595112960 - 256 = 1198595112704,$$

isto é

$$k256^k - \frac{256^{k+1}}{255} \leq \frac{1198595112704}{65280} = \frac{4682012159}{255},$$

e

$$n = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid k256^k - \frac{256^{k+1}}{255} \leq \frac{4682012159}{255}\right\}.$$

Para estimar o valor de n, observe que

$$n256^n - 256^{n+1} = n256^n\left(1 - \frac{256}{n}\right) \approx n256^n,$$

e

$$n256^n \leq \frac{4682012159}{255},$$

se e somente se

$$\lg n256^n \leq \lg\frac{4682012159}{255},$$

ou seja,

$$\lg n + n\lg 256 \leq \lg\frac{4682012159}{255},$$

ou seja,

$$\lg n + 8n \leq \lg\frac{4682012159}{255},$$

isto é

$$n + \frac{\lg n}{8} \leq \frac{\lg\frac{4682012159}{255}}{8}.$$

Como

$$n + \frac{\lg n}{8} = n\left(1 + \frac{\lg n}{8n}\right) \approx n,$$

vamos estimar n por

$$\left\lceil\frac{\lg\frac{4682012159}{255}}{8}\right\rceil.$$

Como

$$18360831\frac{4682012159}{255} < 18360832$$

então

$$23 < \lg 18360832 \lg\frac{4682012159}{255} < \lg 18360832 < 24$$

e

$$2 < \frac{23}{8}\frac{\lg\frac{4682012159}{255}}{8} < \frac{24}{8} = 3,$$

e portanto,

$$\left\lceil\frac{\lg\frac{4682012159}{255}}{8}\right\rceil = 3.$$

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50462976 &< d, \\ s(4) = 17230332160 &> d. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid n256^n - \frac{256^{n+1}}{255} \leq \frac{4682012159}{255}\right\} = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17179869184 > 4700372992$, e

$$\left\lceil\frac{4 \times 256^4}{4700372992}\right\rceil = 4.$$

Exercícios 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133.

Aula 20

Funções e Subconjuntos

1. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
2. começar a falar de bolas e urnas
3. a lower bound on the number of primes less than N. from Erdős primes

Dados dois conjuntos finitos A e B, qual o número de funções $A \to B$?

Relembrando que o conjunto das funções $A \to B$ é denotado B^A, a pergunta é: qual o valor de $|B^A|$?

Teorema 58. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$B^A \sim B^{|A|}.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $B^A \sim B^{|A|}$ exibindo uma bijeção $F\colon B^A \to B^{|A|}$.

Seja f uma enumeração de A e seja $F\colon B^A \to B^{|A|}$ a função dada por

$$F(h) = (h(f(1)), \ldots, h(f(|A|))).$$

Basta provar que F é bijetora. $\square$

Corolário 59. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Exercício 134 [default,ex:circuitos]

Quantos circuitos combinacionais funcionalmente diferentes com e entradas e s saídas são possíveis?

Resposta:

$$C(e,s) := \text{circuitos combinacionais}$$

Cada circuito em $C(e,s)$ implementa uma função $\{0,1\}^e \to \{0,1\}^s$, isto é,

$$C(e,s) \sim (\{0,1\}^s)^{(\{0,1\}^e)},$$

e, consequentemente,

$$|C(e,s)| \stackrel{?}{=} \left|(\{0,1\}^s)^{(\{0,1\}^e)}\right| \stackrel{?}{=} |\{0,1\}^s|^{|\{0,1\}^e|} \stackrel{?}{=} (|\{0,1\}|^s)^{|\{0,1\}|^e} \stackrel{?}{=} (2^s)^{2^e} = 2^{s2^e}$$

Exercício 136 [default,ex:aniversarios]

De quantas maneiras diferentes podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

Resposta:

Se P é um conjunto de n pessoas, então cada maneira de acontecerem os aniversários das pessoas em P corresponde a uma função $a\colon P \to [365]$ que associa a cada pessoa $p \in P$ seu aniversário $a(p) \in [365]$.

Assim o número de maneiras diferentes de acontecerem os aniversários das pessoas em P é o número de funções $P \to [365]$, que é

$$\left|[365]^P\right| = |[365]|^{|P|} = 365^n$$

20.1 Subconjuntos

Melhorar o exemplo de otimização combinatória 1. falar de um problema concreto. mochila? 2. transformar em exercício resolvido?

Notação 7. *Denotamos por 2^A o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A, isto é*

$$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}.$$

Qual o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos?

Exemplo 17. 2^A, $\{0,1\}^A$ *e* $\{0,1\}^{|A|}$ *para* $A = [3]$.

A *função característica* de um subconjunto S de um conjunto A é a função $\chi_S \colon A \to \{0,1\}$ dada por

$$\chi_S(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s \in S, \\ 0, & \text{se } s \notin S. \end{cases}$$

Teorema 60. *Se A é um conjunto finito, então*

$$2^A \sim \{0,1\}^A.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $F \colon 2^A \to \{0,1\}^A$ a função dada por

$$F(S) = \chi_S.$$

Para provar que $2^A \sim \{0,1\}^A$, basta provar que F é uma bijeção. □

Corolário 61. *Se A é um conjunto finito, então*

$$|2^A| = 2^{|A|}.$$

Exemplo 18. *Muitos problemas de otimização podem ser formulados como segue.*

São dados um conjunto finito A e uma função $v \colon 2^A \to \mathbb{Q}$ que associa a cada subconjunto S de A um valor *numérico $v(S)$. O objetivo é determinar um subconjunto S de A de valor máximo.*

Suponha um programa de busca exaustiva que consegue analisar um subconjunto de A por segundo, isto é, computar um novo valor de S e de $v(S)$ a cada segundo.

Qual o maior tamanho de A para o qual o programa consegue resolver o problema em 1 dia?

Fazendo $n = |A|$, queremos

$$2^n \leq 86400,$$

ou seja

$$n \leq \lg 86400,$$

isto é,

$$n = \lfloor \lg 86400 \rfloor = 16.$$

Se em vez de 1 *conjunto por segundo fosse* 1 *conjunto por ciclo de máquina, num processador de $4GHz$?*

Neste caso, em um dia temos

$$86400 \times 4 \times 10^9$$

ciclos, e queremos

$$2^n \leq 86400 \times 4 \times 10^9,$$

ou seja

$$n = \left\lfloor \lg(86400 \times 4 \times 10^9) \right\rfloor$$

$$\begin{aligned} n \leq \lg(86400 \times 4 \times 10^9) &< \lg(2^{17}(2^2)(2 \times 5)^9) \\ &= \lg(2^{19}2^9 5^9) = \lg(2^{28}5^9) \\ &= \lg 2^{28} + \lg 5^9 = 28 + 3\lg 5^3 = 28 + 3\lg 125 \\ &< 28 + 3 \times 7 = 28 + 21 \\ &= 49, \end{aligned}$$

e portanto,

$$n \leq 48.$$

A resposta exata é

$$n = \left\lfloor \lg(86400 \times 4 \times 10^9) \right\rfloor = 48 = 3 \times 16.$$

E se em vez de esperar um dia estivéssemos dispostos a esperar um ano?

$$n \leq \lg(86400 \times 4 \times 10^9 \times 365) = \lg(86400 \times 4 \times 10^9) + \lg 365 < 49 + \lg 365 < 49 + 9 = 58,$$

e portanto,

$$n \leq 57.$$

A resposta exata é

$$n = \left\lfloor \lg(86400 \times 4 \times 10^9 \times 365) \right\rfloor = 56 = 48 + 8.$$

transformar em exercício?

Um outro jeito de olhar para o mesmo problema.

Seja $n > 0$ e seja $f\colon 2^{[n]} \to \{0, 1\}$ dada por

$$f(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \notin X, \\ 1, & \text{se } n \in X. \end{cases}$$

Pelo Corolário 49 temos

$$|2^{[n]}| = \sum_{b \in f([n])} |f^{-1}(b)| = |f^{-1}(0)| + |f^{-1}(1)|.$$

Como

$f^{-1}(0)$**:** subconjuntos de $[n]$ que não contém n, isto é

$$f^{-1}(0) := \{X \subseteq [n] \mid a \notin [n]\},$$

$f^{-1}(1)$**:** subconjuntos de $[n]$ que contém n, isto é

$$f^{-1}(1) := \{X \subseteq [n] \mid n \in [n]\},$$

É fácil verificar que a função $g\colon f^{-1}(1) \to f^{-1}(0)$ dada por

$$f(X) = X - \{n\},$$

é uma bijeção, e portanto,

$$f^{-1}(1) \sim f^{-1}(0),$$

de forma que (Corolário 45)

$$|f^{-1}(1)| = |f^{-1}(0)|,$$

e

$$|2^{[n]}| = |f^{-1}(0)| + |f^{-1}(1)| = 2|f^{-1}(0)|.$$

Como

$$f^{-1}(0) = 2^{[n]-\{n\}} = 2^{[n-1]},$$

então

$$2^{[n]} = 2 \times 2^{[n-1]}.$$

Fazendo,

$$f(n) := |2^{[n]}|,$$

então

$$f(n) = 2f(n-1),$$

e portanto

$$f(n) \stackrel{?}{=} 2^n f(0) = 2^n |2^{[0]}| = 2^n |2^{\emptyset}| = 2^n |\{\emptyset\}| = 2^n \times 1 = 2^n.$$

$\boxed{\text{não tem exercícios}}$

Aula 21

Funções Injetoras e Bijetoras

1. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
2. passar para esta aula a discussão de permutações circulares
3. transformar o exemplo dos aniversários em exercício e generalizar
4. incluir cota inferior para ordenação
5. faltam mais exercícios

Quantas são as sequências de tamanho k sobre $[n]$ sem elementos repetidos?

Dado um conjunto A e inteiros i e k, vamos denotar

$A_k :=$ conjunto das sequências sem elementos repetidos de tamanho k de elementos de A.

$A_{k,i} :=$ conjunto das sequências sem elementos repetidos de tamanho k de elementos de A que começam com i.

$f(n,k) := |[n]_k|$

Seja $F\colon [n]_k \to [n]$ a função que associa cada sequência de $[n]_k$ a seu primeiro elemento, isto é,

$$F(a_1, \ldots, a_k) = a_1.$$

temos

$$f(n,k) = |[n]_k| \overset{\text{C. 49}}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} F^{-1}(i) = \sum_{i \in [n]} [n]_{k,i}.$$

Para cada $i \in [n]$, a função $G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1})$ dada por

$$G_i(a_1 = i, a_2, \dots, a_k) = (a_2, \dots, a_k)$$

é uma bijeção, e portanto,

$$[n]_{k,i} \sim ([n] - \{i\})_{k-1}, \text{ para todo } i \in [n]$$

e consequentemente (Corolário 45)

$$|[n]_{k,i}| = |[n-1]_{k-1}|, \text{ para todo } i \in [n].$$

Então

$$f(n,k) = \sum_{i=1}^{n} |[n]_{k,i}| = \sum_{i=1}^{n} |[n-1]_{k-1}| \overset{\text{T } 4}{=} n|[n-1]_{k-1}|. = nf(n-1,k-1)$$

Desenvolvendo a recorrência,

$$\begin{aligned} f(n,k) = nf(n-1,k-1) = n(n-1)f(n-2,k-2) = \dots \\ \dots = n(n-1)\dots(n-(u-1))f(n-u,k-u) \\ = f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i). \end{aligned}$$

Notação 8. *Dados $k, n \in \mathbb{N}$,*

$$n_k := \begin{cases} \prod_{i=n-k+1}^{n} i, & \text{se } k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Observe que, se $k \leq n$, então

$$n_k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

e que se $k = n$, então

$$n_k = n_n = n!.$$

Então

$$f(n,k) = f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u,k-u)n_u$$

onde

$$u = \min\{l \in \mathbb{N} \mid k - l \leq 0\},$$

ou seja

$$u = \min\{l \in \mathbb{N} \mid l \geq k\},$$

isto é,

$$u = k,$$

e

$$f(n,k) = f(n-u, k-u)n_u = f(n-k, k-k)n_k = f(n-k, 0)n_k.$$

Como

$$f(n-k, 0) = |[n-k]_0| = |\{()\}| = 1,$$

então

$$f(n,k) = f(n-k, 0)n_k = n_k.$$

Teorema 62. *O número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre $[n]$ é n_k.*

Corolário 63. *Se B é um conjunto finito, então o número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre um conjunto finito B é $|B|_k$, isto é,*

$$|B_k| = |B|_k.$$

Sequências de k elementos de um conjunto B são também conhecidas pelos nomes de *arranjos (sem repetição) de k elementos de B*, ou *sequências sem elementos repetidos de comprimento k sobre B* ou ainda *amostras ordenadas sem reposição de tamanho k do conjunto B.*

Na correspondência natural entre sequências de $B^{|A|}$ e funções $A \to B$, sequências de $B^{|A|}$ sem repetições correspondem a funções injetoras $A \to B$.

Notação 9. *Se A e B são conjuntos, B_A denota o conjunto das funções injetoras $A \to B$.*

Corolário 64. *Se A e B são conjuntos finitos, o número de funções injetoras $A \to B$ é $|B|_{|A|}$, isto é,*

$$|B_A| = |B|_{|A|}.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que

$$|B_A| = |B|_{|A|},$$

provando que

$$B_A \sim B_{|A|}.$$

Como na prova do Teorema 58, seja h uma enumeração de A e seja $F\colon B^A \to B^{|A|}$ a bijeção dada por

$$F(h) = (h(f(1)), \ldots, h(f(|A|))).$$

Basta observar que se h é uma função injetora, então $f(h)$ será uma sequência sem elementos repetidos de tamanho $|A|$ sobre B, isto é,

$$F(B_A) = B_{|A|},$$

e daí, como F é bijetora,

$$B_A \sim B_{|A|}.$$

□

No modelo de bolas e urnas, funções injetoras correspondem a distribuições das bolas pelas urnas de maneira que nenhuma urna tenha mais que uma bola.

Mais precisamente, funções injetoras $B \to U$ correspondem a distribuições das bolas de B pelas urnas em U de maneira que nenhuma urna tenha mais que uma bola.

Corolário 65. *Existem n_k maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas disdtintas de maneira que nenhuma urna receba mais que uma bola.*

Informalmente podemos fazer também o seguinte raciocínio.

Seja $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ o conjunto das bolas e seja U o conjunto das urnas e considere uma função injetora $f\colon B \to U$.

Temos $|U|$ "escolhas" para o valor de $f(b_1)$, $|U| - 1$ "escolhas" para o valor de $f(b_2)$, e assim por diante até que restam $|U| - (k-1) = |U| - k + 1$ "escolhas" para o valor de $f(b_k)$.

Como cada escolha é "independente das demais", então o número de "escolhas" é

$$|U|(|U|-1)(|U|-2)\dots(|U|-(k-1)) = \prod_{i=0}^{k-1}(|U|-i) = |U|_k = |U|_{|B|}.$$

Exemplo 19. *Assumindo que as datas de aniversário de um grupo de n pessoas são equiprováveis, qual a probabilidade de duas delas terem aniversários coincidentes?*

Vimos num exemplo anterior que o número de maneiras de se distribuirem os aniversários de n pessoas é 365^n.

O número de maneiras de distribuir estes aniversários sem que haja coincidências é o número de funções injetoras $[n] \to 365$ que é 365_n.

Então a chance de não haver coincidência de aniversários num grupo de n pessoas é

$$p(n) = \frac{365_n}{365^n}.$$

O "paradoxo dos aniversários" é a resposta à seguinte pergunta.

> *Qual o menor valor de n necessário para que a probabilidade de um grupo de n pessoas ter coincidência de aniversários seja pelo menos 50%?*

Queremos

$$p(n) < \frac{1}{2},$$

isto é,

$$\frac{365_n}{365^n} < \frac{1}{2}.$$

Uma estimativa do valor de $p(n)$ pode ser obtida assim

$$\begin{aligned} p(n) = \frac{365_n}{365^n} &= \frac{365(365-1)\dots(365-(n-1))}{365(365)\dots(365)} \\ &= \frac{365}{365}\frac{365-1}{365}\dots\frac{365-(n-1)}{365} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1}\frac{365-i}{365} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{365}\right). \end{aligned}$$

Sabendo que

$$1-x < e^{-x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

temos

$$p(n) = \frac{365_n}{365^n} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right) < \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/365} = e^{-\sum_{i=0}^{n-1} i/365}.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{365} = \frac{1}{365}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{365}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)}{730} < \frac{n^2}{730},$$

então

$$p(n) = \frac{365_n}{365^n} < e^{-\frac{n^2}{730}}.$$

Então, para ter

$$p(n) < \frac{1}{2},$$

basta ter

$$e^{-\frac{n^2}{730}} \leq \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$e^{\frac{n^2}{730}} \geq 2,$$

ou seja,

$$\frac{n^2}{730} \geq \ln 2$$

ou seja,

$$n \geq \sqrt{730 \ln 2}.$$

Como

$$\frac{70}{100} > \ln 2,$$

para ter

$$n \geq \sqrt{730 \ln 2},$$

basta ter

$$n \geq \sqrt{730\frac{70}{100}} = \sqrt{73 \times 7} = \sqrt{511} < 23,$$

Então, para ter

$$p(n) < \frac{1}{2},$$

basta ter

$$n \geq 23.$$

Efetivamente,

$$0.49 < p(23) < \frac{1}{2} < p(22) < 0.52.$$

21.1 Permutações

Corolário 66. *Se A e B são conjuntos finitos com o mesmo número de elementos, o número de funções bijetoras $A \to B$ é $|A|!$.*

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos. Então cada função injetora $A \to B$ é bijetora e o número de tais funções é

$$|B_A| = |B|_{|A|} = |A|_{|A|} = |A|!$$

□

Bijeções $A \to A$ são também conhecidas pelo nome de *permutações* sobre (os elementos de) A.

Na correspondência natural entre funções $A \to A$ e sequências de $A^{|A|}$, funções permutações sobre A correspondem a sequências sobre A onde cada elemento de A aparece exatamente uma vez. Sequências assim também são chamadas de *permutações* dos elementos de A.

Corolário 67. *O número de sequências sobre um conjunto finito A onde cada elemento de A aparece exatamente uma vez é $|A|!$.*

O conjunto das permutações sobre um conjunto A será denotado $A!$.

No modelo de bolas e urnas, funções bijetoras $B \to U$ correspondem a distribuições das bolas de B pelas urnas em U de maneira que cada urna tenha exatamente uma bola.

Corolário 68. *Existem $n!$ maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas de tal maneira que cada urna receba exatamente uma bola.*

Exercício 138.

Aula 22

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos

1. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
2. exercícios:
   (a) cartelas de bingo
   (b) caixeiro viajante

Quantos subconjuntos de k elementos tem um conjunto finito A?

Notação 10. *Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A será denotado $\binom{A}{k}$, isto é,*

$$\binom{A}{k} := \{S \subseteq A \mid |S| = k\},$$

A pergunta então é qual o valor de

$$\left|\binom{A}{k}\right|.$$

Teorema 69. *Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, então*

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $F\colon A_k \to \binom{A}{k}$ a função dada por

$$F((a_1, \ldots, a_k)) = \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Para cada $S \in \binom{A}{k}$ temos

$$F^{-1}(S) = S!,$$

e portanto

$$|F^{-1}(S)| = |S|! = k!,$$

e consequentemente (Corolário 49)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. } 66}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \overset{\text{T. } 4}{=} \left| \binom{A}{k} \right| k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| = \frac{|A_k|}{k!} \overset{\text{C. } 64}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{\frac{|A|!}{(|A|-k)!}}{k!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} = \binom{|A|}{k}.$$

□

Exercício 139 [default,ex:mega-sena]

A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma *k-aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

1. Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?
2. Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?
3. Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?
4. Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

Resposta:

1. Cada possível resultado de um sorteio é um subconjunto de 6 elementos de $[60]$. O número de possíveis resultados na mega–sena é
$$\left|\binom{[60]}{6}\right| = \binom{|[60]|}{6} = \binom{60}{6} = \frac{60!}{54! \times 6!} = 50063860.$$
2. Este também é o número de apostas simples. A chance de ganhar com uma aposta simples, portanto, é
$$\frac{1}{50063860} < \frac{1}{50000000}.$$
Uma 7-aposta é um subconjunto de 7 elementos de $[60]$. O número de 7-apostas possíveis é
$$\left|\binom{[60]}{7}\right| = \binom{|[60]|}{7} = \binom{60}{7} = \frac{60!}{53! \times 7!} = 386206920.$$
A chance de ganhar com uma 7-aposta $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é
$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{7}{6} = \frac{7!}{1! \times 6!} = 7,$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma 7–aposta é

$$\frac{7}{\binom{60}{6}},$$

ou seja, 7 vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

3. Uma k-aposta é um subconjunto de k elementos de [60]. O número de k-apostas possíveis é

$$\left|\binom{[60]}{k}\right| = \binom{|[60]|}{k} = \binom{60}{k}.$$

A chance de ganhar com uma k-aposta $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é

$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{k}{6},$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma k–aposta é

$$\frac{\binom{k}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{k_6}{60_6} = \frac{k_6}{36045979200},$$

ou $\binom{k}{6} = k_6/720$ vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

k	$\binom{k}{6}$
6	1
7	7
8	28
9	84
10	210
11	462
12	924
13	1716
14	3003
15	5005

Seja A um conjunto finito de n elementos. É evidente que

$$\bigcup_{k=0}^{|A|} \binom{A}{k} = 2^A,$$

e como os conjuntos $\binom{A}{k} : 0 \leq k \leq |A|$ são dois a dois disjuntos entre si, então (Teorema 46)

$$\left|\bigcup_{k=0}^{|A|} \binom{A}{k}\right| = \sum_{k=0}^{|A|} \left|\binom{A}{k}\right| = \sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k},$$

e como

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|},$$

temos

$$\sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k} = 2^{|A|},$$

Corolário 70. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Teorema 71. *Se A é um conjunto, então*

$$\binom{A}{k} = \binom{A-\{a\}}{k} \cup \left\{S \cup \{a\} \mid S \in \binom{A-\{a\}}{k-1}\right\},$$

para todo $a \in A$.

Demonstração.

Usar $F\colon \binom{A}{k} \to \{0,1\}$ dada por $F(X) = [a \in X]$ e o C. 49?

Transformar em exercício da parte de revisão?

Seja A um conjunto finito e sejam $a \in A$ e $k > 0$. Sejam ainda

$$\begin{aligned} A^- &:= \binom{A-\{a\}}{k}, \\ A^+ &:= \binom{A-\{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &:= \left\{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\right\}. \end{aligned}$$

Vamos provar que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A}$$

provando que

$$\begin{aligned}\binom{A}{k} &\subseteq A^- \cup \overline{A}, \text{ e}\\ A^- \cup \overline{A} &\subseteq \binom{A}{k}.\end{aligned}$$

Para provar que

$$A^- \cup \overline{A} \subseteq \binom{A}{k},$$

basta observar que

$$\begin{aligned}A^- &\subseteq \binom{A}{k}, \text{ e}\\ \overline{A} &\subseteq \binom{A}{k}.\end{aligned}$$

Resta então provar que

$$\binom{A}{k} \subseteq A^- \cup \overline{A},$$

ou seja, que

$$X \in \binom{A}{k} \implies X \in A^- \cup \overline{A}, \text{ para todo } X \in \binom{A}{k}.$$

Seja então $X \in \binom{A}{k}$. Vamos provar que

$$X \in A^- \cup \overline{A}.$$

No caso em que $X \in A^-$, não há mais nada a fazer.

Se, por outro lado, $X \notin A^-$, então é porque $a \in X$.

Neste caso, seja $X' = X - \{a\}$ e observe que $X' \subseteq A - \{a\}$ e que

$$|X'| = |X - \{a\}| = |X| - |\{a\}| = k - 1,$$

e portanto, $X' \in \binom{A-\{a\}}{k-1} = A^+$.

Consequentemente,

$$X = X' \cup \{a\} \subseteq \overline{A}.$$

$\square$

Corolário 72. *Para todo $n, k > 0$,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demonstração. Sejam $n > 0$ e $k > 0$. Vamos provar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Do Teorema 71 temos que

$$\begin{aligned}\binom{[n]}{k} &= \binom{[n]-\{n\}}{k} \cup \left\{ S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n]-\{n\}}{k-1} \right\} \\ &= \binom{[n-1]}{k} \cup \left\{ S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\},\end{aligned}$$

e portanto,

$$\left| \binom{[n]}{k} \right| = \left| \binom{[n-1]}{k} \cup \left\{ S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\} \right|.$$

Como $\binom{[n]-\{n-1\}}{k}$ e $\left\{ S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\}$ são disjuntos entre si, então (Teorema 46)

$$\begin{aligned}\left| \binom{[n]}{k} \right| &= \left| \binom{[n-1]}{k} \right| + \left| \left\{ S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\} \right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \left| \binom{[n-1]}{k-1} \right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

□

22.1 Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações são *circularmente equivalentes* se "preservam as vizinhanças".

Por exemplo, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 1, 2)$ e $(5, 1, 2, 3, 4)$ são permutações circularmente equivalentes em $[5]!$.

Mais formalmente, dizemos que $f, g \in [n]!$ são circularmente equivalentes se existe $k \in [0..n-1]$ tal que

$$f(a) = g(a + k \bmod n), \text{ para todo } a \in [n].$$

Qual o número de permutações de $[n]!$ que não são circularmente equivalentes?

Seja $F\colon [n]! \to [n]_{n,1}$ a função que associa a cada permutação de $f \in [n]!$ a permutação circularmente equivalente a f que começa por 1, isto é, se

$$f = (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k = 1, a_{k+1}, \ldots, a_n),$$

então

$$F(f) = (1, a_{k+1}, \ldots, a_1, \ldots, a_{k-1}).$$

Então, para cada permutação $f \in [n]!$, o conjunto $F^{-1}(f)$ é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a f e a quantidade de tais conjuntos é o número de permutações sobre $[n]$ não circularmente equivalentes.

Noutras palavras, o número de permutações não circularmente equivalentes é $|[n]_{n,1}|$.

Do Corolário 49 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exercícios 140, 141, 42, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148.

Aula 23

Coeficientes Binomiais

Aula 24

Subconjuntos e Composições

1. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
2. a prova do T. 73 via sequências de $\{1,+\}^{n-1}$ com $k-1$ sinais de $+$ talvez fique mais natural

24.1 Composições de Inteiros

Dados $n \geq k \in \mathbb{N}$, uma k–*composição* de n é uma decomposição de n em k parcelas positivas.

Mais formalmente, uma k–*composição* é uma sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Por exemplo, $(1,2,2)$, $(1,1,3)$, $(1,3,1)$ e $(2,2,1)$ são 3–composições de 5.

Quantas k–composições admite um inteiro n?

Existe uma única n–composição de n que é $(1,\ldots,1)$.

Escrevendo-a na forma

$$1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

é fácil ver que uma k–composição fica definida de maneira única ao “pintar” $k-1$ dos sinais de $+$ “de vermelho” e depois efetuar as somas que não são vermelhas. O resultado será uma expressão da forma

$$x_1 + \ldots + x_k = n,$$

com

$$x_i \geq 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

Noutras palavras, o número de k–composições de n é o número de maneiras diferentes de pintar $k-1$ sinais de $+$ de vermelho na expressão

$$1 + 1 + \ldots + 1 = n,$$

que é o número de maneiras de escolher $k-1$ sinais de $+$ dentre os $n-1$ sinais de $+$ presentes na expressão, que é

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Uma k–composição de n também é conhecida pelo nome de *solução inteira positiva de*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Teorema 73. *Dados $k, n \in \mathbb{N}$, o número de k–composições de n é*

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. Dados $k, n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $C(n,k)$ o conjunto das k–composições de n, isto é,

$$C(n,k) := \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k \mid \sum_{i=1}^{k} x_i = n \right\}.$$

Seja $F\colon \binom{[n-1]}{k-1} \to C(n,k)$ a função dada por

$$F(\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1}),$$

sendo

$$a_i < a_{i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i < n.$$

Basta provar que F é bijetora e daí

$$|C(n,k)| \overset{\text{C. 45}}{=} \left| \binom{[n-1]}{k-1} \right| \overset{\text{T. 69}}{=} \binom{|[n-1]|}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

$\square$

No modelo de bolas e urnas, uma k–composição de n corresponde a uma distribuição de n bolas iguais por k urnas distintas onde nenhuma urna fica vazia.

Corolário 74. *Existem $\binom{k-1}{n-1}$ maneiras de distribuir k bolas iguais por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna fique vazia.*

24.1.1 Composições Fracas

Dados $n \geq k \in \mathbb{N}$, uma k*–composição fraca* de n é uma decomposição de n em k parcelas não–negativas.

Mais formalmente, uma k*–composição fraca* é uma sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Por exemplo, $(1, 2, 2)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 3, 1)$ e $(4, 0, 1)$ são 3–composições fracas de 5.

Uma k–composição fraca de n também é conhecida pelo nome de *solução inteira não–negativa de*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

No modelo de bolas e urnas, uma k–composição fraca de n corresponde a uma distribuição de n bolas iguais por k urnas distintas sem restrições.

Teorema 75. *O número de k–composições fracas de $n \in \mathbb{N}$ é*

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Demonstração. Dados $k, n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $C(n, k)$ o conjunto das k–composições de n e por $F(n, k)$ o conjunto das k–composições fracas de n.

Seja $G\colon F(n, k) \to C_{n+k,k}$ a função dada por

$$F((a_1, \ldots, a_k)) = (a_1 + 1, \ldots, a_k + 1).$$

Basta provar que F é bijetora e daí

$$|F(n, k)| = |C_{n+k,k}| = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

$\square$

No modelo de bolas e urnas, uma k–composição fraca de n corresponde a uma distribuição de n bolas iguais por k urnas distintas.

Corolário 76. *Existem $\binom{n+k-1}{n-1}$ maneiras de distribuir k bolas iguais por n urnas distintas.*

Exercícios 150, 151, 152, 153.

24.1.2 Inclusão e Exclusão

Teorema 77. *A interseção de conjuntos é uma operação associativa.*

Demonstração. Exercício 26 $\square$

definir $\bigcap_{i \in I} A_i$

Do Corolário 51 temos que se A_1 e A_2 são conjuntos finitos, então

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Como fica a conta para 3 conjuntos?

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| \stackrel{\text{C. } 51}{=} |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|.$$

Como

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) = B_1 \cup B_2,$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1 \cap A_3, \\ B_2 &:= A_2 \cap A_3. \end{aligned}$$

Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |B_1 \cup B_2|.$$

Como (C. 51)

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2|,$$

e

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

então

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

e

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

Como (C. 51)

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

então

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

E para 4 conjuntos?

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4| \\
&\overset{\text{C. 51}}{=} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4|
\end{aligned}
$$

Como

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 = (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4) = B_1 \cup B_2 \cup B_3,$$

onde

$$
\begin{aligned}
B_1 &:= A_1 \cap A_4, \\
B_2 &:= A_2 \cap A_4, \\
B_3 &:= A_3 \cap A_4.
\end{aligned}
$$

Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |B_1 \cup B_2 \cup B_3|$$

Como vimos há pouco,

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1| + |B_2| + |B_3| - (|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_2 \cap B_3|) + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|.$$

Observe que

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) = A_1 \cap A_2 \cap A_4,$$

e

$$B_1 \cap B_3 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_1 \cap A_3 \cap A_4,$$

e

$$B_2 \cap B_3 = (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_2 \cap A_3 \cap A_4,$$

de forma que

$$|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_2 \cap B_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Do mesmo modo,

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4,$$

de forma que

$$\begin{aligned}
&|B_1 \cup B_2 \cup B_3| \\
&\qquad = |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
&\qquad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&\qquad = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
&\qquad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|,)
\end{aligned}$$

Como vimos há pouco
$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-(|A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+|A_2 \cap A_3|)+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$,
e daí,

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&\qquad = |A_1| + |A_2| + |A_3| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&\qquad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_4| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
&\qquad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
&\qquad = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&\qquad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\
&\qquad + (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
&\qquad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\qquad = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
&\qquad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\
&\qquad + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
&\qquad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}$$

O que leva a desconfiar que a forma geral seja

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_n| & \\
&= |A_1| + \ldots + |A_n| \\
&- (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_1 \cap A_n| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) \\
&+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_1 \cap A_2 \cap A_n| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) \\
&- \ldots \\
&+ \ldots \\
&|A_1 \cap \ldots \cap A_n| \\
&= \sum_{\{i_1\} \in \binom{[n]}{1}} |A_{i_1}| - \sum_{\{i_1, i_2\} \in \binom{[n]}{2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in \binom{[n]}{3}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
&- \ldots + \ldots \sum_{\{i_1, \ldots, i_n\} \in \binom{[n]}{n}} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}| \\
&= \sum_{I \in \binom{[n]}{1}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \binom{[n]}{2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + \sum_{I \in \binom{[n]}{3}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \ldots + \ldots \sum_{I \in \binom{[n]}{n}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{I \in 2^{[n]}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| .
\end{aligned}
$$

Aula 25

Inclusão/Exclusão

1. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
2. ainda precisa de ajustes?
3. prova em (Andreescu and Feng, 2004, T. 6.1, p. 119) é melhor?
4. Incluir generalização para funções $2^A \to R$ de (Andreescu and Feng, 2004, T. 6.2, 6.3, p.120)?
5. exercícios de Tuffley (2009): exemplo 1, exercícios 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10

Teorema 78 (Princípio da Inclusão–Exclusão)**.** *Se $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos finitos, então*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Demonstração. Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

H.I.: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, dados conjuntos finitos $A_1, \dots, A_p$,

$$\left|\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right| = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[p]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

para todo $p \in [0..a]$.

Passo: Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| = \sum_{k=1}^{a+1}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Inicialmente,

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| &= \left|\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cup A_{a+1}\right| \\ &\overset{\text{C. 51}}{=} \left|\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right| + |A_{a+1}| - \left|\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cap A_{a+1}\right| \\ &= \mathcal{A} + |A_{a+1}| + \mathcal{B},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \left|\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right|, \\ \mathcal{B} &:= -\left|\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cap A_{a+1}\right|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \left|\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right| &\overset{\text{HI}}{=} \sum_{k=1}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\ &= \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\ &= \mathcal{C} + \mathcal{D},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &:= \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|, \\ \mathcal{D} &:= \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\end{aligned}$$

Então
$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| = \mathcal{A} + |A_{a+1}| + \mathcal{B} = \mathcal{C} + \mathcal{D} + |A_{a+1}| + \mathcal{B},$$

Como
$$\begin{aligned}\mathcal{C} + |A_{a+1}| &= \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{a+1}| \\ &= (-1)^{1+1} \sum_{I\in\binom{[a]}{1}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{a+1}| = \sum_{i\in[a]} |A_i| + |A_{a+1}| \\ &= \sum_{i\in[a+1]} |A_i| = (-1)^{1+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{1}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\ &= \mathcal{E},\end{aligned}$$

onde
$$\mathcal{E} := \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

e
$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| = \mathcal{E} + \mathcal{D} + \mathcal{B},$$

Temos
$$\mathcal{B} = -\left|\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cap A_{a+1}\right|.$$

Como
$$\left(\bigcup_{k=1}^{a} A_k\right) \cap A_{a+1} \overset{\text{Ex. 35}}{=} \bigcup_{k=1}^{a}(A_k \cap A_{a+1}) = \bigcup_{k=1}^{a} B_k,$$

onde
$$B_k := A_k \cap A_{a+1}, \text{ para todo } k \in [1..a],$$

então
$$\mathcal{B} = -\left|\bigcup_{k=1}^{a} B_k\right| \overset{\text{HI}}{=} -\sum_{k=1}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} B_i\right| = \sum_{k=1}^{a}(-1)^{k+2} \sum_{I\in\binom{[a]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} B_i\right|$$

Como para cada $I \subseteq [a]$ temos

$$\bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{a+1}) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap A_{a+1} = \bigcap_{i \in I \cup \{a+1\}} A_i,$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \sum_{k=1}^{a} (-1)^{k+2} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I \cup \{a+1\}} A_i \right| \\
&= \sum_{k=1}^{a-1} (-1)^{k+2} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I \cup \{a+1\}} A_i \right| + \sum_{k=a}^{a} (-1)^{k+2} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I \cup \{a+1\}} A_i \right| \\
&= \mathcal{F} + \mathcal{G},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &:= \sum_{k=1}^{a-1} (-1)^{k+2} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I \cup \{a+1\}} A_i \right|, \\
\mathcal{G} &:= \sum_{k=a}^{a} (-1)^{k+2} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I \cup \{a+1\}} A_i \right|.
\end{aligned}$$

de forma que

$$\left| \bigcup_{k=1}^{a+1} A_k \right| = \mathcal{E} + \mathcal{D} + \mathcal{B} = \mathcal{E} + \mathcal{D} + \mathcal{F} + \mathcal{G}.$$

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{a-1} (-1)^{k+2} \sum_{I \in \binom{[a]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I \cup \{a+1\}} A_i \right| = \sum_{k=2}^{a} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[a]}{k-1}} \left| \bigcap_{i \in I \cup \{a+1\}} A_i \right|,$$

$$\mathcal{D}+\mathcal{F} = \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| + \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a]}{k-1}}\left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}}A_i\right|$$

$$= \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1}\left(\sum_{I\in\binom{[a]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| + \sum_{I\in\binom{[a]}{k-1}}\left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}}A_i\right|\right)$$

$$\overset{\text{T. }71}{=} \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|$$

$$= \mathcal{H}$$

de forma que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1}A_k\right| = \mathcal{E}+\mathcal{D}+\mathcal{F}+\mathcal{G} = \mathcal{E}+\mathcal{H}+\mathcal{G}.$$

$$\mathcal{G} = \sum_{k=a}^{a}(-1)^{k+2}\sum_{I\in\binom{[a]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}}A_i\right|$$

$$= (-1)^{a+2}\sum_{I\in\binom{[a]}{a}}\left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}}A_i\right| = (-1)^{a+2}\left|\bigcap_{i\in[a]\cup\{a+1\}}A_i\right|$$

$$= (-1)^{a+2}\left|\bigcap_{i\in[a+1]}A_i\right| = (-1)^{a+2}\sum_{I\in\binom{[a+1]}{a+1}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|$$

$$= \sum_{k=a+1}^{a+1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|$$

Finalmente,

$$\left|\bigcup_{k=1}^{a+1} A_k\right| = \mathcal{E} + \mathcal{H} + \mathcal{G}$$

$$= \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

$$+ \sum_{k=2}^{a}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

$$+ \sum_{k=a+1}^{a+1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{a+1\}} A_i\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{a+1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[a+1]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Base: Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|,$$

para todo $n \in [0..2]$.

$n = 0$**:** temos

$$\left|\bigcup_{k=1}^{0} A_k\right| = |\emptyset| = 0,$$

e

$$\sum_{I\subseteq[0]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{I\subseteq\emptyset} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = 0.$$

$n = 1$**:** temos

$$\left|\bigcup_{k=1}^{1} A_k\right| = |A_1|,$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{I\subseteq[1]}(-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| &= (-1)^{|\emptyset|+1}\left|\bigcap_{i\in\emptyset}A_i\right| + (-1)^{|[1]|+1}\left|\bigcap_{i\in[1]}A_i\right| \\ &= (-1)^{0+1}|\emptyset| + (-1)^{1+1}|A_1| = -1\times 0 + 1\times|A_1| \\ &= |A_1|.\end{aligned}$$

$n = 2$: temos

$$\left|\bigcup_{k=1}^{2}A_k\right| = |A_1\cup A_2|,$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{I\subseteq[2]}(-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| \\ &= (-1)^{|\emptyset|+1}\left|\bigcap_{i\in\emptyset}A_i\right| \\ &+ (-1)^{|\{1\}|+1}\left|\bigcap_{i\in\{1\}}A_i\right| + (-1)^{|\{2\}|+1}\left|\bigcap_{i\in\{2\}}A_i\right| \\ &+ (-1)^{|\{1,2\}|+1}\left|\bigcap_{i\in\{1,2\}}A_i\right| \\ &= (-1)^{0+1}|\emptyset| + (-1)^{1+1}|A_1| + (-1)^{1+1}|A_2| + (-1)^{2+1}|A_1\cap A_2| \\ &= -1\times 0 + 1\times|A_1| + 1\times|A_2| + -1\times|A_1\cap A_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1\cap A_2|.\end{aligned}$$

que é verdade pelo Corolário 51.

□

Também conhecida pelo nome de *Formula de Boole-Sylvester*.
A igualdade no Teorema 78 também pode ser expressa por

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right| = \sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|$$

Exercícios 155, 156.

25.1 Prova Alternativa

Demonstração.

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|. \tag{25.1}$$

Seja ω um elemento que pertence a $r \geq 1$ conjuntos dentre $A_1, \ldots, A_n$. Note que ω adiciona exatamente um na esquerda da Eq. 25.1. Se provarmos que ω também adiciona exatamente um na direita da Eq. 25.1, o resultado do teorema vale, pois ω foi escolhido como sendo um elemento qualquer.

No lado direito da equação, ω pode contribuir adicionando ou subtraindo valores. No primeiro termo (quando $k = 1$) é adicionado r vezes, no segundo termo (quando $k = 2$) é subtraído $\binom{r}{2}$ vezes, no terceiro termo é adicionado $\binom{r}{3}$, e assim por diante. Assim, o total de vezes que ω contribui (adiciona e subtrai) no lado direito da equação é

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \ldots (-1)^{r-1}\binom{r}{r}$$

Mas, pelo Exercício refex:teorema-binomial,

$$0 = (1-1)^r = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j = \binom{r}{0} - \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{j-1}.$$

Portanto,

$$1 = \binom{r}{0} = \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{j-1},$$

concluindo que ω será adicionado somente uma vez no lado direito da equação.

□

---

rc: qual a fonte desta prova?

rc: a ideia de que ω contribui com $\binom{r}{k}$ em $\sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ dispensa explicação? Eu demorei um pouco para me convencer. Acho que este passo do argumento merece um lema separado (ou um exercício?).

Aula 26

Funções Sobrejetoras

1. passar a aula de desarranjos para antes desta
2. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos

Dados conjuntos finitos A e B, qual o número de funções sobrejetoras $A \to B$?

Vamos definir

$S(A, B)$**:** conjunto das funções sobrejetoras $A \to B$,

$N(A, B)$**:** conjunto das funções não sobrejetoras $A \to B$.

Então,

$$B^A = S(A, B) \cup N(A, B),$$

e

$$S(A, B) = B^A - N(A, B),$$

e consequentemente (C. 45)

$$|S(A, B)| = |B^A - N(A, B)| \overset{\text{C. }50}{=} |B^A| - |N(A, B)| \overset{\text{T. }58}{=} |B|^{|A|} - |N(A, B)|$$

Em particular, para

$$\begin{aligned} A &= [k], \\ B &= [n], \end{aligned}$$

com $k \geq n$, temos (Corolário 45)

$$|S([k],[n])| = |[n]|^{|[k]|} - |N([k],[n])| = n^k - |N([k],[n])|$$

Para cada $i \in [n]$, seja $N(k,n,i)$ o conjunto das funções $[k] \to [n]$ para as quais i não é imagem de nenhum elemento de $[k]$, isto é,

$$N(k,n,i) := \left\{f \in [n]^{[k]} \mid f^{-1}(i) = \emptyset\right\}.$$

Então

$$N([k],[n]) = \bigcup_{i=1}^{n} N(k,n,i),$$

e daí (Corolário 45)

$$\begin{aligned} |N([k],[n])| &= \left|\bigcup_{i=1}^{n} N(k,n,i)\right| \\ &\overset{\text{T. 78}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{i}} \left|\bigcap_{j \in I} N(k,n,j)\right| \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{i}} |N(k,n,I)|, \end{aligned}$$

onde

$$N(k,n,I) := \bigcap_{j \in I} N(k,n,j).$$

Observe que

$$N(k,n,I) = \bigcap_{i \in I} N(k,n,i) = \left\{f \in [n]^{[k]} \mid f^{-1}(I) = \emptyset\right\},$$

e por isso, a cada $f \in N(k,n,I)$ corresponde uma função $[k] \to [n] - I$.

Mais precisamente, existe uma bijeção natural $F\colon\ N(k,n,I)\ \to ([n]-I)^{[k]}$ onde a imagem de $f \in N(k,n,I)$ é a (única) função $\overline{f}\colon [k] \to [n] - I$ satisfazendo

$$\overline{f}(j) = f(j), \text{ para todo } j \in [k].$$

Então (Corolário 45)

$$|N(k,n,I)| = \left|([n]-I)^{[k]}\right| \overset{\text{T. 58}}{=} |[n]-I|^{|[k]|} \overset{\text{C. 50}}{=} (|[n]|-|I|)^k = (n-|I|)^k,$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
|N([k],[n])| &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+1} \sum_{I\in\binom{[n]}{i}} |N(k,n,I)| \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{I\in\binom{[n]}{i}} (n-|I|)^k \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{I\in\binom{[n]}{i}} (n-i)^k \\
&\overset{\text{T. 4}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \left|\binom{[n]}{i}\right| (n-i)^k \\
&\overset{\text{T. 71}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \binom{|[n]|}{i} (n-i)^k \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^k \\
&\overset{\text{j=n-i}}{=} \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j+1} \binom{n}{n-j} j^k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i+1} \binom{n}{n-i} i^k \\
&\overset{?}{=} \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} i^k.
\end{aligned}
$$

E finalmente

$$
\begin{aligned}
|S([k],[n])| &= n^k - |N([k],[n])| \\
&= n^k - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} i^k \\
&= n^k + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k \\
&= (-1)^{n-n} \binom{n}{n} n^k + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k.
\end{aligned}
$$

Teorema 79. *O número de funções sobrejetoras* $[k] \to [n]$ *é*

$$
\begin{cases} 0, & \textsf{se } k < n, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k, & \textsf{se } k \geq n. \end{cases}
$$

Corolário 80. *Se* A *e* B *são conjuntos finitos, o número de funções sobrejetoras* $A \to B$ *é*

$$
\begin{cases} 0, & \textsf{se } |A| < |B|, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{|B|} (-1)^{|B|-i} \binom{|B|}{i} i^{|A|}, & \textsf{se } |A| \geq |B|. \end{cases}
$$

Corolário 81. *O número de sequências de tamanho* k *sobre um conjunto finito* A *onde todos os elementos de* A *aparecem é* $\displaystyle\sum_{i=0}^{|A|} (-1)^{|A|-i} \binom{|A|}{i} i^k$.

Corolário 82. *O número de maneiras de distribuir* k *bolas distintas por* n *urnas distintas de maneira que nenhuma urna fique vazia é* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k$.

Aula 27

Permutações sem Ponto Fixo

1. Bernoulli-Euler Formula formisaddressed letters.

Dizemos que a é um *ponto fixo* de uma permutação f sobre um conjunto A se $f(a) = a$.

Um *desarranjo* de um conjunto A é uma permutação sobre A sem pontos fixos.

Vamos definir

D_n: conjunto dos desarranjos de $[n]$, isto é,

$$D_n := \{f \in [n]! \mid f(i) \neq i \text{ para todo } i \in [n]\}$$

$F(n,i)$: conjunto das permutações sobre n para as quais i é ponto fixo, isto é,

$$F_{n,i} := \{f \in [n]! \mid f(i) = i\}$$

de forma que

$$D_n = [n]! - \bigcup_{i=1}^{n} F(n,i)$$

e

$$|D_n| = \left| [n]! - \bigcup_{i=1}^{n} F(n,i) \right| = |[n]|! - \left| \bigcup_{i=1}^{n} F(n,i) \right| = n! - \left| \bigcup_{i=1}^{n} F(n,i) \right|.$$

Temos

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} F(n,i) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n,i) \right|.$$

Dado $I \subseteq [n]$, temos

$$\bigcap_{i \in I} F(n,i) = \bigcap_{i \in I} \{f \in [n]! \mid f(i) = i\} = \{f \in [n]! \mid f(i) = i, \text{ para todo } i \in I\},$$

isto é, $\bigcap_{i \in I} F(n,i)$ é o conjunto das permutações para as quais todo $i \in I$ é ponto fixo.

Fazendo

$$F(n,I) := \bigcap_{i \in I} F(n,i),$$

temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} F(n,i)\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} F(n,i)\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |F(n,I)|.$$

Existe uma bijeção natural entre $F(n,I)$ e $([n]-I)!$, que associa cada $f \in F(n,I)$ à função $\overline{f} \in ([n]-I)!$ dada por

$$\overline{f}(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I.$$

Consequentemente

$$|F(n,I)| \overset{??}{=} |[n]-I)!| \overset{??}{=} (|[n]| - |I|)! = (n - |I|)!$$

Então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} F(n,i)\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |F(n,I)|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)!$$

$$\overset{??}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

$$= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!},$$

e

$$
\begin{aligned}
|D_n| = n! - \left| \bigcup_{i=1}^{n} F(n,i) \right| \\
&= n! - n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = n! \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) \\
&= n! \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!} \right) = n! \left(\frac{(-1)^0}{0!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!} \right) \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Para todo $x \in \mathbb{C}$,

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!},$$

de forma que

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!},$$

e portanto,

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e},$$

ou seja,

$$|D_n| \approx \frac{n!}{e} < 36.79\% n!$$

Teorema 83. *O número de permutações sem ponto fixo sobre um conjunto finito A é*

$$|A|! \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{|A|!}{e}$$

Corolário 84. *O número de maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas de maneira que cada urna receba exatamente uma bola e nenhuma bola caia na na "sua" urna é*

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e}.$$

Corolário 85. *A probabilidade de uma permutação sobre um conjunto de n elementos escolhida uniformemente ao acaso não ter ponto fixo é*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{1}{e}$$

Aula 28

Partições

padronizar as respostas dos exercícios resolvidos

Quantas k-partições tem um conjunto finito A?

Toda sobrejeção $f\colon A \to [k]$ define uma k-partição de A, a saber,

$$A/f := \left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}.$$

Vamos definir

$S(A,k)$: conjunto das sobrejeções $A \to [k]$,

$\left\{{A \atop k}\right\}$: conjunto das k-partições de A,

Seja $F\colon S([n],k) \to \left\{{[n] \atop k}\right\}$ a função que associa cada função $f \in S([n],k)$ à partição $[n]/f \in \left\{{[n] \atop k}\right\}$ definida por ela, de maneira que (T. 49)

$$S([n],k) = \bigcup_{P \in [n]/f} F^{-1}(P),$$

e consequentemente (C. 45)

$$|S([n],k)| = \left|\bigcup_{P \in [n]/f} F^{-1}(P)\right| \stackrel{?}{=} \sum_{P \in [n]/f} |F^{-1}(P)|.$$

Seja $P = \{C_1, \dots, C_k\} \in \left\{ {[n] \atop k} \right\}$ uma k–partição de $[n]$ e seja $f_P \colon [n] \to k$ a função que associa cada $i \in [n]$ ao índice $j \in [k]$ do conjunto $C_j \in P$ ao qual i pertence, isto é,

$$f_P(i) = j \in [k] \mid i \in C_j.$$

É evidente que

$$F(f_P) = P,$$

isto é,

$$[n]/f_P = P.$$

Além disso, também é claro que se $g \in [k]!$ é uma permutação sobre $[k]$, então $f_P \circ g \in S([n], k)$ também é uma sobrejeção $[n] \to [k]$ e

$$F(f_P \circ g) = P,$$

isto é,

$$[n]/(f_P \circ g) = P.$$

Em outras palavras, dada uma partição P de $[n]$, para cada permutação g sobre $[k]$ temos uma sobrejeção $f = f_P \circ g \in S([n], [k])$ tal que

$$[n]/(f_P \circ g) = [n]/f_P = P.$$

Então, o número de sobrejeções $f \colon [n] \to [k]$ satisfazendo $F(f) = P$ corresponde ao número de permutações sobre $[k]$, isto é,

$$|F^{-1}(P)| \stackrel{?}{=} |[k]!| \stackrel{?}{=} |[k]|! \stackrel{?}{=} k!,$$

e consequentemente,

$$|S([n], k)| = \sum_{P \in [n]/f} |F^{-1}(P)| = \sum_{P \in [n]/f} k! \stackrel{?}{=} \left\{ {[n] \atop k} \right\} k!,$$

ou seja

$$\left\{ {[n] \atop k} \right\} = \frac{|S([n], k)|}{k!} \stackrel{\text{T. 79}}{=} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

O número de k-partições de $[n]$ é conhecido como *número de Stirling do segundo tipo* e é denotado $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Teorema 86. *O número de k-partições de $[n]$ é*

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n.$$

Corolário 87. *O número de k-partições de um conjunto finito A é*

$$\left\{ |A| \atop k \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^{|A|}.$$

Corolário 88. *O número de maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas idênticas sem que nenhuma urna fique vazia é* $\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^k$.

Corolário 89. *O número de partições de $[n]$ é*

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{ n \atop k \right\}.$$

O número de partições de $[n]$ é conhecido como *número de Bell.*

Corolário 90. *O número de partições de um conjunto finito A é*

$$\sum_{k=1}^{|A|}\left\{ |A| \atop k \right\}.$$

Corolário 91. *O número de relações de equivalência sobre um conjunto finito A é*

$$\sum_{k=1}^{|A|}\left\{ |A| \atop k \right\}.$$

faltam exemplos e exercícios

Aula 29

Aula 30

Prova 3

Apêndice A

Exercícios

A.1 Elementos de Lógica

1. [default,ex:proposicoes]

   Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

   (a) "$2 \leq 3$".
   (b) "$10 > 20$".
   (c) "$x^2 \leq x$".

   Resposta:

   (a) "$2 \leq 3$" é uma proposição verdadeira.
   (b) "$10 > 20$" é uma proposição falsa.
   (c) "$x^2 \leq x$" não é uma proposição, porque não é verdadeira nem falsa, uma vez que "não sabemos" o valor de x.

2. [default,ex:implicacoes]

   Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

   (a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
   (b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
   (c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,
   (d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

Resposta:

Todas são verdadeiras.

3. [default,ex:predicados]

   Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

   Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

   (a) $P(2)$.
   (b) $P(1/2)$.
   (c) $Q(1,1)$.
   (d) $R(t) = Q(1,t)$.

   Resposta:

   (a) $P(2)$ é uma proposição verdadeira: "$2 \leq 2^2$".
   (b) $P(1/2)$ é uma proposição falsa: "$1/2 \leq (1/2)^2$".
   (c) $Q(1,1)$ é uma proposição verdadeira: "$1 \leq 1^2$".
   (d) $R(t) = Q(1,t)$ não é uma proposição. É o predicado "$1 \leq t^2$", com uma variável livre.

4. [default,ex:ex-quantificadores]

   Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

   Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

   (a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
   (c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
   (d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

   Resposta:

   (a) a proposição $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é falsa.

(b) a proposição $P(x)$, $\textsf{para algum } x \in \mathbb{R}$ é verdadeira.

(c) a proposição $P(x)$, $\textsf{para todo } x \geq 1$ é verdadeira.

(d) a proposição $P(x)$, $\textsf{para algum } 0 < x < 1$ é falsa.

5. [default,ex:implicacao]

Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $(A \implies B) \equiv ((\textsf{ não } B) \implies (\textsf{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\textsf{ não } B) \implies (\textsf{ não } A))$.

(c) $(A \implies F) \equiv \textsf{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(d) $((A \implies B) \textsf{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \textsf{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(e) $((A \implies B) \textsf{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \textsf{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(f) $((B \implies A) \textsf{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \textsf{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(g) $((B \implies A) \textsf{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \textsf{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((A \implies B) \textsf{ e } (A \implies (\textsf{ não } B))) \implies (\textsf{ não } A)$ (outar maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

Resposta:

(a) Vamos provar que $F \implies A$.
Seja A uma proposição. Temos, então, que

$$(F \implies A) \equiv ((\textsf{ não } F) \textsf{ ou } A) \equiv (V \textsf{ ou } A) \equiv (V)$$

e, logo, $F \implies A$.

(b) Vamos provar que $(A \implies B) \equiv ((\textsf{ não } B) \implies (\textsf{ não } A))$.
Sejam A e B duas proposições. Temos que

$$(A \implies B) \equiv ((\textsf{ não } A) \textsf{ ou } B)$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)) &\equiv ((\text{ não } (\text{ não } B)) \text{ ou } (\text{ não } A)) \\ &\equiv (B \text{ ou } (\text{ não } A)).\end{aligned}$$

Como $((\text{ não } A) \text{ ou } B) \equiv (B \text{ ou } (\text{ não } A))$, então

$$(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)).$$

Logo, $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.

(c) Vamos provar que se A é uma proposição, então

$$(A \implies F) \equiv (\text{ não } A).$$

Seja A uma proposição. Então,

$$\begin{aligned}(A \implies F) &\equiv ((\text{ não } A) \text{ ou } F) \\ &\equiv (\text{ não } A),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.
Portanto, $(A \implies F) \equiv (\text{ não } A)$.

(d) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$(A \implies B) \text{ ou } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C)).$$

Sejam A, B e C proposições e suponha A. Então,

$$(A \implies B) \text{ ou } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$$

é equivalente a

$$(V \implies B) \text{ ou } (V \implies C) \equiv (V \implies (B \text{ ou } C)),$$

que é equivalente a

$$(B \text{ ou } C) \equiv (B \text{ ou } C).$$

Agora, suponha $(\text{ não } A)$. Então,

$$(A \implies B) \text{ ou } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$$

é equivalente a

$$(F \implies B) \text{ ou } (F \implies C) \equiv (F \implies (B \text{ ou } C)),$$

que é equivalente a
$$(V \text{ ou } V) \equiv (V),$$
que é equivalente a
$$(V) \equiv (V).$$
Portanto, se A, B e C são proposições, então
$$(A \implies B) \text{ ou } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C)).$$

(e) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então
$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ e } C)).$$
Sejam A, B e C proposições e suponha A. Então,
$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$$
é equivalente a
$$(V \implies B) \text{ e } (V \implies C) \equiv (V \implies (B \text{ e } C)),$$
que é equivalente a
$$(B \text{ e } C) \equiv (B \text{ e } C).$$
Agora, suponha (não A). Então,
$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$$
é equivalente a
$$(F \implies B) \text{ e } (F \implies C) \equiv (F \implies (B \text{ e } C)),$$
que é equivalente a
$$(V \text{ e } V) \equiv (V),$$
que é equivalente a
$$(V) \equiv (V).$$
Portanto, se A, B e C são proposições, então
$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ e } C)).$$

(f) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A).$$

Sejam A, B e C proposições. Temos que

$$\begin{aligned}((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) &\equiv (((\neg B) \text{ ou } A) \text{ ou } ((\neg C) \text{ ou } A)) \\ &\equiv ((\neg B) \text{ ou } A \text{ ou } (\neg C) \text{ ou } A) \\ &\equiv (((\neg B) \text{ ou } (\neg C)) \text{ ou } A) \\ &\equiv (\neg(B \text{ e } C) \text{ ou } A) \\ &\equiv ((B \text{ e } C) \implies A),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(g) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A).$$

Sejam A, B e C proposições. Temos que

$$\begin{aligned}((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) &\equiv (((\neg B) \text{ ou } A) \text{ e } ((\neg C) \text{ ou } A)) \\ &\equiv (A \text{ ou } ((\neg B) \text{ e } (\neg C))) \\ &\equiv (\neg(B \text{ ou } C) \text{ ou } A) \\ &\equiv ((B \text{ ou } C) \implies A),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

6. [default,ex:funcao-integralizada]

Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\ P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\ Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x). \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfaz o predicado $P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) não satisfaz o predicado $P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) satisfaz o predicado não $(P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R})$.

(d) satisfaz o predicado $Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) não satisfaz o predicado $Q(g, x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(f) satisfaz o predicado não $(Q(g, x)$, para todo $x \in \mathbb{R})$.

Resposta:

(a) $g(x) = x$

(b) $g(x) = \sqrt{x}$

(c) $g(x) = \sqrt{x}$

(d) $g(x) = x^2$

(e) $g(x) = x^2$

(f) $g(x) = x^2$

7. [default,ex:aproximacao]

Considere os seguintes predicados.

$$
\begin{aligned}
L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\
P(n, f, g, h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\
B(f, g, h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n, f, g, h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\
A(f, g) &\equiv B(f, g, h), \text{ para algum } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Dê um exemplo de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f, g)$.

(b) não satisfazem $A(f, g)$.

(c) satisfazem não $A(f, g)$.

Resposta:

(a) $f(n) = n$, $g(n) = n + 1$

(b) $f(n) = n$, $g(n) = n^2$

(c) $f(n) = n$, $g(n) = n^2$

8. [default,ex:O-como-predicado]

Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c)$, para algum $k > 0)$, para algum $c > 0)$, para todo $n \geq k$.

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,
(b) $O(n)$,
(c) $O(10+1/n)$,
(d) $O(\log n)$,
(e) $O(42)$.

Resposta:

(a) É verdadeira. Basta tomar $c = k = 2$. Assim,

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, (n \geq 2) \implies |f(n)| \leq 2 &\equiv \forall n \geq 2, |f(n)| \leq 2\\ &\equiv \forall n \geq 2, |\frac{n}{n-1}| \leq 2\\ &\equiv \forall n \geq 2, n \leq 2n-2 \quad \equiv V.\end{aligned}$$

(b) É falsa. Como prova, suponha que existam $c > 0$ e $k > 0$ satisfazendo

$$n \geq k \implies n \leq c.$$

Então, independente de n, c limita $f(n) = n$. Como c é constante, tome $k \leq f(n) = n = \lfloor c \rfloor + 1$.
Assim, se $n \geq k$, então $n \leq c \equiv \lfloor c \rfloor + 1 \leq c$, o que deriva uma contradição.
Logo, não existem $c > 0$ e $k > 0$ satisfazendo

$$n \geq k \implies n \leq c.$$

Portanto, (não $O(n)$).

(c) É verdadeira. Basta tomar $k = 1$ e $c = 11$. Assim,

$$10 + 1/n \leq 11, \text{ para todo } n \geq 1,$$

que é equivalente a

$$n \geq 1, \text{ para todo } n \geq 1,$$

como queríamos demonstrar.

(d) É falsa. Como prova, suponha que existam tais $c > 0$ e $k > 0$ satisfazendo

$$n \geq k \implies |f(n)| \leq c;$$

isto é, a partir de um certo k, c limita $|f(n)|$, independente de $|f(n)|$. Entretanto, $|f(n)|$ não é limitada, pois

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{c} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{c} \\
&= \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} \log n \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, (não $O(\log n)$).

(e) É verdadeira. Tome $k = 1$ e $c = 42$. Assim, $|f(n)|$ é limitada por 42, para todo $n \geq 1$.

9. [default,ex:notacao-assintotica]

Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\
P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n), \text{ para todo } n \geq k, \\
P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\
O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f, g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

(d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

Resposta:

(a) É verdadeira. Basta tomar $c = 1$ e $k = 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2, (n \geq 2) \implies |f(n)| \leq 1.|g(n)| &\equiv \forall n \geq 2, |f(n)| \leq |g(n)| \\
&\equiv \forall n \geq 2, n \leq n^2 \\
&\equiv \forall n \geq 2, 1 \leq n \equiv \underline{V}
\end{aligned}$$

(b) É falsa. Como prova, suponha que existam $c > 0$ e $k \geq 1$ tal que

$$n \geq k \implies n^2 \leq c.n.$$

Assim, se $n \geq k \geq 1$, então $n^2 \leq c.n \equiv n \leq c$;
isto é, a partir de um certo k, $c.n$ limita n^2, independente de n^2.
Entretanto, n^2 não é limitada, pois

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{c.n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{c} = \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} n \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Portanto, (não $O(g, f)$).

(c) É verdadeira. Basta tomar $c = 1$ e $k = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, (n \geq 1) \implies |f(n)| \leq 1.|g(n)| &\equiv \forall n \geq 1, n/2 \leq n \\ &\equiv \forall n \geq 1, 1/2 \leq 1 \equiv \underline{V}\end{aligned}$$

(d) É verdadeira. Basta tomar $c = 4$ e $k = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, (n \geq 1) \implies |f(n)| \leq 4.|g(n)| &\equiv \forall n \geq 1, n \leq 4.n/2 \\ &\equiv \forall n \geq 1, n \leq 2.n \\ &\equiv \forall n \geq 1, 1 \leq 2 \equiv \underline{V}\end{aligned}$$

10. [default,ex:limite-como-predicado]

Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$D(x, y, d)$**:** $|x - y| < d$,

$M(x, y)$**:** $x > y$.

Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

$L_1(f, a, l)$**:** $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

$L_2(f, l)$**:** $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.

$L_3(f, a)$**:** $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

$L_4(f)$**:** $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Resposta: Seja f uma função definida num intervalo aberto I.

(a)

$$\begin{aligned} L_1(f,a,l) = ((((D(x,a,\delta) > 0) \implies D(f(x),l,\varepsilon)),& \\ \text{para todo } x \in I),& \\ \text{para algum } \delta > 0),& \\ &\text{para todo } \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} L_2(f,l) = (((M(x,c) \implies D(f(x),l,\varepsilon)),& \\ \text{para todo } x \in I),& \\ \text{para algum } c > 0),& \\ &\text{para todo } \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} L_3(f,a) = ((((D(x,a,\delta) > 0) \implies M(f(x),l)),& \\ \text{para todo } x \in I),& \\ \text{para algum } \delta > 0),& \\ &\text{para todo } l > 0 \end{aligned}$$

(d)

$$L_4(f) = ((M(x,c) \implies M(f(x),l)),\ \text{para algum } c > 0),\ \text{para todo } l > 0$$

A.2 Conjuntos e Inteiros

11. [default,ex:diferenca-subconjunto]

    Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

    $$A = (A - B) \cup B,$$

    Resposta:

    Podemos reescrever $A = (A - B) \cup B$ como

    $$A \subseteq (A - B) \cup B$$

    e

    $$(A - B) \cup B \subseteq A.$$

    Portanto, podemos dividir a prova de $A = (A - B) \cup B$ em duas partes:

    (a) Como $A \subseteq (A - B) \cup B$, tem-se que:

    $$x \in A \implies x \in ((A - B) \cup B)$$

    Seja $x \in A$, temos 2 casos:

    i. $x \in B \implies x \in (A - B) \cup B$

    ii. $x \notin B \implies x \in (A - B) \implies x \in (A - B) \cup B$

    (b) Como $(A - B) \cup B \subseteq A$, tem-se que:

    $$x \in (A - B) \cup B \implies x \in A$$

    Seja $x \in (A - B) \cup B$, temos 2 casos:

    i. $x \in (A - B) \implies x \in A \cap x \notin B \implies x \in A$

    ii. $x \notin (A - B) \implies \neg(x \in (A - B)) \implies x \notin A \cup x \in B \implies x \in B \implies x \in A$

12. [default,ex:produtorio]

    Dados $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

    (a)

    $$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)

$$\prod_{x\in X}(f(x)+g(x)) = \prod_{x\in X} f(x) + \prod_{x\in X} g(x)?$$

(c)

$$\sum_{x\in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x\in X} f(x)\right)\left(\sum_{x\in X} g(x)\right)?$$

Justifique.

Resposta:

(a) Não é verdade. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$. Então,

$$\begin{aligned}
\prod_{x\in X} c &= c \prod_{x\in X-\{x_1\}} c \\
&= c^2 \prod_{x\in X-\{x_1,x_2\}} c \\
&= \ldots \\
&= c^k \prod_{x\in X-\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}} c \\
&= \ldots \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in X-\{x_1,x_2,\ldots,x_{|X|}\}} c \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in X-X} c \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in\emptyset} c \\
&= c^{|X|} \\
&\neq c|X|
\end{aligned}$$

e, portanto, $\prod_{x\in X} c \neq c|X|$.

(b) Não é verdade. Tome, por contra-exemplo,

$$f(x) = 2x, g(x) = x^2 \text{ e } X = \{2,3\}.$$

Dessa forma,

$$\prod_{x\in X}(f(x)+g(x)) = \prod_{x\in\{2,3\}}\left(2x+x^2\right) = 120,$$

enquanto

$$\prod_{x\in X} f(x) + \prod_{x\in X} g(x) = \prod_{x\in\{2,3\}} (2x) + \prod_{x\in\{2,3\}} \left(x^2\right) = 60$$

e, portanto, não pode ser que

$$\prod_{x\in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x\in X} f(x) + \prod_{x\in X} g(x).$$

(c) Não é verdade. Tomando, novamente,

$$f(x) = 2x, g(x) = x^2 \text{ e } X = \{2,3\},$$

obtemos

$$\sum_{x\in X} f(x)g(x) = \sum_{x\in\{2,3\}} \left(2x^3\right) = 70$$

e, por outro lado,

$$\left(\sum_{x\in X} f(x)\right)\left(\sum_{x\in X} g(x)\right) = \left(\sum_{x\in\{2,3\}} 2x\right)\left(\sum_{x\in\{2,3\}} x^2\right) = (10)\,(13) = 130$$

e, portanto,

$$\sum_{x\in X} f(x)g(x) \neq \left(\sum_{x\in X} f(x)\right)\left(\sum_{x\in X} g(x)\right).$$

A.3 Chão e Teto

13. [default,ex:teo:ceil]

Prove que $\lceil x\rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x\rceil < x+1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resposta:

Vamos provar que $\lceil x\rceil$ é o único inteiro que satisfaz $x \leq \lceil x\rceil < x+1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $I = \{y \in \mathbb{R} : x \leq y < x+1\}$.

Esta prova tem dois casos: (a) quando $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$; e, (b) quando $x \in \mathbb{Z}$.

(a) Suponha que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Então,

$$x \neq \lceil x \rceil$$

e, consequentemente,

$$x < \lceil x \rceil < x + 1$$

e, daí,

$$\lceil x \rceil - 1 < x < \lceil x \rceil < x + 1 < \lceil x \rceil + 1.$$

Como o intervalo I tem comprimento 1, uma vez que $(x+1)-(x) = 1$, e os vizinhos de $\lceil x \rceil$, que são $\lceil x \rceil - 1$ e $\lceil x \rceil + 1$, não são elementos de I, porque

$$\lceil x \rceil + 1 > x + 1 \text{ e } \lceil x \rceil - 1 < x,$$

conforme a última sequência de inequações, então, segue que o único inteiro em I é $\lceil x \rceil$.

(b) Suponha que $x \in \mathbb{Z}$.
Então,

$$x = \lceil x \rceil$$

e, consequentemente,

$$x = \lceil x \rceil < x + 1$$

e, daí,

$$\lceil x \rceil - 1 < x = \lceil x \rceil < x + 1 = \lceil x \rceil + 1.$$

Como o intervalo I tem comprimento 1 e os vizinhos de $\lceil x \rceil$ não são elementos de I, então, só pode ser que $\lceil x \rceil$ seja o único inteiro em I.

Logo, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro em I.

Portanto, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro satisfazendo

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

14. [default,ex:ceil-x+z]Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil .$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

Resposta: Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil .$$

Do Teorema 8 temos que

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

e, portanto, para todo $z \in \mathbb{Z}$,

$$x + z \leq \lceil x \rceil + z < (x + 1) + z,$$

e, portanto,

$$(x + z) \leq \lceil x \rceil + z < (x + z) + 1.$$

Do Teorema 8, podemos escrever

$$(x + z) \leq \lceil x + z \rceil < (x + z) + 1,$$

Como $\lceil x \rceil + z$ é inteiro, temos que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil .$$

15. [default,ex:n/2]

Sejam $n, m \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\begin{aligned} n(a, b) &= b - a + 1, \\ m(a, b) &= \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor , \end{aligned}$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se $n(a, b)$ é ímpar.

(b) $n(a, m(a, b)) = \left\lceil \dfrac{n(a, b)}{2} \right\rceil$.

(c) $n(m(a,b)+1,b) = \left\lfloor \dfrac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$.

(d) $n(a,m(a,b)-1) = \left\lfloor \dfrac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$.

Resposta:

(a) Vamos provar que, para todo $a,b \in \mathbb{Z}$, $a+b$ é **par** se, e somente se, $n(a,b)$ é ímpar.
Como $a,b \in \mathbb{Z}$, podemos escrever

$$a+b = 2k$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $a,b \in \mathbb{Z}$, e, portanto,

$$b = 2k - a.$$

Temos que

$$\begin{aligned} n(a,b) &= b - a + 1 \\ &= (2k-a) - a + 1 \\ &= 2k - 2a + 1 \\ &= 2(k-a) + 1, \end{aligned}$$

Como $k,a \in \mathbb{Z}$, a diferença entre k e a é inteira, ou seja $(k-a) \in \mathbb{Z}$, e $2(k-a)$ é **par** para todo $k,a \in \mathbb{Z}$ e, portanto $n(a,b) = 2(k-a)+1$ é **ímpar**, se, e somente se, $a+b$ é **par**.

DM: Tá faltando a parte de volta? Se $a+b$ é ímpar $n(a,b) = 2(k-a)+2$ é par

(b) Vamos provar que, para todo $a,b \in \mathbb{Z}$, $n(a,m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil$
Temos que:

$$\begin{aligned} n(a,m(a,b)) = n(a, \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor) &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - a + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{b-a}{2} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{b-a}{2} + \frac{2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a+1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Então, temos duas situações.

i. Se $n(a,b)$ é par, $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro e, portanto:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor .$$

E, como $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro, tem-se que:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil .$$

ii. Se $n(a,b)$ é ímpar, $\frac{n(a,b)+1}{2}$ é inteiro e, portanto:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil ,$$

E, como $\frac{n(a,b)+1}{2}$ é inteiro, tem-se que:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil .$$

(c) Vamos provar que, para todo $a,b \in \mathbb{Z}$, $n(m(a,b)+1,b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$
Temos que:

$$\begin{aligned} n(m(a,b)+1,b) &= n(\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + 1, b) = b - (\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + 1) + 1 \\ &= b - \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor = b + \left\lceil -\frac{a+b}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil b - \frac{a+b}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil . \end{aligned}$$

Então, temos duas situações.

i. Se $n(a,b)$ é par, $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro e, portanto:

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil ,$$

E, como $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro, tem-se que:

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor .$$

ii. Se $n(a,b)$ é ímpar, $\frac{n(a,b)-1}{2}$ é inteiro e, portanto:

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

E, como $\frac{n(a,b)-1}{2}$ é inteiro, tem-se que:

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor.$$

(d) Vamos provar que, para todo $a,b \in \mathbb{Z}$, $n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$
Temos que:

$$\begin{aligned}
n(a, m(a,b)-1) &= n(a, \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - 1) = (\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - 1) - a + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a+1}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Portanto

$$n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor.$$

16. [default,ex:floor:ceil]
Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$.
(b) $\lceil x \rceil - x \leq 1$.
(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$
(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$.

Resposta:

(a) Vamos provar que $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, para todo x real.
Suponha que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. De imediato temos que

$$\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

e, consequentemente,

$$(\lfloor x \rfloor + 1) - (\lfloor x \rfloor) = 1 \text{ e } x \in (\lfloor x \rfloor \mathinner{..} \lfloor x \rfloor + 1)\,,$$

o que os leva a crer que

$$\lfloor x \rfloor + 1 - x < 1 \text{ e } x - \lfloor x \rfloor < 1$$

e, logo, $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, uma vez que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Por outro lado, suponha que $x \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, $x = \lfloor x \rfloor$. Assim,

$$x - \lfloor x \rfloor = x - x = 0 \leq 1$$

e, portanto, $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, sempre que $x \in \mathbb{Z}$.
Dessarte, $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, para todo x real.

(b) Vamos provar que $\lceil x \rceil - x \leq 1$, para todo x real.
Suponha que x é inteiro. Então, $x = \lceil x \rceil$ e, consequentemente,

$$\lceil x \rceil - x = x - x = 0 \leq 1$$

e, logo, $\lceil x \rceil - x \leq 1$.
Agora, suponha que x é um real não-inteiro. Nesse caso,

$$x < \lceil x \rceil < x + 1.$$

Como $(x + 1) - (x) = 1$, então

$$(x + 1) - (\lceil x \rceil) < 1 \text{ e } (\lceil x \rceil) - (x) < 1$$

porque $\lceil x \rceil$ é elemento do intervalo contínuo $(x..x + 1)$.
Como

$$\lceil x \rceil - x < 1 \text{ e } x \neq \lceil x \rceil\,,$$

então $\lceil x \rceil - x \leq 1$ e, logo, $\lceil x \rceil - x \leq 1$.
Portanto, para todo x real, $\lceil x \rceil - x \leq 1$.

(c) Vamos provar que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$, provando que

$$x \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$$

e

$$\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \implies x \in \mathbb{Z}$$

em (i) e (ii), respectivamente.

i. Vamos provar que $x \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.
Seja x um inteiro. Então,

$$
\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor &= \min\{k \in \mathbb{Z} \colon k \geq x\} \\
&= \min\{x, x+1, x+2, \ldots\} \\
&= x
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\lceil x \rceil &= \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\} \\
&= \max\{x, x-1, x-2, \ldots\} \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Logo, $x \in \mathbb{Z}$ é suficiente para $\lfloor x \rfloor = x$ e $x = \lceil x \rceil$ e, portanto,

$$x \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil .$$

ii. Vamos provar que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \implies x \in \mathbb{Z}$.
Temos que

$$\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

só é verdade se

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \cap \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

for um conjunto unitário. De fato,

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \cap \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} = \{x\}$$

e, portanto, $x \in \mathbb{Z}$.
Dessarte, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor \implies x \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $x \in \mathbb{Z}$ se e somente se $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.

(d) Vamos provar que $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$, para todo x real.
Inicialmente, suponha que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Consequentemente,

$$\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil ;$$

ou ainda $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Como $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, então

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = (\lfloor x \rfloor + 1) - \lfloor x \rfloor = 1.$$

Logo, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Por outro lado, suponha que x é inteiro. Daí vem que

$$\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$$

e, consequentemente, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = x - x = 0$. Logo,

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}.$$

Portanto, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$, para todo x real.

17. [default,ex:chao-teto+1-1]

Prove que

(a) $\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x + 1 \rfloor$,

(b) $\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil$,

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resposta:

(a) Seja $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Pelo Teorema 7, $z \in \mathbb{Z}$ é o único inteiro tal que

$$x - 1 < z \leq x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
Se m é inteiro e

$$(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1),$$

então, pelo Teorema 7

$$x < \lfloor x + 1 \rfloor \leq x + 1,$$

tem-se que:

$$m = \lfloor x + 1 \rfloor.$$

(b) Seja $m := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Pelo Teorema 8, $z \in \mathbb{Z}$ é o único inteiro tal que

$$x \leq z < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se m é inteiro e

$$(x-1) \leq m < (x-1)+1,$$

então, pelo Teorema 8

$$x-1 \leq \lceil x-1 \rceil < x,$$

tem-se que:

$$m = \lceil x-1 \rceil .$$

18. [default,ex:lg:floor:ceil]

    Prove que, para todo inteiro $n > 0$,

    (a) $\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$.

    (b) $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ se e somente se n é potência de 2.

    (c) $\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil$ se e somente se n é potência de 2.

    (d) $\frac{1}{2} \leq \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$.

    (e) $\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0$.

    (f) $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = 0$ se e somente se $k > \lfloor \lg n \rfloor$.

    (g) $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$.

    Resposta:

    (a) Seja n um inteiro positivo.
    Como

    $$\lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil ,$$

    e pelo Teorema 7

    $$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n,$$

    e pelo Teorema 8

    $$\lg n \leq \lceil \lg n \rceil \leq \lg n + 1,$$

    tem-se:

    $$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1.$$

E como 2^x é uma função crescente,

$$2^{\lg n-1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{\lg n} \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg n+1}.$$

E, portanto

$$2^{\lg n-\lg 2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{\lg n} \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg n+\lg 2},$$

e, portanto

$$2^{\lg n/2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{\lg n} \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg 2n},$$

e, finalmente

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) Vamos provar que

i. se $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ então n é potência de 2, para todo $n > 0$.

ii. n é potência de 2, então $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1)) \rfloor$, para todo $n > 0$.

i. Vamos provar que se $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ então n é potência de 2.
Seja $n > 0$ tal que

$$\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor .$$

Como $\lfloor \lg n \rfloor$ e $\lfloor \lg(n-1) \rfloor$ são inteiros, então

$$\lfloor \lg n \rfloor \geq 1 + \lfloor \lg(n-1) \rfloor ,$$

e daí, (Teorema 9)

$$\lfloor \lg n \rfloor \geq \lfloor 1 + \lg(n-1) \rfloor = \lfloor \lg 2(n-1) \rfloor ,$$

e como 2^x é uma função crescente,

$$2^{\lfloor \lg n \rfloor} \geq 2^{\lfloor \lg 2(n-1) \rfloor}.$$

Do Exercício 18a temos que

$$\begin{aligned} 2^{\lfloor \lg n \rfloor} &\leq n, \\ 2^{\lfloor \lg 2(n-1) \rfloor} &> \frac{2(n-1)}{2} = n-1, \end{aligned}$$

ou seja

$$n-1 < 2^{\lfloor \lg 2(n-1) \rfloor} \leq 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n.$$

Como $2^{\lfloor \lg n \rfloor}$ é inteiro, concluímos que

$$n = 2^{\lfloor \lg n \rfloor},$$

ou seja,

$$2^{\lg n} = 2^{\lfloor \lg n \rfloor},$$

e portanto,

$$\lg n = \lfloor \lg n \rfloor,$$

e portanto, $\lg n$ é inteiro, isto é, n é potência de 2.

ii. Suponha que n seja uma potência de 2.
É imediato que existe um $a \in \mathbb{N}$ de modo que $n = 2^a$ e, assim,

$$\lfloor \lg n \rfloor = \lg n = \lceil \lg n \rceil,$$

pois $a = \lg n$.
Entretanto, como lg é função crescente, então $\lg(n-1) < \lg n$ e, também,

$$\lg \frac{n}{2} < \lg(n-1) < \lg n.$$

Como a potenciação é uma função crescente quando a base $1 < b = 2$ dessa potenciação é maior que o elemento neutro da multiplicação, então

$$2^{\left\lfloor \lg \frac{n}{2} \right\rfloor} = 2^{\lg \frac{n}{2}} < 2^{\lg(n-1)} < 2^{\lg n} = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$$

e, consequentemente,

$$\lfloor \lg n \rfloor - 1 < \lg(n-1) < \lfloor \lg n \rfloor.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\lfloor \lg(n-1) \rfloor &= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq \lg(n-1)\} \\
&= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < \lg(n-1)\} \\
&= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid \lfloor \lg n \rfloor - 1 \leq k < \lg(n-1) < \lfloor \lg n \rfloor\} \\
&= \lfloor \lg n \rfloor - 1
\end{aligned}$$

e, logo,

$$\lfloor \lg(n-1) \rfloor < \lfloor \lg n \rfloor.$$

Portanto, se n é potência de 2, então

$$\lfloor \lg(n-1) \rfloor < \lfloor \lg n \rfloor.$$

Portanto, n é potência de 2 se, e somente se, $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$.

(c) Vamos provar que

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2}$$

provando as duas implicações da equivalência.

i. Vamos provar que

$$n \text{ é potência de 2} \implies \lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil .$$

Suponha que $n = 2^k$ para algum k natural.
O primeiro termo da equação que queremos provar,

$$\lceil \lg n \rceil = \left\lceil \lg 2^k \right\rceil = \lceil k \lg 2 \rceil = \lceil k \rceil = k,$$

é menor que o segundo termo da mesma equação,

$$0 < 1 < 2^k \Rightarrow \left\lceil \lg(2^k + 1) \right\rceil = \left\lceil \lg 2^k + 1 \right\rceil = 1 + \left\lceil \lg 2^k \right\rceil = 1 + k$$

e, logo,

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \implies n \text{ é potência de 2.}$$

ii. Vamos provar que

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \implies n \text{ é potência de 2.}$$

Da trivial relação

$$0 < \lg(n+1) - \lg n \leq 1$$

segue, também trivialmente, que

$$\lg n < \lg(n+1) < \lg n + 1.$$

De

$$\lg n \in \mathbb{N} \text{ se e somente se } n = 2^k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}$$

e da relação $\lg n < \lg(n+1)$ só pode ser que

$$\lceil \lg n \rceil < \lg(n+1) \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

Portanto,

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(d) completar

Seja n um inteiro positivo.
Como (Ex.18a)

$$n/2 \leq 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} \leq 2n.$$

Dividindo cada membro da desigualdade por n fica

$$1/2 \leq 2^{\lfloor \lg n \rfloor}/n \leq 1 \leq 2^{\lceil \lg n \rceil}/n \leq 2.$$

Invertendo as frações fica

$$2 \geq n/2^{\lfloor \lg n \rfloor} \geq 1 \geq n/2^{\lceil \lg n \rceil} \geq 1/2.$$

(e) reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que $f^{\lfloor \lg k \rfloor}(k) = 1, \text{ para todo } k \leq n$. Isto é,

$$\begin{aligned} f^{\lfloor \lg n \rfloor}(n) &= 1 \\ f^{\lfloor \lg (n-1) \rfloor}(n-1) &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim,

$$f^{\lfloor \lg (n+1) \rfloor}(n+1) = f\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2^{\lfloor \lg (n+1) \rfloor}} \right\rfloor\right) = 1$$

se e somente se

$$1 \leq \frac{n+1}{2^{\lfloor \lg (n+1) \rfloor}} < 2;$$

isto é,

$$\begin{aligned} 2^{\lg (n+1) - \lfloor \lg (n+1) \rfloor} &\geq 1 \\ &\text{e} \\ 2^{\lg (n+1) - \lfloor \lg (n+1) \rfloor} &< 2. \end{aligned}$$

Como $\lfloor x \rfloor \leq x, \text{ para todo } x$ real, então

$$\lg(n+1) \leq \lfloor \lg(n+1) \rfloor$$

e, consequentemente,

$$\lg(n+1) - \lfloor \lg(n+1) \rfloor \leq 0$$

e, com isso, temos

$$2^{\lg(n+1)-\lfloor \lg(n+1)\rfloor} \geq 2^0$$

e, logo,

$$\frac{n+1}{2^{\lfloor \lg(n+1)\rfloor}} \geq 1.$$

Como $x < \lfloor x \rfloor + 1$, para todo x real, então

$$\lg(n+1) < 1 + \lfloor \lg(n+1) \rfloor$$

e, consequentemente,

$$2^{\lg(n+1)-\lfloor \lg(n+1)\rfloor} < 2^1$$

e, logo,

$$\frac{n+1}{2^{\lfloor \lg(n+1)\rfloor}} < 2.$$

Além disso,

$$f^{\lfloor \lg(n-u)\rfloor}(n-u) = 1,$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 1\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n-1\} \\ &= n-1. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que

$$f^{\lfloor \lg 1\rfloor}(1) = 1$$

e

$$f^{\lfloor \lg(n+1)\rfloor}(n+1) = 1 \text{ se } f^{\lfloor \lg n\rfloor}(n) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $f^{\lfloor \lg n\rfloor}(n) = 1$, para todo $n \geq 1$.

(f) fazer ($\Leftarrow$) por indução, como na resposta do Exercício 36

Temos que, para todo n natural, $f^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$.
Assim, $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = 0$ se e somente se $2^k > n$, que é equivalente a

$$k > \lg n;$$

ou, equivalentemente, $k \geq \lfloor \lg n \rfloor + 1$; ou, ainda, $k > \lfloor \lg n \rfloor$, já que $k \in \mathbb{N}$.
Portanto, $f^k(n) = 0$ se e somente se $k > \lfloor \lg n \rfloor$.

(g) Seja n um inteiro positivo.

Vamos provar que

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$$

nos casos de: (i) n uma potência de 2; (ii) n não ser uma potência de 2.

i. Suponha que n seja uma potência de 2 inteira. Então, é claro que existe um a satisfazendo $n = 2^a$ e, imediatamente, temos que

$$\lfloor \lg n \rfloor = \lg n = \lceil \lg n \rceil .$$

Por um lado, se $n = 1$, então $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$.

Por outro lado, se $n > 1$, então $\lg(n+1)$ não é inteiro e, consequentemente,

$$\lfloor \lg n \rfloor < \lg(n+1) < \lg 2n = \lfloor \lg 2n \rfloor = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Como $\lfloor \lg 2n \rfloor - \lg n = 1$, então só pode ser que

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lg 2n = \lfloor \lg 2n \rfloor = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Logo, $\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg(n+1) \rceil$, sempre que n é uma potência de 2.

ii. Suponha que n não seja uma potência de 2. Então, $\lg n \notin \mathbb{Z}$ e, consequentemente,

$$\lfloor \lg n \rfloor < \lg n < \lceil \lg n \rceil .$$

Repare também que $\lceil \lg n \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$. Para que $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$ resta mostrar que

$$\lceil \lg n \rceil = \lceil \lg(n+1) \rceil ,$$

quando: (A) $n+1$ é potência de 2; e, (B) $n+1$ não é potência de 2.

A. Se $n+1$ é potência de 2, tendo em vista que n não é potência de 2, então

$$\lfloor \lg n \rfloor < \lg n < \lceil \lg n \rceil$$

e

$$\lfloor \lg(n+1) \rfloor = \lg(n+1) = \lceil \lg(n+1) \rceil .$$

Como $\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg n \rceil$ e, além do mais, $\lfloor \lg n \rfloor = \lg(n+1) - 1$, então temos que $\lceil \lg n \rceil = \lg(n+1)$ e, consequentemente, $\lceil \lg n \rceil = \lceil \lg(n+1) \rceil$.

B. Se $n+1$ não é potência de 2, então

$$\lg(n+1) < \lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg n \rceil$$

e, como

$$\lfloor \lg n \rfloor < \lg(n+1) < \lceil \lg n \rceil,$$

então

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lceil \lg n \rceil.$$

Portanto, se n não é potência de 2, então

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Portanto, $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$

19. [default,ex:teo:chao-teto]

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil.$$

Se x é inteiro, então

$$\lceil x \rceil = x,$$

e portanto,

$$f(\lceil x \rceil) = f(x).$$

e

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil.$$

Se x não é inteiro, então

$$x < \lceil x \rceil,$$

e como f é crescente, então

$$f(x) < f(\lceil x \rceil).$$

Além disso, não pode haver nenhum inteiro z tal que

$$f(x) < z < f(\lceil x \rceil),$$

pois como f é contínua, teríamos $z = f(a)$ para algum a tal que

$$x < a < \lceil x \rceil,$$

e como $f(a)$ é inteiro e f é integralizada, então a seria um inteiro entre x e $\lceil x \rceil$, o que não é possível.

Como x não é inteiro e f é integralizada, então $f(x)$ não pode ser inteiro e então

$$f(x) < \lceil f(x) \rceil,$$

Como $\lceil f(x) \rceil$ é inteiro, então

$$f(x) < f(\lceil x \rceil) \leq \lceil f(x) \rceil,$$

e portanto,

$$f(x) < f(\lceil x \rceil) \leq \lceil f(x) \rceil \leq \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$$

Finalmente, como $\lceil f(x) \rceil$ é um inteiro entre $f(\lceil x \rceil)$ e $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, temos necessariamente

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil.$$

20. [default,ex:cor:chao-teto]

    Seja k um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

    $$f(x) = \frac{x}{k}.$$

    Prove que

    (a) f uma função contínua.

    (b) f uma função crescente.

    (c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

    Resposta:

(a) Vamos provar que f é contínua em todo seu domínio.
Sejam $x, p \in \mathbb{R}$.
Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p} \frac{x}{k} &= \left(\lim_{x\to p} \frac{1}{k}\right)\left(\lim_{x\to p} x\right)\\ &= \frac{1}{k}p\\ &= \frac{p}{k}\end{aligned}$$

e, logo, f é contínua em p.
Logo, f é contínua em p, para todo $p \in \mathbb{R}$ e, portanto, f é contínua.

(b) Vamos provar que f é crescente em todo seu domínio.
Temos que f é crescente se e somente se

$$x < y \implies f(x) < f(y), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Como f é diferenciável, então, f é crescente se e somente se

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

e

$$\frac{1}{k} > 0,$$

então, só pode ser que f seja crescente em todo seu domínio.
Portanto, f é uma função crescente.

(c) Vamos provar que $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Seja $x \in \mathbb{R}$.
Temos que se

$$\frac{x}{k} \in \mathbb{Z},$$

então,

$$x = zk, \text{ para algum } z \in \mathbb{Z},$$

porque, do contrário, $\frac{x}{k}$ não pode ser inteiro.

Como $k, z \in \mathbb{Z}$, então, $kz \in \mathbb{Z}$ e, consequentemente, $x \in \mathbb{Z}$, já que $x = zk$.

Portanto,

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

21. [default,ex:teo:composicao-crescente]

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções crescentes. Prove que $f \circ g: A \to C$ é uma função crescente.

Resposta:

Demonstração. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções crescentes. Vamos provar que $f \circ g: A \to C$ é crescente, isto é, que

$$x < y \implies f \circ g(x) < f \circ g(y), \text{ para todo } x, y \in A.$$

Sejam $x, y \in A$ tais que $x < y$. Vamos provar que

$$f \circ g(x) < f \circ g(y).$$

Como f é crescente e $x < y$, então

$$f(x) < f(y).$$

Como g é crescente e $f(x) < f(y)$, então

$$g(f(x)) < g(f(y)),$$

ou seja,

$$f \circ g(x) < f \circ g(y).$$

$\square$

22. [default,ex:teo:fx-in-bz]

Dizemos que uma função $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,$$

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Prove que se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções integralizadas, então $f \circ g: A \to C$ é uma função integralizada.

Resposta:

Demonstração. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções integralizadas. Vamos provar que $f \circ g\colon A \to C$ é integralizada.

Seja $x \in A$ tal que $f \circ g(x) \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que $x \in \mathbb{Z}$.

Como $f \circ g(x) = g(f(x))$ e g é integralizada, concluímos que $f(x) \in \mathbb{Z}$.

Como $f(x) \in \mathbb{Z}$ e f é integralizada, concluímos que $x \in \mathbb{Z}$. $\square$

A.4 Aproximação Assintótica

23. [default,ex:approx-equiv]

    Prove que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

    Resposta:

    Sejam $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} f(n) &\approx g(n), \\ g(n) &\approx h(n). \end{aligned}$$

$\approx$ é reflexiva: $f(n) \approx f(n)$ pois

$$\lim \frac{f(n)}{f(n)} = 1.$$

$\approx$ é simétrica: como $f(n) \approx g(n)$, então

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

e daí

$$\lim \frac{g(n)}{f(n)} = 1,$$

e, portanto, $g(n) \approx f(n)$.

$\approx$ é transitiva: como $f(n) \approx g(n)$, então

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Como $g(n) \approx h(n)$, então (Ex. 30)

$$g(n) = h(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

para alguma $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Então,

$$h(n) = \frac{g(n)}{1 + \varepsilon(n)}$$

e

$$\frac{f(n)}{h(n)} = \frac{f(n)}{\frac{g(n)}{1+\varepsilon(n)}} = \frac{f(n)}{g(n)}(1 + \varepsilon(n))$$

e daí

$$\lim \frac{f(n)}{h(n)} = \lim \frac{f(n)}{g(n)}(1+\varepsilon(n)) = \lim \frac{f(n)}{g(n)} \lim(1+\varepsilon(n)) = 1\times 1 = 1,$$

e portanto, $f(n) \approx h(n)$

24. [default,ex:chao-approx]
É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.
Resposta:

completar

Não é verdade porque $\frac{\lfloor f(n) \rfloor}{f(n)}$ pode nem ter limite.
Por exemplo, considere

$$f(n) = \begin{cases} n + \frac{9}{10}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ n, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Neste caso

$$\frac{\lfloor f(n) \rfloor}{f(n)} = \begin{cases} \frac{10}{9(1+10/9n)}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

25. [default,ex:chao-approx-soma]
É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(n) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(n)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.
Resposta:

completetar

Não é verdade.

Por exemplo para $f(n) = 1/2$ temos $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(n) \rfloor = 0$ e $\sum_{i=1}^{n} f(n) = n/2$.

26. [default,ex:soma-chao-log]

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \tag{A.1}$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação. [1].

(a) Prove que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = \lfloor \lg k \rfloor \text{ para todo } i \in [2^{\lfloor \lg k \rfloor}..2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1} - 1].$$

(b) Use esta observação para agrupar convenientemente os termos em (A.1).

(c) Prove que[2]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor + 1\right).$$

(d) Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

(e) Prove que[3]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lg n.$$

(f) Prove que

$$\lg n! \approx n \lg n.$$

(g) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

[1] Veja o Exercício 45 para um exemplo.

[2] **Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 18 e 51.

[3] **Sugestão:** use o resultado do Exercício 18

Resposta:

conferir

(a) Vamos provar que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = \lfloor \lg k \rfloor \text{ para todo } i \in [2^{\lfloor \lg k \rfloor}..2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1} - 1],$$

considerando os seguintes casos

i é potência de 2, isto é,

$$i = 2^{\lg i},$$

Como $2^{\lfloor \lg k \rfloor}$ é a única potência de 2 no intervalo $[2^{\lfloor \lg k \rfloor}..2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1} - 1]$, então, também,

$$i = 2^{\lfloor \lg k \rfloor},$$

e daí, como a função 2^x é injetora,

$$2^{\lg i} = 2^{\lfloor \lg k \rfloor},$$

e, portanto,

$$\lg i = \lfloor \lg k \rfloor.$$

i não é potência de 2: neste caso

$$2^{\lfloor \lg k \rfloor} < i < 2^{\lfloor \lg ki \rfloor + 1},$$

e, portanto

$$\lg 2^{\lfloor \lg k \rfloor} < \lg i < \lg 2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1},$$

e portanto,

$$\lfloor \lg k \rfloor < \lg i < \lfloor \lg k \rfloor + 1,$$

isto é, $\lg i$ não é inteiro e daí,

$$\lfloor \lg i \rfloor = \lfloor \lg k \rfloor.$$

(b) Seja $n > 0$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor =$$

$$\begin{gathered}
\lfloor \lg 1 \rfloor \\
+ \\
\lfloor \lg 2 \rfloor + \lfloor \lg 3 \rfloor \\
+ \\
\lfloor \lg 4 \rfloor + \lfloor \lg 5 \rfloor + \lfloor \lg 6 \rfloor + \lfloor \lg 7 \rfloor \\
+ \\
\lfloor \lg 8 \rfloor + \ldots + \lfloor \lg 15 \rfloor \\
+ \\
\lfloor \lg 16 \rfloor + \ldots + \lfloor \lg 31 \rfloor \\
+ \\
\vdots \\
+ \\
\left\lfloor \lg 2^{j} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \lg 2^{j+1} - 1 \right\rfloor \\
+ \\
\vdots \\
\left\lfloor \lg 2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \lg 2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1 + 1} - 1 \right\rfloor \\
\left\lfloor \lg 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \right\rfloor + \ldots + \lfloor \lg n \rfloor \\
= \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \sum_{i=2^{j}}^{2^{j+1}-1} \lfloor \lg i \rfloor + \sum_{i=2^{\lfloor \lg n \rfloor}}^{n} \lfloor \lg n \rfloor
\end{gathered}$$

(c) Seja $n > 0$. Então (do Exercício 26b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor &= \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} \lfloor \lg i \rfloor + \sum_{i=2^{\lfloor \lg n \rfloor}}^{n} \lfloor \lg n \rfloor \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} (2^{j+1} - 1 - 2^j + 1)j + (n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1) \lfloor \lg n \rfloor \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} j2^j + (n + 1 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \lfloor \lg n \rfloor
\end{aligned}$$

Da sugestão (Ex. 51) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} j2^j &= ((\lfloor \lg n \rfloor - 1) - 1)2^{(\lfloor \lg n \rfloor - 1)+1} + 2 \\
&= (\lfloor \lg n \rfloor - 2)2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 2 \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 2, \qquad = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}(\lfloor \lg n \rfloor - 2) + 2
\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor &= \sum_{j=1}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} j2^j + (n + 1 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \lfloor \lg n \rfloor \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor}(\lfloor \lg n \rfloor - 2) + 2 + (n + 1 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \lfloor \lg n \rfloor \\
&= (n + 1 + 2^{\lfloor \lg n \rfloor} - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 2 \\
&= (n + 1) \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 2 \\
&= n \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + \lfloor \lg n \rfloor + 2.
\end{aligned}$$

Acertado. É a melhor forma de exibição?

(d) Tome

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \le \sum_{i=1}^{n} \lg i < \sum_{i=1}^{n} (\lfloor \lg i \rfloor + 1),$$

e, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \le \sum_{i=1}^{n} \lg i < \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor + n.$$

Como
$$\sum_{i=1}^{n} \lg i < \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor + n,$$
e (resultado do Ex. 26c)
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lfloor \lg n \rfloor$$
tem-se que
$$\begin{aligned}
\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor + n}{\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor} &= \lim \left(1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor}\right) \\
&= \lim \left(1 + \frac{n}{n \lfloor \lg n \rfloor}\right) \\
&= \lim \left(1 + \frac{1}{\lfloor \lg n \rfloor}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$
Portanto
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

conferir (dm)

(e) Aguardar correção em Ex 26c.

(f) completar

(g) completar

27. [default,ex:approx]

    Prove que

    (a) $\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$,

    (b) $\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$,

    (c) $\log_b n! \approx n \log_b n$, para todo $b > 1$.

(d) $\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n$, para todo $b > 1$.

Resposta:

(a)
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$
e
$$\lim -\frac{1}{n} = 0.$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
e
$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

(c) completar

É possível fazer

i. partindo da aproximação de Stirling e aplicando log em ambos os lados, ou

ii. observando que
$$\log n! = \log\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \log i\right),$$
e daí usar o Ex. 26f

(d) completar

Basta observar que
$$\log n! = \log\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \log i\right),$$
e usar a resposta do item anterior.

28. [default,ex:fib-approx]

Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Resposta:

Observe que

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < \left|\frac{1-2}{2}\right| < 1,$$

e

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+2}{2} > 1,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \lim\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n &= 0, \text{ e} \\ \lim\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n &= \infty. \end{aligned}$$

Então,

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right)$$

29. [default,ex:soma-fib-approx]

Prove que

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Resposta:

completar

30. [default,ex:teo:approx=lim-1]

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Resposta:

Temos que $f(n) \approx g(n)$ se

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Tome

$$\varepsilon(n) = \frac{f(n)}{g(n)} - 1.$$

e como consequência

$$\lim \varepsilon(n) = \lim \left(\frac{f(n)}{g(n)} - 1 \right) = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\lim \frac{f(n)}{g(n)} &= \lim \frac{g(n)(1 + \varepsilon(n))}{g(n)} \\
&= \lim\,(1 + \varepsilon(n)) \\
&= \lim \left(1 + \frac{f(n)}{g(n)} - 1) \right) \\
&= \lim 1 + \lim \left(\frac{f(n)}{g(n)} - 1 \right) \\
&= 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(n) \approx g(n).$$

conferir (dm) - não estou seguro da prova, :(

31. [default,ex:approx-sanduiche]

Sejam $F, f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

Resposta:

Como

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

e $F(n) \approx f(n)$ e $F(n) \approx h(n)$,

$$F \approx g, \text{ se } f \approx g \approx h.$$

E portanto,

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = \lim \frac{g(n)}{h(n)} = 1,$$

pois

$$\lim \frac{F(n)}{f(n)} = \lim \frac{h(n)}{F(n)} = 1.$$

Portanto,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

conferir (dm)

32. [default,ex:polinomio-assintotico]

Seja $P\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k$$

um polinômio de grau k (e, portanto, $a_k \neq 0$).

Prove que $P(n) \approx a_k n^k$

Resposta:

Vamos provar que $P(n) \approx a_k n^k$.

Se $P(n) \approx a_k n^k$, então
$$\lim \frac{P(n)}{a_k n^k} = 1.$$

De fato

$$\begin{aligned}
\lim \frac{P(n)}{a_k n^k} &= \lim \frac{a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k}{a_k n^k} \\
&= \lim \frac{n^k (a_0/n^k + a_1/n^{k-1} + a_2/n^{k-2} + \ldots + a_{k-1}/n^1 + a_k/n^0)}{a_k n^k} \\
&= \lim \frac{a_k n^k (\frac{a_0}{a_k n^k} + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \frac{a_2}{a_k n^{k-2}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \frac{a_k}{a_k})}{a_k n^k} \\
&= \lim \left(\frac{a_0/a_k}{n^k} + \frac{a_1/a_k}{n^{k-1}} + \frac{a_2/a_k}{n^{k-2}} + \ldots + \frac{a_{k-1}/a_k}{n} + 1 \right) \\
&= \lim \left(1 + \frac{a_{k-1}/a_k}{n} + \ldots + \frac{a_2/a_k}{n^{k-2}} + \frac{a_1/a_k}{n^{k-1}} + \frac{a_0/a_k}{n^k} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

pois
$$\lim \left(\frac{a_{k-1}/a_k}{n} + \ldots + \frac{a_2/a_k}{n^{k-2}} + \frac{a_1/a_k}{n^{k-1}} + \frac{a_0/a_k}{n^k} \right) = 0.$$

Portanto
$$P(n) \approx a_k n^k.$$

conferir (dm)

33. [default,ex:soma-pg-assintotica]
Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

(b) se $c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$.

Resposta:

(a) Vamos provar que se $c > 1$, então $s(n) \approx c^{n+1}/(c-1)$.
Temos

$$\begin{aligned}
s(0) &= c^0 = 1,\\
s(1) &= c^0 + c^1,\\
s(2) &= c^0 + c^1 + c^2,\\
&\dots\\
s(n) &= c^0 + c^1 + \ldots + c^{n-1} + c^n.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $c-1$, temos

$$\begin{aligned}
s(n)(c-1) &= (c-1)(c^0 + c^1 + \ldots + c^{n-1} + c^n)\\
&= c^1 + c^2 + \ldots + c^n + c^{n+1} - c^0 - c^1 + \ldots - c^{n-1} - c^n\\
&= c^{n+1} - c^0
\end{aligned}$$

E portanto,

$$s(n) = \frac{c^{n+1} - c^0}{c-1}.$$

Então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$, se

$$\lim \frac{s(n)}{\frac{c^{n+1}}{c-1}} = 1.$$

E,

$$\begin{aligned}
\lim \frac{s(n)}{\frac{c^{n+1}}{c-1}} &= \lim \frac{(c^{n+1} - c^0)/(c-1)}{c^{n+1}/(c-1)} = \lim \frac{(c^{n+1} - c^0)}{c^{n+1}}\\
&= \lim \left(1 - \frac{1}{c^{n+1}}\right) = 1
\end{aligned}$$

Portanto, se $c > 1$,

$$s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}.$$

conferir (dm)

(b) Vamos provar que se $c < 1$, então $s(n) \approx 1/(c-1)$.
Se $c < 1$, podemos escrever $c = 1/b = b^{-1}$, com $b > 1$ e

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i = \sum_{i=0}^{n} (1/b)^i.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
s(0) &= 1/b^0 = 1,\\
s(1) &= 1/b^0 + 1/b^1 = \frac{b+1}{b},\\
s(2) &= 1/b^0 + 1/b^1 + 1/b^2 = \frac{b^2+b+1}{b^2},\\
&\dots\\
s(n) &= 1/b^0 + 1/b^1 + \ldots + 1/b^{n-1} + 1/b^n.\\
&= \frac{b^n + b^{n-1} + \ldots + b^2 + b^1 + b^0}{b^n}.
\end{aligned}
$$

Usando resultado parcial do item anterior (Ex. 33a)

$$
\begin{aligned}
s(n) &= (b^n + b^{n-1} + \ldots + b^2 + b^1 + b^0)\frac{1}{b^n} = \left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)\frac{1}{b^n} =\\
&= \left(\frac{c^{-(n+1)}-1}{c^{-1}-1}\right)\frac{1}{c^{-n}} = \frac{c^{-(n+1)}-1}{c^{-(n+1)}-c^{-n}}\\
&= \frac{(1-c^{n+1})/c^{n+1}}{(1-c))/c^{n+1}} = \frac{(1-c^{n+1})}{1-c}
\end{aligned}
$$

E portanto, se $c < 1$

$$s(n) = \frac{(1-c^{n+1})}{1-c}.$$

Então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$, se

$$\lim \frac{s(n)}{\frac{1}{1-c}} = 1.$$

E,

$$\lim \frac{s(n)}{\frac{1}{1-c}} = \lim \frac{(1-c^{n+1})/(1-c)}{1/(1-c)} = \lim\,(1-c^{n+1}) = 1$$

pois $\lim c^{n+1} = 0$ com $c < 1$.
Portanto, se $c < 1$,

$$s(n) \approx \frac{1}{1-c}.$$

Conferir (dm)

34. [default,ex:approx-binomial]

Prove que
$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n/2.$$

Resposta:

Vamos provar que
$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n/2.$$

Como $0 \leq k \leq n/2$, temos
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1).(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n.n(1-1/n).n(1-2/n).\ldots.n(1-(k-1)/n)}{k!} \\ &= \frac{n^k.(1-1/n).(1-2/n).\ldots.(1-(k-1)/n)}{k!}.\end{aligned}$$

E como
$$\lim\,(1-1/n).(1-2/n).\ldots.(1-(k-1)/n) = 0,$$

portanto,
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n^k.(1-1/n).(1-2/n).\ldots.(1-(k-1)/n)}{k!} \\ &= \frac{n^k}{k!}.\end{aligned}$$

Portanto
$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n/2.$$

Conferir (dm)

A.5 Indução

35. [default,ex:distributiva-intersecao]

Prove por indução em n que se $A_1, \dots, A_n$ e B são conjuntos, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

Resposta: Vamos provar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap B), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{a+1} (A_i \cap B).$$

Temos que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right) \cap B = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}\right) \cap B,$$

e como $a \in [0..a]$, então pela HI temos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{a} (A_i \cap B),$$

e portanto,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right) \cap B = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}\right) \cap B$$

e como $2 \in [0..a]$, novamente, pela HI temos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right) \cap B = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cap B\right) \cup (A_{a+1} \cap B)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{a} (A_i \cap B) \cup (A_{i+1} \cap B)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{a+1} (A_i \cap B).$$

Base: Vamos provar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{b} (A_i \cap B), \text{ para todo } b \in \{0, 1, 2\}.$$

$b = 0$**:** basta verificar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{0} A_i\right) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{0} (A_i \cap B) = \emptyset.$$

$b = 1$**:** basta verificar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right) \cap B = A_1 \cap B.$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{1} (A_i \cap B) = A_1 \cap B.$$

$b = 2$**:** como

$$\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B,$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{2} (A_i \cap B) = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B),$$

temos que povar que

$$(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B),$$

ou seja, que

$$(A_1 \cup A_2) \cap B \subseteq (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B),$$

e

$$(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \subseteq (A_1 \cup A_2) \cap B.$$

Vamos provar que $(A_1 \cup A_2) \cap B \subseteq (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$**:**
Temos que provar que

$$x \in (A_1 \cup A_2) \cap B \implies x \in (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B),$$
$$\text{para todo } x \in (A_1 \cup A_2) \cap B.$$

Seja $x \in (A_1 \cup A_2) \cap B$. Então, $x \in A_1$ ou $x \in A_2$. Sem perda de generalidade podemos assumir $x \in A_1$.
Além disso, se $x \in (A_1 \cup A_2) \cap B$, então $x \in B$ e, daí, $x \in (A_1 \cap B)$ e, consequentemente, $x \in (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$.

Vamos provar que $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \subseteq (A_1 \cup A_2) \cap B$**:**
Temos que provar que

$$x \in (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \implies x \in (A_1 \cup A_2) \cap B,$$
$$\text{para todo } x \in (A_1 \cup A_2) \cap B.$$

Seja $x \in (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$. Então, $x \in A_1 \cap B$ ou $x \in A_2 \cap B$. Sem perda de generalidade podemos assumir $x \in A_1 \cap B$ e, consequentemente, $x \in A_1$ e $x \in B$. Daí, temos que $x \in A_1 \cup A_2$ e, consequentemente, $x \in (A_1 \cup A_2) \cap B$.

36. [default,ex:soma:potencias]

Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Resposta: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \notin \{0, 1\}$.

Seja $c \notin \{0, 1\}$. Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1}, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \frac{c^{(a+1)+1} - 1}{c - 1}.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) + c^{a+1},$$

e $a \in [0..a]$, então pela HI temos

$$\left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) = \frac{c^{a+1} - 1}{c - 1},$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} c^i i &= \left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) + c^{a+1} \\
&= \frac{c^{a+1} - 1}{c - 1} + c^{a+1} = \frac{c^{a+1} - 1 + c^{a+1}(c - 1)}{c - 1} \\
&= \frac{c^{a+1}(1 + c - 1) - 1}{c - 1} = \frac{c^{a+1}(c) - 1}{c - 1} = \frac{c^{a+2} - 1}{c - 1} \\
&= \frac{c^{(a+1)+1} - 1}{c - 1}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = \frac{c^{0+1} - 1}{c - 1}.$$

Basta verificar que, como $c \neq 0$,

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = c^0 = 1,$$

e como $c \neq 1$,

$$\frac{c^{0+1} - 1}{c - 1} = \frac{c - 1}{c - 1} = 1.$$

37. [default,ex:2an¡n-fatorial]

Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $a \geq 4$ tal que

$$2^k < k!, \text{ para todo } 0 \leq k \leq a.$$

Passo da Indução: Vamos provar que $2^{a+1} < (a+1)!$.

Temos que

$$2^{a+1} = 2 \times 2^a.$$

Da Hipótese de Indução temos que

$$2^a < a!,$$

e portanto,

$$2^{a+1} = 2 \times 2^a < 2 \times a!.$$

Por outro lado,

$$(a+1)! = (a+1) \times a!$$

e como $a \geq 4$ temos que

$$(a+1)! \geq (4+1) \times a! = 5 \times a!,$$

ou seja,

$$2^{a+1} < 2 \times a! < 5 \times a! < (a+1)!$$

Portanto,

$$2^{a+1} < (a+1)!.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$2^4 < 4!.$$

Por um lado,

$$2^4 = 16.$$

Por outro lado,

$$4! = 24,$$

Portanto,

$$2^4 < 4!.$$

38. [default,ex:fibonacci:inducao]
A *sequência de Fibonacci* é a função $F \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

(b) Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Resposta:

(a) Vamos provar que o n-ésimo número da sequência de Fibonacci é

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

por indução em n, isto é, vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(k) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \text{ para todo } k \in [0..n],$$

Passo: Vamos provar que

$$F(n+1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Pela definição de F temos que para todo $n \geq 1$,

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1).$$

Como $n \in [0..n]$, temos da HI que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right).$$

Como $n-1 \in [0..n]$, temos da HI que

$$F(n-1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Então

$$
\begin{aligned}
F(n+1) &= F(n) + F(n-1)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Base: Vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right), \text{ para todo } n \leq 1,$$

isto é, vamos provar que

$$
\begin{aligned}
F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}\right)\\
F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\right).
\end{aligned}
$$

Por um lado,

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 0,\\
F(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}(1-1)=\frac{\sqrt{5}}{5}(0)=0,$$

e

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)\\
&\qquad=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\\
&\qquad=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5}{5}\\
&\qquad=1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)\\
F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$F(n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\ \text{para todo } n>1,$$

(b) Como

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\overset{\text{Ex. 28}}{\approx}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

então

$$F(n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\approx\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

39. [default,ex:cedulas]

Prove por indução que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido somente com cédulas de 2 e 5 reais.

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Vamos provar que podemos obter qualquer valor inteiro de pelo menos 4 reais combinando cédulas de 2 e 5 reais.

Primeiramente, podemos obter 4 reais por meio de duas cédulas de 2 reais.

Agora, suponha que exista um $n \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $k \in [4..n]$, possamos obter k reais a partir de cédulas de 2 e de 5 reais.

Por um lado, se n é par e esse valor é obtido por meio de x notas de 2 e y notas de 5 —isto é, $n = 2x + 5y$—, então

$$n + 1 = 2(x - 2) + 5(y + 1).$$

(Em outras palavras, $n+1$ é obtido a partir de n trocando duas cédulas de 2 por uma nova cédula de 5 reais.)

Por outro lado, se n é ímpar e esse valor é obtido a partir de x cédulas de 2 e y cédulas de 5 —isto é, $n = 2x + 5y$—, então

$$n + 1 = 2(x + 3) + 5(y - 1).$$

(Noutras palavras, $n + 1$ é obtido a partir de n trocando uma cédula de 5 por três novas cédulas de 2 reais.)

Desse modo, podemos obter

$$\begin{aligned}
&n + 1 \text{ reais a partir de } n \text{ reais,}\\
&n + 2 \text{ reais a partir de } n + 1 \text{ reais,}\\
&n + 3 \text{ reais a partir de } n + 2 \text{ reais,}\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

começando em $n = 4$ e trocando cédulas de acordo com a paridade de n.

Portanto, podemos obter qualquer valor maior ou igual a 4 reais usando apenas cédulas de 2 e de 5 reais.

40. [default,ex:impar-divisivel-8]

Prove, por indução em n, que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Vamos provar que $n^2 - 1$ é divisível por 8, para todo n ímpar positivo, provando que $(2n+1)^2 - 1$ é divisível por 8, para todo n natural.

Inicialmente, suponha que n seja par. Como consequência temos que $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e, assim,

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 - 1 &= (2(2k)+1)^2 - 1\\ &= (4k+1)^2 - 1\\ &= 16k^2 + 8k + 1 - 1\\ &= 8(2k^2 + k),\end{aligned}$$

que é divisível por 8.

Agora, suponha que n seja ímpar. Então, $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e, assim,

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 - 1 &= (2(2k+1)+1)^2 - 1\\ &= (4k+3)^2 - 1\\ &= 16k^2 + 24k + 9 - 1\\ &= 8(2k^2 + 3k + 1),\end{aligned}$$

que também é divisível por 8.

Dessarte, 8 sempre divide $(2n+1)^2 - 1$, sempre que n seja natural.

Portanto, $n^2 - 1$ é divisível por 8, para todo n ímpar positivo.

41. [default,ex:fibonacci]

A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1\\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1.\end{cases}$$

Prove, por indução em n, que

(a) $\sum_{j=0}^{n}\big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(c) $\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(d) $F(n+1)F(n-1) - \big(F(n)\big)^2 = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a *sequência de Fibonacci*[4].

retirada porque ninguém achou uma solução "fácil": $F(n+1)F(n) - F(n-1)F(n-2) = F(2n-1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

podemos acrescentar $F_{3n} = F_{2n}F_{n+1} + F_{2n-1}F_n$?

por que estas foram retiradas?

(a) $\sum_{j=0}^{2n-1} F(j)F(j+1) = \big(F(n)\big)^2$

(b) $\sum_{j=0}^{2n} F(j)F(j+1) = \big(F(2n+1)\big) - 1$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

(a) Vamos provar que $\sum_{j=0}^{n}\big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1)$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $k \in [0..n]$,

$$\sum_{j=0}^{k}\big(F(j)\big)^2 = F(k)F(k+1).$$

Temos que

$$\sum_{j=0}^{n}\big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1)$$

é equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n}\big(F(j)\big)^2 + F(n+1)^2 = F(n)F(n+1) + F(n+1)^2,$$

que é equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n+1}\big(F(j)\big)^2 = F(n+1)(F(n+1) + F(n+1)),$$

[4] Veja o Exercício 38

que é equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n+1} \big(Freikrauss(j)\big)^2 = F(n+1)F(n+2),$$

que é equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n+1} \big(F(j)\big)^2 = F(n+1)F((n+1)+1).$$

Logo, se

$$\sum_{j=0}^{n} \big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1),$$

então

$$\sum_{j=0}^{n+1} \big(F(j)\big)^2 = F(n+1)F((n+1)+1).$$

Como

$$\sum_{j=0}^{0} \big(F(j)\big)^2 = F(0)F(0+1)$$

é equivalente a

$$0 = (0)(1),$$

e

$$\sum_{j=0}^{1} \big(F(j)\big)^2 = F(1)F(1+1)$$

é equivante a

$$1 = (1)(1)$$

são verdadeiros, temos que

$$\sum_{j=0}^{n} \big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Vamos provar que, para todo n natural,

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1.$$

Seja n um natural qualquer e suponha que, para todo $k \in [0..n]$,

$$\sum_{j=0}^{k} F(2j) = F(2k+1) - 1.$$

Temos que

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1$$

é equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) + F(2n+2) = F(2n+1) - 1 + F(2n+2),$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} F(2j) &= F(2n+1) + F(2n+2) - 1\\ &= F(2n+3) - 1\\ &= F(2(n+1)+1) - 1.\end{aligned}$$

Consequentemente, se

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1,$$

então

$$\sum_{j=0}^{n+1} F(2j) = F(2(n+1)+1) - 1.$$

Como

$$\sum_{j=0}^{0} F(2j) = F(2(0)+1) - 1,$$

então temos que

$$\sum_{j=0}^{0} F(2j) = F(2(0)+1) - 1$$
$$\sum_{j=0}^{1} F(2j) = F(2(1)+1) - 1$$
$$\sum_{j=0}^{2} F(2j) = F(2(2)+1) - 1$$
$$\sum_{j=0}^{3} F(2j) = F(2(3)+1) - 1$$
$$\vdots$$

isto é,

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Vamos provar que, para todo n natural,

$$\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n).$$

Seja n um natural qualquer e suponha que, para todo $k \in [0..n]$,

$$\sum_{j=0}^{k} F(2j) = F(2k+1) - 1.$$

Temos que

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1$$

é equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) + F(2n+2) = F(2n+1) - 1 + F(2n+2),$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} F(2j) &= F(2n+1) + F(2n+2) - 1 \\ &= F(2n+3) - 1 \\ &= F(2(n+1)+1) - 1.\end{aligned}$$

Consequentemente, se

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1,$$

então

$$\sum_{j=0}^{n+1} F(2j) = F(2(n+1)+1) - 1.$$

Como

$$\sum_{j=0}^{0} F(2j) = F(2(0)+1) - 1,$$

então temos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{0} F(2j) &= F(2(0)+1) - 1 \\ \sum_{j=0}^{1} F(2j) &= F(2(1)+1) - 1 \\ \sum_{j=0}^{2} F(2j) &= F(2(2)+1) - 1 \\ \sum_{j=0}^{3} F(2j) &= F(2(3)+1) - 1 \\ &\vdots\end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Vamos provar que, para todo n natural,

$$\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n).$$

Seja n um natural e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$\sum_{j=1}^{k} F(2j-1) = F(2k).$$

Então, podemos somar $F(2(n+1)-1)$ em ambos os termos da equação, mantendo assim seu valor verdade, como segue

$$F(2(n+1)-1) + \sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2(n+1)-1) + F(2n),$$

que é equivalente

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} F(2j-1) &= F(2n) + F(2(n+1)-1)\\ &= F(2n) + F(2n+1)\\ &= F(2n+2)\\ &= F(2(n+1)).\end{aligned}$$

Além do mais,

$$\sum_{j=1}^{n-u} F(2j-1) = F(2(n-u)),$$

onde

$$\begin{aligned}u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\}\\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}\\ &= n;\end{aligned}$$

isto é,

$$F(0) = \sum_{j=1}^{0} F(2j-1) \text{ se e somente se } 0 = 0.$$

Portanto, para todo n natural,

$$\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n).$$

(d) Vamos provar que, para todo n natural,

$$F(n+1)F(n-1) - (F(n))^2 = (-1)^n.$$

Seja n um natural qualquer e suponha que, para todo $k \in [0..n]$,

$$F(k+1)F(k-1) - (F(k))^2 = (-1)^k.$$

Temos como Hipótese de Indução:

$$F(n+1)F(n-1) - (F(n))^2 = (-1)^n$$

Queremos concluir, através do passo da indução

$$F((n+1)+1)F((n+1)-1) - (F(n+1))^2 = (-1)^{n+1},$$

(i) Temos que:

$$(F(n+1))^2 = (F(n))^2 + 2F(n)F(n-1) + (F(n-1))^2.$$

(ii) E temos da *HI* que

$$F((n-1)+1)F((n-1)-1) - (F(n-1))^2 = (-1)^{n-1},$$

é igual a

$$(F(n-1))^2 = F(n)F(n-2) - (-1)^{n-1}.$$

Substituindo (iii) em (ii), temos que

$$\begin{aligned}(F(n-1))^2 &= F(n)^2 - 2F(n)F(n-1) + F(n)F(n-2) - (-1)^{n-1} \\ &= F(n)(2F(n-1) + F(n-2)) + (-1)^n \\ &= F(n)(F(n-1)F(n-1) + F(n-2)) + (-1)^n.\end{aligned}$$

(iii) Então

$$(F(n+1))^2 = (F(n))^2 + F(n)F(n+1) + (-1)^n$$

Retomando o passo da indução,

$$F((n+1)+1)F((n+1)-1) - F(n+1)^2 = F(n+2)F(n) - F(n+1)^2$$

Então, substituindo $(F(n+1))^2$ por (iii)

$$F(n+2)F(n) - F(n+1)^2 = F(n+2)F(n) - (F(n))^2 - (F(n)F(n+1) + (-1)^n)$$

Ou seja, colocando $F(n)$ em evidência e subst. $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$

$$= F(n)(F(n+2) - F(n) - F(n+1)) + (-1)^{n+1}$$

Como $F(n+2) - F(n) - F(n+1) = 0$, então:

$$F(n)(F(n+2) - F(n) - F(n+1)) + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Além disso, como para $n = 0$

$$F(0+1)F(0-1) - (F(0))^2 = (-1)^0$$

temos

$$(1)(1) - (0)^2 = (1)$$

E para $n = 1$

$$F(1+1)F(1-1) - (F(1))^2 = (-1)^1$$

temos

$$(1)(0) - (1)^2 = (-1)$$

Concluímos que, para todo n natural,

$$F(n+1)F(n-1) - \big(F(n)\big)^2 = (-1)^n.$$

42. [default,ex:soma-binomial-inducao]

Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \textsf{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \textsf{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Vamos provar por indução que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$, para todo n natural.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 2^k.$$

Com isso, iremos concluir que essa igualdade também é válida para o domínio $[0..n+1]$ e não somente para o domínio $[0..n]$. Basta reparar que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} &= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i-1} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \right) + \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} + \binom{n}{-1} \right) \\
&= 2 \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&= 2(2^n) \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}$$

e, além disso, $\sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} = 2^0$.
Em outras palavras,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \text{ para } n = 0$$

e, para todo n natural,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} &= 2^{n+1} \text{ desde que } \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \\
\sum_{i=0}^{n+2} \binom{n+2}{i} &= 2^{n+2} \text{ desde que } \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} \\
\sum_{i=0}^{n+3} \binom{n+3}{i} &= 2^{n+3} \text{ desde que } \sum_{i=0}^{n+2} \binom{n+2}{i} = 2^{n+2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dessarte, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$, para todo n natural.

43. [default,ex:teo:l=log]

Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textsf{para todo } n > 0.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1,$$

para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = \lfloor \lg k \rfloor + 1, \ \textsf{para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Como

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela HI temos

$$l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1.$$

e portanto

$$\begin{aligned}
l(a+1) &= l\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right)+1\\
&= \left(\left\lfloor \lg\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right\rfloor+1\right)+1\\
&= \left\lfloor \lg\left(\frac{a+1}{2}\right)\right\rfloor+1+1 && \text{(Teorema 23)}\\
&= \left\lfloor \lg\left(\frac{a+1}{2}\right)\right\rfloor+\lg 2+1\\
&= \left\lfloor \lg\left(\frac{a+1}{2}\right)+\lg 2\right\rfloor+1\\
&= \left\lfloor \lg\left[\left(\frac{a+1}{2}\right).2\right]\right\rfloor+1\\
&= \lfloor \lg\,(a+1)\rfloor+1
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$l(1)=\lfloor \lg(1)\rfloor+1.$$

Basta verificar que, pela definição,

$$l(1)=1,$$

e que,

$$\lfloor \lg(1)\rfloor+1=0+1=1.$$

conferir (dm)

44. [default,ex:fibonacci-matricial]

Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \text{F(n+1)} & \text{F(n)}\\ \text{F(n)} & \text{F(n-1)}\end{pmatrix},\ \textsf{para todo } n\in\mathbb{N},$$

onde F é a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 41)[5].

[5]Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da sequência de Fibonacci.

Resposta:

Vamos provar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \text{F(n+1)} & \text{F(n)} \\ \text{F(n)} & \text{F(n-1)} \end{pmatrix}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \text{F(k+1)} & \text{F(k)} \\ \text{F(k)} & \text{F(k-1)} \end{pmatrix} \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} &= \begin{pmatrix} \text{F((a+1)+1)} & \text{F(a+1)} \\ \text{F(a+1)} & \text{F((a+1)-1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{F(a+2)} & \text{F(a+1)} \\ \text{F(a+1)} & \text{F(a)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $a \in [0..a]$, então pela HI temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} = \begin{pmatrix} \text{F(a+1)} & \text{F(a)} \\ \text{F(a)} & \text{F(a-1)} \end{pmatrix}.$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{F(a+1)} & \text{F(a)} \\ \text{F(a)} & \text{F(a-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{F(a+1)+F(a)} & \text{F(a+1)} \\ \text{F(a)+F(a-1)} & \text{F(a)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{F(a+2)} & \text{F(a+1)} \\ \text{F(a+1)} & \text{F(a)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \mathrm{F}(2) & \mathrm{F}(1) \\ \mathrm{F}(1) & \mathrm{F}(0) \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{F}(3) & \mathrm{F}(2) \\ \mathrm{F}(2) & \mathrm{F}(1) \end{pmatrix}$$

Basta verificar que

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e que,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{F}(2) & \mathrm{F}(1) \\ \mathrm{F}(1) & \mathrm{F}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e que,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{F}(3) & \mathrm{F}(2) \\ \mathrm{F}(2) & \mathrm{F}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

conferir (dm)

45. [default,ex:analise-insercao]

terminar a formulação

Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como "ordenação por inserção".

```
Ordena(v, a, b)
---
  Se a ≥ b
      Devolva v
  Ordena(v, a, b − 1)
  Insere(v, a, b)
  Devolva v
```

onde

```
Insere(v, a, b)
---------------
  p ← Busca(v[b], v, a, b − 1)
  i ← b
  Enquanto i ≥ p + 1
      Troca(v, i, i − 1)
      i ← i − 1
  Devolva v
```

e

```
Busca(x, v, a, b)
-----------------
  Se a > b
      Devolva a − 1

  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x < v[m]
      Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
  Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

(a) Fazendo $n = b - a + 1$, prove que o número de comparações na execução de Busca(x, v, a, b) é no máximo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ para todo $n \geq 1$.

(b) Use o resultado do Exercício 26 para estabelecer o número máximo de comparações na execução de Ordena(v, a, b) em função do valor de $n = b - a + 1$.

Resposta:

46. [default,ex:reservoir-sampling]

Considere o problema de sortear um elemento de uma lista de tamanho desconhecido, isto é, deseja-se um algoritmo que recebe como entrada uma lista l de $n \geq 1$ itens e devolve como resposta um destes itens escolhido aleatoriamente de maneira que cada item da entrada l tenha a mesma probabilidade $1/n$ de ser a resposta. A dificuldade é que o tamanho n da lista é desconhecido até que o último item seja lido e a lista não pode ser armazenada em memória.

Prove por indução em n que o seguinte algoritmo resolve este problema.

Escolhe(l)

$k \leftarrow 0$
Enquanto *a entrada l não acabou*
  $k \leftarrow k + 1$
  $p \leftarrow$ próximo item de l
  $r \leftarrow$ um número aleatório uniformemente escolhido em$[1..k]$
  Se $r = k$
    $e \leftarrow p$
Devolva e

Resposta:

cfr. Reservoir Sampling

> Indeed, let n be the (unknown) size of the list, and suppose $n = 1$. In this case there is only one element to choose from, and so the probability of picking it is 1. The case of $n = 2$ is similar, and more illustrative. Now suppose the algorithm works for n and suppose we increase the size of the list by 1 adding some new element y to the end of the list. For any given x among the first n elements, the probability we're holding x when we inspect y is $1/n$ by induction. Now we flip a coin which lands heads with probability $1/(n+1)$, and if it lands heads we take y and otherwise we keep x. The probability we get y is exactly $1/(n+1)$, as desired, and the probability we get x is $\frac{1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Since x was arbitrary, this means that after the last step of the algorithm each entry is held with probability $1/(n+1)$.

It's easy to see how one could increase the number of coins being flipped to provide a sampling algorithm to pick any finite number of elements (with replacement, although a variant without replacement is not so hard to construct using this method). Other variants, exist, such as distributed and weighted sampling.

Python's generators make this algorithm for reservoir sampling particularly nice. One can define a generator which abstractly represents a data stream (perhaps querying the entries from files distributed across many different disks), and this logic is hidden from the reservoir sampling algorithm. Indeed, this algorithm works for any iterable, although if we knew the size of the list we could sample much faster (by uniformly generating a random number and indexing the list appropriately). The start parameter given to the enumerate function makes the k variable start at 1.

47. [default,ex:teo:somatorio:constante]

Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Vamos provar que se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então,

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Sejam $c \in \mathbb{C}$ e X o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de n elementos.

Inicialmente, temos que

$$\sum_{x \in X_0} c = \sum_{x \in \emptyset} c = 0$$

e

$$c|X_0| = c|\emptyset| = 0.$$

Logo, $\sum_{x \in X_0} c = c|X_0|$.

Suponha que exista um n natural de modo que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$\sum_{x \in X_k} c = c|X_k|.$$

Então, temos que

$$\sum_{x \in X_n} c = c|X_n|$$

é equivalente a

$$c + \sum_{x \in X_n} c = c + c|X_n|$$

que é equivalente a

$$\sum_{x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}} c = c(|X_n| + 1)$$
$$= c(|X_n \cup \{x_{n+1}\}|)$$

que é equivalente a

$$\sum_{x \in X_{n+1}} c = c|X_{n+1}|$$

Assim, se $\sum_{x \in X_n} c = c|X_n|$, então

$$\sum_{x \in X_{n+1}} c = c|X_{n+1}|.$$

Como $\sum_{x \in X_0} c = c|X_0|$, então

$$\begin{gathered}
\sum_{x \in X_0} c = c|X_0| \\
\sum_{x \in X_1} c = c|X_1| \\
\sum_{x \in X_2} c = c|X_2| \\
\sum_{x \in X_3} c = c|X_3| \\
\vdots
\end{gathered}$$

isto é,

$$\sum_{x \in X_n} c = c|X_n|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

48. [default,ex:produtorio:constante]

Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

Resposta:

Vamos provar que se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

por indução em X.

HI: Sejam $a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}$ e X o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_a\}$ de a elementos tal que

$$\prod_{x \in X_k} c = c^{|X_k|}, \text{ para todo } k \in [0..a], X_0 \subseteq X_k \subseteq X_a.$$

Passo: Vamos provar que

$$\prod_{x \in X_{a+1}} c = c^{|X_{a+1}|}.$$

Como

$$\prod_{x \in X_{a+1}} c = c \prod_{x \in X_a} c$$

e $a \in [0..a]$, então pela HI temos

$$\prod_{x \in X_a} c = c^{|X_a|}.$$

e portanto

$$\begin{aligned} \prod_{x \in X_{a+1}} c &= c \prod_{x \in X_a} c \\ &= c.c^{|X_a|} = c^{|X_a|+1} \\ &= c^{|X_a \cup \{x_{a+1}\}|} \\ &= c^{|X_{a+1}|} \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\prod_{x \in X_0} c = c^{|X_0|}.$$

Basta verificar que

$$\prod_{x \in X_0} c = \prod_{x \in \emptyset} c = 1,$$

e que

$$c^{|X_0|} = c^{|\emptyset|} = c^0 = 1.$$

conferir (dm)

49. [default,ex:teo:somatorio:associativo]

Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Resposta:

fazer por indução, como na resposta do Exercício 36

Vamos provar que se $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Sejam $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) &= (f(x_1) + g(x_1)) + (f(x_2) + g(x_2)) + \ldots + (f(x_n) + g(x_n)) \\
&= f(x_1) + g(x_1) + f(x_2) + g(x_2) + \ldots + f(x_n) + g(x_n) \\
&= f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n) \\
&= (f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)) + (g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)) \\
&= \left(\sum_{x \in X} f(x)\right) + \left(\sum_{x \in X} g(x)\right)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

50. [default,ex:teo:somatorio:distributivo]

Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c f(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Resposta:

fazer por indução, como na resposta do Exercício 36

Vamos provar que se $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Sejam $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X} cf(x) &= cf(x_1) + cf(x_2) + \ldots + cf(x_n)\\ &= c\,(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n))\\ &= c \sum_{x \in X} f(x).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

51. [default,ex:sum-i2i:inducao]

    Prove por indução que

    $$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2,$$

    para todo $n \in \mathbb{N}$.

    Resposta:

52. [default,ex:cor:uniao-disjunta-generalizada]

    Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

    $$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

    para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

    $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja n um natural e $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si; isto é, para todo $1 \leq i, j \leq n$,

$$i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Suponha que, para todo $1 \leq k \leq n$,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \,.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| + |A_{n+1}| - \left| A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \left| A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| .
\end{aligned}$$

Como, para todo $1 \leq i \leq n$,

$$A_{n+1} \cap A_i = \emptyset,$$

então

$$A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$$

e, consequentemente,

$$\left| A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = 0$$

e, logo,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| \,.$$

Além disso,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n-u} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n-u} |A_i|,$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 1\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n-1\} \\ &= n-1; \end{aligned}$$

isto é,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{1} |A_i|,$$

já que $A_1 = A_1$.

Portanto, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

53. [default,ex:teorema-binomial]

Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Conclua a partir daí que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

consertar

Para a base, tomando $n = 0$, temos que $\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 = (a+b)^0$, que é verdade.

Como hipotése de indução, assumimos que

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^j b^{m-j} = (a+b)^m$$

é verdade para todo $m \leq n$.

Para o passo de indução, queremos provar que

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} = (a+b)^{n+1}.$$

Usando o Corolário 72, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} &= \sum_{j=0}^{n+1} \left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right] a^j b^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{n+1} a^{n+1} b^0 \right) \\
&\quad + \left(\binom{n}{-1} a^0 b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} \right),
\end{aligned}$$

mas $\binom{n}{n+1}$ e $\binom{n}{-1}$ são iguais a 0. Assim

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j},$$

e fazendo $j' = j - 1$, podemos trocar o índice do segundo somatório, obtendo

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} + \sum_{j'=0}^{n} \binom{n}{j'} a^{j'+1} b^{n-j'} \\
&= b \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} + a \cdot \sum_{j'=0}^{n} \binom{n}{j'} a^{j'} b^{n-j'}.
\end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução em ambos somatórios,

$$\begin{aligned} b \cdot (a+b)^n &+ a \cdot (a+b)^n \\ &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)^{n+1}. \end{aligned}$$

54. [default,ex:algoritmo-coeficiente-binomial]

Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
B(n, k)
  Se k = 0
     Devolva 1
  Devolva (n/k)B(n − 1, k − 1)
```

Resposta:

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$B(m,k) = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

para todo $k \in [0..m]$ e todo $m \in [0..a]$.

Passo: Vamos provar que

$$B(m,k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!},$$

para todo $k \in [0..a+1]$.

Para $k = 0$, temos que

$$B(a+1,k) = B(a+1,0) = 1$$

e

$$\frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!} = \frac{(a+1)!}{1!((a+1)-1)!} = \frac{(a+1)!}{a!} = a+1.$$

Para $k = 1$, temos que

$$B(a{+}1,k) = B(a{+}1,1) = \frac{a+1}{k}B((a{+}1){-}1,k{-}1) = \frac{a+1}{1}B(a,0) = a{+}1$$

e

$$\frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!} = \frac{(a+1)!}{1!((a+1)-1)!} = \frac{(a+1)!}{a!} = a+1.$$

Para todo $k \in [2..a+1]$, temos que

$$\frac{a+1}{k}B((a+1)-1,k-1) = \frac{a+1}{1}B(a,k-1) \overset{\text{HI}}{=} (a+1)\frac{a!}{(k-1)!(a-(k-1))!} = \frac{(a+}{(k-1)!(a}$$

Base: Basta verificar que

$$B(0,0) = \frac{0!}{0!(0-0)!}$$

cfr. (Stolfi and Gomide, 2011, 10.3.4).

55. [default,ex:fn+1]

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja n um natural e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(0) + k.$$

É claro que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + 1 \\ &= (f(0) + n) + 1 \\ &= f(0) + (n+1) \end{aligned}$$

e, logo, $f(n+1) = f(0) + (n+1)$.

Como consequência, temos que

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= f(0) + (n+1) \text{ se } f(n) = f(0) + n \\
f(n+2) &= f(0) + (n+2) \text{ se } f(n+1) = f(0) + n + 1 \\
f(n+3) &= f(0) + (n+3) \text{ se } f(n+2) = f(0) + n + 2 \\
f(n+4) &= f(0) + (n+4) \text{ se } f(n+3) = f(0) + n + 3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Além disso, temos que função f não recorrente é satisfeita para o menor elemento do domínio de f. Isto é, $f(u) = f(n-u) + u$, onde

$$\begin{aligned}
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\
&= n;
\end{aligned}$$

ou seja, $f(0) = f(0) + 0$.

Portanto, $f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0$.

56. [default,ex:rec:n-5]

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n, que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $f(n) = (-1)^n c_{10} + c_{21} n + c_{20}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned}
c_{10} &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\
c_{20} &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\
c_{21} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja $n > 5$ e suponha que, para todo $5 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(4 + k \bmod 2) + \left\lceil \frac{k-5}{2} \right\rceil.$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n-1) + 1 \\ &= \left(f(4 + (n-1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(n-1)-5}{2} \right\rceil \right) + 1. \end{aligned}$$

Se n é par, então

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \left(f(4+1) + \left\lceil \frac{n-6}{2} \right\rceil \right) + 1 \\ &= f(4 + (n+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{n-4}{2} \right\rceil \\ &= f(4 + (n+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(n+1)-5}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Se n é ímpar, então

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n-1) + 1 \\ &= \left(f(4 + (n-1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(n-1)-5}{2} \right\rceil \right) + 1 \\ &= f(4) + \left\lceil \frac{n-6}{2} \right\rceil + 1 \\ &= f(4 + (n+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{n-4}{2} \right\rceil \\ &= f(4 + (n+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(n+1)-5}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f(5) &= f(4 + 5 \bmod 2) + \left\lceil \frac{5-5}{2} \right\rceil \\ &= f(5) + \left\lceil \frac{0}{5} \right\rceil \\ &= f(5) + 0. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n \geq 5$,

$$f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil .$$

57. [default,ex:fn+a]

Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[6], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

$\boxed{\text{reformatar como na resposta do Exercício 36}}$

Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a função dada por $f(n) = f(n-1)+a$, para todo $n > 0$.

Seja n um natural qualquer e suponha que

$$f(k) = f(0) + ka, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n \text{ natural.}$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n+1-1) + a \\ &= f(n) + a \\ &= (f(0) + na) + a \\ &= f(0) + (n+1)a, \end{aligned}$$

o que demonstra o passo da indução.

A base da indução também é trivial:

$$f(0) \quad = \quad \underbrace{f(0) + 0a}_{=f(0)},$$

o que completa a prova.

[6]Observe que este exercício generaliza o Exercício 55.

58. [default,ex:fn+s]

Sejam $f, s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[7], por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a função $f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n > 0.$

Vamos provar que $f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(0) + \sum_{i=1}^{k} s(i).$$

É claro que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + s(n+1) \\ &= \left(f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i) \right) + s(n+1) \\ &= f(0) + \sum_{i=1}^{n+1} s(i). \end{aligned}$$

Assim, para todo $n \geq 0$,

$$f(n+1) = f(0) + \sum_{i=1}^{n+1} s(i) \text{ desde que } f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i).$$

[7]Observe que este exercício generaliza o Exercício 57.

Além disso, $f(0) = f(0) + \sum_{i=1}^{0} s(i) = f(0) + 0$ e, então,

$$f(0) = f(0) + \sum_{i=1}^{0} s(i)$$
$$f(1) = f(0) + \sum_{i=1}^{1} s(i)$$
$$f(2) = f(0) + \sum_{i=1}^{2} s(i)$$
$$f(3) = f(0) + \sum_{i=1}^{3} s(i)$$
$$f(4) = f(0) + \sum_{i=1}^{4} s(i)$$
$$\vdots$$

Portanto,

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

59. [default,ex:afn]

Sejam $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a função $f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n > 0.$

Seja n um natural e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = a^k f(0).$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= af(n) \\ &= a(a^n f(0)) \\ &= a^{n+1} f(0). \end{aligned}$$

Além disso, $f(n-u) = a^{n-u} f(0)$, onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n; \end{aligned}$$

isto é, $f(0) = a^0 f(0)$.

Então,

$$f(n) = a^n f(0) \implies f(n+1) = a^{n+1} f(0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

bem como $f(0) = a^0 f(0)$.

Portanto, para todo n natural, $f(n) = a^n f(0)$.

60. [default,ex:gfn]

Sejam $f, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n) f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[8], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por $f(n) = m(n) f(n-1), \text{ para todo } n > 0.$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(0) \prod_{i=1}^{k} m(i)$$

[8]Observe que este exercício generaliza o Exercício 59.

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= m(n)f(n) \\
&= m(n)\left(f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i)\right) \\
&= f(0)\prod_{i=1}^{n+1} m(i).
\end{aligned}$$

Então, $f(n+1) = f(0)\prod_{i=1}^{n+1} m(i)$ desde que

$$f(k) = f(0)\prod_{1\le i\le k} m(i), \text{ para todo } 0 \le k \le n.$$

Além disso, $f(n-u) = f(0)\prod_{i=1}^{n-u} m(i)$, onde

$$\begin{aligned}
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \le 0\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \ge n\} \\
&= n;
\end{aligned}$$

isto é, $f(0) = f(0)\prod_{i=1}^{0} m(i) = f(0)(1)$.

Portanto, $f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$.

61. [default,ex:gfn+h]

Sejam $f, s, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \ge 1.$$

Prove (por indução em n) que[9]

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right), \text{ para todo } n \ge 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

[9]Observe que este exercício generaliza o Exercício 60.

Seja

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto m(n)f(n-1)+s(n). \end{aligned}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(0)\prod_{i=1}^{k} m(i) + \sum_{j=1}^{k}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{k} m(i)\right)$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= m(n+1)f(n) + s(n+1) \\ &= m(n+1)\left(f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right)\right) + s(n+1) \\ &= f(0)\prod_{i=1}^{n+1} m(i) + m(n+1)\sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right) + s(n+1) \\ &= f(0)\prod_{i=1}^{n+1} m(i) + \sum_{j=1}^{n+1}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n+1} m(i)\right). \end{aligned}$$

Além disso,

$$f(n-u) = f(0)\prod_{i=1}^{n-u} m(i) + \sum_{j=1}^{n-u}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n-u} m(i)\right),$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n; \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0)\prod_{i=1}^{0} m(i) + \sum_{j=1}^{0}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{0} m(i)\right) \\ &= f(0)(1) + \sum_{j=1}^{0}\left(s(j)(1)\right) \\ &= f(0) + 0 \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

62. [default,ex:teo:rec:1]

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + 1, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$,

Prove (por indução) que para todo $n \geq h(n_0)$,

$$f(n) = f(h^u(n)) + u,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

63. [default,ex:teo:rec:2]

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq h(n_0).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Vamos provar que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \geq n_0$ tal que, para todo $l \in [n_0..a]$,

$$f(l) = f(h^u(l)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(l)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(l) < n_0\right\},$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = f(h^u(a+1)) + \sum_{i=0}^{(a+1)-1} s(h^i(a+1)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\right\},$$

Como $a + 1 \geq n_0$, então

$$f(a+1) = f(h(a+1)) + s(a+1),$$

e além disso,

$$h(a+1) < a+1,$$

ou seja,

$$h(a+1) \leq a,$$

e daí, pela HI,

$$f(h(a+1)) = f(h^{u'}(h(a+1))) + \sum_{i=0}^{u'-1} s(h^i(h(a+1))),$$

onde

$$u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(h(a+1)) < n_0\right\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}f(h(a+1)) &= f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=0}^{u'-1} s(h^{i+1}(a+1)) \\ &= f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^{i}(a+1)),\end{aligned}$$

onde

$$u' = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\}.$$

Se $u' = 0$, então

$$\begin{aligned}f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^{i}(a+1)) &= f(h^{0+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{0} s(h^{i}(a+1)) \\ &= f(h(a+1)) + 0 = f(h(a+1)).\end{aligned}$$

Se $u' > 0$, por outro lado, então

$$\begin{aligned}u' &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\} - 1 = u - 1,\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\},$$

e portanto,

$$u = u' + 1.$$

Então

$$f(h(a+1)) = f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^{i}(a+1)) = f(h^{u}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u-1} s(h^{i}(a+1)),$$

e

$$\begin{aligned}f(a+1) &= f(h(a+1)) + s(a+1) \\ &= f(h^{u}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u-1} s(h^{i}(a+1)) + s(h^{0}(a+1)) \\ &= f(h^{u}(a+1)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^{i}(a+1)),\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\}.$$

Base: Vamos provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{rcl} b+1 & < & n_0, \text{ ou} \\ b & \leq & n_0, \text{ ou} \\ h(b) & < & n_0, \end{array}$$

temos

$$f(b) = f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)).$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0 \right\}.$$

Observe que $b + 1 < n_0$ se e somente se $b \leq n_0$.
Do mesmo modo, se $b \leq n_0$, então $h(b) < n_0$.
Logo, basta provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$ temos

$$f(b) = f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)).$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0 \right\}.$$

Seja então $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$. Neste caso,

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0 \right\} = 0,$$

e

$$\begin{aligned} f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)) &= f(h^0(b)) + \sum_{i=0}^{0-1} s(h^i(b)) \\ &= f(b) + \sum_{i=0}^{-1} s(h^i(b)) \\ &= f(b) + 0 = f(b). \end{aligned}$$

64. [default,ex:teo:rec:3]
Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} h(n) & < & n, \\ f(n) & = & m(n) f(h(n)), \end{array}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

completar

65. [default,ex:teo:rec]

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} h(n) & < & n, \\ f(n) & = & m(n)f(h(n)) + s(n), \end{array}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

completar

66. [default,ex:teo:numero:1s]

Seja $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$b(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ b\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $b(n)$, para todo $n \geq 0$.

(b) Prove que
$$b(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Resposta:

(a) reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que $b(k)$ seja o número de dígitos 1 na representação binária de $b(k)$, para todo $k \leq n$.

Por um lado, $2n$ é par e é imediato que $b(2n) = b\left(\left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor\right) + 2n \bmod 2 = b(n)$. Isto é, a representação de $2n$ tem a mesma quantidade de 1's na representação binária de n. É claro, pois se "n'' = "$d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0''$, então, "$2n''$ = "$d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0 0''$.

Por outro lado, $2n + 1$ é ímpar e

$$\begin{aligned}
b(2n+1) &= b\left(\left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor\right) + (2n+1) \bmod 2 \\
&= b\left(\frac{(2n+1)-1}{2}\right) + 1 \\
&= b(n) + 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $2n+1$ tem um 1 a mais do que n em suas respectivas representações binárias. A título de verificação, "n'' = "$d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0''$, enquanto "$2n+1''$ = "$d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0 1''$.

Temos que o menor n para o qual $b(n)$ é o número de 1's de sua representação binária é $n = 0$.

Repare que o tamanho da representação binária cresce linearmente com o crescimento exponencial do número em questão. As únicas duas possíveis opções são adicionar 0 ao final da representação do número n, obtendo $2n$, ou adicionar 1 ao final da representação do mesmo número, obtendo $2n + 1$.

Portanto, $b(n)$ é o número de 1's na representação binária de n, para todo n natural.

(b) revisar

Vamos provar que $b(z) \leq \lfloor \lg z \rfloor + 1$ provando que, para todo inteiro positivo z,

$$b(2z) \leq \lfloor \lg 2z \rfloor + 1 \text{ e } b(2z+1) \leq \lfloor \lg(2z+1) \rfloor + 1,$$

já que $\mathbb{Z}^+$ pode ser particionado em dois conjuntos: números ímpares; e, números pares, exceto pelo zero. Desse modo, cada $2z$ e $2z+1$ tem z como correspondente.
Seja $z \in \mathbb{Z}^+$ e suponha que $b(i) \leq \lfloor \lg i \rfloor + 1, \text{ para todo } i \leq z$.
Temos que

$$\begin{aligned}
b(2z) &= b\left(\left\lfloor \frac{2z}{2} \right\rfloor\right) + (2z) \bmod 2 \\
&= b(z) + 0 \\
&\leq \lfloor \lg z \rfloor + 1 \\
&\leq \lfloor \lg 2z \rfloor + 1 \\
&= \lfloor \lg z \rfloor + 2
\end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned}
b(2z+1) &= b\left(\left\lfloor \frac{2z+1}{2} \right\rfloor\right) + (2z+1) \bmod 2 \\
&= b(z) + 1 \\
&\leq (\lfloor \lg z \rfloor + 1) + 1 \\
&= \lfloor \lg z \rfloor + 2.
\end{aligned}$$

Além disso, $b(z-u) \leq \lfloor \lg(z-u) \rfloor + 1$, onde

$$\begin{aligned}
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid z - k \leq 1\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq z - 1\} \\
&= z - 1;
\end{aligned}$$

isto é, $b(1) \leq \lfloor \lg 1 \rfloor + 1 = 1$.
Portanto, para todo $z > 0$,

$$b(z) \leq \lfloor \lg z \rfloor + 1.$$

67. [default,ex:juros]

Uma certa aplicação financeira rende j por cento do capital aplicado por mês. O rendimento é creditado no próprio saldo da aplicação.

Proponha uma expressão recursiva para a função $C(n) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $C(n)$ represente o saldo da aplicação após ao final de n meses, a partir de uma aplicação inicial de valor s.

Resposta:

68. [default,ex:bit-mais-significativo]

Seja $M(n)\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$M(n)$:= a posição do bit mais significativo na representação binária de n,

sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

(a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.

(b) Prove que a expressão proposta está correta.

Resposta:

(a)

$$M(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ M\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(b) completar

69. [default,ex:bit-k]

Proponha uma expressão recursiva para a função $B(n,k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $B(n,k)$ represente o valor do k-ésimo bit na representação binária de n.

Prove que a expressão proposta está correta.

Resposta:

$$B(n,k) = \begin{cases} n \bmod 2, & \text{se } k = 1, \\ B\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, k-1\right), & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Então, para todo $k > 1$,

$$B(n,k) = B(g^u(n), h^u(k)),$$

onde

$$\begin{aligned} g(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ h(k) &= k - 1, \\ u &= \min\left\{j \in \mathbb{N} \mid h^j(k) \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$h^j(k) = k - j,$$

e

$$h^j(k) \leq 1$$

se e somente se

$$k - j \leq 1,$$

isto é

$$j \geq k - 1,$$

e portanto,

$$u = k - 1,$$

e

$$\begin{aligned}
B(n, k) &= B(g^{k-1}(n), h^{k-1}(k)) \\
&= B\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{k-1}} \right\rfloor, k - (k-1)\right) = B\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{k-1}} \right\rfloor, 1\right) \\
&= \left\lfloor \frac{n}{2^{k-1}} \right\rfloor \bmod 2.
\end{aligned}$$

70. [default,ex:exp]

Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

$\mathsf{Exp}(x,n)$
Se $n = 0$
Devolva 1
$e \leftarrow \mathsf{Exp}(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
$e \leftarrow e \times e$
Se n *é par*
Devolva e
Devolva $x \times e$

(a) Execute $\mathsf{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.

(b) Prove por indução em n que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde b é a função definida no Exercício 66.

(d) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

(a)

$$
\begin{aligned}
Exp(2, 0) &= 1 \\
Exp(2, 1) &= 2 \\
Exp(2, 2) &= 4 \\
Exp(2, 5) &= 32 \\
Exp(2, 11) &= 2048 \\
Exp(2, 15) &= 32768 \\
Exp(2, 16) &= 65536 \\
Exp(2, 20) &= 1048576.
\end{aligned}
$$

(b) fazer por indução, como na resposta do Exercício 36

Vamos provar que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$, para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam que $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Inicialmente, suponha que $\mathsf{Exp}(x, i) = x^i$, para todo $i \leq n$.
Temos que

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Exp}(x, 2n+1) &= x\mathsf{Exp}\left(x, \left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor\right)^2 \\
&= x\mathsf{Exp}\,(x, n)^2 \\
&= x\,(x^n)^2 \\
&= x^{2n+1}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Exp}(x, 2n) &= \mathsf{Exp}\left(x, \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor\right)^2 \\
&= \mathsf{Exp}\,(x, n)^2 \\
&= (x^n)^2 \\
&= x^{2n}.
\end{aligned}
$$

De fato, $\mathsf{Exp}(x, 0) = 0 = x^0$.

Portanto, $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $x \neq 0$.

(c) completar

(d) completar

71. [default,ex:minimo]

Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

```
Minimo(v,a,b)
  Se a = b
      Devolva a
  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  m1 ← Mínimo(v, a, m)
  m2 ← Mínimo(v, m + 1, b)
  Se v[m1] ≤ v[m2]
      Devolva m1
  Devolva m2
```

Prove por indução em $b - a$ que, a execução de Mínimo(v, a, b) faz $b - a$ comparações entre elementos de v sempre que $a \leq b$.

Resposta:

fazer por indução, como na resposta do Exercício 36

Podemos descrever o número de execuções da linha 5 na chamada de Mínimo(v, a, b) pela recorrência $C\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dada por

$$C(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } a = b \\ C\left(a, \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor\right) + C\left(\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + 1, b\right) + 1, & \text{se } a < b. \end{cases}$$

Sejam a e $b \geq a$ dois naturais quaisquer e suponha que

$$C(a, k) = k - a, \text{ para todo } a \leq k \leq b.$$

Vamos provar que a hipótese vale também para $b + 1$; i.e., que

$$C(a, b + 1) = b + 1 - a.$$

Como $b + 1 > a$, decorre da definição de C que

$$C(a, b+1) = C\left(a, \left\lfloor \frac{a + (b + 1)}{2} \right\rfloor\right) + C\left(\left\lfloor \frac{a + (b + 1)}{2} \right\rfloor + 1, b + 1\right) + 1,$$

mas da nossa hipótese vem que

$$C\left(a, \left\lfloor \frac{a+b+1}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{a+b+1}{2} \right\rfloor - a$$

e

$$C\left(\left\lfloor \frac{a+b+1}{2} \right\rfloor + 1, b+1\right) = b+1-\left\lfloor \frac{a+b+1}{2} \right\rfloor - 1$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} C\,(a, b+1) &= \left(\left\lfloor \frac{a+b+1}{2} \right\rfloor - a\right) + \left(b+1-\left\lfloor \frac{a+b+1}{2} \right\rfloor - 1\right) + 1 \\ &= b+1-a; \end{aligned}$$

com isso, temos que se

$$C(a,k) = k-a, \text{ para todo } a \leq k \leq b,$$

então também é verdade que

$$C(a,k) = k-a, \text{ para todo } a \leq k \leq b+1.$$

Repare que se $a = b$, então o algoritmo não chega a executar a linha 5 e, sob essa condição, $C(a,b) = b-a$.
Revisando, $C(a,b) = b-a$ e

$$\begin{gathered} C(a,k) = k-a, \text{ para todo } a \leq k \leq b \\ \Longrightarrow \\ C(a,k) = k-a, \text{ para todo } a \leq k \leq b+1 \end{gathered}$$

e, logo,

$$\begin{aligned} C(a,a) &= a-a \\ C(a,a+1) &= a+1-a \\ C(a,a+2) &= a+2-a \\ C(a,a+3) &= a+3-a \\ C(a,a+4) &= a+4-a \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, sempre que $a \leq b$,

$$C(a,b) \quad = \quad b-a.$$

72. [default,ex:fatorial]

Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Fatorial(n)

Se $n = 0$
    Devolva 1
Devolva $n \times$ *Fatorial*$(n-1)$

Resposta:

fazer por indução, como na resposta do Exercício 36

Seja n um natural e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$\text{Fatorial}(k) = \prod_{i=1}^{k} i.$$

Temos que

$$\begin{aligned}\text{Fatorial}(n+1) &= (n+1)\text{Fatorial}(n) \\ &= (n+1)\prod_{i=1}^{n} i \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} i.\end{aligned}$$

Além disso, Fatorial$(0) = 1$, bem como $\prod_{i=1}^{0} i = 1$ e, logo,

$$\text{Fatorial}(0) = \prod_{i=1}^{0} i.$$

Em outras palavras,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Fatorial}(0) &= \prod_{i=1}^{0} i \text{ e}\\
\mathsf{Fatorial}(n) = \prod_{i=1}^{n} i &\implies \mathsf{Fatorial}(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i \text{ e}\\
\mathsf{Fatorial}(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i &\implies \mathsf{Fatorial}(n+2) = \prod_{i=1}^{n+2} i \text{ e}\\
\mathsf{Fatorial}(n+2) = \prod_{i=1}^{n+2} i &\implies \mathsf{Fatorial}(n+3) = \prod_{i=1}^{n+3} i \text{ e}\\
\mathsf{Fatorial}(n+3) = \prod_{i=1}^{n+3} i &\implies \mathsf{Fatorial}(n+4) = \prod_{i=1}^{n+4} i \text{ e}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo n natural,

$$\text{Fatorial}(n) = \prod_{i=1}^{n} i.$$

73. [default,ex:rec:3:2]

Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $3^n - 2^n$, para todo n natural.

A(n)

Se $n \leq 1$
    Devolva n
Devolva $5 \times A(n-1) - 6 \times A(n-2)$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$\mathsf{A}(k) = 3^k - 2^k.$$

Temos que, se $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}(n+1) &= 5\mathsf{A}(n) - 6\mathsf{A}(n-1) \\
&= 5(3^n - 2^n) - 6(3^{n-1} - 2^{n-1}) \\
&= 5(3^n - 2^n) - 6(\frac{3^n}{3} - \frac{2^n}{2}) \\
&= 5(3^n - 2^n) - 2(3^n) + 3(2^n) \\
&= 5(3^n) - 2(3^n) - 5(2^n) + 3(2^n) \\
&= 3(3^n) - 2(2^n) \\
&= 3^{n+1} - 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathsf{A}(1) = 1 = 3^1 - 2^1 \text{ e } \mathsf{A}(0) = 0 = 3^0 - 2^0.$$

Portanto, para todo n natural,

$$\mathsf{A}(n) = 3^n - 2^n.$$

74. [default,ex:multiplica]

Considere o seguinte algoritmo

```
Multiplica(x,n)
------------------------------
  Se n = 0
      Devolva 0
  Se n é par
      Devolva Multiplica(x + x, n/2)
  Devolva Multiplica(x + x, (n−1)/2) + x
```

(a) Prove, por indução em n, que $\mathsf{Multiplica}(x, n)$ devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por $\mathsf{Multiplica}(x, n)$[10].

Resposta:

[10]**Sugestão:** compare este exercício com o Exercício 70.

(a) reformatar como na resposta do Exercício 36

Seja n um natural e suponha que

$$\mathsf{Multiplica}(x,k) = xk, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Vamos provar por indução que a supracitada identidade vale para $n+1$.

Temos que, se n é par, então

$$\begin{aligned}\mathsf{Multiplica}(x,n+1) &= \mathsf{Multiplica}(x+x,\frac{(n+1)-1}{2})+x\\ &= \mathsf{Multiplica}(2x,n/2)+x\\ &= 2x(n/2)+x\\ &= xn+x\\ &= (n+1)x;\end{aligned}$$

já se n é ímpar, então

$$\begin{aligned}\mathsf{Multiplica}(x,n+1) &= \mathsf{Multiplica}(x+x,\frac{n+1}{2})\\ &= \mathsf{Multiplica}(2x,\frac{n+1}{2})\\ &= 2x\left(\frac{n+1}{2}\right)\\ &= x(n+1),\end{aligned}$$

o que completa o passo da indução.

Trivialmente, $\mathsf{Multiplica}(x,0) = 0 = (0)x$, o que prova a base da indução e completa a prova.

(b) completar

75. [default,ex:fibonacci-eficiente]

Combine as informações dos Exercícios 41 e 70 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

Seja $s(n)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

(a) Expresse $s(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

76. [default,ex:sanduiche-fibonacci]

Sejam $f^-, f, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes satisfazendo, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{gathered} f^-(0) \leq f(0) \leq f^+(0), \text{ e} \\ f^-(1) \leq f(1) \leq f^+(1). \end{gathered}$$

Prove por indução em n que

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Resposta:

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^-(k) \leq f(k) \leq f^+(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$f^-(a+1) \leq f(a+1) \leq f^+(a+1).$$

Temos que

$$f^-(a+1) = f^-(a-1) + f^-(a-1) = 2f^-(a-1),$$

e pela HI,

$$f^-(a+1) = 2f^-(a-1) \leq 2f(a-1) \leq f(a-1) + f(a) = f(a+1).$$

Do mesmo modo,

$$f^+(a+1) = f^+(a) + f^+(a) = 2f^+(a),$$

e pela HI,

$$f^+(a) = 2f^+(a) \geq 2f(a) \geq f(a) + f(a-1) = f(a+1).$$

e portanto

$$f^-(a+1) \leq f(a+1) \leq f^+(a+1).$$

Base: Bastaria provar que

$$\begin{aligned} f^-(0) \leq f(0) \leq f^+(0), \text{ e} \\ f^-(1) \leq f(1) \leq f^+(1), \end{aligned}$$

o que é dado por hipótese.

completar

77. [default,ex:teo:fn-x+sn]

Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Prove que

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n - 1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

fazer por indução, como na resposta do Exercício 36

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f^k(x) = m^k x + s\left(\frac{m^n - 1}{m-1}\right).$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
f^{n+1}(x) &= f(f^n(x)) \\
&= m^n(s+mx) + s\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + sm^n + s\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{m^n-1}{m-1} + m^n\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{m^n-1+(m-1)m^n}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{m^n-1+mm^n-m^n}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{-1+m^{n+1}}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{m^{n+1}-1}{m-1}\right).
\end{aligned}
$$

Além de que

$$f^0(x) = x = m^0x + s\left(\frac{m^0-1}{m-1}\right) = x + s(0) = x.$$

Portanto, para todo n natural,

$$f^n(x) = m^nx + s\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right).$$

78. [default,ex:chao/k-iterado]

Prove que

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $k \neq 0$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

Resposta:

Fazendo $z = k$.

$\boxed{\text{fazer por indução}}$

Sejam

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor, \end{aligned}$$

z um inteiro positivo e x real. Suponha que para todo $1 \leq i \leq z$,

$$f^i(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^i} \right\rfloor.$$

Temos que

$$f^{z+1}(x) = f(f^z(x)) = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x}{k^z} \right\rfloor}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+1}} \right\rfloor.$$

Logo, se

$$f^z(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^z} \right\rfloor, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}^+,$$

então

$$f^{z+1}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+1}} \right\rfloor, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}^+.$$

Além disso, $f^{n-u}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^u} \right\rfloor$, onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{y \in \mathbb{N} | n - y \leq 1\} \\ &= \min\{y \in \mathbb{N} | y \geq n - 1\} \\ &= n - 1; \end{aligned}$$

isto é, $f^1(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^1} \right\rfloor$.

Assim,

$$\begin{aligned} \text{se } f^z(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^z} \right\rfloor&, \text{ então } f^{z+1}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+1}} \right\rfloor \text{ e} \\ \text{se } f^{z+1}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+1}} \right\rfloor&, \text{ então } f^{z+2}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+2}} \right\rfloor \text{ e} \\ \text{se } f^{z+2}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+2}} \right\rfloor&, \text{ então } f^{z+3}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+3}} \right\rfloor \text{ e} \\ \text{se } f^{z+3}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+3}} \right\rfloor&, \text{ então } f^{z+4}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{z+4}} \right\rfloor \text{ e} \\ &\vdots \\ \text{e } f^1(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^1} \right\rfloor&. \end{aligned}$$

Portanto, para todo z inteiro positivo e x real,

$$f^z(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^z} \right\rfloor.$$

79. [default,ex:funcoes-iteradas]

    Para cada função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

    (a) $h(x)x - 2$.

    Resposta:

A.6 Recorrências

80. [default,ex:pa]

Uma função $f\colon [a..b] \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe um $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } \in [a..b].$$

(a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a) $f(k) = f(a) + r(k-a)$.

(b)

81. [default,ex:recorrencias-1]

Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5, \text{ para todo } n > 1,$

(g) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n, \text{ para todo } n > 1,$

(h) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(i) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2, \text{ para todo } n > 1,$

(j) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7, \text{ para todo } n > 1,$

(k) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(l) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5, \text{ para todo } n > 1,$

(m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 3,$

(n) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1.$

Resposta:

acrescentar a resolução às respostas

.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

$$f(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 2^i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1\right)$$

(b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2, \text{ para todo } n > 1,$

Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ m(n) &= 2, \\ s(n) &= 3n + 2, \\ n_0 &= 2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2,$$

ou seja,

$$\frac{n}{2^k} < 2,$$

isto é,

$$2^{k+1} > n,$$

ou seja

$$k > \lg n - 1$$

e

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \lfloor \lg n - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \lg n \rfloor .$$

Então

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} s\left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor\right) \prod_{j=0}^{i-1} 2 \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left(3 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2\right) \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i 3 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^{i+1} = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) \\
&\quad + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2\left(2^{\lfloor \lg n \rfloor} - 1\right) \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - 2 \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 2\right) + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2.
\end{aligned}$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = \ldots$$

então,

$$f(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 2\right) + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2$$

(c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3, \text{ para todo } n > 1,$

Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor, \\ m(n) &= 6, \\ s(n) &= 2n + 3, \\ n_0 &= 2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor < 2,$$

ou seja,

$$\frac{n}{6^k} < 2,$$

isto é,

$$6^k > \frac{n}{2},$$

ou seja

$$k > \log_6 \frac{n}{2},$$

e

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\} = \left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))$$

$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - 1} 6 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - 1} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor + 3\right) \prod_{j=0}^{i-1} 6$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor + 3\right) 6^i$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + 2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor + 3 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + 2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor + 3 \left(\frac{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} - 1}{5}\right)$$

$$= 6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor + 3 \left(\frac{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} - 1}{5}\right).$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor}} \right\rfloor = \begin{cases} 0, & \text{se } n \bmod 12 < 6, \\ 1, & \text{se } n \bmod 12 \geq 6, \end{cases} \overset{\text{prova?}}{=} \left\lfloor \frac{n \bmod 12}{6} \right\rfloor,$$

então,

$$f(n) = 6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n \bmod 12}{6} \right\rfloor\right) + 2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor + 3 \left(\frac{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} - 1}{5}\right).$$

(d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

$$f(n) = 4^{\lceil \log_3 n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \log_3 n \rceil - 1} 4^i \left(2 \left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor - 1\right)$$

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5, \text{ para todo } n > 1,$

$$f(n) = 4^{\lceil \log_3 n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \log_3 n \rceil - 1} 4^i \left(3 \left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor - 1\right)$$

(g) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 3^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 3^i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \right)$$

(h) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 3^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 3^i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor^2 - 2 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 1 \right)$$

(i) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 3^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 3^i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2 \right)$$

(j) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 3^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 3^i \left(5 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 7 \right)$$

(k) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 4^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 4^i \left(\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor^2 \right)$$

(l) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 4^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 4^i \left(\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor^2 - 7 \left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor + 5 \right)$$

(m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \sqrt{n} + 1,$ para todo $n > 3,$

$$f(n) = 4^{\left\lceil \log_3 \frac{n}{3} \right\rceil} f(3) + \sum_{i=0}^{\left\lceil \log_3 \frac{n}{3} \right\rceil} 4^i \left(1 + \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor} \right)$$

(n) $f(n) = nf(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = n!f(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-i)!}$$

82. [default,ex:recorrencias-2]

    Resolva as seguintes recorrências.

    (a) $f(n) = f(n-1) + n,$ para todo $n > 0.$
    (b) $f(n) = 2f(n-1) + 1,$ para todo $n > 0$
    (c) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n \geq 1$
    (d) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$
    (e) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$
    (f) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$
    (g) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$
    (h) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3,$ para todo $n > 1,$
    (i) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$
    (j) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1,$ para todo $n > 1,$
    (k) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n > 1,$
    (l) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4,$ para todo $n > 1,$
    (m) $f(n) = f(n-2) + n,$ para todo $n > 1,$
    (n) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9,$ para todo $n > 3,$
    (o) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$
    (p) $f(n) = 3f(n-1) + n,$ para todo $n \geq 1,$

    Resposta:

acrescentar a resolução às respostas

    .

    (a) $\frac{n(n+1)}{2},$ para todo n natural
    (b) $f(n) = 2^n - 1,$ para todo n natural
    (c) $f(n) = (f0 + 6) * 2^n - n^2 - 4 * n - 6$
    (d) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

    $$f(n) = f(0)2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - n - 2$$

(e) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)3^{n-1} + 3^{n-1} - 1$$

(f) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)3^{n-1} - \frac{5}{2} \cdot 3^n + 15/2$$

(g) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0) + \frac{n^2}{2} - n/2$$

(h) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0) + n^2 - 2n + 1$$

(i) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)2^{n-1} + 2^n - n - 1$$

(j) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)2^{n-1} + 5 \cdot 2^n - 3n - 7$$

(k) $f(n) = f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)2^{n-1} + 11 \cdot 2^{n-1} - n^2 - 4n - 6$$

(l) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = \begin{cases} f(0) + \frac{7}{2} \cdot n + \frac{3}{4} \cdot n^2, & \text{se } n \text{ é par} \\ f(1) + \frac{7}{2} \cdot n + \frac{3}{4} \cdot n^2 - \frac{17}{4}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(m) $f(n) = f(n-2) + n,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = \begin{cases} f(0) + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4}, & \text{se } n \text{ é par} \\ f(1) + \frac{n^2}{4} - \frac{3}{4}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(n) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9,$ para todo $n > 3,$ (Muito comlicado.) Para n múltiplo de 3, devemos ter

$$f(n) = f(3) - \frac{3}{2}n^2 - 144n + 117.$$

(o) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 2^{n-1} f(1) + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \big((n-i)^2 - 2(n-i) + 1\big)$$

(p) $f(n) = nf(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = n! f(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-i)!}$$

(q)

83. [default,ex:seq-bin]

Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

(a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 2f(n-1), & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

(b) Definimos $A(n)$ como sendo a famosa série geométrica $\sum_{n \geq 0} x^n$. Multiplicando por x^n e somando sobre todo o domínio de f, $\mathbb{N}$, temos a equação

$$\sum_{n \geq 0} f(n+1)\, x^n = \sum_{n \geq 0} 2\, f(n)\, x^n$$

que, em termos de $A(n)$, o primeiro termo é

$$\frac{A(n) - f(0)}{x} = \frac{A(n) - 1}{x},$$

enquanto o segundo termo é $2A(n)$. Isso nos conta que

$$\frac{A(n) - 1}{x} = 2xA(n) \qquad \text{se e somente se} \qquad A(n) = \frac{1}{1-2x}.$$

Sabemos que $A(n)$ converge para $1/(1-x)$ quando $|x| < 1$ e, logo,

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n \geq 0} (2x)^n = \sum_{n \geq 0} \underbrace{2^n}_{f(n)} x^n.$$

Fazendo a operação inversa à do primeiro parágrafo, i.e. extraindo o coeficiente de x^n —denotado por $[x^n]$—, temos, então, que

$$[x^n]\frac{1}{1-2x} = 2^n = f(n), \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

84. [default,ex:operacoes-algoritmo-coeficiente-binomial]

85. Havia o item

    Prove que $s(n,k) = 4(2^n - 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $k \in [0..n]$.

    que não dá para fazer.
    Como viabilizar o último item?

O seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $k \in [0..n]$.

```
B′(n, k)
  Se k = 0
      Devolva 1
  Devolva B′(n, k − 1) + B′(n − 1, k − 1)
```

Sejam

$s(n,k)$**:** número de somas efetuadas na execução de $B'(n,k)$;

$m(n,k)$**:** número de multiplicações efetuadas na execução de $B(n,k)$, onde $B(\cdot,\cdot)$ é o algoritmo do Exercício 54

(a) Formule uma recorrência para $m(n,k)$.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Conclua que o algoritmo B é mais eficiente que o algoritmo B' provando que $\lim \frac{m(n,k)}{s(n,k)}$.

Resposta:

(a)

$$m(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ 1 + m(n-1,k-1), & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

(b) $m(n,k) = k$ $\boxed{\text{completar}}$

(c) $\boxed{\text{completar}}$

86. [default,ex:recorrencia-pg]

Dado $r \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão r é uma função $f\colon [a..b] \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = r, \text{ para todo } n \geq a.$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a)

$$f(n) = rf(n-1), \text{ para todo } k > a.$$

(b)

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ m(n) &= r, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= a+1. \end{aligned}$$

e daí

$$h^k(n) = n-k,$$

e

$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se

$$n-k < a+1,$$

ou seja,

$$k > n-a-1$$

e

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - a - 1\right\} = n - a,$$

e

$$h^u(n) = h^{n-a}(n) = n - (n - a) = a,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(a) \prod_{i=0}^{n-a-1} r = f(a)r^{n-a}.$$

87. [default,ex:pre-fibonacci]

Resolva as seguintes recorrências

(a) $f(n) = 2f(n-1),$ para todo $n \geq 2$.

(b) $f(n) = 2f(n-2),$ para todo $n \geq 2$.

Resposta:

(a)

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= n - 1, \\ m(n) &= 2, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

e daí

$$h^k(n) = n - k,$$

e

$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se

$$n - k < 2,$$

ou seja,

$$k > n - 2$$

e

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \le n_0\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\} = n-1,$$

e

$$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n - (n-1) = 1,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(1) \prod_{i=0}^{(n-1)-1} 2 = f(1) \prod_{i=0}^{n-2} 2 = f(1)2^{n-1}.$$

(b)

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{array}{rcl} u & = & \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ h(n) & = & n-2, \\ m(n) & = & 2, \\ n_0 & = & 2. \end{array}$$

e daí

$$h^k(n) = n - 2k,$$

e

$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se

$$n - 2k < 2,$$

ou seja,

$$k > \frac{n-2}{2}$$

e

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \le n_0\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \frac{n-2}{2}\right\} = \left\lfloor \frac{n-2}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

e

$$h^u(n) = h^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Se n é par, então

$$n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - 2\left(\frac{n}{2}\right) = n - n = 0.$$

Se n é ímpar, então

$$n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - 2\left(\frac{n-1}{2}\right) = n - (n-1) = 1.$$

Então

$$h^u(n) = n \bmod 2,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(n \bmod 2) \prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 2 = f(n \bmod 2) 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Se n é par, então

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{\frac{n}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^n (\sqrt{2})^n.$$

Se n é ímpar, então

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{\frac{n-1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{n-1} (\sqrt{2})^{n-1}.$$

Então

$$f(n) = f(n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-(n \bmod 2)} = \frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}} (\sqrt{2})^n$$

Se n é par,

$$\frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}} (\sqrt{2})^n = \frac{f(0)}{(\sqrt{2})^0} (\sqrt{2})^n = \frac{0}{1} (\sqrt{2})^n = 0.$$

Se n é ímpar,

$$\frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}} (\sqrt{2})^n = \frac{f(1)}{(\sqrt{2})^1} (\sqrt{2})^n = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{n-1}$$

Então

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ (\sqrt{2})^{n-1}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

ou seja

$$f(n) = (n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-1}$$

88. [default,ex:recorrencia-mergesort]

O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Considere as seguintes recorrências.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \tag{A.2}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \tag{A.3}$$

(a) Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Resolva as recorrências.

(c) Use as soluções obtidas para provar que $T^-(n) \approx n \lg n$ e $T^+(n) \approx n \lg n$.

(d) Conclua que $T(n) \approx n \lg n$.

Resposta:

(a)

(b) Do Teorema 29, temos

$$T^-(n) = T^-(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

e

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ m(n) &= 2, \\ s(n) &= n - 1, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^u(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor.$$

Além disso, para todo $i \in [0..u-1]$,

$$m(h^i(n)) = 2,$$

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^j(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 2 = 2^u.$$

e

$$f(h^i(n)) = h^i(n) - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1$$

e

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 2 = 2^i.$$

Então

$$\begin{aligned} T^-(n) = T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1\right) 2^i \\ = 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \\ = 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + \frac{2^{(u-1)+1} - 1}{2-1} \\ = 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2^u \\ = 2^u \left(T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + 1\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\},$$

e portanto,

$$\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor < 2,$$

e

$$T^{-}\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) = 0,$$

e

$$T^{-}(n) = 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2$$

se e somente se

$$\frac{n}{2^k} < 2$$

ou seja,

$$n < 2^{k+1},$$

isto é,

$$k > \lg n - 1,$$

então,

$$\begin{aligned} u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\} \\ = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\right\} = \lfloor \lg n - 1 \rfloor + 1 \\ = \lfloor \lg n \rfloor, \end{aligned}$$

e

$$T^{-}(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor.$$

Por desenvolvimento análogo chegamos a

$$T^{+}(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil.$$

(c) Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor > \frac{n}{2^i} - 1,$$

então

$$2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor > 2^i \left(\frac{n}{2^i} - 1\right) = n - 2^i$$

e

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor > \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} (n - 2^i)$$
$$= n \lg n - \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i = n \lg n - \frac{2^{(\lfloor \lg n \rfloor - 1) + 1}}{2 - 1} = n \lg n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$$
$$\geq n \lg n - 2^{\lg n} = n \lg n - n.$$

Então

$$T^-(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$$
$$> 2^{\lg n - 1} + (n-1) \lg n = \frac{n}{2} + (n-1) \lg n$$
$$= n \lg n + \frac{n}{2} - \lg n = n \lg n \left(1 + \frac{2}{\lg n} - \frac{1}{n}\right)$$
$$\approx n \lg n.$$

Por argumento semelhante chegamos a

$$T^+(n) \approx n \lg n,$$

(d) Como

$$T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

podemos concluir

$$T(n) \approx n \lg n.$$

89. [default,ex:master-method]

O "Master Method" ou "Master Theorem"[11] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 88 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

[11] Popularizado com este nome por Cormen et al. (2009).

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+(\lceil n/b \rceil) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

Resposta:

Usando a notação do Teorema 29, temos

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor, \\ m(n) &= a, \\ s(n) &= f(n), \end{aligned}$$

e daí,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor,$$

e

$$T(n) = T(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}. = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor < n_0 \right\}.$$

Como

$$h^u(n) = \left\lfloor \frac{n}{b^u} \right\rfloor$$

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} a = a^u,$$

e

$$\sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) = \sum_{i=0}^{u-1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor \right)$$

e

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} a = a^i,$$

então,

$$T(n) = a^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor < n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \log_b \frac{n}{n_0}\right\} = \left\lfloor \log_b \frac{n}{n_0} \right\rfloor + 1.$$

90. [default,ex:recorrencias-3]

    Resolva as seguintes recorrências.

    (a) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1.$
    (b) $f(n) = f\left(\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,,$
    (c) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \sqrt[3]{n} \right\rfloor\right) + n, \text{ para todo } n > 3,$

    Resposta:

completar

    (a) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1,$

    $$f(n) = n!f(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-i)!}$$

    (b)

    (c)

91. [default,ex:CN-vetorial]

    Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como as funções dadas por

    $$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

    (a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.
    (b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Resposta:

conferir

(a) Vamos provar que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ preserva as propriedades de fechamento, associatividade, pertinência dos elementos neutro e inverso de $+$ e a comutatividade; i.e., que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo abeliano.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Temos que:

i. (fecho)
$$(a+b)(n) = a(n) + b(n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

ii. (associatividade)
$$\begin{aligned}((a+b)+c)(n) &= (a+b)(n) + c(n)\\ &= a(n) + b(n) + c(n)\\ &= a(n) + (b+c)(n)\\ &= (a+(b+c))(n).\end{aligned}$$

iii. (identidade) O elemento neutro, e, é elemento de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
$$(e+a)(n) = e(n) + a(n) = a(n) + e(n) = (a+e)(n),$$
onde $e(n) = 0,$ para todo n natural.

iv. (inverso) Toda função a admite um elemento inverso b que são complementares ao elemento neutro,
$$(a+b)(n) = (b+a)(n) = e(n) = 0.$$
Para satisfazer a propriedade acima, basta tomar $b(n) = -a(n)$.

v. (comutatividade)
$$(a+b)(n) = a(n) + b(n) = b(n) + a(n) = (b+a)(n).$$

(b) Para provarmos que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial, basta recorrermos ao fato de que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo abeliano e provar as seguintes propriedades sobre o operador multiplicativo:

i. (associatividade da multiplicação por escalares) Se $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, então
$$\begin{aligned}(c_1(c_2a))(n) &= c_1(c_2a)(n)\\ &= c_1c_2a(n)\\ &= (c_1c_2)a(n).\end{aligned}$$

ii. (distributiva da soma de escalares)

$$\begin{aligned}((c_1 + c_2)a)(n) &= (c_1 + c_2)a(n)\\ &= c_1a(n) + c_2a(n)\\ &= (c_1a)(n) + (c_2a)(n).\end{aligned}$$

iii. (distributiva da soma de vetores)

$$\begin{aligned}(c_1(a + b))(n) &= c_1(a + b)(n)\\ &= c_1a(n) + c_1b(n)\\ &= (c_1a)(n) + (c_1b)(n).\end{aligned}$$

iv. (escalar neutro da multiplicação)

$$(1a)(n) = 1a(n) = a(n).$$

92. [default,ex:exponenciais:li]

Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ dadas por

$$\begin{aligned}f_1(n) &= r_1^n,\\ f_2(n) &= r_2^n,\end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

Resposta:

conferir

Vamos provar as duas implicações ($\Leftarrow$ e $\rightarrow$) dessa equivalência.

(a) ($\Leftarrow$) Suponha que $r_1 \neq r_2$. Vamos provar que $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

Decorre que não existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ que satisfaça

$$f_1(n) = c \cdot f_2(n);$$

i.e., não existe $c \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$r_1^n = c \cdot r_2^n$$

porque $c = (r_1/r_2)^n$ não é constante, uma vez que $0 \neq (r_1/r_2)^n \neq 1$.

Assim, $f_1(n)$ não pode ser escrita como uma combinação linear de $f_2(n)$ e, pelo mesmo motivo, também não podemos escrever $f_2(n)$ como combinação linear de $f_1(n)$.

Portanto, $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

(b) ($\rightarrow$) Suponha que r_1^n e r_2^n sejam linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

Vamos provar que, sob essa condição, $r_1 \neq r_2$.

Como r_1^n e r_2^n são linearmente independentes, então não deve existir um $c \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$r_1^n = c \cdot r_2^n, \text{ para todo } n \text{ natural;}$$

i.e., não deve existir uma constante $c \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$c = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n.$$

Contudo, quando $r_1 = r_2$, temos $c = 1^n = 1$, que é constante, o que iria contradizer nossa hipótese inicial.

Portanto, $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são linearmente independentes implica $r_1 \neq r_2$.

93. [default,ex:cor:rec:subespaco]

Sejam[12] $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(b) Prove que se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(c) Prove que o conjunto das funções $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

[12]Este exercício usa a notação do Exercício 91

Resposta:

(a)

$$\begin{aligned}
g(n)+h(n) &= a_1g(n-1)+\cdots+a_kg(n-k)+a_1h(n-1)+\cdots+a_kh(n-k)\\
&= a_1(g(n-1)+h(n-1))+\cdots+a_k(g(n-k)+h(n-k))\\
&= a_1(g+h)(n-1)+\cdots+a_k(g+h)(n-k)\\
&= (g+h)(n).
\end{aligned}$$

(b) Suponha que $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n)=a_1f(n-1)+a_2f(n-2)+\ldots+a_kf(n-k),\ \text{para todo } n\geq k;.$$

Então, para todo $n\geq k$,

$$(zf)(n)=zf(n)=za_1f(n-1)+\cdots+za_kf(n-k).$$

Como $za_1,\cdots,za_k$ são todas constantes complexas, segue que zf satisfaz a referida recorrência.

(c) Basta provarmos as 8 seguintes propriedades. Sejam $f,g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ e $c_1,c_2\in\mathbb{C}$.

i. (Comutatividade da adição de funções)

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n)=g(n)+f(n)=(g+f)(n).$$

ii. (Associatividade da adição de funções)

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(n) &= (f+g)(n)+h(n)\\
&= f(n)+g(n)+h(n)\\
&= f(n)+(g+h)(n)\\
&= (f+(g+h))(n).
\end{aligned}$$

iii. (Identidade aditiva)

$$\begin{aligned}
(0+f)(n) &= 0+f(n)\\
&= f(n)\\
&= f(n)+0\\
&= (f+0)(n).
\end{aligned}$$

iv. (Existência da inversa aditiva) Tomando $I(n):=(-f)(n)$, temos

$$f(n)+I(n)=f(n)+(-f)(n)=f(n)-f(n)=0.$$

v. (Associatividade da multiplicação de escalares)

$$\begin{aligned}(c_1(c_2f))(n) &= c_1(c_2f)(n)\\ &= c_1c_2f(n)\\ &= (c_1c_2)f(n)\\ &= ((c_1c_2)f)(n).\end{aligned}$$

vi. (Distributividade da soma de escalares)

$$\begin{aligned}((c_1+c_2)f)(n) &= (c_1+c_2)f(n)\\ &= c_1f(n)+c_2f(n)\\ &= (c_1f)(n)+(c_2f)(n).\end{aligned}$$

vii. (Distributividade da soma de funções)

$$\begin{aligned}(c_1(f+g))(n) &= c_1(f+g)(n)\\ &= c_1f(n)+c_1g(n)\\ &= (c_1f)(n)+(c_1g)(n).\end{aligned}$$

viii. (Elemento neutro da multiplicação por escalar)

$$(1f)(n) = 1f(n) = f(n).$$

94. [default,ex:recorrencias-lineares-homogeneas]

Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \textsf{se } n \leq 1,\\ 7, & \textsf{se } n = 2,\\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \textsf{se } n \geq 3.\end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1,\\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1.\end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1,\\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2.\end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(h)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 3f(n-2) + \frac{1}{3^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Resposta:

(a) conferir respostas via sage com as respostas humanas

(b) colocar todas as soluções de RLHs num mesmo formato

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1 \\ 7, & \text{se } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

o uso de lstlisting neste arquivo provoca erro

$$f(n) = c_{10}3^n + c_{20}i^n + c_{30}(-i)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 5/2, \quad c_{20} = (1-i)/4 \quad e \quad c_{30} = (1+i)/4.$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

$$f(n) = 3^n - 2^n, \text{ para todo } n \text{ natural}.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$f(n) = \frac{1}{2\sqrt{7}}(2+\sqrt{7})^n - \frac{1}{2\sqrt{7}}(2-\sqrt{7})^n, \text{ para todo } n \text{ natural}.$$

(d) (Não consego descobrir o porquê da compilação falhar ao descomentar a resposta desse item.)

(e)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$f(n) = n, \text{ para todo } n \text{ natural}.$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$f(n) = 1, \text{ para todo } n \text{ natural}.$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$f(n) = \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^n - \left(1 + i\sqrt{3} \right)^n \right), \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(h) (Não consego descobrir o porquê da compilação falhar ao descomentar a resposta desse item.)

(i) completar

(j) completar

(k) completar

95. [default,ex:outras-recorrencias]

Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[13]

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[14]

[13] **Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

[14] **Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

[15]

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[16]

Resposta:

colocar todas as soluções de RLHs num mesmo formato

(a) No caso de recorrente de

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} f(n) &= nf(n-1) + n(n-1)f(n-2) \\ &= \frac{n!}{(n-1)!}f(n-1) + \frac{n!}{(n-2)!}f(n-2) \\ &= n!\left(\frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{f(n-2)}{(n-2)!}\right) \end{aligned}$$

se e somente se

$$\frac{f(n)}{n!} = \frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{f(n-2)}{(n-2)!}.$$

[15]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

[16]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

Usando a transformação sugerida, obtemos

$$g(n) = g(n-1) + g(n-2).$$

Cada chamada de g em

$$g(n) - g(n-1) - g(n-2) = 0$$

configura um eixo no espaço vetorial cujo polinômio característico característico é

$$x^2 - x - 1.$$

Com as raízes da equação característica —que, elevadas à n-ésima potência, formam uma base para supracitado espaço vetorial—,

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

podemos reescrever $g(n)$ como uma combinação linear de cada um dos eixos (r_1^n e r_2^n), como segue.

$$g(n) = c_{10}r_1^n + c_{20}r_2^n.$$

As identidades

$$g(0) = \frac{f(0)}{0!} = 0 \quad \text{e} \quad g(1) = \frac{f(1)}{1!} = 1$$

nos fornecem os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$, por onde g passa, e são suficientes para determinarem g através do sistema linear

$$\begin{pmatrix} r_1^0 & r_2^0 \\ r_1^1 & r_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que por sinal são

$$c_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}} = -c_{20}$$

e, logo,

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

se e somente se

$$f(n) = \frac{n!}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(b)

$$g(n) = 2 - 2\,(1/2)^n \text{ se e somente se } f(n) = 2^{2-2(1/2)^n}, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(c) Do caso recorrente de

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

temos que

$$f(n)^2 = 1 + f(n-1)^2$$

que, usando a transformação sugerida, nos fornece

$$\begin{aligned} g(n) &= 1 + g(n-1) \\ &= g(n-1) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= n. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(n) = \sqrt{g(n)} = \sqrt{n}, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(d)

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

se e somente se

$$f(n) = 2^{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}.$$

96. [default,ex:fibonacci+1]

Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ g(n) &= 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = g(n-1), \text{ para todo } n > 0,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 1)$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X - 1)(X^2 - X - 1),$$

e, portanto, pelo Corolário 36, sabemos que

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_i, i \in [1..l]$ são as distintas raízes de $(X - 1)(X^2 - X - 1)$ com multiplicidades $m_i, i \in [1..l]$, respectivamente.

Neste exemplo,

$$\begin{aligned} l &= 3, \text{ e} \\ m_i &= 1, \text{ para todo } i \in [1..3] \end{aligned}$$

e portanto temos

$$f(n) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{1-1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$f(n) = \sum_{i=1}^{3} c_{i,0} r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} r_1^n + c_{2,0} r_2^n + c_{3,0} r_3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0}\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = c_{1,0}r_1^a + c_{2,0}r_2^a + c_{3,0}r_3^a, 0 \leq a < 3,$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0, \\ f(1) &= c_{1,0}r_1^1 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1, \\ f(2) &= c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2. \end{aligned}$$

Como

$$f(2) = f(1) + f(0) + g(2) = f(1) + f(0) + 1,$$

fica

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0, \\ f(1) &= c_{1,0}r_1^1 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1, \\ f(0) + f(1) + 1 &= c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\ f(1) &= c_{1,0}r_1 + c_{2,0}r_2 + c_{3,0}r_3, \\ f(0) + f(1) + 1 &= c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2, \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ r_3 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\frac{1-\sqrt{5}}{2} + c_{3,0}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 2 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -1, \\ c_{2,0} &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \\ c_{3,0} &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1.$$

97. [default,ex:rlnh-2]

Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ g(n) &= n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Teorema 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-2) = (X-1)^2(X-2),$$

e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n1^n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + +c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2f(0) + 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 2f(1) + 2 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -2, \\ c_{1,1} &= -1, \\ c_{2,0} &= 2, \end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n = 22^n - n - 2, = 2^{n+1} - n - 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

98. [default,ex:recorrencias-lineares-nao-homogeneas]

Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1)+1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

Resposta:

(a)

$$\begin{aligned} f(n) &= \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1)+n, & \text{se } n > 0 \end{cases} \\ &= \sum_{i=0}^{n} i \\ &= \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \text{ natural.} \end{aligned}$$

(b) No caso recorrente de

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2f(n-1)+1, & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

$$f(n) - 2f(n-1) = 1 \qquad (\forall n > 0),$$

as chamadas de f, $f(n)$ e $2f(n-1)$, configuram um espaço vetorial (EV) cujo polinômio característico (PC) é

$$x - 2$$

e, logo, uma base para o supracitado EV é o conjunto das raízes da equação característica, $\{2\}$. Entretanto, o termo da direita da equação também forma um EV; do teorema que estabelece que cn^jr^n tem $(x-r)^{j+1}$ como PC, temos, então, que o PC procurado é $(x-1)$.

A soma desses dois EVs tem como PC o produto dos PCs dos EVs somandos; i.e. o PC da soma dos EVs é

$$\underbrace{(x-2)}_{\text{de } f(n)-2f(n-1)} \underbrace{(x-1)}_{\text{de } 1}.$$

As n-ésimas potências das razíes da equação característica formam uma base para esse novo EV, $\{r_1^n, r_2^n\}$, onde

$$r_1 = 2 \quad \text{e} \quad r_2 = 1.$$

Resta-nos reescrever $f(n)$ como uma combinação linear dos elementos dessa base para obtermos uma função equivalente e não-recorrente de f,

$$f(n) = c_{10}2^n + c_{20}.$$

Os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ por onde f passa são suficientes para determinar as constantes $c_{10} = 1 = -c_{20}$ e, logo,

$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(c) f satisfaz uma RLH cujo PC é $(X-2)(X-1)^3$

99. [default,ex:linearizacao-matrizes]

Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n)-1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

(a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i,j]$?

completar com itens pedindo código em C implementando esta idéia.

Resposta:

(a)

$$N(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ N(n-1) + n, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b) $N(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-1)P,$$

onde P é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = n.$$

Como

$$n = 1n^1 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X-1)^2,$$

e N satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3,$$

e

$$N(n) = c_{10}1^n + c_{11}n^1 1^n + c_{12}n^2 1^n = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2,$$

onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por

$$\begin{aligned} N(0) &= c_{10} + c_{11}0 + c_{12}0^2, \\ N(1) &= c_{10} + c_{11}1 + c_{12}1^2, \\ N(2) &= c_{10} + c_{11}2 + c_{12}2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ N(0) + 1 &= c_{10} + c_{11} + c_{12}, \\ N(1) + 2 &= c_{10} + 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ 1 &= c_{11} + c_{12}, \\ 3 &= 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$c_{12} = 1 - c_{11},$$

e

$$2c_{11} + 4(1 - c_{11}) = 3,$$

ou seja

$$-2c_{11} = -1,$$

e portanto,

$$c_{11} = \frac{1}{2},$$

e

$$c_{12} = 1 - c_{11} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$N(n) = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(c) Seja $p(i,j)$ a posição de v ocupada por $M[i,j]$, isto é

$$v[p(i,j)] = M[i,j], \text{ para todo } 1 \leq i,j \leq n.$$

Claramente

$$p(i,i) = N(i) - 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n,$$

e, em geral,

$$p(i,j) = p(i-1,i-1) + j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq i \leq n,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} p(i,j) &= p(i-1,i-1) + j \\ &= N(i-1) - 1 + j \\ &= \frac{(i-1)((i-1)+1)}{2} + j - 1 \\ &= \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & \text{se } 1 \leq j \leq i \leq n, \\ p(j,i), & \text{se } 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

Para a função inversa, se $M_{i,j}$ é a matriz procurada, uma forma fechada para ela é

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \underbrace{\sum_{k=0}^{i} k}_{\text{1o elem. da linha}} + \underbrace{\sum_{k=i+2}^{i+j+1} k}_{\text{deslocamento}} \\ &= T_i + T_{i+j+1} - T_{i+1} \\ &= \frac{i + i^2 + 2ij + j(j + 3)}{2}, \end{aligned}$$

onde T_n é o n-ésimo número triangular, $T_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

100. [default,ex:cantor]

O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$$\begin{array}{lllllll} (0,0) \\ (0,1) & (1,0) \\ (0,2) & (1,1) & (2,0) \\ (0,3) & (1,2) & (2,1) & (3,0) \\ (0,4) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & (4,0) \\ (0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) \\ (0,6) & (1,5) & (2,4) & (3,3) & (4,2) & (5,1) & (6,0) \end{array}$$

(a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor

i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i,j)$ a posição ocupada pelo par (i,j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i,j)$.

Resposta:

(a) i.

$$l(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ l(n-1)+1, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

ii.

$$l(n) = n, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(b) Supondo que $t(n)$ seja o número de pares até a n-ésima linha, exclusive, temos

i.

$$t(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ t(n-1)+l(n), & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

ii.

$$t(n) = \sum_{k=0}^{n} l(k) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(c)

$$p(i,j) = t(i) + (j) = \frac{i(i+1)}{2} + j$$

101. [default,ex:algoritmo-fibonacci]

O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
  Se n ≤ 1
      Devolva n
  Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

Resposta:

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n \leq 1 \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \textsf{se } n \geq 2 \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = c_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{20}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1,$$

onde

$$c_{10} = \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5}\right) \quad \textsf{e} \quad c_{20} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

102. [default,ex:cubo]

Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a)

$$P(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 0 \\ 2P(n-1), & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(n) &= 2P(n-1) \\ &= 2^2 P(n-2) \\ &= 2^3 P(n-3) \\ &= 2^4 P(n-4) \\ &\vdots \\ &= 2^u P(n-u), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n \end{aligned}$$

e, logo,

$$P(n) = 2^n P(n-n) = 2^n.$$

(c)

$$L(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0 \\ 2L(n-1) + P(n-1), & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned} L(n) &= \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0 \\ 2L(n-1) + P(n-1), & \textsf{se } n > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0 \\ 2L(n-1) + 2^{n-1}, & \textsf{se } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Iterando L, temos

...

e, logo,

$$L(n) = 2^{n-1} L(n-n) + n \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}.$$

103. [default,ex:sum-i]

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Resposta:

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

onde

$$f(n) = n,$$

e

$$f(n) = 1n^1 1^n,$$

temos do Teorema 38 que a função f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Corolário 39 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)P = (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n^1 1^n + c_{1,2}n^2 1^n = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2,$$

onde $(c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2})$ é a solução do sistema

$$\begin{array}{rcl} s(0) & = & c_{1,0} + c_{1,1}0^1 + c_{1,2}0^2, \\ s(1) & = & c_{1,0} + c_{1,1}1^1 + c_{1,2}1^2, \\ s(2) & = & c_{1,0} + c_{1,1}2^1 + c_{1,2}2^2, \end{array}$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{1,0}, \\ 1 & = & c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2}, \\ 3 & = & c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \end{array}$$

e portanto,

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & c_{1,1} + c_{1,2}, \\ 3 & = & 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \end{array}$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} c_{1,0} & = & 0, \\ c_{1,1} & = & \frac{1}{2}, \\ c_{1,2} & = & \frac{1}{2}, \end{array}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 = c_{1,0} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

104. [default,ex:sum-pg]

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} x^i$, onde $x \in \mathbb{C}$.

Resposta:

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

onde

$$f(n) = x^n,$$

e

$$f(n) = 1n^0 x^n,$$

temos do Teorema 38 que a função f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X - x)^{0+1} = (X - x),$$

e daí, pelo Corolário 39 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)P = (X - 1)(X - x).$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{2,0}x^n = c_{1,0} + c_{2,0}x^n$$

onde $(c_{1,0}, c_{1,1})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}x^0, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}x^1, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ x + 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}x, \end{aligned}$$

e portanto,

$$c_{1,0} = 1 - c_{2,0},$$

e

$$x + 1 = c_{1,0} + c_{2,0}x = 1 - c_{2,0} + c_{2,0}x = 1 + (x-1)c_{2,0}$$

ou seja,

$$c_{2,0} = \frac{x}{x-1},$$

e

$$c_{1,0} = 1 - c_{2,0} = 1 - \frac{x}{x-1},$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= c_{1,0} + c_{2,0}x^n \\ &= 1 - \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-1}x^n \\ &= 1 + \frac{x}{x-1}(x^n - 1) \\ &= 1 + \frac{x^{n+1} - x}{x-1} \\ &= \frac{(x^{n+1} - x) + (x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} \end{aligned}$$

105. [default,ex:sum-i2i]

Dê uma expressão[17] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Resposta:

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

onde

$$f(n) = n2^n,$$

temos

$$f(n) = 1n^1 2^n,$$

e daí, do Teorema 38 temos que a função f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X-2)^{1+1} = (X-2)^2,$$

[17] cfr. Exercício 51

e daí, pelo Corolário 39 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)P = (X-1)(X-2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}n^0 1^n + c_{2,0}n^0 2^n + c_{2,1}n^1 2^n = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n$$

onde $(c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned}
s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^0 + c_{2,1}02^0,\\
s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^1 + c_{2,1}12^1,\\
s(2) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^2 + c_{2,1}22^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0}(1) + c_{2,1}(0)1,\\
0 + 12^1 &= c_{1,0} + c_{2,0}(2) + c_{2,1}(1)2,\\
0 + 12^1 + 22^2 &= c_{1,0} + c_{2,0}(4) + c_{2,1}2(4),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0},\\
2 &= c_{1,0} + 2c_{2,0} + 2c_{2,1},\\
10 &= c_{1,0} + 4c_{2,0} + 8c_{2,1},
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
c_{1,0} &= 2,\\
c_{2,0} &= -2,\\
c_{2,1} &= 2.
\end{aligned}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

106. [default,ex:somatorios]

Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} i^3.$$

(c)

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

(f)

$$\sum_{i=0}^{n} i256^i.$$

Resposta:

(a) conferir respostas via sage com as respostas humanas

(b) colocar todas as soluções de RLnHs num mesmo formato

(a) Usando a notação do Corolário 39 temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

com

$$f(n) = n^2.$$

Como

$$f(n) = n^2 1^n$$

podemos concluir que a função f satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)^3$.
Pelo Corolário 39, a função

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} n^2,$$

satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é

$$(X-1)^3(X-1) = (X-1)^4.$$

Pelo Teorema 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n^1 1^n + c_{1,2}n^2 1^n + c_{1,3}n^3 1^n = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 + c_{1,3}n^3,$$

onde

$$\begin{aligned}
s(0) &= c_{1,0} \\
s(1) &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\
s(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\
s(3) &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3}.
\end{aligned}$$

Da definição de s temos

$$\begin{aligned}
s(0) &= \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 \\
s(1) &= \sum_{i=0}^{1} i^2 = 0 + 1 = 1 \\
s(2) &= \sum_{i=0}^{2} i^2 = 0 + 1 + 4 = 5 \\
s(3) &= \sum_{i=0}^{3} i^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14,
\end{aligned}$$

então temos

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} \\
1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\
5 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\
14 &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
1 &= c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\
5 &= 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\
14 &= 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3},
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= \frac{1}{6} \\ c_{1,2} &= \frac{1}{2} \\ c_{1,3} &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} s(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3} &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} \\ = \frac{2n(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2})}{6} &= \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}.$$

(c)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} i(i-1) &= \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i \\ &= \left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right) - \left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{n^3}{3}-\frac{n}{3} \\ &= \frac{n(n^2-1)}{3} \qquad = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i} = n(1/2)^{n+1}.$$

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i = \frac{3}{2}\left(3^n\left(n^2-n+1\right)-1\right).$$

(f)

$$\frac{256}{255}n256^n-\frac{256}{65025}256^n+\frac{256}{65025} = \frac{n256^{n+1}}{255}\left(1-\frac{1}{255n}+\frac{1}{n256^n255}\right)$$

107. [default,ex:busca-binaria]

A *média*[18] do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária num vetor de n posições é dada por[19]

$$\mu(n) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \dots + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n} + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}$$

(a) Dê uma expressão livre de somatórios[20] para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \approx \lfloor \lg n \rfloor$.

Resposta:

Temos

$$n\mu(n) = s(n) + (l(n) + 1)(n - t(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} l(n) &= \lfloor \lg n \rfloor, \\ s(n) &= \sum_{i=1}^{l(n)} i2^{i-1}, \\ t(n) &= \sum_{i=0}^{l(n)-1} 2^i. \end{aligned}$$

Do Exercício 51 temos

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

de forma que

$$s(n) = \sum_{i=1}^{l(n)} i2^{i-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l(n)} i2^i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l(n)} i2^i = \frac{1}{2}(l(n)-1)2^{l(n)+1} + 2 = (l(n)-1)2^{l(n)} + 1$$

[18] Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

[19] Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

[20] **Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 36 e 51

Do Exercício 36 temos

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

de forma que

$$t(n) = \sum_{i=0}^{l(n)-1} 2^i = \sum_{i=0}^{l(n)-1} 2^i = 2^{l(n)-1+1} - 1 = 2^{l(n)} - 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
n\mu(n) &= s(n) + (l(n)+1)(n - t(n)) \\
&= (l(n)-1)2^{l(n)} + 1 + (l(n)+1)(n - (2^{l(n)} - 1)) \\
&= l(n)2^{l(n)} - 2^{l(n)} + 1 + (l(n)+1)(n - 2^{l(n)} + 1) \\
&= l(n)2^{l(n)} - 2^{l(n)} + 1 + nl(n) - l(n)2^{l(n)} + l(n) + n - 2^{l(n)} + 1 \\
&= nl(n) + n - 2^{l(n)+1} + l(n) + 2,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\mu(n) &= l(n) + 1 - \frac{2^{l(n)+1}}{n} + \frac{l(n)}{n} + \frac{2}{n} \\
&= l(n)\left(1 + \frac{1}{l(n)} - \frac{2^{l(n)+1}}{nl(n)} + \frac{1}{n} + \frac{2}{nl(n)}\right) \\
&= l(n)\left(1 - \left(\frac{2^{l(n)+1} - 2}{nl(n)} - \frac{1}{l(n)} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lfloor \lg n \rfloor \left(1 - \left(\frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - 2}{n \lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{\lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&\approx \lfloor \lg n \rfloor .
\end{aligned}$$

Observe que se n é uma potência de 2, então

$$\begin{aligned}
\mu(n) = \lfloor \lg n \rfloor \left(1 - \left(\frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - 2}{n \lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{\lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
= \lg n \left(1 - \left(\frac{2^{\lg n + 1} - 2}{n \lg n} - \frac{1}{\lg n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
= \lg n \left(1 - \left(\frac{2n - 2}{n \lg n} - \frac{1}{\lg n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
= \lg n \left(1 - \left(\frac{2}{\lg n} - \frac{2}{n \lg n} - \frac{1}{\lg n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
= \lg n \left(1 - \left(\frac{1}{\lg n} - \frac{1}{n} - \frac{2}{n \lg n}\right)\right).
\end{aligned}$$

108. [default,ex:soma-fibonacci]

Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci[21].

Resposta: completar

109. [default,ex:altura-arvore]

Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dada por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Uma *árvore trivial* é uma árvore de tamanho 1.

[21] Veja o Exercício 41.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ o maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

(a) Expresse $h^+(h)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a) Da definição de $h^+(n)$ temos

$$h^+(n) = \max\{h(T) \mid |T| = n\}.$$

Então,

$$h(T) \leq h^+(|T|), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Para todo $n > 0$, temos

$$\begin{aligned} h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\} \\ &= \max\{\max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1 \mid |T| = n\} \\ &= \max\{1 + \max\{h(E(T)), h(D(T))\} \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(E(T)), h(D(T)) \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(T) \mid |T| < n\} \\ &= 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\}. \end{aligned}$$

Como h^+ é uma função crescente, então

$$\max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} = h^+(n-1),$$

e daí,

$$h^+(n) = 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} = 1 + h^+(n-1),$$

ou seja

$$h^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 1 + h^+(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b) h^+ satisfaz uma RLnH cuja solução é

referenciar o exercício em que esta recorrência é resolvida

$$h^+(n) = n.$$

110. [default,ex:nos-arvore]

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[22] de altura n.

(a) Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a) Da definição de $t^+(n)$ temos

$$t^+(n) = \max\{|T| \mid h(T) = n\}.$$

Então

$$|T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B},$$

e portanto,

$$h(T) \leq |T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} &= \max\{|T| + |T| \mid h(T) < n\} \\ &= \max\{2|T| \mid h(T) < n\} \\ &= 2\max\{|T| \mid h(T) < n\} \\ &= 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\}. \end{aligned}$$

Como t^+ é uma função crescente, então

$$\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} = t^+(n-1),$$

e daí,

$$\max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} = 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} = 2t^+(n-1).$$

[22]Veja o Exercício 109.

e

$$
\begin{aligned}
t^+(n) &= \max\{|T| \mid h(T) = n\} \\
&= \max\{|E(T)| + |D(T))| + 1 \mid h(T) = n\} \\
&= \max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} + 1 \\
&= 1 + 2t^+(n-1).
\end{aligned}
$$

Então

$$
t^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2t^+(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}
$$

(b) t^+ satisfaz uma RLnH cuja solução é

referenciar o exercício em que esta recorrência é resolvida

$$
t^+(n) = (t^+(0) + 1)2^n - 1.
$$

111. [default,ex:avl]

Seja AVL o conjunto das árvores binárias[23] T satisfazendo

$$
E(T) \in \text{AVL e } D(T) \in \text{AVL}.
$$

e

$$
|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.
$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

(a) Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a) Da definição temos

$$
t^-(n) = \min\{|T| \mid T \in \text{AVL e } h(T) = n\}.
$$

[23] Veja o Exercício 109.

Como

$$
\begin{aligned}
t^-(n) &= \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= \min\{|E(T)| + |D(T)| + 1 \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= 1 + \min\{|E(T)| + |D(T)| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= 1 + \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n-1\} + \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n-2\} \\
&= 1 + t^-(n-1) + t^-(n-2),
\end{aligned}
$$

então

$$
t^-(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ t^-(n-1) + t^-(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}
$$

(b) t^- satisfaz uma RLnH cuja solução é (Ex. 96)

$$
t^-(n) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1
$$

112. [default,ex:quicksort]

Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo QuickSort.

$$
C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n} C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}
$$

Resposta:

Com a notação usual temos

$$
\begin{aligned}
h(n) &= n - 1, \\
n_0 &= 2, \\
m(n) &= \frac{n+1}{n}, \text{ e} \\
s(n) &= \frac{2(n-1)}{n},
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
h^k(n) = n - k,
$$

e

$$
h^k(n) < n_0,
$$

se e somente se

$$n - k < 2,$$

isto é

$$k > n - 2,$$

e consequentemente,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > n-2\right\} = n - 1.$$

Como

$$C(n) = C(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),$$

e

$$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n - (n-1) = 1,$$

e

$$m(h^i(n)) = m(n-i) = \frac{n-i+1}{n-i}$$

e

$$s(h^i(n)) = s(n-i) = \frac{2(n-i-1)}{n-i}$$

então

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{n-i+1}{n-i} &= \prod_{i=0}^{n-2} \frac{n-i+1}{n-i} \\
= \frac{n-0+1}{n-0}\,\frac{n-1+1}{n-1} \cdots \frac{n-(n-3)+1}{n-(n-3)}\,\frac{n-(n-2)+1}{n-(n-2)} & \\
&= \frac{n-0+1}{n-(n-2)} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \frac{n-0+1}{n-(i-1)} = \frac{n+1}{n-i+1}$$

e daí

$$\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), = \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{2(n-i-1)}{n-i} \frac{n+1}{n-i+1}$$

$$= 2(n+1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n-i-1}{n-i} \frac{1}{n-i+1}$$

$$\overset{\text{j=n-i}}{=} 2(n+1) \sum_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j(j+1)} = 2(n+1) \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i(i+1)} = 2(n+1) \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i(i+1)} \right)$$

$$= 2(n+1) \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)$$

$$= 2(n+1) \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)$$

Observando que

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1},$$

temos

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{2(n+1)}$$

e

$$\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = 2(n+1) \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)$$

$$= 2(n+1) \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - \frac{n-1}{2(n+1)} \right) = 2(n+1) \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - (n-1)$$

$$= 2(n+1) \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - n + 1.$$

Observando que

$$\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} = H(n+1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = H(n) + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2},$$

temos

$$\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = 2(n+1) \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - n + 1$$

$$= 2(n+1)\left(H(n) + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2}\right) - n+1 = 2(n+1)H(n) + 2 - \frac{6(n+1)}{2} - n+1$$

$$= 2(n+1)H(n) - 3n - 3 - n + 3 = 2(n+1)H(n) - 4n$$

$$= 2nH(n) - 4n + 2H(n).$$

Finalmente,

$$C(n) = C(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))$$

$$= C(1)\frac{n+1}{2} + 2nH(n) - 4n + 2H(n)$$

$$= 2nH(n) - 4n + 2H(n) = 2nH(n)\left(1 - \frac{2}{H(n)} + \frac{1}{n}\right)$$

$$\approx 2nH(n) \approx 2n \ln n = \frac{2}{\lg e} n \lg n$$

$$< 1.39 n \lg n.$$

A.7 Fundamentos de Contagem

113. [default,ex:estimativas]Em se tratando de contagem, é interessante ter uma noção intuitiva de grandezas e das relações entre elas. No contexto das ciências exatas em geral, é usual expressar grandezas como potências de 10. No contexto da Ciência da Computação, entretanto, é mais natural expressar grandezas como potências de 2. Nas questões abaixo, n representa uma quantidade e o exercício consiste em determinar os valores de k e d para os quais

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

   (a) Tempo, em segundos[24]:
      i. $n =$ uma hora.
      ii. $n =$ um dia.
      iii. $n =$ uma semana.
      iv. $n =$ um mês.
      v. $n =$ um ano.
      vi. $n =$ sua idade.
      vii. $n =$ tempo decorrido desde as 00h00:00 de 1 de janeiro de 1970[25].
      viii. $n =$ um século.
      ix. $n =$ um milênio.
      x. $n =$ um milhão de anos.
      xi. $n =$ idade estimada da Terra[26].
      xii. $n =$ idade estimada da Via Láctea[27].
      xiii. $n =$ idade estimada do universo observável[28].
   (b) Distância, em metros[29]:
      i. $n =$ maior distância possível entre dois pontos na superfície da Terra[30].

[24] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Second
[25] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Date_(Unix)
[26] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_Age
[27] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[28] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Age_of_the_Universe
[29] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Metre
[30] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

ii. $n =$ distância da Terra ao Sol[31].

iii. $n =$ um ano-luz.

iv. $n =$ diâmetro estimado da Via Láctea[32].

(c) Velocidade, em metros por segundo:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um animal.

iii. $n =$ de um veículo terrestre.

iv. $n =$ de um veículo aquático.

v. $n =$ de um veículo aéreo.

vi. $n =$ da Terra em relação ao Sol[33].

vii. $n =$ da luz[34].

(d) Massa, em gramas:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um carro.

iii. $n =$ de um elefante adulto[35].

iv. $n =$ de um Boeing-737.

v. $n =$ água na Terra[36].

vi. $n =$ da Terra[37].

vii. $n =$ do Sol[38].

viii. $n =$ da Via Láctea[39].

ix. $n =$ da Lua[40].

x. $n =$ do universo observável[41].

(e) Volume, em litros:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um carro.

[31] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[32] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[33] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[34] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[35] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Elephant
[36] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrosphere
[37] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[38] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[39] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[40] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[41] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_of_the_observable_universe

iii. $n =$ da água oceânica na Terra[42].
iv. $n =$ da Terra[43].
v. $n =$ da Lua[44].
vi. $n =$ do Sol[45].
vii. $n =$ do universo observável[46].

(f) Outras quantidades:

i. $n =$ população de Curitiba.
ii. $n =$ população do Paraná.
iii. $n =$ população do Brasil.
iv. $n =$ população da Terra.
v. $n =$ número de estrelas no universo observável[47].
vi. $n =$ número estimado de átomos no universo observável[48].
vii. $n =$ produto interno bruto brasileiro em reais.
viii. $n =$ dívida interna brasileira em reais.
ix. $n =$ número de células nervosas no corpo humano.

Resposta: Observe inicialmente que

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$

se e somente se

$$d \leq \log n < d + 1,$$

ou seja

$$d = \lfloor \log n \rfloor .$$

Do mesmo modo

$$2^k \leq n < 2^{k+1},$$

se e somente se

$$k = \lfloor \lg n \rfloor .$$

(a) Tempo, em segundos:

[42] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean
[43] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[44] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[45] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[46] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[47] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[48] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

i. $n =$ uma hora.
Uma hora tem 60 minutos. Um minuto tem 60 segundos. Assim, $n = 3600$, e,

$$\begin{aligned} d &= \lfloor \log 3600 \rfloor = 3, \\ k &= \lfloor \lg 3600 \rfloor = 11. \end{aligned}$$

simplificar as demais soluções como no item acima

.

ii. $n =$ um dia.
Um dia tem 24 horas. Assim, um dia tem $n = 24 \cdot 3600$ segundos. Dividindo por 10 até que não dê mais e dividindo por 2 até que não dê mais, temos que

$$\begin{aligned} n &= 24 \cdot 3600 = 24 \cdot 36 \cdot 100 = 864 \cdot 100 = 864 \cdot 10^2 \\ n &= 24 \cdot 3600 = (3 \cdot 8) \cdot (225 \cdot 16) = (3 \cdot 225) \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 675 \cdot 2^7 \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} 100 = 10^2 \leq 864 < 1000 = 10^3 \\ 512 = 2^9 \leq 675 < 1024 = 2^{10} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 10^2 \cdot 10^2 = 10^4 \leq 864 \cdot 10^2 = n < 10^3 \cdot 10^2 = 10^5 \\ 2^9 \cdot 2^7 = 2^{16} \leq 675 \cdot 2^7 = n < 2^{10} \cdot 2^7 = 2^{17} \end{aligned}$$

Assim, $d = 4$ e $k = 16$.

iii. $n =$ uma semana.
Uma semana tem 7 dias. Portanto, de 113(a)ii

$$\begin{aligned} n = 7 \cdot 864 \cdot 10^2 = 6048 \cdot 10^2 \\ n = 7 \cdot 675 \cdot 2^7 = 4725 \cdot 2^7 \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} 1000 = 10^3 \leq 6048 < 10000 = 10^4 \\ 4096 = 2^{12} \leq 4725 < 8192 = 2^{13} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 10^3 \cdot 10^2 = 10^5 \leq 6048 \cdot 10^2 = n < 10^4 \cdot 10^2 = 10^6 \\ 2^{12} \cdot 2^7 = 2^{19} \leq 4275 \cdot 2^7 = n < 2^{13} \cdot 2^7 = 2^{20} \end{aligned}$$

Logo, $d = 5$ e $k = 19$.

iv. $n =$ um mês.

Um mês possui mais que 20 dias, mais que 28, menos que 40 e menos que 32. De 113(a)ii, temos que

$$
\begin{aligned}
n &\geq 20 \cdot 864 \cdot 10^2 = 2 \cdot 10 \cdot 864 \cdot 10^2 = 1728 \cdot 10^3 \\
&\geq 1000 \cdot 10^3 = 10^3 \cdot 10^3 = 10^6 \\
n &< 40 \cdot 864 \cdot 10^2 = 4 \cdot 864 \cdot 10^3 = 3456 \cdot 10^3 \\
&< 10000 \cdot 10^3 = 10^4 \cdot 10^3 = 10^7 \\
n &\geq 28 \cdot 675 \cdot 2^7 = 7 \cdot 4 \cdot 675 \cdot 2^7 = 7 \cdot 675 \cdot 2^2 \cdot 2^7 = 4725 \cdot 2^9 \\
&\geq 4096 \cdot 2^9 = 2^{12} \cdot 2^9 = 2^{21} \\
n &< 32 \cdot 675 \cdot 2^7 = 675 \cdot 2^5 \cdot 2^7 = 675 \cdot 2^{12} \\
&< 1024 \cdot 2^{12} = 2^{10} \cdot 2^{12} = 2^{22}
\end{aligned}
$$

Assim, $d = 6$ e $k = 21$.

v. $n =$ um ano.

Um ano possui mais que 300 dias, mais que 360, menos que 400 e menos que 368. De 113(a)ii, temos que

$$
\begin{aligned}
n &\geq 300 \cdot 6048 \cdot 10^2 \\
&\geq 3 \cdot 100 \cdot 6040 \cdot 10^2 = 3 \cdot 604 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 1812 \cdot 10^5 \\
&\geq 1000 \cdot 10^5 = 10^3 \cdot 10^5 = 10^8 \\
n &\geq 360 \cdot 4275 \cdot 2^7 \\
&\geq 45 \cdot 8 \cdot 4272 \cdot 2^7 \\
&\geq 44 \cdot 8 \cdot 267 \cdot 16 \cdot 2^7 \\
&= 11 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 267 \cdot 16 \cdot 2^7 = 11 \cdot 267 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^7 \\
&= 2937 \cdot 2^{16} \\
&\geq 2048 \cdot 2^{16} = 2^{11} \cdot 2^{16} = 2^{27} \\
n &< 400 \cdot 6048 \cdot 10^2 \\
&< 4 \cdot 100 \cdot 6050 \cdot 10^2 = 4 \cdot 605 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 10^2 \\
&= 2420 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 242 \cdot 10 \cdot 10^5 = 242 \cdot 10^6 \\
&< 1000 \cdot 10^6 = 10^3 \cdot 10^6 = 10^9 \\
n &< 368 \cdot 4275 \cdot 2^7 \\
&< 23 \cdot 16 \cdot 4280 \cdot 2^7 \\
&< 24 \cdot 2^4 \cdot 535 \cdot 8 \cdot 2^7 \\
&< 3 \cdot 8 \cdot 535 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 535 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^7 = 1605 \cdot 2^{17} \\
&< 2048 \cdot 2^{17} = 2^{11} \cdot 2^{17} = 2^{28}
\end{aligned}
$$

Portanto, $d = 8$ e $k = 27$.

vi. $n =$ sua idade.
Tenho mais que 10 anos, mais que 16 e menos que 20. De 113(a)v, temos que

$$n \geq 10 \cdot 1812 \cdot 10^5 = 1812 \cdot 10^6 \geq 1000 \cdot 10^6 = 10^9$$
$$n \geq 16 \cdot 2937 \cdot 2^{16} = 2937 \cdot 2^{20} \geq 2048 \cdot 2^{20} = 2^{31}$$
$$n < 20 \cdot 242 \cdot 10^6 = 484 \cdot 10^7 < 1000 \cdot 10^7 = 10^{10}$$
$$n < 20 \cdot 1065 \cdot 2^{17} = 5325 \cdot 2^{19} < 8192 \cdot 2^{19} = 2^{32}$$

Logo, $d = 9$ e $k = 31$. Ou seja, um unsigned int da linguagem C já seria suficiente para guardar todos os segundos que eu já vivi.

vii. $n =$ tempo decorrido desde 1 de janeiro de 1970.
É óbvio que já se passou mais de 30 anos, mais de 32, menos de 40 e menos de 38. De 113(a)v, temos que

$$n \geq 30 \cdot 1812 \cdot 10^5 \geq 5436 \cdot 10^6 \geq 1000 \cdot 10^6 = 10^9$$
$$n \geq 32 \cdot 2937 \cdot 2^{16} \geq 2937 \cdot 2^{21} \geq 2048 \cdot 2^{21} = 2^{32}$$
$$n < 40 \cdot 242 \cdot 10^6 < 968 \cdot 10^7 < 1000 \cdot 10^7 = 10^{10}$$
$$n < 38 \cdot 1065 \cdot 2^{17} < 20235 \cdot 2^{18} < 32768 \cdot 2^{18} = 2^{33}$$

Assim, $d = 9$ e $k = 31$. Possivelmente, se usássemos um unsigned int ocorreria um *overflow*.

114. [default,ex:composicao-bijecoes]

Prove que a composição de funções bijetoras é uma bijeção.

Resposta:

A.8 União e Produto Cartesiano

115. [default,ex:cor:produto-cartesiano-generalizado]

Sabendo que se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A||B|,$$

prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos então,

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Resposta:

completetar

116. [default,ex:divisores-72]

Quantos divisores naturais tem o número 72?

Resposta:

Seja D o conjunto dos divisores de 72. Queremos determinar $|D|$.

Os divisores primos de 72 são 2 e 3, pois

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

Cada divisor de 72 corresponde a um par de expoentes (a, b) onde

$$0 \leq a \leq 3, \text{ e}$$
$$0 \leq b \leq 2,$$

isto é

$$a \in [0..3], \text{ e}$$
$$b \in [0..2],$$

ou seja,

$$(a, b) \in [0..3] \times [0..2].$$

Noutras palavras, $[0..3] \times [0..2] \sim D$ pela bijeção dada por $(a, b) \mapsto 2^a\, 3^b$.

Consequentemente (C. 45),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2]| = |[0..3]|\,|[0..2]| = 4 \times 3 = 12.$$

117. [default,ex:divisores-360]

Quantos divisores tem o número 360?

Resposta:

Seguindo o mesmo raciocínio do Exercício 116, temos

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1,$$

e daí, fazendo

$$D := \text{conjunto dos divisores de } 360,$$

temos

$$D \sim [0..3] \times [0..2] \times [0..1],$$

e consequentemente (C. 45),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2] \times [0..1]| \overset{\text{C. } 54}{=} |[0..3]|\times|[0..2]|\times|[0..1]| = 4\times3\times2 = 24.$$

118. [default,ex:teo:numero-divisores]

Prove que o número de divisores positivos de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é

$$\prod_{i=1}^{k}(m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

Resposta:

119. [default,ex:byte]

Um "bit" é um elemento de $\{0, 1\}$.

Se um "byte" é uma sequência de 8 "bits", quantos valores diferentes pode assumir um "byte"?

Resposta: Fazendo

$$B := \text{conjunto dos bytes}.$$

Como cada "byte" é uma sequência de 8 "bits", isto é, um elemento de de $\{0,1\}^8$, então

$$B \sim \{0,1\}^8$$

e consequentemente (C. 45),

$$|B| = |\{0,1\}^8| \stackrel{\text{C. 56}}{=} |\{0,1\}|^8 = 2^8 = 256.$$

120. [default,ex:senhas-convencionais]

Um teclado convencional tem 47 "teclas que geram caracteres". Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla "shift". Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

Considere um sistema de quebra de senhas à base de "força bruta", isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 senha por segundo.

Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?

Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} T &:= \text{conjunto das teclas convencionais,} \\ C &:= \text{conjunto dos caracteres convencionais,} \\ S_n &:= \text{senhas convencionais de tamanho } n, \end{aligned}$$

temos

$$S_n = C^n.$$

Um dia tem $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ segundos e queremos

$$|S_n| > 86400.$$

Como

$$S_n = C^n,$$

então

$$|S_n| = |C^n| \stackrel{\text{C. 56}}{=} |C|^n$$

Como

$$C \sim \{0,1\} \times T,$$

então (C. 45),

$$|C| = |\{0,1\} \times T| \stackrel{\text{T.53}}{=} |\{0,1\}| \times |T| = 2 \times 47 = 94$$

e

$$|S_n| = |C|^n = 94^n.$$

Então, para ter

$$|S_n| > 86400,$$

precisamos ter

$$94^n > 86400,$$

ou seja

$$n \lg 94 > \lg 86400,$$

ou seja

$$n > \frac{\lg 86400}{\lg 94},$$

e portanto,

$$n = \left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil.$$

Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, o número de tentatvas num dia será um milhão de vezes maior, e precisamos de

$$|S_n| > 10^6 \times 86400,$$

ou seja

$$94^n > 10^6 \times 86400,$$

ou seja

$$n = \left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil$, observe que

$$\begin{aligned} 16 &< \lg 86400 < 17, \\ 6 &< \lg 94 < 7, \end{aligned}$$

então
$$2 < \frac{16}{7} < \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{17}{6} < 3.$$
e então
$$\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil = 3.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil$, observe que
$$\frac{\lg 10^6 \times 86400}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6 + \lg 86400}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94}$$
e
$$19 < \lg 10^6 < 20,$$
então
$$\frac{19}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} < \frac{20}{6}$$
e
$$5 = \frac{35}{7} = \frac{19}{7} + \frac{16}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{20}{6} + \frac{17}{6} < \frac{37}{6} < 6$$
e portanto
$$\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil = 6.$$

121. [default,ex:dvd]

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

Resposta:

Fazendo
$$\begin{aligned} d &:= 4\,700\,372\,992, \\ s(n) &:= \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n, \end{aligned}$$
temos
$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)|,$$

onde

$$A(n) := \text{conjunto dos arquivos de tamanho } n.$$

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 56}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 119}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 106f}}{=} \frac{256}{255}n256^n - \frac{256}{65025}256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

$$n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid |s(k)| \leq d\}.$$

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{65025}256^k + \frac{256}{65025} \leq d,$$

ou seja

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{65025}256^k \leq 4700372992 - \frac{256}{65025}$$

ou seja

$$65280k256^k - 256^{k+1} \leq 1198595112960 - 256 = 1198595112704,$$

isto é

$$k256^k - \frac{256^{k+1}}{255} \leq \frac{1198595112704}{65280} = \frac{4682012159}{255},$$

e

$$n = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid k256^k - \frac{256^{k+1}}{255} \leq \frac{4682012159}{255}\right\}.$$

Para estimar o valor de n, observe que

$$n256^n - 256^{n+1} = n256^n \left(1 - \frac{256}{n}\right) \approx n256^n,$$

e

$$n256^n \leq \frac{4682012159}{255},$$

se e somente se

$$\lg n256^n \leq \lg \frac{4682012159}{255},$$

ou seja,

$$\lg n + n \lg 256 \leq \lg \frac{4682012159}{255},$$

ou seja,

$$\lg n + 8n \leq \lg \frac{4682012159}{255},$$

isto é

$$n + \frac{\lg n}{8} \leq \frac{\lg \frac{4682012159}{255}}{8}.$$

Como

$$n + \frac{\lg n}{8} = n\left(1 + \frac{\lg n}{8n}\right) \approx n,$$

vamos estimar n por

$$\left\lceil \frac{\lg \frac{4682012159}{255}}{8} \right\rceil.$$

Como

$$18360831\frac{4682012159}{255} < 18360832$$

então

$$23 < \lg 18360832 \lg \frac{4682012159}{255} < \lg 18360832 < 24$$

e

$$2 < \frac{23}{8} \frac{\lg \frac{4682012159}{255}}{8} < \frac{24}{8} = 3,$$

e portanto,

$$\left\lceil \frac{\lg \frac{4682012159}{255}}{8} \right\rceil = 3.$$

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50462976 &< d, \\ s(4) = 17230332160 &> d. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid n256^n - \frac{256^{n+1}}{255} \leq \frac{4682012159}{255}\right\} = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17179869184 > 4700372992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4700372992} \right\rceil = 4.$$

122. [default,ex:moedas]

Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de uma moeda?

(b) até n lançamentos consecutivos de uma moeda?

Resposta:

(a) Uma sequência de n lançamentos de uma moeda corresponde a uma sequência de tamanho n sobre o conjunto $\{K, C\}$, cujo tamanho é

$$|\{K, C\}^n| = |\{K, C\}|^n = 2^n =$$

(b) Uma sequência de até n lançamentos de uma moeda corresponde a uma sequência de tamanho até n sobre o conjunto $\{K, C\}$, cujo tamanho é

$$\frac{|\{K, C\}|^n - 1}{|\{K, C\}| - 1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

123. [default,ex:dados]

Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de um dado?

(b) até n lançamentos consecutivos de um dado?

Resposta:

(a) 2^n resultados possíveis.

(b) $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ resultados possíveis.

124. [default,ex:dicionario]

O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa registra 228 500 verbetes utilizando o alfabeto de 26 letras. O mais longo deles tem 46 letras.

Supondo que todas as palavras de até 46 letras sejam equiprováveis, qual a probabilidade de uma palavra de até 46 letras escolhida uniformemente ao acaso estar registrada no Houaiss?

Resposta:

(a) 26^k palavras de tamanho k

(b) $\sum_{k=1}^{46} 26^k = \frac{26^{46+1}}{26-1} = \frac{26^{47}}{25} > 1.27 \times 10^{65}$ palavras de tamanho até 46

(c) $\frac{228500}{\frac{26^{47}}{25}} < 1.80 \times 10^{-60}$

125. [default,ex:palindromos]

Um *palíndromo* sobre um conjunto A é uma sequência $(a_1, \ldots, a_k)$ de elementos de A que "permanece a mesma quando lida na ordem reversa", isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

(a) Enumere todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$.

(b) Enumere todos os palíndromos de tamanho 5 sobre $\{a, b, c\}$.

(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?

Resposta:

(a) aaaa, abba, acca, baab, bbbb, bccb, caac, cbbc, cccc.

(b) aaaaa, ababa, acaca, baaab, bbabb, bcacb, caaac, cbabc, ccacc aabaa, abbba, acbca, babab, bbbbb, bcbcb, cabac, cbbbc, ccbcc aacaa, abcba, accca, bacab, bbcbb, bcccb, cacac, cbcbc, ccccc.

(c) Cada palíndromo de tamanho k sobre um conjunto de n elementos corresponde a uma palavra de tamanho $\lceil k/2 \rceil$ sobre este conjunto. Existem portanto $n^{\lceil k/2 \rceil}$ tais palíndromos.

126. [default,ex:protocolo]

Um protocolo de comunicação usa três tipos de pacotes de dados, T_1, T_2 e T_3, diferenciados por um campo inicial. Os pacotes do tipo T_1 tem, 4 bits de dados após o campo inicial (identificação do tipo); os pacotes do tipo T_2 tem 8 bits de dados; e os pacotes do tipo T_3 tem 10 bits de dados. Qual o número de pacotes distintos que existem neste protocolo?

Resposta:

completar

127. [default,ex:ipv4]

O endereço de um dispositivo na InterNet (endereço IP) é um número de 4 *bytes*.

(a) Qual o número de endereços IP possíveis?

(b) Dos endereços possíveis, as seguintes faixas de endereços são reservadas para redes locais:

- 10.0.0.0 a 10.255.255.255
- 172.16.0.0 a 172.31.255.255
- 192.168.0.0 a 192.168.255.255
- 169.254.0.0 a 169.254.255.255

Qual o número de endereços IP não-reservados na rede?

Resposta:

(a) $2^{32} = 4.294.967.296$ endereços IP possíveis.

(b) Respectivamente temos:
$1 \times 256 \times 256 \times 256 = 167.772.219$
$(1 \times 16 \times 256 \times 256) - 1 = 1.048.576$
$1 \times 1 \times 256 \times 256 = 65.536$
$1 \times 1 \times 256 \times 256 = 65.536$
Ou seja,

No total temos $4.294.967.296 - 168.951.867 = 4.126.015.429$ endereços IP não-reservados.

128. [default,ex:mac]

Interfaces de rede recebem uma identificação do fabricante conhecida como *endereço MAC* que é um número de 48 bits[49]. Se a inclusão digital for um sucesso absoluto, quantas intefaces de rede poderiam ser dadas a cada habitante do planeta?

Resposta:

Estima-se que existam 7,162 bilhões de habitantes no planeta (dados do *United States Census Bureau* em março de 2014).
O *endereço MAC* pode ter 2^{48} identificações diferentes.
Ou seja, cada habitante poderia receber, aproximadamente:

$$\frac{2,814749767 \times 10^{14}}{7.162.000.000} = 39.301,16960$$

endereços MAC.

129. [default,ex:jantar]

Em um jantar foram servidos 2 tipos de entrada (pães com patês e salada), 3 tipos de massa (espaguete, talharim e nhoque), 4 tipos de molho (bolonhesa, pesto, branco e funghi), e 2 tipos de sobremesa (sorvete e salada de frutas). Sabendo que nenhum convidado escolheu a mesma combinação, e que todos que escolheram a salada não escolheram nhoque, qual o número máximo de convidados?

Resposta:

Sendo T o conjunto das combinações, sem a restrição, temos que

$$|T| = 2 \times 3 \times 4 \times 2 = 48.$$

O conjunto de combinações que não satisfazem a restrição, R, contém as combinações com salada e nhoque. Ou seja, temos que

$$|R| = 1 \times 1 \times 4 \times 2 = 8.$$

[49] Atualmente é um número de 64 bits, o que já é usado por tecnologias como *FireWire*, *IPv6*, *802.15.4*).

O conjunto de combinações que satisfazem a restrição, S, é a diferença entre T e R, ou seja

$$|S| = |T \setminus R| = |T| - |R| = 48 - 8 = 40,$$

já que $R \subseteq T$.

Como o número de convidados não pode exceder o número de combinações que satisfazem a restrição, então o número máximo de convidados é 40.

130. [default,ex:datas]

Uma *data* é uma sequência de 8 dígitos da forma $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, onde d_1d_2, m_1m_2 e $a_1a_2a_3a_4$ são dígitos representando o dia, mês e ano, respectivamente. Por exemplo, 25122012 e 14071889 são datas e 31022013 e 48151623 não são.

(a) Desconsiderando os anos bissextos, quantas das sequências de 8 dígitos são datas válidas?

(b) Qual a probabilidade de uma sequência de 8 dígitos escolhida uniformemente ao acaso ser uma data?

(c) Se um gerador aleatório gera uma sequência de 8 dígitos a cada segundo (independente e uniformemente), qual é a probabilidade de não ter gerado nenhuma data ao final de um minuto?

Resposta:

(a) cada data corresponde a um par em $[365] \times [9999]$, logo são $365 \times 9999 = 3\,649\,635$ datas.

(b) existem 10^8 sequências de 8 dígitos. A probabilidade é $\frac{3649635}{10^8} = \frac{729927}{20000000} = 3.649635\%$.

(c) Serão geradas 60 sequências em um minuto. A probabilidade de nenhuma ser uma data é

$$\left(1 - \frac{3649635}{10^8}\right)^{60} = 10.744887007416733\%.$$

131. [default,ex:carros]

A licença de um veículo no Brasil é uma cadeia composta por 3 letras seguida de 4 dígitos. Quantos veículos licenciados pode haver simultaneamente no Brasil? Compare com a resposta do exercício 113(f)iii.

Resposta:

$$26^3 \times 10^4 = 175.760.000$$

132. [default,ex:telefones]

Os números de telefone no Brasil podem ser números de 8 dígitos, sendo que o primeiro não pode ser 0 ou de 9 dígitos, sendo o primeiro necessariamente um 9.

(a) Quantos números de telefone são possíveis no Brasil?

(b) Existem mais números de telefone ou licenças de veículo[50] possíveis?

Resposta:

(a) $1 \times 10^7 = 10.000.000$

(b) Existem mais números de licenças de veículos disponíveis.

133. [default,ex:todas-as-imagens]

Um certo monitor de computador tem resolução de 640 por 480 *pixels* com resolução de cor de 32 bits (também conhecido como "truecolor", isto é, cada *pixel* pode assumir 2^{32} cores diferentes). Sua frequência de varredura (isto é, a frequência com que a imagem exibida pode ser modificada) é de 60 Hz. Quanto tempo, no mínimo, levaria o monitor[51] para exibir todas as imagens possíveis?

Resposta:

O monitor pode exibir, no total:
$640 \times 480 \times 2^{32} = 1,319413953 \times 10^{15}$ imagens.
Para exibir todas as imagens serão necessários, aproximadamente:
$2,199023256 \times 10^{13}$ minutos.
Ou 366.503.875.925,34 horas.
Ou 15.270.994.830,23 dias.
Ou 41.838.342 anos com 365 dias.

[50] Veja o Exercício 131

[51] Estes parâmetros são mais ou menos os mesmos em se tratando de um televisor convencional.

A.9 Funções

134. [default,ex:circuitos]

Quantos circuitos combinacionais funcionalmente diferentes com e entradas e s saídas são possíveis?

Resposta:

$$C(e, s) := \text{circuitos combinacionais}$$

Cada circuito em $C(e, s)$ implementa uma função $\{0,1\}^e \to \{0,1\}^s$, isto é,

$$C(e, s) \sim \left(\{0,1\}^s\right)^{\left(\{0,1\}^e\right)},$$

e, consequentemente,

$$|C(e, s)| \stackrel{?}{=} \left|\left(\{0,1\}^s\right)^{\left(\{0,1\}^e\right)}\right| \stackrel{?}{=} \left|\{0,1\}^s\right|^{\left|\{0,1\}^e\right|} \stackrel{?}{=} \left(|\{0,1\}|^s\right)^{|\{0,1\}|^e} \stackrel{?}{=} (2^s)^{2^e} = 2^{s2^e}$$

135. [default,ex:k-bolas-distintas/n-urnas-distintas]

De quantas maneiras diferentes é possível distribuir k bolas distintas por n urnas distintas?

Resposta:

Fazendo

B**:** conjunto de k bolas,

U**:** conjunto de n urnas.

$D(B, U)$**:** conjunto das distribuições das bolas de B pelas urnas de U.

Cada distribuição das bolas de B pelas urnas de U corresponde a uma função $d \colon B \to U$ que associa a cada bola $b \in B$ uma urna $d(b) \in U$.

Noutras palavras, $D(B, U) \sim U^B$ e, consequentemente

$$|D(B, U)| = \left|U^B\right| = |U|^{|B|} = n^k$$

136. [default,ex:aniversarios]

De quantas maneiras diferentes podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

Resposta:

Se P é um conjunto de n pessoas, então cada maneira de acontecerem os aniversários das pessoas em P corresponde a uma função $a\colon P \to [365]$ que associa a cada pessoa $p \in P$ seu aniversário $a(p) \in [365]$.

Assim o número de maneiras diferentes de acontecerem os aniversários das pessoas em P é o número de funções $P \to [365]$, que é

$$\left|[365]^P\right| = |[365]|^{|P|} = 365^n$$

137. [default,ex:recorrencia-numero-funcoes]

Deduza que existem n^k funções $[k] \to [n]$ através dos seguintes passos.

(a) Defina $f(k,n) :=$ número de funções $[k] \to [n]$.

(b) Observe que cada função $f\colon [k] \to [n]$ corresponde a um par (x,g) onde $x \in [n]$ corresponde à imagem de k por f e $g\colon [k-1] \to [n]$ corresponde às imagens de $1, \dots k-1$ por f.

(c) Use esta observação para descrever $f(k,n)$ por meio de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

Resposta:

A recorrência é

$$f(k,n) = \begin{cases} n, & \text{se } k = 1, \\ nf(k-1,n), & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Desenvolvendo, chegamos a

$$f(k,l) = \dots = n^u f(k-u,n),$$

onde

$$u = \min\{l \in \mathbb{N} \mid k - l \leq 1\}$$

ou seja

$$u = k - 1,$$

e

$$f(k,n) = n^{k-1} f(k-(k-1),n) = n^{k-1} f(1,n) = n^{k-1} n = n^k.$$

138. [default,ex:permutacoes-ordenadas]

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

Resposta:

O lugar ocupado pelo número 43521 é exatamante um a mais que a quantidade de números gerados por permutações de 12345 que são menores que 43521.

Os números menores que 43521 são:

(a) 1º dígito é 1, 2 ou 3;

(b) 1º dígito é 4 e 2º dígito é 1 ou 2;

(c) 1º e 2º dígitos são 43 e o 3º dígito é 1 ou 2;

(d) 1º, 2º e 3º dígitos são 435 e o 4º dígito é 1.

As quantidades de números em cada caso são:

(a) $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$;

(b) $1 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$;

(c) $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 4$;

(d) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$,

e a quantidade de números gerados por permutações de 12345 que são menores que 43521 é a soma, pois os quatro casos são disjuntos, logo a posição do número 43521 é $1 + (72 + 12 + 4 + 1) = 1 + 89 = 90$.

A.10 Subconjuntos

139. [default,ex:mega-sena]

A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma k-*aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

(a) Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?
(b) Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?
(c) Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?
(d) Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

Resposta:

(a) Cada possível resultado de um sorteio é um subconjunto de 6 elementos de [60]. O número de possíveis resultados na mega–sena é

$$\left|\binom{[60]}{6}\right| = \binom{|[60]|}{6} = \binom{60}{6} = \frac{60!}{54! \times 6!} = 50063860.$$

(b) Este também é o número de apostas simples. A chance de ganhar com uma aposta simples, portanto, é

$$\frac{1}{50063860} < \frac{1}{50000000}.$$

Uma 7-aposta é um subconjunto de 7 elementos de [60]. O número de 7-apostas possíveis é

$$\left|\binom{[60]}{7}\right| = \binom{|[60]|}{7} = \binom{60}{7} = \frac{60!}{53! \times 7!} = 386206920.$$

A chance de ganhar com uma 7-aposta $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é

$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{7}{6} = \frac{7!}{1! \times 6!} = 7,$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma 7–aposta é

$$\frac{7}{\binom{60}{6}},$$

ou seja, 7 vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

(c) Uma k-aposta é um subconjunto de k elementos de [60]. O número de k-apostas possíveis é

$$\left|\binom{[60]}{k}\right| = \binom{|[60]|}{k} = \binom{60}{k}.$$

A chance de ganhar com uma k-aposta $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é

$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{k}{6},$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma k–aposta é

$$\frac{\binom{k}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{k_6}{60_6} = \frac{k_6}{36045979200},$$

ou $\binom{k}{6} = k_6/720$ vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

k	$\binom{k}{6}$
6	1
7	7
8	28
9	84
10	210
11	462
12	924
13	1716
14	3003
15	5005

140. [default,ex:complemento-binomial]

Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\binom{A}{k} \sim \binom{A}{|A| - k}.$$

Resposta:

141. [default,ex:complemento-binomial-inteiro]

Prove[52] que

$$\binom{n}{k} \sim \binom{n}{n-k},$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

Resposta:

142. [default,ex:sequencias-binarias-k-1s]

Quantas são as sequências binárias de n dígitos com exatamente k dígitos 1?

Resposta:

As posições dos 1's de uma sequência binária identificam unicamente a sequência. Então o número de sequências binárias de n dígitos com exatamente k dígitos 1 corresponde ao número de k-subconjuntos de $[n]$, que é

$$\binom{n}{k}.$$

143. [default,ex:pessoas-na-sala]

Numa sala[53] há 5 lugares e 7 pessoas. De quantas modos diferentes essas pessoas podem ocupar a sala, sendo que até 5 podem ficar sentadas e o resto em pé?

Resposta:

[52]**Sugestão:** use o Exercício 140

[53]Questão de vestibular da PUC-SP; contribuição de Gabriel Gugik

Cada modo de essas 7 pessoas ocuparem a sala é uma escolha de quais ficarão sentadas. Chamando de P o conjunto das 7 pessoas e entendendo que os lugares em que as pessoas estão sentadas ou em pé são indiferentes, queremos saber o número de elementos do conjunto

$$\mathcal{S} = \{X \subset P \mid |X| \leq 5\}.$$

Como

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k=0}^{5} \{X \subset P \mid |X| = k\} = \bigcup_{k=0}^{5} \binom{P}{k},$$

temos

$$|\mathcal{S}| = \sum_{i=0}^{5} \left|\binom{P}{i}\right| = \sum_{i=0}^{5} \binom{|P|}{i} = \sum_{i=0}^{5} \binom{7}{i} = 120.$$

144. [default,ex:triplas-somando-30]

De quantas maneiras[54] podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

Resposta:

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos conjuntos de 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo cuja soma é par, isto é,

$$\mathcal{S} = \left\{T \subseteq [30] \mid |T| = 3 \text{ e } \sum_{t \in T} t \text{ é par}\right\},$$

ou seja,

$$\mathcal{S} = \left\{T \in \binom{[30]}{3} \mid \sum_{t \in T} t \text{ é par}\right\},$$

Dado $T \in \binom{[30]}{3}$, temos que $\sum_{t \in T} t$ é par se e somente se

(a) todos os elementos de T são pares, ou

(b) um dos elementos de T é par.

Sejam então,

$$\mathcal{S}_P = \left\{T \in \binom{[30]}{3} \mid \text{ todo } t \in T \text{ é par}\right\},$$

[54]Questão de vestibular da UNICAMP; contribuição de Gabriel Gugik

e

$$\mathcal{S}_I = \left\{ T \in \binom{[30]}{3} \mid \text{ somente um } t \in T \text{ é par} \right\},$$

de forma que

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_P \cup \mathcal{S}_I.$$

Como $\mathcal{S}_P$ e $\mathcal{S}_I$ são disjuntos,

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{S}_P| + |\mathcal{S}_I|.$$

Chamando de P e de I os conjuntos dos pares e ímpares em $[30]$, respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} P &= \{2, 4, \ldots, 30\} \\ I &= \{1, 3, \ldots, 29\}, \end{aligned}$$

temos que

(a) os elementos de $\mathcal{S}_P$ correspondem aos subconjuntos de tamanho 3 de P, e

(b) os elementos de $\mathcal{S}_I$ correspondem aos pares (X, Y) de subconjuntos de $[30]$ onde

  i. $X \subseteq P$ e $|X| = 1$, e

  ii. $Y \subseteq I$ e $|Y| = 2$,

  isto é

  i. $X \in \binom{P}{1}$, e

  ii. $Y \in \binom{I}{2}$.

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_P &= \binom{P}{3}, \\ \mathcal{S}_I &\equiv \binom{P}{1} \times \binom{I}{2}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| = |\mathcal{S}_P| + |\mathcal{S}_I| &= \left|\binom{P}{3}\right| + \left|\binom{P}{1} \times \binom{I}{2}\right| = \binom{|P|}{3} + \binom{|P|}{1}\binom{|I|}{2} \\ &= \frac{|P|_3}{3!} + \frac{|P|_1}{1!}\frac{|I|_2}{2!} = \frac{15_3}{3!} + \frac{15_1}{1!}\frac{15_2}{2!} \\ &= \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} + \frac{15}{1}\frac{15 \times 14}{2 \times 1} = (5 \times 7 \times 13) + 15(15 \times 7) \\ &= (5 \times 7)(13 + 15 \times 3) = 35(13 + 45) = 35 \times 58 = 2030. \end{aligned}$$

145. [default,ex:campeonato-de-futebol]

Ao final de um campeonato de futebol[55], somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

Resposta:

Sejam n, j, v, e e respectivamente o número total de equipes, jogos, vitórias e empates no campeonato.

Sabemos que cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto, que derrotas não pontuam e que a soma do total de pontos é 35, isto é

$$3v + 2e = 35,$$

e, portanto,

$$v = \frac{35 - 2e}{3}.$$

Por outro lado, para cada jogo temos uma vitória ou dois empates, isto é,

$$j = v + \frac{e}{2},$$

e, portanto,

$$j = \frac{35 - 2e}{3} + e = \frac{35 + e}{3}$$

isto é,

$$e = 3j - 35.$$

Não pode haver mais que 35 empates, isto é,

$$e \leq 35,$$

e, portanto,

$$3j - 35 \leq 35,$$

isto é,

$$j \leq 70/3 < 24.$$

Como o número de empates é um inteiro não negativo, temos que ter

$$e = 3j - 35 \geq 0,$$

[55]Questão de vestibular da IME (2004); contribuição de Gabriel Gugik

isto é,

$$j \geq 35/3 > 11.$$

e, portanto,

$$11 < j < 24,$$

ou seja

$$12 \leq j \leq 23.$$

Como cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez, temos

$$j = \binom{n}{2},$$

e, portanto,

$$12 \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq 23,$$

isto é,

$$24 \leq n(n-1) \leq 46,$$

ou seja

$$0 \leq n^2 - n - 24 \leq 22,$$

e, consequentemente,

$$e \in \{10, 28\}$$

Como

$$v = \frac{35 - 2e}{3},$$

temos que $35 - 2e$ tem que ser múltiplo de 3, o que permite concluir que

$$e = 10.$$

146. [default,ex:soma-binomial-combinatoria]

Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

usando resultados de contagem.

Resposta:

Temos

$$2^{[n]} = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k},$$

e portanto

$$\left|2^{[n]}\right| = \left|\bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}\right|,$$

ou seja,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

147. [default,ex:hipergeometrica-baralho]

Considere um baralho de 52 cartas divididas igualmente entre os 4 naipes (ouros, espadas, copas e paus).

(a) Qual é a probabilidade de, numa mão de 10 cartas, exatamente 2 delas serem de espadas?

(b) Dentre todas as $\binom{52}{8}$ mãos possíveis de 8 cartas, quantas delas têm exatamente 2 cartas de cada naipe?

Resposta:

(a) Num universo de $\binom{52}{10}$ mãos possíveis, são exatamente as ocorrências em que essas 2 cartas sejam de espadas, $\binom{52/4}{2}$, e, ainda, que elas não estejam no restante do baralho (i.e., estejam na mão), $\binom{52-52/4}{(52-52/4)-2}$.
Assim, a supracitada probabilidade é

$$\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{37}}{\binom{52}{10}}.$$

(b) É a quantidade de ocorrências de 2 cartas para cada um dos 4 naipes,

$$\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{2} = \binom{13}{2}^4,$$

no mesmo evento em que essas 8 cartas não estejam no restante do baralho, $\binom{39}{8}$. Ou seja, $\binom{13}{2}^4\binom{39}{8}$.

148. [default,ex:hipergeometrica]

Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?

Resposta:

Seja B o conjunto das bolas e seja $A \subseteq B$ o conjunto das bolas azuis em B. Cada amostra de n bolas de B com exatamente k bolas azuis corresponde a um par (X, Y) de subconjuntos de B onde

(a) $X \subseteq A$ e $|X| = k$,

(b) $Y \subseteq B - A$ e $|Y| = |B - X|$.

isto é,

(a) $X \in \binom{A}{k}$ e

(b) $Y \in \binom{B-A}{|B-X|}$.

Consequentemente o número de tais amostras é o tamanho do conjunto

$$S = \left\{(X, Y) \mid X \in \binom{A}{k} \text{ e } Y \in \binom{B-A}{|B-X|}\right\} = \binom{A}{k} \times \binom{B-A}{|B-X|},$$

isto é $\boxed{\text{justificar cada passagem}}$

$$\begin{aligned}
|S| &= \left|\binom{A}{k} \times \binom{B-A}{|B-X|}\right| = \left|\binom{A}{k}\right| \left|\binom{B-A}{|B-X|}\right| \\
&= \binom{|A|}{k}\binom{|B-A|}{|B-X|} = \binom{|A|}{k}\binom{|B|-|A|}{|B|-|X|} \\
&= \binom{a}{k}\binom{(a+v)-a}{n-k} = \binom{a}{k}\binom{v}{n-k}
\end{aligned}$$

149. [default,ex:grafo]

Dado $n \in \mathbb{N}$, um *grafo de n vértices* é um conjunto $G \subseteq \binom{[n]}{2}$. Cada elemento de $[n]$ é chamado de *vértice* de G e cada $\{u, v\} \in G$ é chamado de *aresta* de G. Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta.

(a) Quantos diferentes grafos de n vértices existem?

(b) Quantos diferentes grafos de n vértices com m arestas existem?

(c) Uma *descrição* de um grafo G é uma sequência de $2|G|+1$ inteiros. O primeiro inteiro é o número de vértices de G. Cada um dos $|G|$ pares de inteiros seguintes representa uma aresta de G. Por exemplo as sequências $(3,1,2,2,3)$, $(3,2,1,2,3)$ e $(3,2,3,1,2)$ são três descrições diferentes do grafo $G = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ de 3 vértices. Quantas descrições diferentes tem um mesmo grafo G de n vértices e m arestas?

Resposta:

(a) Cada grafo de n vértices é um subconjunto de $\binom{[n]}{2}$. Existem $2^{\binom{n}{2}}$ tais subconjuntos.

(b) Cada grafo de n vértices e m arestas é um subconjunto de tamanho m de $\binom{[n]}{2}$. Existem

$$\binom{\binom{n}{2}}{m} = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{m}$$

tais subconjuntos.

(c) Cada descrição de um grafo G arestas corresponde a um par (p,s) onde p é uma permutação de G e s é uma função $G \to \{0,1\}$ indicando se a aresta $\{u,v\}$ está escrita em ordem crescente ou não.

O número de representações, portanto, é

$$|G! \times \{0,1\}^G| = |G!||\{0,1\}^G| = |G|!|\{0,1\}|^{|G|} = m!2^m.$$

150. [default,ex:composicoes]

Quantas composições admite um inteiro n?

Resposta:

O número de composições de n é

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

151. [default,ex:composicoes-fracas]

Quantas composições fracas admite um inteiro n?

Resposta:

O número de composições fracas de n é

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} = 2^{n+k-1}.$$

152. [default,ex:bolas-identicas-e-urnas-nao-m-vazias]

De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas?

Resposta:

Cada distribuição corresponde a uma distribuição de $k - nm$ bolas idênticas por n urnas distintas, onde depois acrescentamos m bolas a cada urna, e portanto temos

$$\binom{n+(k-nm)-1}{n-1} = \binom{k-n(m-1)-1}{n-1}.$$

153. [default,ex:bolas-identicas-e-urnas-nao-f-vazias]

De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna u tenha pelo menos $m(u)$ bolas?

Resposta:

Sendo $[n]$ o conjunto das urnas e

$$s = \sum_{u=1}^{n} m(u),$$

cada distribuição corresponde a uma distribuição de $k-s$ bolas idênticas por n urnas distintas, onde depois acrescentamos $m(u)$ bolas a cada urna $u \in [n]$, e portanto temos

$$\binom{n+(k-s)-1}{n-1} = \binom{n+k-1-\sum_{u=1}^{n} m(u)}{n-1}.$$

154. [default,ex:solucoes-sum-xi]

Em função dos valores de k e n, quantas soluções inteiras não negativas (ou seja, $x_i \geq 0$, para todo $i \in [k]$) distintas admitem as seguintes equações.

(a) $\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$

(b) $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq n.$

Resposta:

(a) Estas são as k-composições fracas de n cujo número é $\binom{n+k-1}{k-1}$.

(b) Para cada $p \in [0..n]$, o número de soluções inteiras não negativas distintas de

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = p$$

é

$$\binom{p+k-1}{k-1}.$$

O número de soluções inteiras não negativas distintas de

$$0 \leq \sum_{i=1}^{k} x_i \leq n,$$

então é

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{p+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}.$$

(Jukna, 2001, exerc. 1.7) sugere provar a igualdade acima "via triângulo de Pascal".

A.11 Inclusão/Exclusão

155. [default,ex:multiplos]

Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5 ou por 7?

Generalize o raciocínio dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

Resposta:

Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos denotar por M_p o conjunto dos números em [1000] que são divisíveis por p ou, equivalentemente, que são múltiplos de p.

Observe que

$$M_p = \left\{ p, 2p, \ldots, \left\lfloor \frac{1000}{p} \right\rfloor p \right\},$$

e portanto

$$|M_p| = \left\lfloor \frac{1000}{p} \right\rfloor.$$

Fazendo

$$\begin{aligned} A_1 &= M_3, \\ A_2 &= M_5, \\ A_3 &= M_7, \end{aligned}$$

temos

$$|M_3 \cup M_5 \cup M_7| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{3}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

$$= (-1)^{1+1} \sum_{I\in\binom{3}{1}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + (-1)^{2+1} \sum_{I\in\binom{3}{2}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + (-1)^{3+1} \sum_{I\in\binom{3}{3}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

$$= \sum_{I\in\{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| - \sum_{I\in\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{I\in\{\{1,2,3\}\}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

$$= \left(\left|\bigcap_{i\in\{1\}} A_i\right| + \left|\bigcap_{i\in\{2\}} A_i\right| + \left|\bigcap_{i\in\{3\}} A_i\right|\right)$$

$$- \left(\left|\bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i\right| + \left|\bigcap_{i\in\{1,3\}} A_i\right| + \left|\bigcap_{i\in\{2,3\}} A_i\right|\right)$$

$$+ \left(\left|\bigcap_{i\in\{1,2,3\}} A_i\right|\right)$$

$$= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$$

$$= (|M_3| + |M_5| + |M_7|) - (|M_3 \cap M_5| + |M_3 \cap M_7| + |M_5 \cap M_7|) + (|M_3 \cap M_5 \cap M_7|)$$

$$= (|M_3| + |M_5| + |M_7|) - (|M_{15}| + |M_{21}| + M_{35}|) + (|M_{105}|)$$

$$= \left(\left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor\right) - \left(\left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor\right) + \left(\left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor\right)$$

$$= (333 + 200 + 142) - (66 + 47 + 28) + (9)$$

$$= 675 - 141 + 9 = 543$$

Generalizando o raciocínio, dados um inteiros positivos $n, d_1, d_2, \ldots, d_k$, o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \ldots, d_k$ é

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{k} M_{d_i}\right| &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[k]}{i}} \left|\bigcap_{j \in I} M_{d_j}\right| \\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[k]}{i}} \left|M_{\prod_{j \in I} d_j}\right| \\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[k]}{i}} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{j \in I} d_j} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^{|D|}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{D}{i}} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{d \in I} d} \right\rfloor,\end{aligned}$$

onde

$$D := \{d_1, \ldots, d_k\}.$$

156. [default,ex:impares-quadrados]

Qual o número de inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são ímpares ou quadrados de inteiros?

Generalize a resposta dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são ímpares ou quadrados de inteiros. Explique o raciocínio que leva à resposta.

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} I &:= \{n \in [1000] \mid n \text{ é ímpar}\}, \\ Q &:= \{n \in [1000] \mid n \text{ é quadrado de inteiro}\}, \end{aligned}$$

queremos determinar $|I \cup Q|$.

Como

$$|I \cup Q| = |I| \cup |Q| - |I \cap Q|,$$

e

$$|I| = \frac{|[1000]|}{2} = \frac{1000}{2} = 500,$$

e $n \in Q$ se e somente se $\sqrt{n} \in Q$ e

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{1000} < 32,$$

isto é

$$Q = \{n^2 \mid n \in [31]\},$$

e, portanto, $|Q| = 31$ e

$$I \cap Q = \{n \in Q \mid \sqrt{n} \in I\},$$

e daí,

$$|I \cap Q| = \frac{|[30]|}{2} + 1 = 16,$$

e

$$|I \cup Q| = |I| \cup |Q| - |I \cap Q| = 500 + 31 - 16 = 485.$$

157. [default,ex:solucoes-inteiras-limitadas]

Qual o número de soluções inteiras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, 0 \leq x_i \leq 5?$$

56

Resposta:

Seja R o conjunto das soluções inteiras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, 0 \leq x_i \leq 5.$$

Então

$$R = S - G$$

onde S é o conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1+x_2+x_3 = 12$ e $G \subseteq S$ é o conjunto das soluções em que $x_i > 5$ para algum $i \in [3]$.

Fazendo

$$G_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i > 5\},$$

temos

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3,$$

[56] **Sugestão:**
Para cada $i \in [3]$, considere o conjunto

$$G_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i > 5\},$$

onde S é o conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

e portanto

$$|G| = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} |\bigcap_{i \in I} G_i| = |G_1|+|G_2|+|G_3|-(|G_1 \cap G_2| + |G_1 \cap G_3| + |G_2 \cap G_3|)+|G$$

Seja agora $(x_1, x_2, x_3) \in G_1$ e seja

$$x := x_1 - 6.$$

Como $x_1 > 5$, então

$$x + x_2 + x_3 = 6, \tag{A.4}$$

e portanto, existe uma bijeção entre G_1 e o conjunto das soluções inteiras não negativas de (A.4), e portanto (C. ??)

$$|G_1| = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2}.$$

Por raciocínio análogo concluímos que

$$|G_1| = |G_2| = |G_3| = \binom{8}{2}.$$

Observe ainda que se

$$(x_1, x_2, x_3) \in G_1 \cap G_2,$$

então necessariamente

$$x_1 = x_2 = 6,$$

e consequentemente,

$$x_3 = 0,$$

e portanto,

$$|G_1 \cap G_2| = 1,$$

e, pelo mesmo raciocínio

$$|G_1 \cap G_2| = |G_1 \cap G_3| = |G_2 \cap G_3| = 1.$$

Mais ainda, concluímos também que

$$|G_1 \cap G_2 \cap G_3| = 0.$$

Então

$$|R| = |S-G| \overset{\text{C. ??}}{=} |S|-|G| \overset{\text{C. ??}}{=} \binom{12+3-1}{3-1} - (|G_1| + |G_2| + |G_3| - (|G_1 \cap G_2| + |G_1 \cap G_3|$$

158. [default,ex:funcoes-nao-injetoras-nem-sobrejetoras]

Dado $n \in \mathbb{N}$, quantas funções $[n] \to [n]$ não são injetoras nem sobrejetoras?

Resposta:

Fazendo

$I(n)$**:** funções injetoras $[n] \to [n]$,

$S(n)$**:** funções sobrejetoras $[n] \to [n]$,

$R(n)$**:** funções $[n] \to [n]$ que não são injetoras nem sobrejetoras,

temos

$$R(n) = [n]^{[n]} - (I(n) \cup S(n)).$$

Sabendo que, para toda função $f : A \to B$ onde $|A| = |B|$, f é sobrejetora se e somente se f é injetora, então $I(n) = S(n)$.

Logo

$$R(n) = [n]^{[n]} - I(n).$$

e consequentemente,

$$|R(n)| = |[n]^{[n]} - I(n)| = |[n]^{[n]}| - |I(n)| = n^n - n_n = n^n - n!$$

A.12 Exercícios a Incluir

A.12.1 Inteiros

1. [default,ex:n/k]

formular

Generalizar o Exercício 15 para $k \in [a..b]$ em vez de $(a+b)/2$

Resposta:

A.12.2 Provas por Indução

2. [default,ex:falso-fibonacci]

formular

   Aproveitar o fato de que $\lceil e^{n/2-1} \rceil$ é o n-ésimo número de Fibonacci para todo $n \leq 10$ Lovász, Pelikán, and Vesztergombi (2003).

   Resposta:

3. [default,ex:sequencia-aurea]

completar

   Golden strings and the rabbit constant

   Start with s1 = 1 and s2 = 10. Then define sn = sn-1 + sn-2 where + means string concatenation.

   The first few golden strings are

   1 10 101 10110 10110101

   The length of sn is Fn+1, the n+1st Fibonacci number. Also, sn contains Fn 1s and Fn-1 0s. (Source: The Glorious Golden Ratio).

   If we interpret the sn as the fractional part of a binary number, the sequence converges to the rabbit constant R = 0.7098034428612913...

   It turns out that R is related to the golden ratio ϕ by

   $R = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\lfloor i\phi \rfloor}$

   Resposta:

4. [default,ex:mdc-fibonacci]

completar

   gcd(fm,fn) = fgcd(m,n) Fibonacci GCD's, please

   The greatest common divisor of any two Fibonacci numbers is also a Fibonacci number! Which one? If you look even closer, you'll see the amazing general result:

   gcd(fm,fn) = fgcd(m,n).

   The proof is based on the following lemmas which are interesting in their own right. All can be proved by induction.

a) gcd(fn, fn-1) = 1, for all n b) fm+n = fm+1 fn + fm fn-1 c) if m divides n, then fm divides fn

and the ever important Euclidean Algorithm which states: if n=qm+r, then gcd(n,m)=gcd(m,r). For such n,m we have gcd(fm,fn) = gcd(fm,fqm+r) = gcd(fm,fqm+1fr+fqmfr-1) = gcd(fm,fqm+1fr) = gcd(fm,fr)

where the 2nd equality follows from (b), the 3rd equality from (c) noting that m divides qm, and the 4th equality from noting that fm divides fqm which is relatively prime to fqm+1. Thus gcd(fn,fm)=gcd(fm,fr)

which looks a lot like the Euclidean algorithm but with f's on top! For example since gcd(100,80)=gcd(80,20)=gcd(20,0)=20, then gcd(f100,f80)=gcd(f80,f20)=gcd

Resposta:

5. [default,ex:correcao-busca-binaria]

   Considere o seguinte algoritmo.

   Busca(x, v, a, b)

   ```
   Se a > b
       Devolva a − 1

   m ← ⌊(a+b)/2⌋
   Se x < v[m]
       Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
   Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
   ```

   Prove que Busca(x, v, a, b) é o único inteiro em $[a - 1..b]$ satisfazendo

   $$x < v[i] \text{ para todo } i \in [\text{Busca}(x, v, a, b) + 1..b]$$

   Resposta:

A.12.3 Recorrências

6. [default,ex:recorrencia-crescente]

   Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

   $$f(n) = af(n-1) + bf(n-2), \text{ para todo } n \geq 2.$$

   Sob que condições a função f será não–decrescente? Justifique sua resposta.

   Resposta:

   Basta $1 \leq \frac{f(0)}{f(1)} \leq fraca - 1b$?

7. [default,ex:f:iterada:decrescente]

c não pode ser 0. Se $c = 0$, então $f^k(n) < 0$, para algum k natural; mas não pode ser, porque $f^k(n)$ tem imagem no conjunto dos naturais. Só removi esse caso, em que $c = 0$, do domínio de c, passando a ser Z^+.

Sejam $c \in \mathbb{Z}^+$ e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) < n, \text{ para todo } n \geq c.$$

Prove que, para todo $n \geq c$

$$f^k(n) < c, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

Resposta:

Temos, inicialmente, que $f(n) < n,$ para todo $n \geq c.$

É claro que, ao passo que k aumenta, a partir de c, o ponto $(n, f(n))$ está sempre abaixo da bissetriz, (n, n). Nesse caso,

$$\lim_{k\to\infty} f^k(n) = 0.$$

Como $c \in \mathbb{Z}^+$, então, para algum $k \in \mathbb{N}$, $f^k(n) < c$.

8. [default,ex:f:iterada:inversa]

Seja $f\colon A \to A$ uma função bijetora. Prove que

(a) f^n é uma função bijetora para todo $n \in \mathbb{N}$.
(b) $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

(a) ...
(b) Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(f^{n+1})^{-1} &= (f^n \circ f)^{-1} \\
&= (f^n)^{-1} \circ (f)^{-1} \\
&= (f^{-1})^n \circ (f^{-1})^1 \\
&= (f^{-1})^{n+1}.
\end{aligned}$$

Além do mais, temos que

$$(f^0)^{-1} = (f^{-1})^0 \text{ se e somente se } i = i.$$

Portanto, para todo n natural, $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

9. [default,ex:heap]

formular

   Contagem do número de comparações na montagem de um heap

   Resposta:

10. [default,ex:cor:arvore-minimal]

    Uma árvore T é *minimal* se toda árvore de tamanho menor que T tem altura menor que a de T.

    Prove que se $h(T) = |T|$, então T é minimal.

    Resposta:

    Vamos provar por indução em $|T|$ que $h(T) = |T|$ é uma condição suficiente para T ser minimal.

    Seja T uma árvore de tamanho $n := |T|$ e suponha que T seja minimal.

    Adicionando um novo nó x em T como sendo filho de uma folha qualquer de T, teremos sua altura e seu tamanho incrementados por 1, além de permanecer minimal, o que completa o passo da indução.

    Além disso, tome a árvore mínima M, que satisfaz

    $$h(M) = |M| \implies M \text{ é minimal}$$

    e, além de completar a base da indução, completa, em conjunção com o supracitado passo da indução, a prova.

11. [default,ex:cor:tamanho-minimo-arvore]

    Prove que $h(T) \leq |T|$, para toda árvore T.

    Resposta:

    Seja T uma árvore.

    O processo de construção de T não permite que incrementemos $h(T)$ sem adicionar um novo nó à T; i.e., é impossível que $h(T)$ seja incrementado sem incrementar $|T|$. Isso nos conta que, necessariamente,

    $$h(T) + x \leq |T|$$

onde $x \in \mathbb{N}$ é a discrepância entre $|T|$ e $h(T)$ inicial. Mas como, inicialmente, temos

$$h(\lambda) = 0 = |\lambda|,$$

temos que $h(\lambda) - |\lambda| = 0 = x$ e, assim,

$$h(T) \leq |T|.$$

12. [default,ex:teo:arvore-maximal]

    Uma árvore T é *maximal* se toda árvore de tamanho maior que T tem altura maior que a de T.

    Prove que T é uma árvore maximal se e somente se $E(T)$ e $D(T)$ são árvores maximais.

    Resposta:

    Essa afirmação não é verdadeira. (As subárvores E(T) e D(T) serem maximais não é uma condição suficiente para que T seja maximal. Isso se dá porque E(T) e D(T) podem ser maximais mas de tamanhos diferentes e, com isso, T não será maximal.)

    $(\rightarrow)$
    Vamos provar que $T = (r(T), E(T), D(T))$ é uma árvore maximal implica $E(T)$ e $D(T)$ serem árvores maximais.

    Como $|T| = 2^{h(T)+1} - 1$, temos que

    $$\begin{aligned} |T - \{r(T)\}| &= 2^{h(T)+1} - 2 \\ &= \left(2^{h(T)} - 1\right) + \left(2^{h(T)} - 1\right) \\ &= \left(2^{h(E(T))+1} - 1\right) + \left(2^{h(D(T))+1} - 1\right) \end{aligned}$$

    onde os termos da última soma correspondem aos tamanhos de $E(T)$ e $D(T)$, denunciando que $E(T)$ e $D(T)$ são maximais.

A.12.4 Contagem (a enquadrar por tópicos)

13. [default,ex:kelvin]

formular

    Formalizar o seguinte argumento de Schrödinger (1944).

> Many examples have been devised to bring this fact home to an audience, none of them more impressive than the one used by Lord Kelvin: Suppose that you could mark the molecules in a glass of water; then pour the contents of the glass into the ocean and stir the latter thoroughly so as to distribute the marked molecules uniformly throughout the seven seas; if then you took a glass of water anywhere out of the ocean, you would find in it about a hundred of your marked molecules.

Resposta:

14. [default,ex:multiplos-3-4-5]

    formular

    How many positive integers not exceeding 2001 are multiples of 3 or 4 but not 5?

    Resposta:

    (Andreescu and Feng, 2004, ex 6.1)

15. [default,ex:quadrados-mod-m]

    formular

    How many numbers are squares mod$m$?

    Resposta: http://www.johndcook.com/blog/2008/11/19/how-many-numbers-are-squ

16. [default,ex:probabilidade-divisor]

    formular

    Estimar a probabilidade de que um número de $[n]$ seja divisor de n.

    Resposta:

17. [default,ex:inversoes-vetor]

    Cálculo de média e variância do número de inversões num vetor.

    Resposta:

    (Feller, 1971, sec. X.6, exemplo (a))

18. [default,ex:geracao-permutacoes]

recorrência do algoritmo de permutações

$$T_n = \begin{cases} f(n), & \textsf{se } n = 0, \\ n\ T_{n-1}\ +\ g(n), & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta:

Desenvolvendo temos

$$\begin{aligned}
T_n &= nT_{n-1} + g(n) \\
&= n((n-1)T_{n-2} + g(n-1)) + g(n) \\
&= n(n-1)T_{n-2} + ng(n-1) + g(n) \\
&= n(n-1)((n-2)T_{n-3} + g(n-2)) + ng(n-1) + g(n) \\
&= n(n-1)(n-2)T_{n-3} + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + g(n) \\
&\ \ \vdots \\
&= n(n-1)(n-2)(\ldots)(T_2) + \ldots + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + g(n) \\
&= n(n-1)(n-2)(\ldots)(2T_1 + g(2)) + \ldots + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + g(n) \\
&= n(n-1)(n-2)(\ldots)(2(1T_0 + g(1)) + g(2)) + \ldots + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + g(\\
&= n(n-1)(n-2)(\ldots)(2(1f(n) + g(1)) + g(2)) + \ldots + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + \\
&= n!f(n) + n!g(1) + (n!/2)g(2) + (n!/3!)g(3) + (n!/4!)g(4) + \ldots \\
&\quad + (n!/(n-2)!)g(n-2) + (n!/(n-1)!)g(n-1) + g(n) \\
&= n!f(n) + \sum_{i=1}^{n} (n!/i!)g(i) \\
&= n!f(n) + n! \sum_{i=1}^{n} (1/i!)g(i) \\
&= n!f(n) + n! \sum_{i=1}^{n} (g(i)/i!).
\end{aligned}$$

19. [default,ex:twitter]

De http://en.wikipedia.org/wiki/Twitter

> Nielsen Online reports that Twitter has a user retention rate of 40 percent. Many people drop the service after a month so the site may potentially reach only about 10% of all Internet users"

Será possível usar isso para um exercício de recorrências?

Resposta:

O crescimento em função do mês é dado pela recorrência c:

$$c_{n+1} = (1 + 0.4 - (0.4 - 0.1))c_n = 1.1c_n.$$

20. [default,ex:intersecao-vazia]

formular

Let S be a finite set, and let k be a positive integer. Determine the number of ordered k-tuples $(S_1, \ldots, S_k)$ of subsets of S such that $\bigcap_{i=1}^{k} = \emptyset$.

Resposta:

(Andreescu and Feng, 2004, p. 121, ex 6.10)

21. [default,ex:ingressos-quartos]

formular

The director of student activities in a boarding school wants to distribute 61 concert tickets to three dorms in such a way thatno dorm gets more tickets than the sum of the numbers of tickets the other two dorms get. In how many ways can this be done?

Resposta:

(Andreescu and Feng, 2004, ex 6.8)

22. [default,ex:cumprimentos2]

melhorar esse texto, está horrível

Na formatura de uma turma bastante segregada de 6 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas "considerados" exatamente uma vez e nenhum cumprimento foi trocado com os demais colegas.

Suponha que cada aluno tem exatamente k colegas considerados e nenhum outro aluno tem esses mesmos k alunos como considerados e, também, assuma que essa é uma relação simétrica (i.e., se A é um colega considerado de B, então B também é um colega considerado de A).

Quantos cumprimentos são distribuídos nessa formatura

(a) se $k = 1$?

(b) se $k = 2$?

(c) para um k arbitrário?

Resposta:

(a) 3.

(b) 6.

(c)
$$(0, 1, 2, 3, 4, 5) \to (0, 3, 6, 9, 12, 15) \, .$$

23. [default,ex:assembleia-deputados]

    Num certo país da Oceania, a câmara de deputados tem 10 membros dentre os quais 3 representam o Partido do Futebol (PF) enquanto os outros 7 representam o Partido das Celebridades (PC). Um problema é que, arbitrariamente, 4 dos 10 deputados são escolhidos ao acaso (uniformemente) para participar de programas de TV de modo que os 4 deputados escolhidos faltem na assembléia.

    (a) Qual é a probabilidade de, numa assembléia, 3 deputados do PF e 3 deputados do PC comparecerem?

    (b) Qual é a probabilidade de nenhum deputado do PF comparecer?

    Resposta:

24. [default,ex:banco]

    Uma pessoa[57] vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. Qual o número máximo de tentativas para acertar a senha?

    Resposta:

    1344

25. [default,ex:bug]

    Um programa P recebe como entrada uma string de n caracteres alfanuméricos (letras maiúsculas e algarísmos). Neste programa existe um bug não conhecido no qual certas entradas geram saídas erradas. As

[57] Fgv 1995

entradas onde acontece o bug são de dois tipos, as que terminam com o dígito "5" e tem 3 ou mais ocorrências da letra "X", ou as que terminam com a letra "G" e tem pelo menos uma subsequência de 2 caracteres repetidos. Supondo que uma equipe de testes decidiu gerar k casos de teste (strings de entrada com saídas corretas conhecidas) para tentar encontrar erros. Qual a probabilidade de esta bateria de testes encontrar o bug?

Resposta:

A chance de uma bateria de testes com k casos de testes encontrar o bug do programa P é a quantidade conjuntos de k casos de teste, que contém pelo menos uma entrada para a qual P gera uma saída errada, dividida pela quantidade total de conjuntos com k casos de teste.

Seja E o conjunto dos conjuntos de k casos de teste que contém pelo menos uma entrada para a qual P gera uma saída errada. E seja T o conjunto de todos os conjuntos com k casos de testes.

Assim, a probabilidade de uma bateria com k casos de teste encontrar o bug é $\frac{|E|}{|T|}$.

O conjunto de todas as entradas é o conjunto $S = \{A, \ldots, Z, 0, 1, \ldots, 9\}^n$, e $|S| = 36^n$. O conjunto das entradas do tipo 1 é o conjunto B_1 e do tipo 2 é o conjunto B_2.

Temos que B_1 é o conjnto S menos o conjunto das entradas que não começam com "5" ou começam com "5" e tem 0, 1 ou 2 ocorrências de "X". Ou seja

$$|B_1| = 36^n - (36^{n-1} \times 35 + 35^{n-1} + 35^{n-2} \times (n-1) + 35^{n-3} \times \binom{n-2}{2}).$$

Temos que B_2 é o conjunto S menos o conjunto das entradas que não terminam com "G" ou terminam com "G" e não tem subsequências com 2 caracteres repetidos. Ou seja

$$|B_2| = 36^n - (36^{n-1} \times 35 + 36 \times 35^{n-2}).$$

E o conjunto com as entradas que geram erro é o conjunto $B = B_1 \cup B_2$. Assim, o tamanho do conjunto dos conjuntos com k entradas sendo pelo menos uma entrada de B é o conjunto dos subconjuntos de k elementos de S menos o conjunto dos subconjuntos de k elementos de $S \setminus B$, ou seja,

$$E = \binom{S}{k} \setminus \binom{S \setminus B}{k}$$

e

$$|E| = \left|\binom{S}{k} \setminus \binom{S \setminus B}{k}\right| = \binom{|S|}{k} - \binom{|S| - |B|}{k} = \binom{36^n - |B_1| - |B2|}{k}.$$

Como

$$T = \binom{S}{k},$$

portanto,

$$|T| = \left|\binom{S}{k}\right| = \binom{|S|}{k} = \binom{36^n}{k}.$$

Logo, a probabilidade de uma bateria com k casos de teste encontrar o bug é

$$\frac{|E|}{|T|} = \frac{\binom{36^n - |B_1| - |B2|}{k}}{\binom{36^n}{k}}.$$

26. [default,ex:caixa-banco]

    Uma caixa automática de banco[58] só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário deseja fazer um saque de 100 reais. De quantas maneiras diferentes a caixa eletrônica poderá fazer esse pagamento?[59]

    Resposta:

    11

27. [default,ex:campeonato]

    Em um campeonato com 10 competidores serão distribuídas 1 medalha de ouro para o campeão, 2 medalhas de prata (idênticas) para os dois seguintes e 4 medalhas de bronze (também idênticas) para os 4 seguintes. De quantas maneiras diferentes as medalhas podem ser distribuídas?

[58] Fuvest 1990

[59] **Sugestão:** veja o Exercício 52

Resposta:

Seja C o conjunto dos competidores. Uma distribuição das medalhas corresponde a uma tripla (O, P, B) de subconjuntos de C, onde

(a) $O \subseteq C$ e $|O| = 1$,

(b) $P \subseteq C - O$ e $|P| = 2$,

(c) $B \subseteq C - (O \cup P)$ e $|B| = 4$,

isto é

(a) $O \in \binom{C}{1}$,

(b) $P \in \binom{C-O}{2}$,

(c) $B \in \binom{C-(O\cup P)}{4}$,

Então o número de escolhas possíveis é

$$\begin{aligned}\binom{|C|}{1}\binom{|C|-1}{2}\binom{|C|-3}{4} &= \binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{4} \\ &= \frac{10_1}{1!}\frac{9_2}{2!}\frac{7_4}{4!} = \frac{10}{1}\frac{9\times 8}{2\times 1}\frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1} = 10\times 9\times 4\times 7\times 5 \\ &= 200\times 63 = 12600.\end{aligned}$$

28. [default,ex:campeonato-xadrez]

Numa primeira fase de um campeonato de xadrez[60] cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

Resposta:

Seja n o número de jogadores. Então

$$\binom{n}{2} = 78,$$

ou seja

$$\frac{n(n-1)}{2} = 78,$$

ou seja

$$n^2 - n - 156 = 0,$$

[60] Fuvest 97

e portanto,

$$n = 13.$$

29. [default,ex:cursos]

    De quantas maneiras diferentes podemos escolher 5 cursos, em ordem de preferência, se o número total de cursos é 20?

    Resposta:

    Seja C o conjunto dos 20 cursos.

    Uma escolha de 5 cursos, em ordem de preferência é uma sequência ordenada de tamanho 5 de elementos de C sem repetição ou, equivalentemente, uma função injetora $[5] \to C$.

    O número de tais escolhas, portanto, é o número de tais funções que é (Corolário 64)

    $$|C_{[5]}| = |C|_{|[5]|} = 20_5 = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 1860480$$

30. [default,ex:par-de-zeros]

    Quantas sequências binárias de tamanho $n \geq 2$ contêm pelo menos um par de zeros consecutivos?

    Resposta:

    São $(n-2)!$ formas de dispor substrings sobre $\{0,1\}$ sobre cada uma das $n-1$ formas de dispor dois zeros consecutivos na string de tamanho n. Assim, são $(n-2)!(n-1) = (n-1)!$ strings binárias de tamanho n contendo pelo menos um par de zeros consecutivos.

31. [default,ex:um-par-de-zeros]

    Quantas sequências de binárias de tamanho 8 contêm exatamente um par de zeros consecutivos? (Note que $(1,1,0,0,0,1,1,1)$ não é uma delas.)

    Resposta:

32. [default,ex:paginas]

    Um estudante[61] terminou um trabalho que tinha n páginas. Para numerar todas essas páginas, iniciando com a página 1, ele escreveu 270 algarismos. Então o valor de n é:

[61] Fuvest 99

Resposta:

126.

33. [default,ex:senhas]

Um certo sistema exige que as senhas dos usuários sejam compostos somente de letras e números e tenham pelo menos entre 6 e 8, e pelo menos um caracter especial, um dígito, uma letra minúscula e uma maiúscula. Quantas senhas diferentes são possíveis?

Resposta:

completar

34. [default,ex:tamanho-arvore]

Quantas árvores de tamanho

(a) 2 existem?
(b) 3 existem?
(c) k existem?

(Repare que as árvores não são necessariamente binárias.)

Resposta:

A.12.5 Sequências

35. [default,ex:sha1]

formular

Contagem de hash sha1 e probabilidade de colisões

Resposta:

36. [default,ex:imagens-quadradas]

formular

Número de imagens quadradas em 2 cores, armazenadas em bytes.

Resposta:

37. [default,ex:matrizes-binarias]

formular

Número de matrizes binárias.

Resposta:

38. [default,ex:m+]

formular

Se M é uma matriz booleana quadrada então

$$M^+ = \sum_{i=1}^{k} M^i, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

Cálculo eficiente de M^+.

Resposta:

Seja M uma matriz booleana quadrada de dimensão n e seja $N = 2^n$.

Observe que as matrizes $M^i \colon 1 \leq i \leq N+1$ não podem ser todas distintas e daí,

$$\sum_{i=1}^{N} M^i = \sum_{i=1}^{N+1} M^i.$$

Consequentemente,

$$\sum_{i=1}^{N} M^i = \sum_{i=1}^{L} M^i, \text{ para todo } L \geq N,$$

e portanto,

$$M^+ = \sum_{i=1}^{N} M^i.$$

Como só existem 2^n matrizes quadradas booleanas de dimensão n distintas, ...

A.12.6 Funções e Subconjuntos

39. [default,ex:birthday-attack]

formular

birthday attack

Resposta:

A.12.7 Funções Injetoras e Bijetoras

40. [default,ex:algarismos]

Utilizando os algarismos-se[62] 1 e 2, podemos formar k números distintos com 5 algarismos. Qual o valor de k?

Resposta:

30

A.12.8 Permutações

41. [default,ex:permutacoes-ferroviarias]

completar

No Algoritmo F, abaixo, E e S são filas e P é uma pilha.

```
F(E)
  S ← fila vazia P ← pilha vazia
  Enquanto E não está vazia ou P não está vazia
    r ← um elemento sorteado de {0, 1}
    Se P está vazia
      r ← 0
    Se E está vazia
      r ← 1
    Se r = 0
      Empilha(Desenfila(E), P)
    Enfila(Desempilha(P), S)
    Devolva S
```

[62] Mackenzie 1999

(a)

Resposta:

A.12.9 Subconjuntos com Número Fixo de Elementos

42. [default,ex:cumprimentos]

    Numa formatura de 55 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas exatamente uma vez, parabenizando-o por ter se formado. Quantos cumprimentos foram trocados?

    Resposta:

    O primeiro aluno cumprimenta 54 alunos; o segundo, 53; o terceiro, 52; etc. São $\sum_{i=0}^{54} i = 1485$ cumprimentos.

43. [default,ex:cartas]

consertar

    Jogo de cartas: n jogadores distintos, cada um recebe k cartas de um baralho com 52 cartas distintas (13 de cada naipe).

    (a) De quantas formas distintas podemos distribuir as cartas entre os jogadores?

    (b) De quantas formas distintas podemos distribuir as cartas entre os jogadores de maneira que nenhum jogador fique com mais de 1 Ás?

    (c) De quantas formas distintas podemos distribuir as cartas entre os jogadores de maneira que cada jogador tenha no máximo x cartas de cada naipe?

    Resposta:

44. [default,ex:binom-2n-n]

    Seja n um natural qualquer. Prove que $\binom{2n}{n}$ é máximo dentre

    $$\left\{\binom{2n}{0}, \binom{2n}{1}, \ldots, \binom{2n}{n}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}, \binom{2n}{2n}\right\}.$$

    Resposta:

Tome dois naturais a e b de modo que $a + b = 2n$.

Respeitando a relação
$$0 \leq |a - b| \leq n,$$
o valor de a que maximiza
$$\frac{(a+b)!}{a!b!}$$
é exatamente o a que torna $a!b!$ mínimo em
$$\min\{a,b\}!^2 \leq a!b! \leq \max\{a,b\}!^2;$$
i.e., $a = b = n$.

45. [default,ex:permutacoes-ordenadas-9]

    Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número $463\,582\,719$?

    Resposta:

46. [default,ex:intersec-subconjuntos]

    Sejam k, m e n inteiros tais que $0 \leq m \leq k \leq n$.

    Prove que
    $$\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}.$$

    Resposta:

    Temos que
    $$\begin{aligned}\frac{k!}{m!(k-m)!}\frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{m!}\frac{1}{(k-m)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}.\end{aligned}$$

47. [default,ex:sena-acumulada]

formular

    (a) quantas apostas simples distintas na mega-sena são necessárias para que a chance de alguma acertar seja maior que 50%?

(b) probabilidade de alguém ganhar na mega-sena se há n apostas simples diferentes entre si.

(c) probabilidade de alguém ganhar na mega-sena se há n apostas simples, não necessariamente diferentes entre si.

Resposta:

(Stolfi and Gomide, 2011, cap. 10)

48. [default,ex:par=impar]

Prove que o número de subconjuntos de tamanho par de um conjunto finito é igual ao número de subconjuntos de tamanho ímpar.

Resposta:

(Stolfi and Gomide, 2011, cap. 10)

49. [default,ex:soma-binomiais]

formular

Prove que, para todos os naturais k e n com $n \geq k$, temos $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

Resposta:

(Stolfi and Gomide, 2011, cap. 10)

50. [default,ex:nota-7]

formular; generalizar

Uma prova tem 10 questões do tipo "verdadeiro ou falso". Quantas maneiras há de responder essas questões, sem deixar nenhuma em branco, de modo a acertar exatamente 7 delas? E acertar pelo menos 7 delas?

Resposta:

exercícios de (Stolfi and Gomide, 2011, cap. 10)

51. [default,ex:torneio]

formular

Número de jogos num torneio e número de maneiras de os resultados acontecerem.

Resposta:

A.12.10 Subconjuntos e Composições

52. [default,ex:combinacoes-lineares]

    formular

    reformular o exercício 153 de maneira a contar o número de soluções inteiras de $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n$

    Resposta:

    ver $\sum_{i=1}^{k} x_i, 0 \leq x_i \leq t$ em Tuffley (2009)

53. [default,ex:moedas-5-2]

    Num certo país, as moedas são só de dois tipos: 2 e 5 centavos. De quantas maneiras é possível trocar

    (a) 12 centavos
    (b) 20 centavos
    (c) 92 centavos

    por moedas de 2 e/ou de 5 centavos?

    Resposta:

A.12.11 Inclusão-Exclusão

54. [default,ex:divisores-n-quadrado]

    Let n be a positive integer. Develop a general formula for the number of positive integer divisors of n^2 that are smaller than n but do not divide n

    Resposta:

    De (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.6)

    resolver

55. [default,ex:permutacoes-um-ponto-fixo]

    Qual o número de permutações de um conjunto de n elementos com exatamente um ponto fixo?

    Resposta:

    De (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.3) resolver

56. [default,ex:primos-leq-111]

formular

Determine the number of primes less or equal to 111.

Resposta:

(Andreescu and Feng, 2004, p. 118, exemplo 6.2)

(Andreescu and Feng, 2004, p. 119)

The number of primes less than or equal to n is

$$n + k - 1 - \left| \bigcup_{i=1}^{k} A_{p_i} \right|$$

57. [default,ex:totient]

formular (Tuffley, 2009, ex. 9)

10. The Euler ϕ function is defined on the positive integers by

$$\phi(n) = |\{k : 1 \leq k \leq n, gcd(k, n) = 1\}|.$$

For example, $\phi(12) = 4$, because there are four positive integers (namely 1, 5, 7 and 11) that are less than or equal to 12 and co-prime to it.

Use the Principle of Inclusion-Exclusion to verify that

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

where p1 , . . . , pk are the distinct primes dividing n.

Resposta:

(Andreescu and Feng, 2004, p. 124, exemplo 6.6)

58. [default,ex:permutacoes-sem-i-i+1]

formular

9.(a) How many permutations are there of 1, 2, . . . , n, in which i is never followed by i + 1?

(b) How does the answer change, if in addition n may not be followed by 1?

Resposta:

(Tuffley, 2009, ex. 9)

59. [default,ex:re-emparelhamento]

formular

8. A class of 2n students has been grouped into n pairs. How many ways are there to re-pair the students so that every pair gets broken up? Hint: first show that there are ways to pair up 2k students. $(2k)!/(2^k k!)$

Resposta:

(Tuffley, 2009, ex. 8)

60. [default,ex:permutacoes-sem-12345-fixos]

formular

6. How many ways are there to arrange the integers 1, 2, 3, . . . , 10 so that none of 1, 2, 3, 4, 5 is in its natural position?

Resposta:

(Tuffley, 2009, ex. 4)

61. [default,ex:dado-repetido]

formular

In a certain gambling game, a six-sided die is rolled five times; the roller wins if the last roll is the same as one of the previous rolls. What is the probability of winning this game?

Resposta:

(Tuffley, 2009, ex. 4)

A.12.12 Partições

62. [default,ex:stirling]

formular

ver na WikiPedia

(a) Stirling numbers of the second kind

(b) Bell number

Resposta:

A.12.13 Funções Sobrejetoras

63. [default,ex:funcoes-sobrejetoras-n-em-n-igual-fatorial-n]Prove que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^n = n!.$$

Resposta:

OBS: Me parece muito forçado, mas é o que deu pra fazer. (AG)

Usando que o número de funções sobrejetoras de $[n] \to [n]$ é

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^n,$$

que o número de funções injetoras de $[n] \to [n]$ é

$$n!,$$

e que estes dois conjuntos são iguais, temos que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^n = n!.$$

.

A.13 Exercícios Aposentados

A.13.1 Elementos de Lógica

1. [default,ex:teo:conectivos]

   Prove que, se A e B são proposições, então as seguintes proposições são verdadeiras.

   (a) A ou (não A),

   (b) não (A e (não A)),

   (c) A ou V,

   (d) não (A e F),

   Resposta:

   (a) Vamos provar que se A é uma proposição, então A ou (não A). Seja A uma proposição e suponha A. Então,

   $$\begin{aligned}(A \text{ ou } (\text{ não } A)) &\equiv ((V) \text{ ou } (\text{ não } (V))) \\ &\equiv (V \text{ ou } F) \\ &\equiv (V),\end{aligned}$$

   já que a disjunção de duas proposições é verdadeira quando pelo menos uma das proposições é verdadeira.
   Por outro lado, suponha (não A). Então,

   $$\begin{aligned}(A \text{ ou } (\text{ não } A)) &\equiv (F \text{ ou } (\text{ não } F)) \\ &\equiv (F \text{ ou } V) \\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

   Logo, A ou (não A).

   (b) Vamos provar que se A é uma proposição, então não (A e (não A)). Seja A uma proposição e suponha A. Então,

   $$\begin{aligned}\text{não } (A \text{ e } (\text{ não } A)) &\equiv \text{ não } (V \text{ e } (\text{ não } V)) \\ &\equiv \text{ não } (V \text{ e } F) \\ &\equiv \text{ não } (F) \\ &\equiv V.\end{aligned}$$

Agora, suponha ($\textsf{não}$ A). Então,

$$\begin{aligned}\textsf{não}\ (A\ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ A)) &\equiv\ \textsf{não}\ (F\ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ F))\\ &\equiv\ \textsf{não}\ (F\ \textsf{e}\ V)\\ &\equiv\ \textsf{não}\ (F)\\ &\equiv V.\end{aligned}$$

Logo, $\textsf{não}\ (A\ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ A))$.

(c) Vamos provar que se A é uma proposição, então A $\textsf{ou}$ V.
Seja A uma proposição e suponha A. Então,

$$\begin{aligned}(A\ \textsf{ou}\ V) &\equiv (V\ \textsf{ou}\ V)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Agora, suponha ($\textsf{não}$ A). Então,

$$\begin{aligned}(A\ \textsf{ou}\ V) &\equiv (F\ \textsf{ou}\ V)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Logo, A $\textsf{ou}$ V.

(d) Vamos provar que se A é uma proposição, então ($\textsf{não}$ $(A\ \textsf{e}\ F)$).
Seja A uma proposição e suponha A. Então,

$$\begin{aligned}(\ \textsf{não}\ (A\ \textsf{e}\ F)) &\equiv (\ \textsf{não}\ ((V)\ \textsf{e}\ F))\\ &\equiv (\ \textsf{não}\ F)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Agora, suponha ($\textsf{não}$ A). Então,

$$\begin{aligned}(\ \textsf{não}\ (A\ \textsf{e}\ F)) &\equiv (\ \textsf{não}\ ((F)\ \textsf{e}\ F))\\ &\equiv (\ \textsf{não}\ F)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Logo, ($\textsf{não}$ $(A\ \textsf{e}\ F)$).

2. [default,ex:teo:equiv]

Prove que, se A, B e C são proposições, então os seguintes pares de proposições são equivalentes.

(a) A ou $F \equiv A$,

(b) A e $V \equiv A$,

(c) A e $(B$ ou $C) \equiv (A$ e $B)$ ou $(A$ e $C)$,

(d) A ou $(B$ e $C) \equiv (A$ ou $B)$ e $(A$ ou $C)$,

(e) não $(A$ ou $B) \equiv ($ não $A)$ e $($ não $B)$,

(f) não $(A$ e $B) \equiv ($ não $A)$ ou $($ não $B)$,

Resposta:

(a) Vamos provar que se A é uma proposição, então $(A \text{ ou } F) \equiv A$.
Seja A uma proposição e suponha A. Então,

$$\begin{aligned}((A \text{ ou } F) \equiv A) &\equiv ((V \text{ ou } F) \equiv V) \\ &\equiv ((V) \equiv V) \\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha que

$$\begin{aligned}((A \text{ ou } F) \equiv A) &\equiv ((F \text{ ou } F) \equiv F) \\ &\equiv ((F) \equiv F) \\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Logo, $(A \text{ ou } F) \equiv V$.

(b) Vamos provar que se A é uma proposição, então $(A \text{ e } V) \equiv A$.
Seja A uma proposição e suponha A. Então,

$$\begin{aligned}((A \text{ e } V) \equiv A) &\equiv ((V \text{ e } V) \equiv V) \\ &\equiv ((V) \equiv V) \\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha $(\text{ não } A)$. Então,

$$\begin{aligned}((A \text{ e } V) \equiv A) &\equiv ((F \text{ e } V) \equiv F) \\ &\equiv ((F) \equiv F) \\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Portanto, $(A \text{ e } V) \equiv A$.

(c) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então $(A \text{ e } (B \text{ ou } C)) \equiv ((A \text{ e } B) \text{ ou } (A \text{ e } C))$.

Sejam A, B e C proposições e suponha, inicialmente, A.

Temos que

$$(A \text{ e } (B \text{ ou } C)) \equiv (V \text{ e } (B \text{ ou } C)) \equiv (B \text{ ou } C),$$

enquanto

$$((A \text{ e } B) \text{ ou } (A \text{ e } C)) \equiv (((V) \text{ e } B) \text{ ou } (V \text{ e } C)) \equiv (B \text{ ou } C)$$

e, portanto, equivalentes.

Agora, suponha ($\text{não } A$). Então,

$$(A \text{ e } (B \text{ ou } C)) \equiv (F \text{ e } (B \text{ ou } C)) \equiv (F)$$

enquanto

$$((A \text{ e } B) \text{ ou } (A \text{ e } C)) \equiv ((F \text{ e } B) \text{ ou } (F \text{ e } C)) \equiv (F \text{ ou } F) \equiv (F)$$

e, portanto, também equivalentes.

Portanto, só pode ser que

$$(A \text{ e } (B \text{ ou } C)) \equiv ((A \text{ e } B) \text{ ou } (A \text{ e } C)).$$

(d) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então $(A \text{ ou } (B \text{ e } C)) \equiv ((A \text{ ou } B) \text{ e } (A \text{ ou } C))$.

Sejam A, B e C proposições e suponha, inicialmente, A. Então,

$$\begin{aligned}(A \text{ ou } (B \text{ e } C)) &\equiv ((V) \text{ ou } (B \text{ e } C)) \\ &\equiv (V \text{ ou } (B \text{ e } C) \\ &\equiv (V)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((A \text{ e } B) \text{ ou } (A \text{ e } C)) &\equiv ((V \text{ ou } B) \text{ e } (V \text{ ou } C)) \\ &\equiv ((V) \text{ e } (V)) \\ &\equiv (V)\end{aligned}$$

e, portanto, $(A \text{ ou } (B \text{ e } C))$ é equivalente a $((A \text{ e } B) \text{ ou } (A \text{ e } C))$, sempre que A é verdadeiro.

Agora, suponha ($\textsf{não}$ A). Então, temos que

$$\begin{aligned}(A \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C)) &\equiv (F \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C))\\ &\equiv (B \textsf{ e } C)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((A \textsf{ ou } B) \textsf{ e } (A \textsf{ ou } C)) &\equiv (((F) \textsf{ ou } B) \textsf{ e } ((F) \textsf{ ou } C))\\ &\equiv ((B) \textsf{ e } (C))\\ &\equiv (B \textsf{ e } C).\end{aligned}$$

Como $(B \textsf{ e } C) \equiv (B \textsf{ e } C)$, então

$$(A \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C)) \equiv ((A \textsf{ ou } B) \textsf{ e } (A \textsf{ ou } C)),$$

sempre que $A \equiv F$.
Portanto, para quaisquer valores verdades de A, B e C,

$$(A \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C)) \equiv ((A \textsf{ ou } B) \textsf{ e } (A \textsf{ ou } C)).$$

(e) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$\textsf{não } (A \textsf{ ou } B) \equiv ((\textsf{ não } A) \textsf{ e } (\textsf{ não } B)).$$

Sejam A, B e C proposições e suponha A. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\textsf{não } (A \textsf{ ou } B) &\equiv \textsf{ não } (V \textsf{ ou } B)\\ &\equiv \textsf{ não } (V)\\ &\equiv (F)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\textsf{ não } A) \textsf{ e } (\textsf{ não } B)) &\equiv ((\textsf{ não } V) \textsf{ e } (\textsf{ não } B))\\ &\equiv (F \textsf{ e } (\textsf{ não } B))\\ &\equiv (F)\end{aligned}$$

e, portanto, se $A \equiv V$, então

$$\textsf{não } (A \textsf{ ou } B) \equiv ((\textsf{ não } A) \textsf{ e } (\textsf{ não } B)).$$

Por outro lado, suponha ($\textsf{não}$ A). Então,

$$\begin{aligned}\textsf{não } (A \textsf{ ou } B) &\equiv \textsf{ não } ((F) \textsf{ ou } B)\\ &\equiv \textsf{ não } (B)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\text{ não } A) \text{ e } (\text{ não } B)) &\equiv (\text{ não } (F) \text{ e } (\text{ não } B)) \\ &\equiv (V \text{ e } (\text{ não } B)) \\ &\equiv (\text{ não } B)\end{aligned}$$

e, portanto, se $A \equiv F$, então

$$\text{não } (A \text{ ou } B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ e } (\text{ não } B)).$$

Portanto, se A, B e C são proposições, temos que

$$\text{não } (A \text{ ou } B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ e } (\text{ não } B)).$$

(f) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$\text{não } (A \text{ e } B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } B)).$$

Sejam A, B e C proposições e suponha A. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\text{não } (A \text{ e } B) &\equiv \text{ não } (V \text{ e } B) \\ &\equiv \text{ não } (B)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } B)) &\equiv ((\text{ não } V) \text{ ou } (\text{ não } B)) \\ &\equiv (F \text{ ou } (\text{ não } B)) \\ &\equiv (\text{ não } B)\end{aligned}$$

e, portanto, se $A \equiv V$, então

$$\text{não } (A \text{ e } B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } B)).$$

Por outro lado, suponha (não A). Então,

$$\begin{aligned}\text{não } (A \text{ e } B) &\equiv \text{ não } ((F) \text{ e } B) \\ &\equiv \text{ não } (F) \\ &\equiv (V)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } B)) &\equiv (\text{ não } (F) \text{ ou } (\text{ não } B)) \\ &\equiv (V \text{ ou } (\text{ não } B)) \\ &\equiv (V)\end{aligned}$$

e, portanto, se $A \equiv F$, então

$$\textsf{não } (A \textsf{ e } B) \equiv ((\textsf{ não } A) \textsf{ ou } (\textsf{ não } B)).$$

Portanto, se A, B e C são proposições, temos que

$$\textsf{não } (A \textsf{ e } B) \equiv ((\textsf{ não } A) \textsf{ ou } (\textsf{ não } B)).$$

3. [default,ex:teo:negacao-quantificadores]

   Seja $P(x)$ um predicado e X um conjunto. Prove que são equivalentes

   (a) $(\textsf{ não } (P(x), \textsf{ para todo } x \in X))$ e $((\textsf{ não } P(x)), \textsf{ para algum } x \in X)$.

   (b) $(\textsf{ não } (P(x), \textsf{ para algum } x \in X))$ e $((\textsf{ não } P(x)), \textsf{ para todo } x \in X)$.

   Resposta:

   (a) Vamos provar que se X é um conjunto e, para qualquer que seja $x \in X, P(x)$ é uma proposição, então

   $$\neg(P(x), \textsf{ para todo } x \in X) \equiv (\neg P(x)), \textsf{ para algum } x \in X.$$

   Denotemos por X_k o conjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de k elementos. Primeiramente, temos que

   $$\neg(P(x), \textsf{ para todo } x \in \emptyset) \equiv ((\neg P(x)), \textsf{ para algum } x \in \emptyset$$

   se e somente se

   $$\neg(V) \equiv F.$$

   (Usando nossa notação, temos que

   $$\neg(\forall x \in X_0, P(x)) \equiv (\exists x \in X_0, (\neg P(x))).)$$

   Suponha que exista um $n \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $k \in [0..n]$,

   $$\neg(\forall x \in X_k, P(x)) \equiv (\exists x \in X_k, (\neg P(x))).$$

   Repare que

   $$\neg(\forall X_n \in X_n, P(x)) \equiv \exists x \in X_n, (\neg P(x))$$

é equivalente a

$$\neg(\forall x \in X_n, P(x)) \text{ ou } (\neg P(x_{n+1})) \equiv (\exists x \in X_n, (\neg P(x))) \text{ ou } (\neg P(x_{n+1}));$$

isto é,

$$\neg(\forall x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}, P(x)) \equiv \exists x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}, (\neg P(x));$$

ou seja,

$$\neg(\forall x \in X_{n+1}, P(x)) \equiv \exists x \in X_{n+1}, (\neg P(x)).$$

Portanto, se

$$\neg(\forall x \in X_n, P(x)) \equiv \exists x \in X_n, (\neg P(x)),$$

então

$$\neg(\forall x \in X_{n+1}, P(x)) \equiv \exists x \in X_{n+1}, (\neg P(x)),$$

A título de facilitar a visualização, seja $A(a)$ o predicado dado por

$$\neg(\forall x \in X_a, P(x)) \equiv \exists x \in X_a, (\neg P(x)).$$

O que temos, até então, é que estas implicações são verdadeiras

$$\begin{aligned} A(n) &\implies A(n+1) \\ A(n+1) &\implies A(n+2) \\ A(n+2) &\implies A(n+3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $A(0) \equiv V$ —demonstrado no início da prova—, então, por Modus Ponens, temos que

$$A(0) \text{ e } A(1) \text{ e } A(2) \text{ e } \ldots;$$

isto é,

$$A(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, se X é um conjunto e P um predicado sobre X, então

$$\text{não } (P(x), \text{ para todo } x \in X) \equiv ((\text{ não } P(x)), \text{ para algum } x \in X).$$

(b) Vamos provar que se X é um conjunto e, para qualquer que seja $x \in X, P(x)$ é uma proposição, então

$$((\text{ não } P(x)), \text{ para todo } x \in X) \equiv \text{ não } (P(x), \text{ para algum } x \in X)\,.$$

Denotemos por X_k o conjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de k elementos. Primeiramente, temos que

$$\forall x \in \emptyset(\neg P(x)) \equiv \neg(\exists x \in \emptyset(P(x)))$$

se e somente se

$$\begin{aligned} V &\equiv \neg(F) \\ &\equiv V. \end{aligned}$$

(Usando nossa notação, temos que

$$\forall x \in X_0(\neg P(x)) \equiv \neg(\exists x \in X_0(P(x))).)$$

Suponha que exista um $n \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $k \in [0..n]$,

$$\forall x \in X_k(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_k(P(x))\right).$$

Repare que

$$\forall x \in X_n(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_n(P(x))\right)$$

é equivalente a

$$\forall x \in X_n(\neg P(x)) \text{ e } (\neg P(x_{n+1})) \equiv \neg\left(\exists x \in X_n(P(x))\right) \text{ e } (\neg P(x_{n+1}));$$

isto é,

$$\begin{aligned} \forall x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}(\neg P(x)) &\equiv \neg\left((\exists x \in X_n(P(x))) \text{ e } P(x_{n+1})\right) \\ &\equiv \neg\left(\exists x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}(P(x))\right); \end{aligned}$$

ou seja,

$$\forall x \in X_{n+1}(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_{n+1}(P(x))\right).$$

Portanto, se

$$\forall x \in X_n(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_n(P(x))\right),$$

então
$$\forall x \in X_{n+1}(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_{n+1}(P(x))\right).$$

A título de facilitar a visualização, seja $A(a)$ o predicado dado por

$$\forall x \in X_a(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_a(P(x))\right).$$

O que temos, até então, é que estas implicações são verdadeiras

$$\begin{aligned} A(n) &\implies A(n+1) \\ A(n+1) &\implies A(n+2) \\ A(n+2) &\implies A(n+3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $A(0) \equiv V$ —demonstrado no início da prova—, então, por Modus Ponens, temos que

$$A(0) \text{ e } A(1) \text{ e } A(2) \text{ e } \ldots;$$

isto é,
$$A(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, se X é um conjunto e P um predicado sobre X, então

$$((\text{ não } P(x)), \text{ para todo } x \in X) \equiv \text{ não } (P(x), \text{ para algum } x \in X).$$

4. [default,ex:quantificadores]
Seja $P(x, y)$ um predicado.

(a) São equivalentes as proposições

$$(P(x, y), \text{ para todo } x \in X), \text{ para todo } y \in Y,$$

e
$$(P(x, y), \text{ para todo } y \in Y), \text{ para todo } x \in X?$$

(b) São equivalentes as proposições

$$(P(x, y), \text{ para algum } x \in X), \text{ para algum } y \in Y,$$

e
$$(P(x, y), \text{ para algum } y \in Y), \text{ para algum } x \in X?$$

(c) São equivalentes as proposições

$$(P(x,y), \text{ para algum } x \in X), \text{ para todo } y \in Y,$$

e

$$(P(x,y), \text{ para todo } x \in X), \text{ para algum } y \in Y?$$

Justifique.

Resposta:

(a) São equivalentes, conforme a demonstração que segue.
Sejam $Y^r \subset Y$ e $y^r \in Y - Y^r$ e suponha que

$$\forall x \in X \forall y \in Y^r, P(x,y) \equiv \forall y \in Y^r \forall y \in Y, P(x,y).$$

Vamos provar que

$$\forall x \in X \forall y \in Y^r \cup \{y^r\}, P(x,y) \equiv \forall y \in Y^r \cup \{y^r\} \forall x \in X, P(x,y).$$

Temos, por um lado, que

$$\begin{aligned} \forall x \in X \forall y \in Y^r \cup \{y^r\}, P(x,y) &\equiv (\forall x \in X \forall y \in Y, P(x,y)) \text{ e } (\forall x \in X \forall y \in \{y^r\}, P(x, \\ &\equiv (\forall x \in X \forall y \in Y, P(x,y)) \text{ e } (\forall x \in X, P(x,y^r)) \end{aligned}$$

enquanto, por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \forall y \in Y^r \cup \{y^r\} \forall x \in X, P(x,y) &\equiv (\forall y \in Y^r \forall x \in X, P(x,y)) \text{ e } \forall y \in \{y^r\} \forall x \in X, P(x, \\ &\equiv (\forall y \in Y^r \forall x \in X, P(x,y)) \text{ e } \forall x \in X, P(x,y^r). \end{aligned}$$

Repare que

$$(\forall x \in X \forall y \in Y^r, P(x,y)) \text{ e } \forall x \in X, P(x,y^r) \equiv (\forall y \in Y^r \forall x \in X, P(x,y)) \text{ e } \forall x \in X, P$$

se, e somente e,

$$\forall x \in X \forall y \in Y, P(x,y) \equiv \forall y \in Y \forall x \in X, P(x,y),$$

que é nossa hipóteses e, portanto, esses predicados são equivalentes.
Dessa forma, deduzimos que esses predicados são equivalentes mostrando a equivalência incrementalmente, cada passo com um elemento de $Y - Y^r$, até que $Y^r = Y$. Isso é verdade desde

que esses predicados sejam equivalentes para um Y^r de tamanho mínimo.

Além disso, tomando $Y^r = \emptyset$, temos que esses predicados são equivalentes, uma vez que

$$\forall x \in X \forall y \in \emptyset, P(x,y) \equiv \forall x \in X, V \equiv V$$

e

$$\forall y \in \emptyset \forall x \in X, P(x,y) \equiv V.$$

Portanto, os predicados

$$P(x,y), \text{ para todo } x \in X, \text{ para todo } y \in Y$$

e

$$P(x,y), \text{ para todo } y \in Y, \text{ para todo } x \in X$$

são equivalentes.

(b) São equivalentes, conforme a demonstração que segue.

Sejam $Y^r \subset Y$ e $y^r \in Y - Y^r$ e suponha que

$$\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y) \equiv \exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y).$$

Vamos provar que

$$\exists x \in X \exists y \in Y^r \cup \{y^r\}, P(x,y) \equiv \exists y \in Y^r \cup \{y^r\} \exists x \in X, P(x,y).$$

Temos, por um lado, que

$$\begin{aligned}\exists x \in X \exists y \in Y^r \cup \{y^r\}, P(x,y) &\equiv (\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y)) \text{ ou } (\exists x \in X \exists y \in \{y^r\}, P(\\ &\equiv (\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y)) \text{ ou } (\exists x \in X, P(x,y^r))\end{aligned}$$

enquanto, por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\exists y \in Y^r \cup \{y^r\} \exists x \in X, P(x,y) &\equiv (\exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y)) \text{ ou } (\exists y \in \{y^r\} \exists x \in X, P(\\ &\equiv (\exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y)) \text{ ou } (\exists x \in X, P(x,\end{aligned}$$

Veja que, conforme nossa hipótese,

$$\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y) \equiv \exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y)$$

e, consequentemente,

$$(\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y)) \text{ ou } (\exists x \in X, P(x,y^r))$$

é equivalente a

$$(\exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y)) \text{ ou } (\exists x, P(x,y^r)).$$

Além disso, tomando $Y^r = \emptyset$, temos que esses predicados em questão são equivalentes porque

$$\begin{aligned}\exists x \in X \exists y \in \emptyset, P(x,y) &\equiv \exists x \in X, F \\ &\equiv F\end{aligned}$$

e

$$\exists y \in \emptyset \exists x \in X, P(x,y) \equiv F.$$

Portanto,

$$\exists x \in X \exists y \in Y, P(x,y) \equiv \exists y \in Y \exists x \in X, P(x,y).$$

(c) Isso é falso. Tome, como contra-exemplo, os conjuntos

$$Y = \{5,6\} \text{ e } X = \{2,3\}$$

e o predicado

$$P(x,y) = \begin{cases} V, & \text{se } x \text{ divide } y; \\ F, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desse modo, os predicados apresentam valor verdade diferentes.

5. [default,ex:teo:implicaou]

   Justifique cada passagem da prova do Teorema teo:implicaou discutida em aula, apontando o respectivo item dos Teoremas teo:conectivos e teo:equiv utilizados.

   Resposta:

6. [default,ex:cor:contra-exemplo]

   Justifique cada passagem da prova do Corolário cor:contra-exemplo discutida em aula, apontando os respectivos itens dos Teoremas teo:conectivos e teo:equiv utilizados.

   Resposta:

7. [default,ex:cor:contraimplicacao]Prove que $((A \implies B)$ e $(A \implies (\text{ não } B)))$ se e somente se $A = F$.

Resposta:

Temos que provar que

$$((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \text{ se e somente se } A = F$$

Temos, portanto, que provar duas coisas:

(a) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \implies A = F$;

(b) $A = F \implies ((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B)))$.

(a) Suponhamos que

$$((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B)))$$

Temos que provar que $A = F$. Suponhamos, então, que $A = V$. Assim, temos que

$$V \implies B$$

e que

$$V \implies (\text{ não } B)$$

Como $V \implies B$, temos que $B = V$, pois caso $B = F$, teríamos que $V \not\Longrightarrow B$. Como $V \implies (\text{ não } B)$, pelo mesmo motivo temos que $(\text{ não } B) = V$ e, portanto, que $B = F$, o que é um absurdo.

Portanto, $A = F$.

(b) Suponhamos que $A = F$. Temos que provar que

$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))$$

Do Teorema 1, temos que

$$A \implies B$$

e que

$$A \implies (\text{ não } B)$$

Portanto,

$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))$$

8. [default,ex:cor:contrapositiva]Prove que $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$ para quaisquer valores de A e B.

Resposta:

Vamos provar que $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$, para quaisquer valores de A e B.

Temos que
$$A \implies B = (\text{ não } A) \text{ ou } B$$
enquanto
$$\begin{aligned}(\text{ não } B) \implies (\text{ não } A) &= (\text{ não } (\text{ não } B)) \text{ ou } (\text{ não } A)\\ &= B \text{ ou } (\text{ não } A).\end{aligned}$$

Como $(\text{ não } A) \text{ ou } B = B \text{ ou } (\text{ não } A)$, então
$$A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A).$$

Logo, $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$, para quaisquer valores de A e B.

9. [default,ex:cor:implicacao-negada]Prove que $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$, para quaisquer valores de A e B.

Resposta:

Temos que provar $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$. Do Teorema teo:implicaou, temos que
$$A \implies B = (\text{ não } A) \text{ ou } B$$

Do Teorema teo:duplanegacao, temos que
$$\begin{aligned}(\text{ não } A) \text{ ou } B &= (\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } (\text{ não } B))\\ &= (\text{ não } (\text{ não } B)) \text{ ou } (\text{ não } A)\end{aligned}$$

E, de novo, pelo Teorema teo:implicaou, temos que
$$(\text{ não } (\text{ não } B)) \text{ ou } (\text{ não } A) = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$$

Portanto,
$$A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A).$$

10. [default,ex:paralgum-paratodo]

Sendo X um conjunto qualquer, prove que $\textsf{não}\ (\ \textsf{para algum}\ x \in X, A(x)) = \textsf{para todo}\ x \in X, (\ \textsf{não}\ A(x))$.

Resposta:

Temos que provar que

$$\textsf{não}\ \big(\ \textsf{para algum}\ x \in X, A(x)\big) = \ \textsf{para todo}\ x \in X, \big(\ \textsf{não}\ A(x)\big)$$

Da definição de quantificador existencial, temos que

$$\begin{gathered}\textsf{não}\ \big(\ \textsf{para algum}\ x \in X, A(x)\big) = \\ \textsf{não}\ \Big(\ \textsf{não}\ \big(\ \textsf{não}\ A(x)\big)\ \textsf{para algum}\ x \in X\Big) = \\ \big(\ \textsf{não}\ A(x)\big)\ \textsf{para todo}\ x \in X\end{gathered}$$

Portanto,

$$\textsf{não}\ \big(\ \textsf{para algum}\ x \in X, A(x)\big) = \ \textsf{para todo}\ x \in X, \big(\ \textsf{não}\ A(x)\big)$$

11. [default,ex:paratodo-paralgum]

Sendo X um conjunto qualquer, prove que $\textsf{não}\ (\ \textsf{para todo}\ x \in X, A(x)) = \textsf{para algum}\ x \in X, (\ \textsf{não}\ A(x))$.

Resposta:

Temos que provar que

$$\textsf{não}\ \big(\ \textsf{para todo}\ x \in X, A(x)\big) = \ \textsf{para algum}\ x \in X, \big(\ \textsf{não}\ A(x)\big)$$

Da definição de quantificador universal, temos que

$$\begin{gathered}\textsf{não}\ \big(\ \textsf{para todo}\ x \in X, A(x)\big) = \\ \textsf{não}\ \Big(\ \textsf{não}\ \big(\ \textsf{não}\ A(x)\big)\ \textsf{para todo}\ x \in X\Big) = \\ \big(\ \textsf{não}\ A(x)\big)\ \textsf{para algum}\ x \in X\end{gathered}$$

Portanto,

$$\textsf{não}\ \big(\ \textsf{para todo}\ x \in X, A(x)\big) = \ \textsf{para algum}\ x \in X, \big(\ \textsf{não}\ A(x)\big)$$

12. [default,ex:ponens]

Prove a implicação

$$((A \implies B) \text{ e } A) \implies B.$$

Esta implicação é conhecida como *Modus Ponens* e forma o esquema argumentativo das chamadas provas dedutivas, dentre as quais enconta-se o esquema de prova por indução.

Resposta:

Temos que provar que, quaisquer que sejam os valores de A e B,

$$((A \implies B) \text{ e } A) \implies B = V$$

Sabemos, do Teorema teo:implicaou, que

$$\begin{aligned}((A \implies B) \text{ e } A) \implies B &= (((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } A) \implies B \\ &= (\text{ não } (((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } A) \text{ ou } B\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema teo:distributivae, ficamos com

$$(\text{ não } (((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } A) \text{ ou } B = (\text{ não } (((\text{ não } A) \text{ e } A) \text{ ou } (B \text{ e } A))) \text{ ou } B$$

e, aplicando o Teorema teo:contradicao, com

$$\begin{aligned}(\text{ não } (((\text{ não } A) \text{ e } A) \text{ ou } (B \text{ e } A))) \text{ ou } B &= (\text{ não } (F \text{ ou } (B \text{ e } A))) \text{ ou } B \\ &= (\text{ não } (B \text{ e } A)) \text{ ou } B\end{aligned}$$

Do Corolário cor:demorgan temos que

$$\begin{aligned}(\text{ não } (B \text{ e } A)) \text{ ou } B &= ((\text{ não } B) \text{ ou } (\text{ não } A)) \text{ ou } B \\ &= ((\text{ não } B) \text{ ou } B) \text{ ou } (\text{ não } A)\end{aligned}$$

e, do Teorema teo:completude,

$$((\text{ não } B) \text{ ou } B) \text{ ou } (\text{ não } A) = V \text{ ou } (\text{ não } A) = V$$

Portanto,

$$((A \implies B) \text{ e } A) \implies B = V$$

13. [default,ex:produto-racional-irracional]É verdade que se q é racional e x não é racional então qx não é racional?

    Resposta:

    É verdade, no caso generico $qx \notin \mathcal{Q}$.

    Seja $q = m/n$ e tome $x = \pi$. Assim, $qx = \frac{m}{n}\pi$. Como π é não pode ser escrito como uma fração de dois inteiros, primos entre si, então qx também não pode. Dessarte, $qx \notin \mathcal{Q}$.

14. [default,ex:prova-edmundo]

    A prova vista em aula para a não racionalidade do número $\sqrt{2}$ já era conhecida na Grécia Antiga e é um exemplo clássico do esquema de argumentação conhecido como "prova por absurdo".

    (a) Escreva uma prova análoga a esta de que $\sqrt{3}$ não é racional.

    (b) Prove que a raiz quadrada de nenhum número primo é racional.

    (c) Dizem que nos seus primeiros anos de Hogwarts, Harry Potter resolveu usar seus poderes para escrever uma prova análoga de que $\sqrt{4}$ não é racional, coisa que quase todo mundo sabe que não é. A prova de Harry Potter foi a seguinte:

Teorema 92. $\sqrt{4}$ *não é racional.*

Demonstração. Temos que provar que $\sqrt{4}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{4}$ seja racional. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, com $a > 4$, tais que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{4}.$$

Elevando os dois termos da equação ao quadrado, temos

$$a^2 = 4b^2$$

Como b^2 é inteiro e a é natural não-nulo, a^2 é divisível por 4 e, portanto, a também o é. Logo, para algum $k \in \mathbb{N}^8$, podemos escrever $a = 4k$ e ficamos com

$$(4k)^2 = 4b^2$$

e, portanto

$$16k^2 = 4b^2,$$

ou seja

$$b^2 = 4k^2.$$

Como k^2 é inteiro e b é natural não-nulo, b^2 é divisível por 4 e, portanto, b também o é, o que contraria a escolha de a e b primos entre si.
Portanto, $\sqrt{4}$ não é racional. □

Onde está a mágica?

(d) Prove que se j^2 não é divisível por n para todo $j \in [1..(n-1)]$ então $\sqrt{n}$ é irracional.

(e) É verdade que se $\sqrt{n}$ é irracional então j^2 não é divisível por n para todo $j \in [1..(n-1)]$?

(f) Os gregos antigos não conseguiram demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{n}$ para $n > 17$ utilizando o mesmo raciocínio que utilizaram para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Com base em e , ache todos os números n menores que 100 tais que a irracionalidade de $\sqrt{n}$ pode ser demonstrada com o raciocínio que estamos usando[63] e surpreenda-se com o resultado!

Resposta:

[63] Dica: Faça um programa!

(a) Temos que provar que $\sqrt{3}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{3}$ seja racional. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, tais que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{3}.$$

Elevando os dois termos da equação ao quadrado, temos

$$a^2 = 3b^2$$

Como b^2 é inteiro e a é natural não-nulo, a^2 é divisível por 3 e, portanto, a também o é. Logo, para algum $k \in \mathbb{N}^8$, podemos escrever $a = 3k$ e ficamos com

$$(3k)^2 = 3b^2$$

e, portanto

$$9k^2 = 3b^2,$$

ou seja

$$b^2 = 3k^2.$$

Como k^2 é inteiro e b é natural não-nulo, b^2 é divisível por 3 e, portanto, b também o é, o que contraria a escolha de a e b primos entre si.

Portanto, $\sqrt{3}$ não é racional. Resta-nos agora apenas provar que se a^2, para a natural não-nulo, é divisível por 3 então a também o é. Suponhamos a natural não-nulo e a^2 divisível por 3 e suponhamos que a não seja divisível por três, ou seja, que existe um $q \in \mathbb{N}^*$ tal que ocorre uma das duas opções abaixo:

i. $a = 3q + 1$

ii. $a = 3q + 2$

(b) Seja p um primo natural. Temos que provar que $\sqrt{p}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{p}$ seja racional. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, tais que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{p}.$$

Elevando os dois termos da equação ao quadrado, temos

$$a^2 = pb^2$$

Como b^2 é inteiro e a é natural não-nulo, a^2 é divisível por p e, portanto, a também o é. Logo, para algum $k \in \mathbb{N}^*$, podemos escrever $a = pk$ e ficamos com

$$(pk)^2 = pb^2$$

e, portanto

$$p^2k^2 = pb^2,$$

ou seja

$$b^2 = pk^2.$$

Como k^2 é inteiro e b é natural não-nulo, b^2 é divisível por p e, portanto, b também o é, o que contraria a escolha de a e b primos entre si.

Portanto, $\sqrt{p}$ não é racional. Resta-nos agora apenas provar que se a^2, para a natural não-nulo, é divisível por p então a também o é. Suponhamos a natural não-nulo e a^2 divisível por p e suponhamos que a não seja divisível por p, ou seja, que existe um $q \in \mathbb{N}^*$ tal que existe um $j \in [1..(p-1)]$ tal que $a = qp + j$. Assim, temos que

$$a^2 = q^2p^2 + 2qpj + j^2 = (q^2p + 2qj)p + j^2$$

Assim, só é possível que a^2 seja divisível por p se j^2 for divisível por p. Como j^2 não é divisível por p, a^2 não é divisível por p, o que contraria a hipótese.

Portanto, a^2 ser divisível por p, para a natural não-nulo, implica a ser divisível por p. Resta-nos agora somente provar que j^2 não é divisível por p. Sabemos que p não é divisível por j, porque p é primo. Em outras palavras, existe um $r \in \mathbb{N}^2$ e um $\ell \in [1..(j-1)]$ tal que $p = rj + \ell$. Assim, temos que

$$j = \frac{p - \ell}{r}$$

e, portanto, que

$$j^2 = \frac{p^2 - 2p\ell + \ell^2}{r^2} = \frac{p - 2\ell}{r^2}p + \frac{\ell^2}{r^2}$$

Portanto, j^2 não é divisível por p, como queríamos provar.

(c) O erro da "prova" do Mr. Potter é justamente admitir que se a^2 é divisível por 4 então a também o é. Se tomarmos, por contra-exemplo, $a = 6$, teremos que $a^2 = 36$ é divisível por 4 mas que $a = 6$ não o é.

(d) Suponhamos que j^2 não seja divisível por n para todo $j \in [1..(n-1)]$. Temos que provar que $\sqrt{n}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{n}$ seja racional. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, tais que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{n}.$$

Elevando os dois termos da equação ao quadrado, temos

$$a^2 = nb^2$$

Como b^2 é inteiro e a é natural não-nulo, a^2 é divisível por n e, portanto, a também o é. Logo, para algum $k \in \mathbb{N}^8$, podemos escrever $a = nk$ e ficamos com

$$(nk)^2 = nb^2$$

e, portanto

$$16k^2 = nb^2,$$

ou seja

$$b^2 = nk^2.$$

Como k^2 é inteiro e b é natural não-nulo, b^2 é divisível por n e, portanto, b também o é, o que contraria a escolha de a e b primos entre si.

Portanto, $\sqrt{n}$ não é racional. Resta-nos agora apenas provar que se a^2 é divisível por n então a também o é. Suponhamos que a^2 seja divisível por n mas a não o seja. Assim, existem um k inteiro e um $j \in [1..(n-1)]$ tais que

$$a = nk + j$$

e, portanto,

$$a^2 = n^2k^2 + 2nkj + j^2 = n(nk^2 + 2kj) + j^2$$

Sabemos que $(nk^2 + 2kj)$ é inteiro e que j^2 não é divisível por n. Portanto, a^2 não é divisível por n, o que contradiz a hipótese.

Portanto, a^2 ser divisível por n implica a ser divisível por n.

(e) Não é verdade. Tomemos, por exemplo, $\sqrt{18}$, que sabemos que é irracional. Se tomarmos $j = 6$, teremos $j^2 = 36$ divisível por 18.

(f) Temos que sempre que j^2 não é divisível por n para todo $j \in [1..(n-1)]$ conseguimos provar a irracionalidade de $\sqrt{n}$ utilizando uma prova análoga à prova que usamos para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Assim, se testarmos todas as possibilidades de j para um dado n, poder afirmar uma entre duas coisas:

   i. $\sqrt{n}$ é irracional;

   ii. A irracionalidade de $\sqrt{n}$ não pode ser provada do mesmo que se prova a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

   Note que 14(f)ii não significa que $\sqrt{n}$ seja irracional nem racional. Assim, podemos construir o seguinte programa, em C:

   A saída do programa indica a irracionalidade das raízes dos seguintes números: 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 46, 47, 51, 53, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 73, 74, 77, 78, 79, 82, 83, 85, 86, 87, 89, 91, 93, 94, 95 e 97. Repare que na lista não consta o número 18.

15. [default,ex:raiz-potencia]

Prove que a raiz k-ésima de um inteiro n é inteira se e somente se $n = a^k$ para algum inteiro a.

Resposta:

Vamos provar que $n^{1/k} \in \mathbb{Z}$ se e somente se existe um a inteiro satisfazendo $a^k = n$.

Vamos provar que se $n^{1/k} \in \mathbb{Z}$, então existe um a inteiro satisfazendo $n = a^k$.

Temos que $n^{1/k} \in \mathbb{Z}$ se existe um $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x = n^{1/k}$. Do contrário, $n^{1/k}$ não pode ser inteiro. Elevando ambos os termos à k-ésima potência temos

$$(x)^k = (n^{\frac{1}{k}})^k \text{ se e somente se } x^k = n$$

e, nesse caso, $x = a$.

Portanto,

$$n^{1/k} \implies n = a^k, \text{ para algum } a \in \mathbb{Z}.$$

Vamos provar que se $n = a^k$, para algum $a \in \mathbb{Z}$, então $n^{1/k} \in \mathbb{Z}$.

Temos que $n = a^k$, para algum $a \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned}(n)^{1/k} &= (a^k)^{\frac{1}{k}} \\ &= a.\end{aligned}$$

Como a é inteiro, $n^{1/k}$ também o é.

Portanto,

$$n = a^k, \text{ para algum } a \in \mathbb{Z} \implies n^{1/k} \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$n = a^k, \text{ para algum } a \in \mathbb{Z} \text{ se e somente se } n^{1/k} \in \mathbb{Z}.$$

16. [default,ex:raiz-quadrado]

    Prove que a raiz quadrada de um inteiro n é inteira se e somente se n é quadrado de um inteiro.

    Resposta:

    Temos que provar que:

    (a) Se a raiz quadrada de um inteiro n é inteira então n é quadrado de um inteiro.

    (b) Se um inteiro n é quadrado de um inteiro então a raiz quadrada de n é inteira.

    (a) Temos que provar que se a raiz quadrada de um inteiro n é inteira então n é quadrado de um inteiro, ou seja, temos que provar que se $n \in \mathbb{Z}$ e $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ então existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k^2$. Seja n um inteiro tal que $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$. Temos que provar que existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k^2$. Se tomarmos $k = \sqrt{n}$, teremos trivialmente que $k^2 = n$ e, como $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$, provamos o que queríamos. Portanto, se a raiz quadrada de um inteiro n é inteira então n é quadrado de um inteiro.

    (b) Temos que provar que se um inteiro n é quadrado de um inteiro então a raiz quadrada de n é inteira, ou seja, temos que provar que se existe um inteiro k tal que $k = n^2$ para um inteiro n então $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$. Seja n um inteiro e suponhamos que exista um k tal que $k = n^2$. Da definição de raiz quadrada, temos que $\sqrt{n} = k$ e, como $k \in \mathbb{Z}$, portanto, que $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$. Portanto, se um inteiro n é quadrado de um inteiro então a raiz quadrada de n é inteira.

17. [default,ex:teo:conjuncao-implicacao]Prove que $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) = A \implies (B \text{ e } C)$, para para quaisquer valores de A, B e C.

    Resposta:

Temos que provar que $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) = A \implies (B \text{ e } C)$ quaisquer que sejam os valores de A, B e C. Do Teorema teo:implicaou, temos que

$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies C) = ((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } ((\text{ não } A) \text{ ou } C)$$

Por causa do Teorema teo:distributivae, sabemos que

$$((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } ((\text{ não } A) \text{ ou } C) = (\text{ não } A) \text{ ou } (B \text{ e } C)$$

Pelo Teorema teo:implicaou, chegamos a

$$(\text{ não } A) \text{ ou } (B \text{ e } C) = A \implies (B \text{ e } C)$$

Portanto,

$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies C) = A \implies (B \text{ e } C)$$

18. [default,ex:teo:falso-implica-qq-coisa]Prove que $F \implies A$ para qualquer valor de A.

    Resposta:

    Temos que provar que $F \implies A$ para qualquer valor de A, ou seja, temos que provar que $F \implies A = V$ para qualquer valor de A. Do Teorema teo:contradicao, sabemos que

    $$A \text{ e } (\text{ não } A) = F$$

    e, portanto, que

    $$F \implies A = (A \text{ e } (\text{ não } A)) \implies A$$

    Do Teorema teo:implicaou, temos que

    $$(A \text{ e } (\text{ não } A)) \implies A = \text{ não } (A \text{ e } (\text{ não } A)) \text{ ou } A$$

    e, do Corolário cor:demorgan, temos que

    $$\text{não } (A \text{ e } (\text{ não } A)) \text{ ou } A = (\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } (\text{ não } A)) \text{ ou } A$$

    Por causa do Teorema teo:duplanegacao, é verdade que

    $$(\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } (\text{ não } A)) \text{ ou } A = (\text{ não } A) \text{ ou } A \text{ ou } A$$

e, como é trivial que A ou $A = A$ qualquer que seja o valor de A, temos que

$$(\text{ não } A) \text{ ou } A \text{ ou } A = (\text{ não } A) \text{ ou } A$$

Do Teorema teo:completude vem que, qualquer que seja o valor de A,

$$(\text{ não } A) \text{ ou } A = V$$

Portanto, qualquer que seja o valor de A, sempre temos que $F \implies A$.

19. [default,ex::teo:naosse]Prove que não (A se e somente se B) $= (A$ e (não B)) ou (B e (nã para quaisquer valores de A e B.

Resposta:

Suponha A. Então,

$$\text{não } (A \text{ se e somente se } B) = (A \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } A))$$

tem o mesmo valor verdade que

$$\text{não } (V \text{ se e somente se } B) = (V \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } V))$$

que tem o mesmo valor verdade que

$$\begin{aligned} \text{não } B &= (\text{ não } B) \text{ ou } (B \text{ e } F) \\ &= (\text{ não } B) \end{aligned}$$

e, portanto, não (A se e somente se B) $= (A$ e (não B)) ou (B e (não A)).

Por outro lado, suponha que A tenha valor verdade falso. Assim,

$$\text{não } (A \text{ se e somente se } B) = (A \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } A))$$

tem o mesmo valor verdade que

$$\text{não } (F \text{ se e somente se } B) = (F \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } F))$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} B &= (F \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } V) \\ &= (F) \text{ ou } (B) \qquad\qquad\qquad = B \end{aligned}$$

e, portanto, não (A se e somente se B) $= (A$ e (não B)) ou (B e (não A)).

Dessarte, independente dos valores verdades de A e B, temos uma equivalência entre não (A se e somente se B) e (A e (não B)) ou (B e (não A)).

20. [default,ex:tollens]

Prove a implicação

$$((A \implies B) \text{ e } \text{não } B) \implies \text{não } A.$$

Esta implicação é conhecida como *Modus Tollens* e forma o esquema argumentativo das chamadas provas por absurdo ou por contradição.

Resposta:

Vamos provar a implicação

$$((A \implies B) \text{ e } \text{não } B) \implies \text{não } A$$

em dois casos: quando B é uma proposição falsa, em $1; e quando B é uma proposição verdadeira, em $2.

Sejam A uma proposição.

$1. Seja B uma proposição falsa. Vamos provar que se B é uma proposição falsa, então, a proposição supracitada é verdadeira.

Como $B = F$, então, $((A \implies B) \text{ e } \text{não } B) \implies \text{não } A$ é equivalente a $((A \implies (F)) \text{ e } \text{não } (F)) \implies \text{não } A$, que também é equivalente a $((A \implies F) \text{ e } V) \implies \text{não } A$, já que $\text{não } (F) = V$.

Pela lei da identidade, a conjunção de qualquer proposição X com outra proposição verdadeira tem como valor verdade X e, assim, $((A \implies F) \text{ e } V) \implies \text{não } A = (A \implies F) \implies \text{não } A$.

Finalmente, temos, pela definição de implicação, que $(A \implies F)$ se e somente se $((\text{ não } A)$ e, logo, $(A \implies F)$ se e somente se $(\text{ não } A)$ e, portanto, $(A \implies F) \implies (\text{ não } A)$.

Portanto, Modus Tollens é verdadeira sempre que B é uma proposição falsa.

$2. Seja B uma proposição verdadeira. Vamos provar que se B é uma proposição verdadeira, então, a proposição Modus Tollens é verdadeira.

Como $B = V$, então, $((A \implies B) \text{ e } \text{não } B) \implies \text{não } A$ é equivalente a $((A \implies (V)) \text{ e } \text{não } (V)) \implies \text{não } A$, que é equivalente a $((A \implies V) \text{ e } F) \implies \text{não } A$, que é equivalente a $F \implies \text{não } A$, pela lei da dominação, e, consequentemente, $(F \implies \text{não } A)$ se e somente se V, porque, da definição de implicação, temos que $(F \implies \text{não } A)$ se e somente se $(\text{ não } (F) \text{ ou } (F \text{ e } \text{não } (A)))$ se e somente se $(V \text{ ou } F$

Portanto, Modus Tollens é verdadeira sempre que B é uma proposição verdadeira.

Portanto, Modus Tollens é sempre uma proposição verdadeira.

21. [default,ex:inducao-como-predicado]

Seja $P(n)$ um predicado (onde $n \in \mathbb{N}$) e seja $Q(P, b)$ o predicado dado por

$$((P(k), \text{ para todo } b \leq k \leq a) \implies P(a+1)), \text{ para todo } a > b.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $Q(3^n < n!, 7)$.

(b) $Q(2^n > n^2, 5)$.

(c) $Q\left(\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, 0\right)$.

(d) $Q\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, 0\right)$.

(e) $Q\left(\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1, 0\right)$.

(f) $Q\left(\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2, 0\right)$.

Resposta:

(a) Seja $a > 7$ e suponha que, para todo $7 \leq k \leq a$,

$$3^k < k!.$$

Como $3^a < a!$, então

$$\begin{aligned} 3^{a+1} &< a!(3) \\ &< a!(a+1) \\ &= (a+1)! \end{aligned}$$

e, logo, $3^{a+1} < (a+1)!$; isto é, $P(a+1)$.

(b) Seja $a > 5$ e suponha que, para todo $5 \leq k \leq a$,

$$2^n > n^2.$$

Como $n^2 < 2^a$ e $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, então

$$\begin{aligned}(a+1)^2 &= a^2 + 2a + 1 \\ &< 2^a + 2a + 1 \\ &< 2^a + 2^a \\ &= 2^{a+1},\end{aligned}$$

já que $2a + 1 < 2^a$, sempre que $a > 5$.

Logo, $(a+1)^2 < 2^{a+1}$; isto é, $P(a+1)$.

(c) Seja $a > 0$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq a$,

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Então, também temos que

$$(a+1) + \sum_{i=1}^{a} i = (a+1) + \frac{a(a+1)}{2};$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{2(a+1)}{2} + \frac{a(a+1)}{2}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a+1} i &= \frac{2(a+1) + a(a+1)}{2} \\ &= \frac{(a+1)(a+2)}{2} \\ &= \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, $P(a+1)$.

(d) Seja $a > 0$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq a$,

$$\sum_{i=1}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1.$$

Temos, então, que somando 2^{a+1} em ambos dos termos da equação

$$\sum_{i=1}^{a} 2^i = 2^{a+1} - 1$$

o valor verdade da mesma não se altera. Assim sendo,

$$2^{a+1} + \sum_{i=1}^{a} 2^i = 2^{a+1} + 2^{a+1} - 1;$$

isto é,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a+1} 2^i &= 2(2^{a+1}) - 1\\ &= 2^{(a+1)+1} - 1,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Portanto, $P(a+1)$.

(e) Seja $a > 0$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq a$,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i2^i = (k-1)2^{k+1} + 2.$$

Então, somando $(a+1)2^{a+1}$ em ambos os termos da equação

$$\sum_{i=1}^{a} i2^i = (a-1)2^{a+1} + 2$$

obtemos

$$(a+1)2^{a+1} + \sum_{i=1}^{a} i2^i = (a+1)2^{a+1} + (a-1)2^{a+1} + 2,$$

ambas com o mesmo valor verdade.

Temos que

$$(a+1)2^{a+1} + \sum_{i=1}^{a} i2^i = (a+1)2^{a+1} + (a-1)2^{a+1} + 2$$

é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{(a+1)} i2^i = ((a+1) + (a-1))2^{a+1} + 2,$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{(a+1)} i2^i &= (2a)2^{a+1} + 2 \\ &= ((a-1)+1)2^{(a+1)+1} + 2,\end{aligned}$$

que é equivalente a $P(a+1)$, como queríamos demonstrar.
Portanto, $P(a+1)$.

A.13.2 Conjuntos e Inteiros

22. [default,ex:teo:capsubset]

    Prove que a interseção de dois conjuntos A e B é um subconjunto de A.

    Resposta:

    Vamos provar que se A e B são conjuntos, então $A \cap B \subseteq A$.

    É necessário e suficiente para $A \cap B \subseteq A$ que

    $$x \in A \cap B \implies x \in A.$$

    Temos que

23. [default,ex:associativaminus]

    A diferença entre conjuntos é uma operação associativa? Justifique.

    Resposta:

    Essa operação não é associativa. Tome como contra-exemplo os conjuntos

    $$\begin{aligned}A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{2, 3, 4\} \\ C &= \{3, 4, 5\}.\end{aligned}$$

    Assim, $(A - B) - C \neq A - (B - C)$.

24. [default,ex:vaziosubset]

Prove que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Resposta:

Vamos provar que $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

Seja X um conjunto.

Temos que $\emptyset \subseteq X$ se e somente se

$$x \in \emptyset \implies x \in X, \text{ para todo } x \in \emptyset.$$

Entretanto, $\emptyset$ não contém elementos e, da definição do quantificador universal, temos, também, que se P é um predicado, então,

$$(P(a), \text{ para todo } a \in A) \text{ se e somente se } (V, \text{ para todo } a \in A) \text{ se e somente se } (V)$$

sempre que $A = \emptyset$.

Portanto, o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

25. [default,ex:teo:associativacup]

Prove que a união de conjuntos é uma operação associativa.

Resposta:

Vamos provar que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Temos que

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= \{x \mid x \in A \cup B \text{ ou } x \in C\} \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \cup C\} \\ &= A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

Portanto, a união de conjuntos é uma operação associativa.

26. [default,ex:teo:associativacap]

    Prove que a interseção de conjuntos é uma operação associativa.

    Resposta:

    Vamos provar que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

    Temos que

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= \{x \mid x \in A \cap B \text{ e } x \in C\} \\
&= \{x \mid (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ e } x \in C\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ e } (x \in B \text{ e } x \in C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \cap C\} \\
&= A \cap (B \cap C)
\end{aligned}
$$

    Portanto, a interseção de conjuntos é uma operação associativa.

A.13.3 Funções Iteradas

27. [default,ex:f:iterada:1]

    Seja $f\colon A \to A$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^{(n)}\colon A \to A$ como a função dada por

$$
f^{(n)}(a) = \begin{cases} a, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1}\left(f(a)\right), & \text{se } n > 0. \end{cases}
$$

    Prove que $f^{(n)} = f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    Resposta:

    Temos que

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(a) &= f^{(n-1)}(f(a)) = f(a) \circ f^{(n-1)} \\
&= f^{(n-2)}(f(f(a))) = f^2(a) \circ f^{(n-2)} \\
&\vdots \\
&= f^{(n-u)}(f^u(a)) = f^u(a) \circ f^{(n-u)},
\end{aligned}
$$

onde

$$\begin{aligned}
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\
&= n
\end{aligned}$$

e, continuando o desenvolvimento de f,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(a) &= f^{(n-u)}(f^u(a)) = f^u(a) \circ f^{(n-u)} \\
&= f^{(n-n)}(f^n(a)) = f^n(a) \circ f^{(n-n)} \\
&= f^n(a) \circ f^0 \\
&= f^n(a) \circ Id \\
&= f^n(a).
\end{aligned}$$

(Nota: Notação polonesa reversa.)

28. [default,ex:f:iterada:2]

Sejam $f, i\colon A \to A$, onde i é a função identidade, dada por $i(a) = a$ para todo $a \in A$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^{(n)}\colon A \to A$ como

$$f^{(n)} = \begin{cases} i, & \textsf{se } n = 0, \\ f \circ f^{n-1}, & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

Prove que $f^{(n)} = f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

Seja n um natural. Então,

$$\begin{aligned}
f^{(n)} &= f \circ f^{(n-1)} \\
&= f \circ f \circ f^{(n-2)} \\
&= f^2 \circ f^{(n-2)} \\
&= f^3 \circ f^{(n-3)} \\
&\vdots \\
&= f^u \circ f^{(n-u)},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\
&= n
\end{aligned}$$

e, logo,

$$\begin{aligned}
f^{(n)} &= f^u \circ f^{(n-u)} \\
&= f^n \circ f^{(n-n)} \\
&= f^n \circ f^0 \\
&= f^n \circ i \\
&= f^n, \text{ para todo } n \text{ natural.}
\end{aligned}$$

29. [default,ex:f:iterada:3]

Sejam $f, i\colon A \to A$, onde i é a função identidade, dada por $i(a) = a$ para todo $a \in A$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^{(n)}\colon A \to A$ como

$$f^{(n)} = \begin{cases} i, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1} \circ f, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Prove que $f^{(n)} = f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

Seja n um natural. Então,

$$\begin{aligned}
f^{(n)} &= f^{(n-1)} \circ f \\
&= \left(f^{(n-2)} \circ f\right) \circ f \\
&= f^{(n-2)} \circ f^2 \\
&= \left(f^{(n-3)} \circ f\right) \circ f^2 \\
&= f^{(n-3)} \circ f^3 \\
&\vdots \\
&= f^{(n-u)} \circ f^u,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\
&= n
\end{aligned}$$

e, logo,

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= f^{(n-u)} \circ f^u \\ &= f^{(n-n)} \circ f^n \\ &= f^(0) \circ f^n \\ &= i \circ f^n \\ &= f^n, \text{ para todo } n \text{ natural.} \end{aligned}$$

30. [default,ex:f:iterada:monoide]

Seja A um conjunto e seja $\mathcal{F}(A)$ o conjunto das funções $A \to A$. Prove que $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é um monóide.

Resposta:

Vamos provar que $(F(A), \circ)$ é um monóide, provando que

(a) $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é fechada sob $\circ$;
(b) $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é associativa;
(c) $\mathcal{F}(A)$ comporta o elemento neutro.

(a) Sejam $f, g \in \mathcal{F}(A)$.
É imediato que $f, g \colon A \to A$.
Como, g tem imagem e domínio em A e, como f tem domínio em A, então $f \circ g$ tem imagem em A e, logo, $f \circ g \in \mathcal{F}(A)$.
Portanto, $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é fechada sob $\circ$.

(b) Sejam $f, g, h \in \mathcal{F}(A)$ e $a \in A$.
Por um lado,

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(a) &= (f(g) \circ h)(a) \\ &= (f(g(h)))(a) \\ &= f(g(h(a))). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ h))(a) &= (f \circ (g(h)))(a) \\ &= (f(g(h)))(a) \\ &= f(g(h(a))). \end{aligned}$$

Assim, $(f \circ (g \circ h)) = ((f \circ h) \circ h)$.
Portanto, $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é associativa.

(c) Sejam $f, g \in \mathcal{F}(A)$.

Então, a inversa de f também é elemento de $\mathcal{F}(A)$,

$$f^{-1} \in \mathcal{F}(A).$$

Repare que $f \circ f^{-1} \in \mathcal{F}(A)$ e tome $e = f \circ f^{-1}$.

Por um lado,

$$\begin{aligned} e \circ g &= (f \circ f^{-1}) \circ g \\ &= f(f^{-1}(g)) \\ &= g, \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} g \circ e &= g \circ (f \circ f^{-1}) \\ &= g(f(f^{-1})) \\ &= g \end{aligned}$$

e, portanto,

$$g \circ e = e \circ g = g.$$

Logo, $\mathcal{F}(A)$ comporta um elemento neutro.

Portanto, $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é um monóide.

A.13.4 Recorrências

31. [default,ex:dado]

Um dado honesto de 6 faces é lançado e o lançamento se repete até que dois números 6 consecutivos ocorram. Para cada $n > 0$ seja $p(n)$ a probabilidade de o n-ésimo lançamento ser o último da série.

(a) Descreva $p(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

Resposta:

(a)

$$p(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ 1/36\left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p(i)\right), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(b)

estes devem ser eliminados?

32. [default,ex:cor:base]

Prove que o conjunto

$$\bigcup_{i=1}^{l} \{n^j r_i^n \mid j \in [0..m_i - 1]\}$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com multiplicidades respectivamente $m_1, m_2, \ldots, m_l$, é uma base do subespaço $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Resposta:

33. [default,ex:cor:rec:homo]

Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ são as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com multiplicidades respectivamente $m_1, m_2, \ldots, m_l$, e $\{c_{i,j} \mid i \in [1..l] \text{ e } j \in [0..m_i - 1]\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j a^i, a \in [0..k-1].$$

Resposta:

34. [default,ex:cor:subase]

Prove que se $r \in \mathbb{C}$ é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, então o conjunto

$$\left\{n^j r^n \mid j \in [0..m-1]\right\}$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Resposta:

É trivial que r^n é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Assim como não podemos escrever r^n como combinação linear dos demais elementos de uma base de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, também não podemos escrever

$$r^n(1 + n + n^2 + \cdots + n^{m-1})$$

como combinação linear dos elementos de uma base de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Consequentemente, também temos que cada termo da soma

$$r^n + nr^n + n^2r^n + \cdots + n^{m-1}r^n$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

A.13.5 Contagem

35. [default,ex:num-seq-bin]

Prove que existem 2^n sequências binárias de comprimento n.

Resposta:

Seja $n > 0$ e suponha que, para todo $1 \leq k \leq n$,

$$\text{existem } 2^k \text{ sequências binárias de tamanho } k.$$

Assim, se existem 2^n sequências binárias de tamanho n, então

$$2^n + 2^n \text{ sequências binárias de tamanho } n+1;$$

ou seja, existem 2^{n+1} sequências binárias de tamanho $n+1$.

Além do mais, existem duas sequências binárias de tamanho 1:

$$(0)_2 \text{ e } (1)_2.$$

Portanto, para todo $n > 0$, existem 2^n sequências binárias de tamanho n.

A.13.6 Notação Assintótica

36. [default,ex:Olog]

    Prove que

    $$\log_b n = \Theta(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

    Resposta:

    Seja $b > 1$ uma constante real. Então,

    $$\log_b n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} b} = \left(\frac{1}{\log b}\right) \log n,$$

    que está em $\Theta(\log n)$. (Basta tomar $c_< = c_> = 1/\log b$ e $n_0 = 1$.)

37. [default,ex:Onxlog]

    Sejam $f(n) = O(\log n)$ e $g(n) = \Omega(n)$.

    Prove que $f(n) = O(g(n))$ e que $g(n)$ não é $O(f(n))$.

    Resposta:

    Das premissas acima, temos que

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n} > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\log n} < \infty.$$

    Então,

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{f(n)}}{2^{\log n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{f(n)}}{n} < \infty.$$

    Vamos usar a relação "<<" para denotar "é limitada superiormente assintoticamente".

    Repare que $2^{f(n)} << n$ e $n << g(n)$ e, consequentemente,

    $$2^{f(n)} << g(n)$$

    e, logo, $f(n) << g(n)$.

    Veja, também, que se $\lim_{n\to\infty} g(n)/n > 0$, então

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{ng(n)}{n} = \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} n\right)}_{=\infty} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} g(n)/n\right)}_{>0} = \infty$$

    e, logo, $g(n) \notin O(1)$.

38. [default,ex:teo:fOf]

Prove que

$$f(n) = O(f(n)), \text{ para todo } f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Resposta:

Basta tomar as constantes $c = 1$ e $n_0 = 0$.

39. [default,ex:cor:O1f]

Prove que

$$O(1)f(n) = O(f(n)).$$

Resposta:

Vamos provar que

$$O(1)f(n) = O(f(n))$$

provando que

$$g(n)f(n) = O(f(n)) \implies g(n) = O(1).$$

Pela premissa acima, existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)f(n)| \le c|f(n)|, \text{ para todo } n \ge n_0.$$

Assim,

$$\frac{|g(n)f(n)|}{|f(n)|} \le c, \text{ para todo } n \ge n_0$$

e, daí,

$$\frac{|g(n)| \cdot |f(n)|}{|f(n)|} \le c, \text{ para todo } n \ge n_0$$

e, consequentemente,

$$|g(n)| \le c, \text{ para todo } n \ge n_0,$$

que nos conta que $g(n) \in O(1)$.

40. [default,ex:cor:Of+Og=Of+g]

Prove que se $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n)g(n) \ge 0, \text{ para todo } n \ge n_0,$$

então

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n)).$$

Resposta:

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que, para cada $n \geq n_0$,

$$f(n) \geq 0 \text{ se e somente se } g(n) \geq 0;$$

isto é, $f(n)\ g(n) \geq 0$.

Sob essa hipótese, vamos provar que

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n));$$

isto é, vamos provar que se $A(n) \in O(f(n))$ e $B(n) \in O(g(n))$, então

$$A(n) + B(n) \in O(f(n) + g(n)).$$

Sejam, então, $A(n) \in O(f(n))$ e $B(n) \in O(g(n))$. Então, existem constantes $c_A, c_B \in \mathbb{R}$ e $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\begin{gathered} |A(n)| \leq c_A \cdot |f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_A \\ \text{e} \\ |B(n)| \leq c_B \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_B \end{gathered}$$

e, fazendo $c = \max\{c_A, c_B\}$ e $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, temos

$$\begin{gathered} |A(n)| \leq c \cdot |f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0 \\ \text{e} \\ |B(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0 \end{gathered}$$

e, observando, da nossa premissa, que $|f(n)| + |g(n)| = |f(n) + g(n)|$, temos

$$\begin{aligned} |A(n)| + |B(n)| &\leq c \cdot |f(n)| + c|g(n)| \\ &= c \cdot (|f(n)| + |g(n)|) \\ &= c \cdot |f(n) + g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0, \end{aligned}$$

que nos leva a acreditar que $A(n) + B(n) \in O(f(n) + g(n))$; ou, equivalentemente,

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n)).$$

41. [default,ex:teo:Omegalog]

Prove que

$$\log_b n = \Omega(\log n), \text{ para todo } 0 < b \neq 1.$$

Resposta:

$$\log_b n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} b} = \left(\frac{1}{\log b}\right) \log n,$$

que está em $\Omega(\log n)$, desde que $\log b \in \mathbb{R} - \{0\}$, i.e. $0 < b \neq 1$.

42. [default,ex:cor:fOmegaf]

Prove que

$$f(n) = \Omega(f(n)), \text{ para todo } f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Resposta:

É trivial: para qualquer $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, basta tomar $c = 1$ e $n_0 = 0$.

43. [default,ex:cor:Omega1f]

Prove que

$$\Omega(1)f(n) = \Omega(f(n)).$$

Resposta:

Seja $g(n) \in \Omega(f(n))$. Vamos provar que $g(n)f(n) \in \Omega(f(n))$.

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)f(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} g(n) > 0$$

e, assim, $\frac{g(n)f(n)}{f(n)} \in \Omega(1)$.

Logo, $g(n)f(n) \in \Omega(f(n))$; ou, em outras palavras,

$$\Omega(1)f(n) = \Omega(f(n)).$$

44. [default,ex:cor:Omega-transitiva]

Prove que se $f(n) = \Omega(g(n))$ então $\Omega(f(n)) = \Omega(g(n))$.

Resposta:

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) \in \Omega(g(n))$; isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0.$$

Agora, considere $h(n) \in \Omega(f(n))$, que satisfaz $\lim_{n\to\infty} h(n)/f(n) > 0$. Com essas asserções,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{g(n)} = \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{f(n)}\right)}_{>0} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}\right)}_{>0} > 0.$$

Assim, $h(n) \in \Omega(g(n))$ e, logo, $f(n) \in \Omega(g(n))$.

45. [default,ex:cor:Omega(f+g)]

Prove que
$$\Omega(|f(n)|) + \Omega(|g(n)|) = \Omega(f(n) + g(n)).$$

Resposta:

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |f(n)| + \lim_{n\to\infty} |g(n)| &= \lim_{n\to\infty} (|f(n)| + |g(n)|) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} |f(n) + g(n)|\,;\end{aligned}$$

isto é,
$$\Omega(|f(n)|) + \Omega(|g(n)|) = \Omega(f(n) + g(n)).$$

46. [default,ex:cor:Omegaf+Omegag=Omegaf+g]

Prove que se $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n)g(n) \geq 0, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

então
$$\Omega(f(n)) + \Omega(g(n)) = \Omega(f(n) + g(n)).$$

Resposta:

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$f(n)g(n) \geq 0, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

isto é,

$$f(n) \geq 0 \text{ se e somente se } g(n) \geq 0.$$

Vamos provar que

$$\Omega(f(n)) + \Omega(g(n)) = \Omega(f(n) + g(n));$$

isto é,

$$A(n) + B(n) \in \Omega(f(n) + g(n)),$$

onde $A(n) \in \Omega(f(n))$ e $B(n) \in \Omega(g(n))$.

Temos que

$$|A(n)| \geq c_A \cdot |f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_A$$
$$|B(n)| \geq c_B \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_B$$

e, fazendo $n_z = \max\{n_A, n_B\}$ e $c = \max\{c_A, c_B\}$, temos

$$|A(n)| \geq c \cdot |f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_z$$
$$|B(n)| \geq c \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_z$$

e, como $|f(n)| + |g(n)| = |f(n) + g(n)|$,

$$\begin{aligned} |A(n)| + |B(n)| &\geq c \cdot |f(n)| + c \cdot |g(n)| \\ &= c(|f(n)| + |g(n)|) \\ &= c|f(n) + g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_z, \end{aligned}$$

o que nos revela que $A(n) + B(n) \in \Omega(f(n) + g(n))$; ou, em outras palavras,

$$\Omega(f(n)) + \Omega(g(n)) = \Omega(f(n) + g(n)).$$

47. [default,ex:cor:Omega1(f)]

Prove que se $g(n) = \Omega(f(n))$ e

$$g(n) = 0 \implies f(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = \Omega(1)f(n).$$

Resposta:

Suponha que $g(n) = \Omega(f(n))$ e que

$$g(n) = 0 \implies f(n) = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Temos, então, dois casos:

(a) $g(n) = 0, \text{ para todo } n \geq 0$. Então, $f(n) = 0, \text{ para todo } n \geq 0$ e, trivialmente,

$$g(n) = \Omega(1)f(n).$$

(b) $g(n) \neq 0, \text{ para algum } n \geq 0$. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0,$$

pela nossa premissa de que $g(n) = \Omega(f(n))$, e, logo,

$$\frac{g(n)}{f(n)} = \Omega(1);$$

isto é, $g(n) = \Omega(1)f(n)$.

Em ambos os casos temos $g(n) = \Omega(1)f(n)$.

48. [default,ex:imagem-finita]

Prove que se a imagem de $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é finita, então $f(n) = O(1)$.

Resposta:

Sob a hipótese de que Im_f, a imagem de f, é finita, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \leq \max Im_f < \infty$$

e, logo, $f(n) = O(1)$.

49. [default,ex:lim-O(1)]

(a) Prove que se $\lim |f(n)| < \infty$, então $f(n) = O(1)$.

(b) Prove que se $\lim |f(n)| = \infty$, então $f(n)$ não é $O(1)$.

(c) É verdade que $f(n) = O(1)$ se e somente se $\lim |f(n)| < \infty$? Justifique.

Resposta:

(a) Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) \notin O(1)$. Então, não existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \geq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

isto é, não existe uma assíntota constante para $\pm f(n)$ a partir de um certo n_0. É razoável, então, que, para todo $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$|f(n)| > c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

ou seja, $lim_{n\to\infty}|f(n)| > c$, para toda constante $c \in \mathbb{R}$; ou, em outras palavras,

$$\lim_{n\to\infty} |f(n)| = \infty$$

e, logo, $f(n) \notin O(1)$ implica $\lim_{n\to\infty} |f(n)| \nleq \infty$.

Aplicando a contra-positiva sobre a afirmação acima, temos que

$$\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty \implies f(n) \in O(1).$$

(b) Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) = O(1)$. Então,

$$|f(n)| \geq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

ou, em outras palavras, existe uma assíntota constante para $|f(n)|$ a partir de um certo n_0; isto é,

$$\lim_{n\to\infty} |f(n)| \geq c \cdot 1$$

e, consequentemente, $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$.

Assim, $f(n) = O(1)$ implica $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$ e, pela contra-positiva temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty \implies f(n) \notin O(1).$$

(c) O item (a) nos fornece $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$ implica $f(n) = O(1)$ e, então, nos resta provar que

$$f(n) = O(1) \implies \lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty.$$

Se $f(n) = O(1)$, então existem $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \leq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e, então, também existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(n)| \leq \infty, \text{ para todo } n \geq n_1$$

e, logo, $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$.

Portanto, sim,

$$f(n) = O(1) \equiv \lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty.$$

50. [default,ex:O(1)/O(1)]

É verdade que

$$\frac{O(1)}{O(1)} = O(1)?$$

Justifique.

Resposta:

Não, tome as funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(n) = 1$ e $g(n) = 1/n$, ambas em $O(1)$. Assim, a fração

$$\frac{1}{1/n} = n$$

não é assintoticamente limitada superiormente por uma constante.

51. [default,ex:O(1)/infinito]

Prove que se $\lim g(n) = \infty$, então $O(1) = O(g(n))$.

Resposta:

Suponha que $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$.

Vamos provar que $O(1) \subseteq O(g(n))$.

Seja $f(n) \in O(1)$. Então, existem $c_f \in \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \geq c_f \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_f;$$

isto é, $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$.

Entretanto,

$$\begin{aligned} O(g(n)) &= \{h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N})(|h(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0)\} \\ &= \{h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\exists n_0 \in \mathbb{N})(|h(n)| \leq \infty, \text{ para todo } n \geq n_0)\} \end{aligned}$$

e, como $|f(n)| \leq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f$, então também é verdade que

$$|f(n)| \leq \infty, \text{ para todo } n \geq n_f$$

e, logo, $|f(n)| \in O(g(n))$.

Portanto, $O(1) \subseteq O(g(n))$ sempre que $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$.

52. [default,ex:lim-Omega(1)]

(a) Prove que se $\lim f(n) \neq 0$, então $f(n) = \Omega(1)$.

(b) Prove que se $\lim f(n) = 0$, então $f(n)$ não é $\Omega(1)$.

(c) É verdade que $f(n) = \Omega(1)$ se e somente se $\lim f(n) \neq 0$? Justifique.

Resposta:

(a) Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) \notin \Omega(1)$. Então, não existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \geq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

isto é, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|f(n)| < c, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então, só pode ser que $\lim_{n\to\infty} |f(n)| = 0$ porque $|f(n)|$ é assintoticamente limitado superiormente por toda constante real e, aplicando a contra-positiva, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0 \implies f(n) \in \Omega(1).$$

(b) Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) \in \Omega(1)$. Então, existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ que

$$|f(n)| \geq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq_0;$$

ou, equivalentemente, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|f(n)| > 0, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0$.
Pela contra-positiva, temos, então, que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \implies f(n) \notin \Omega(1).$$

(c) O caso em que $\lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0 \implies f(n) = \Omega(1)$ é provado positivamente no primeiro item desse exercício, então nos resta provar que $f(n) = \Omega(1) \implies \lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0$.
Suponha que $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. Então, pelo item anterior, não existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|f(n)| \geq c, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

o que nos leva a concluir que $f(n) \notin \Omega(1)$.
Equivalentemente,

$$f(n) = \Omega(1) \implies \lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0.$$

Portanto, sim,

$$f(n) = \Omega(1) \text{ se e somente se } \lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0.$$

53. [default,ex:Omega(1)/Omega(1)]

É verdade que

$$\frac{\Omega(1)}{\Omega(1)} = \Omega(1)?$$

Justifique.

Resposta:

Não. Considere as funções $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, ambas em $\Omega(1)$. A função

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

não é inferiormente limitada assintoticamente por uma constante.

54. [default,ex:cor:Thetalog]

Prove que

$$\log_b n = \Theta(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Resposta:

Seja $b > 1$ um real. Repare que

$$\log_b n = \frac{\log_k n}{\log_k b}, \text{ para todo } 1 \neq k \in \mathbb{R}$$

e, assim sendo, basta tomar $k = 10$ e teremos

$$\log_b n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} b} = \frac{\log n}{\log b} = \left(\frac{1}{\log b}\right) \log n,$$

que está no conjunto $\Theta(\log n)$, uma vez que $1/\log b$ seja constante.

55. [default,ex:funcoes]

Para quais pares de funções dentre as abaixo temos $f(n) = \Theta(g(n))$? Justifique.

(a) $\sqrt{n}$
(b) $n \log n$
(c) n^2
(d) $n^{1/3} + \log n$
(e) $\ln n$
(f) $(1/3)^n$
(g) n
(h) $n - n^3 + 7n^5$
(i) n^3
(j) $(\log n)^2$
(k) $\frac{n}{\log n}$
(l) $(3/2)^n$
(m) 2^n
(n) $n^2 + \log n$
(o) $\log n$
(p) $n!$
(q) $\log \log n$
(r) 6

Resposta:

Os únicos pares na mesma ordem de complexidade são

(a) n^2 e $n^2 + \lg n$, porque

$$\begin{aligned}
0 &< \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \lg n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{\lg n}{n^2} \right) \\
&= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2}}_{=1} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n^2}}_{=0} \\
&= 1 < \infty;
\end{aligned}$$

e

(b) $\ln n$ e $\log n$, porque

$$\ln n = \frac{\log n}{\log e} = \left(\frac{1}{\log e}\right) \log n,$$

que está em $\Theta(\log n)$.

56. [default,ex:teo:o1f]

Prove que

$$o(1)f(n) = o(f(n)).$$

Resposta:

Vamos provar que

$$g(n)f(n) \in o(f(n)), \text{ para todo } g(n) \in o(1).$$

Seja $g(n) \in o(1)$. Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)f(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} g(n) = 0,$$

conforme a definição de g.

Portanto,

$$g(n)f(n) = o(f(n)), \text{ para todo } g(n) \in o(1);$$

isto é,

$$o(1)f(n) = o(f(n)).$$

57. [default,ex:teo:of=o1f]

Prove que se $g(n) = o(f(n))$ e

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = o(1)f(n)$$

Resposta:

Suponha que $g(n) = o(f(n))$ e que

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Temos, então, dois casos:

(a) $f(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$ Então, $g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$ e, obviamente, $g(n) = o(1)f(n)$.

(b) $f(n) \neq 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}$ Repare que, como $g(n) = o(f(n))$, então $g(n)/f(n) = o(1)$ e, por outro lado, $g(n) = o(1)f(n)$ se e somente se $g(n)/f(n) = o(1)$. Portanto, $g(n) = o(1)f(n)$.

Em ambos os casos, temos

$$g(n) = o(1)f(n).$$

58. [default,ex:cor:nalpha+o1]

Prove que

$$\frac{1}{n^{\alpha+o(1)}} = o(1), \text{ para todo } \alpha > 0.$$

Resposta:

Seja $f(n) \in o(1)$ e vamos provar que

$$\frac{1}{n^{\alpha+f(n)}} \in o(1).$$

Primeiramente, observe que

$$\frac{1}{n^{\alpha+f(n)}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+f(n)}$$

e que

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha + f(n)) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \alpha}_{=\alpha} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(n)}_{=0} = \alpha > 0.$$

Nessas condições,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+f(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 0$$

e, logo,

$$\frac{1}{n^{\alpha+f(n)}} \in o(1).$$

59. [default,ex:f+o=1+f]

Prove que

$$f(n) + o(f(n)) = (1 + o(1))f(n)$$

Resposta:

Vamos provar que

$$f(n) + o(f(n)) = (1 + o(1))f(n)$$

provando que

$$\frac{f(n) + o(f(n))}{f(n)} = 1 + o(1).$$

Primeiramente, a proposição acima significa que existe um $g(n) \in o(f(n))$ tal que

$$\frac{f(n) + g(n)}{f(n)} = 1 + o(1).$$

Perceba que

$$\frac{f(n) + g(n)}{f(n)} = \frac{f(n)}{f(n)} + \frac{g(n)}{f(n)}$$

e, também, que $g(n)/f(n) = o(1)$ porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

e, com um suave abuso de notação, temos que

$$\frac{f(n)}{f(n)} + \frac{g(n)}{f(n)} = 1 + o(1).$$

Portanto,

$$\frac{f(n) + o(f(n))}{f(n)} = 1 + o(1)$$

e, consequentemente,

$$f(n) + o(f(n)) = (1 + o(1))f(n).$$

60. [default,ex:cor:alphan+o1]

Prove que se $|\alpha| < 1$, então

$$\alpha^{n+o(n)} = o(1).$$

Resposta:

Seja a função $e \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ um elemento de $o(n)$.

Vamos provar que

$$\alpha^{n+e(n)} \in o(1).$$

Repare que

$$\lim_{n\to\infty} (n + e(n)) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} n}_{=\infty} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} e(n)}_{<< \ n} = \infty$$

e, então,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{n+e(n)} = \lim_{x\to\infty} \alpha^x = 0$$

e, logo, $alpha^{n+e(n)} \in o(1)$.

Portanto, $\alpha^{n+o(n)} = o(1)$.

Apêndice B

Resultados para Incorporar

Teorema 93. $\boxed{\textit{consertar}}$

O espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ tem dimenssão k.

Demonstração. Dados $f \in \mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ e $n \geq k$, vamos definir

$$V(f, n) = \begin{bmatrix} f(n+k-1) \\ f(n+k-2) \\ f(n+k-3) \\ \vdots \\ f(n+1) \\ f(n) \end{bmatrix}$$

temos

$$F(n) = AF(n-1),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} f(n+k-1) \\ f(n+k-2) \\ f(n+k-3) \\ \vdots \\ f(n+1) \\ f(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(n+k-2) \\ f(n+k-3) \\ f(n+k-4) \\ \vdots \\ f(n) \\ f(n-1) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$V(f,n) = AV(f,n-1).$$

Como $|\det(A)| = a_k$, então se $g \in \mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, existe apenas um vetor $V(g,0)$ que representa $g(n)$, e cada $V(g,0)$ representa apenas uma função.

Como v_0 é um vetor de dimensão k e $f(0)$,$f(1)$,...,$f(k-1)$ podem variar livremente, então as funções de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ um espaço vetorial de dimensão k. □

Teorema 94. adaptar

Seja $f(n) \in \mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ e seja R o conjunto das raízes do polinômio característico de f.

Então $r^n \in \mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ para todo $r \in R$.

As funções r_i^n, em que r_i representa uma das raízes do polinômio $P(r) = r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \dots - a_k$, satisfazem $f(n)$ e os vetores que as representam são linearmente independentes.

Demonstração. Encontrarei agora os autovalores e os autovetores de A.

$$\begin{bmatrix} a_1 - r & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & -r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -r & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &x_{k-1} = rx_k \\ &x_{k-2} = rx_{k-1} = r^2 x_k \\ &x_{k-3} = rx_{k-2} = r^3 x_k \\ &\vdots \\ &x_1 = r^{k-1} x_k \\ &(a_1 - r)x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k = 0 \\ &x_k(-r^k + a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \cdots + a_k) = 0 \\ &x_k(r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \cdots - a_k) = 0 \end{aligned}$$

Para que $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ seja um autovetor de A, $X \neq 0$, implicando que $x_k \neq 0$. Logo se r satisfaz $r^k - a_1 r^{k-1} - \cdots - a_k = 0$, então r é um autovalor de A.

Seja r_i um autovalor qualquer de A e X_i um autovetor de A relacionado a r_i.

$$AX_i = r_i X_i$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i^{k-1} x_k \\ r_i^{k-2} x_k \\ r_i^{k-3} x_k \\ \vdots \\ r_i x_k \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i^k x_k \\ r_i^{k-1} x_k \\ r_i^{k-2} x_k \\ \vdots \\ r_i^2 x_k \\ r_i x_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_i^k \\ r_i^{k-1} \\ r_i^{k-2} \\ \vdots \\ r_i^2 \\ r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i^{k-1} \\ r_i^{k-2} \\ r_i^{k-3} \\ \vdots \\ r_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, se r_i é um autovalor de A, então a função r_i^n satisfaz $f(n)$ e o vetor que a representa é um autovalor de A relacionado a r_i. Como os autovetores de uma matriz relacionados com autovalores diferentes são linearmente independentes, então os vetores que representam as funções r^n, em que r é autovalor de A, são linearmente independentes. $\square$

Teorema 95. adaptar

Para todo $k \in \mathbb{N}$, $f(n) = n^k r^n$, com $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(x - r)^{k+1}$.

Demonstração. Seja $P(k)$ o seguinte predicado:

$f(n) = n^k r^n$, satisfaz a recorrência

$$g(n) = -\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-r)^i g(n-i)$$

, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > k + 1$.

Para provar o teorema, basta provra $P(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Provarei isso por indução sobre k e, para tanto, basta provar as seguintes proposições.

1. $P(0)$
2. Se $P(k)$, então $P(k + 1)$

$P(0)$ é verdade, pois para $k = 0$, $f(n) = r^n = -\binom{1}{1}(-r)^1 r^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$.

Por hipótese de indução, assumirei que

$$n^k r^n = -\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-r)^i (n-i)^k r^{n-i} \tag{B.1}$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > k + 1$.

Considere agora $P(k + 1)$. Para que $P(k + 1)$ seja verdade,

$$n^{k+1} r^n = -\sum_{i=1}^{k+2} \binom{k+2}{i} (-r)^i (n-i)^{k+1} r^{n-i} \tag{B.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > k + 1$.

Seja $T(p)$ um termo qualquer da soma (B.2).

$$
\begin{aligned}
T(p) &= \binom{k+2}{p}(-r)^p(n-p)^{k+1}r^{n-p} \\
&= \binom{k+1}{p-1}(-r)^p(n-p)^{k+1}r^{n-p} + \binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^{k+1}r^{n-p} \\
&= \binom{k+1}{p-1}(-r)^p(n-p)^{k+1}r^{n-p} + n\binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^k r^{n-p} - p\binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^k \\
&= n\binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^k r^{n-p} + (-r)^p(n-p)^k r^{n-p}\left(n\binom{k+1}{p-1} - p\binom{k+1}{p-1} - p\binom{k+1}{p}\right. \\
&= n\binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^k r^{n-p} + (-r)^p(n-p)^k r^{n-p}\left(n\binom{k+1}{p-1} - p\binom{k+2}{p}\right) \\
&= n\binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^k r^{n-p} + (-r)^p(n-p)^k r^{n-p}\left(\frac{n(k+1)!}{(p-1)!(k+2-p)!} - \frac{p(k+2)!}{p!(k+2-p}\right. \\
&= n\binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^k r^{n-p} + (-r)^p(n-p)^k r^{n-p}\left(\frac{n(k+1)!}{(p-1)!(k+2-p)!} - \frac{(k+2}{(p-1)!(k+}\right. \\
&= n\binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^k r^{n-p} + (-r)^p(n-p)^k r^{n-p}\left(\frac{(n-k-2)(k+1)!}{(p-1)!(k+2-p)!}\right) \\
&= n\binom{k+1}{p}(-r)^p(n-p)^k r^{n-p} + r^n(n-k-2)(-1)^p(n-p)^k\binom{k+1}{p-1}
\end{aligned}
$$

Se (B.2) é verdade, então

$$
\begin{aligned}
n^{k+1}r^n &= -\sum_{i=1}^{k+2} T(i) \\
&= -n\sum_{i=1}^{k+2}(-r)^i(n-i)^k r^{n-i} - r^n(n-k-2)\sum_{i=1}^{k+2}(-1)^i(n-i)^k\binom{k+1}{i-1} \\
&= -n\sum_{i=1}^{k+1}(-r)^i(n-i)^k r^{n-i} - r^n(n-k-2)\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k
\end{aligned}
$$

Como, de (B.1), $n^k r^n = -\sum_{i=1}^{k+1}(-r)^i(n-i)^k r^{n-i}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$
\begin{aligned}
n^{k+1}r^n &= nn^k r^n - (-r)^n(n-k-2)\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k \\
0 &= -(-r)^n(n-k-2)\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k \\
0 &= \sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k
\end{aligned}
$$

Logo, para que (B.2) seja verdade,

$$\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k = 0 \tag{B.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Provarei (B.3) para todo $k \in \mathbb{N}$ por indução sobre k, provando as seguintes proposições:

1. $\sum_{i=1}^{2}\binom{1}{i-1}(-1)^i(n-i)^0 = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Se $\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{i=1}^{k+3}\binom{k+2}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A primeira proposição é claramente verdade. Por hipótese de indução, assumirei que

$$\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k = 0 \tag{B.4}$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Considere agora o segundo somatório da segunda proposição:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+3} \binom{k+2}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k+1} &= \\
\sum_{i=1}^{k+3} \left[\binom{k+1}{i-2}(-1)^i(n-i)^{k+1} + \binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k+1} \right] &= \\
\sum_{i=1}^{k+3} \left[\binom{k+1}{i-2}(-1)^i(n-i)^{k+1} + n\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k} - i\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k} \right] &= \\
\sum_{i=1}^{k+3} \left[n\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k} + (-1)^i(n-i)^{k} \left(n\binom{k+1}{i-2} - i\binom{k+1}{i-2} - i\binom{k+1}{i-1} \right) \right] &= \\
\sum_{i=1}^{k+3} \left[n\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k} + (-1)^i(n-i)^{k} \left(n\binom{k+1}{i-2} - i\binom{k+2}{i-1} \right) \right] &= \\
\sum_{i=1}^{k+3} \left[n\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k} + (-1)^i(n-i)^{k}(n-k-1)\binom{k+1}{i-2} \right] &= \\
n\sum_{i=1}^{k+3} \binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k} + (n-k-1)\sum_{i=1}^{k+3} \binom{k+1}{i-2}(-1)^i(n-i)^{k} &= \\
n\sum_{i=1}^{k+2} \binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k} + (n-k-1)\sum_{i=2}^{k+3} \binom{k+1}{i-2}(-1)^i(n-i)^{k} &
\end{aligned}$$

Substituindo i por j + 1 em $\sum_{i=2}^{k+3} \binom{k+1}{i-2}(-1)^i(n-i)^k$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k+3} \binom{k+1}{i-2}(-1)^i(n-i)^{k} &= \\
\sum_{j=1}^{k+2} \binom{k+1}{j-1}(-1)^{j+1}(n-i)^{k} &= \\
(-1)\sum_{j=1}^{k+2} \binom{k+1}{j-1}(-1)^{j}(n-i)^{k} &
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, (B.4) é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+3}\binom{k+2}{i-1}(-1)^i(n-i)^{k+1} &= \\
n\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k + (n-k-1)\sum_{i=2}^{k+3}\binom{k+1}{i-2}(-1)^i(n-i)^k &= \\
n\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k - (n-k-1)\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k &= 0
\end{aligned}$$

Isso prova que $\sum_{i=1}^{k+2}\binom{k+1}{i-1}(-1)^i(n-i)^k = 0$, para todo $k, n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, que $n^k r^n = -\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-r)^i(n-i)^k r^{n-i}$, para todo $k, n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 96. *Seja $f(n)$ a RLH cujo PC é $P(x) = (x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}\dots(x-r_q)^{m_q}$. O conjunto de funções $\{r_1^n, nr_1^n, \dots, n^{m_1-1}r_1^n, r_2^n, \dots, n^{m_q-1}r_q^n\}$ forma uma base para o espaço vetorial das funções que satisfazem $f(n)$.*

Demonstração. Já foi provado que essas funções satisfazem $f(n)$ e que os vetores que representam funções r_i^n, com $i \in [1..q]$, são linearmente independentes. Seja v_{ik} o vetor que representa a função $n^k r_i^n$. Falta provar que os vetores v_{ik}, com $k \in [1..m_i]$ e $i \in [1..q]$, são linearmente independentes dos demais. □

Teorema 97. adaptar

Seja $f(n)$ uma função que satisfaz a RLH cujo PC é $P(x)$. $f(n)$ também satisfaz a RLH cujo PC é $P(x)Q(x)$, em que $Q(x)$ é um polinômio qualquer.

Demonstração. Seja $Q_i(x)$ um polinômio de grau i. Provarei o enunciado por indução sobre i e, para isso, basta provar que

1. $f(n)$ satisfaz $P(x)Q_1(x)$.
2. Se $f(n)$ satisfaz $P(x)Q_i(x)$, com $i \in \mathbb{N}$, então $f(n)$ satisfaz $P(x)Q_{i+1}(x)$.

Provarei agora o primeiro item. Seja $P(x) = x^k - a_1x^{k-1} - \dots - a_k$. Assim, $f(n) = a_1f(n-1) - \dots - a_kf(n-k)$. Queremos provar que $f(n)$ satisfaz a RLH cujo PC é

$$(x^k - a_1x^{k-1} - \dots - a_k)(x-r) =$$
$$x^{k+1} - (a_1+r)x^k - (a_2-a_1r)x^{k-1} - (a_3-a_2r)x^{k-2} - \dots - (a_k-a_{k-1}r)x - (-a_kr)$$

ou seja, que

$$f(n) = (a_1+r)f(n-1)+(a_2-a_1r)f(n-2)+(a_3-a_2r)f(n-3)+\cdots+(a_k-a_{k-1}r)f(n-k)+(-a_kr)f(n-$$

Isso é verdade, pois

$$\begin{aligned}
&(a_1 + r)f(n-1) + (a_2 - a_1r)f(n-2) + \cdots + (a_k - a_{k-1}r)f(n-k) + (-a_kr)f(n-k-1) = \\
&f(n) + r[f(n-1) - (a_1f(n-2) + \cdots + a_kf(n-k-1))] = \\
&f(n) + r[f(n-1) - f(n-1)] = \\
&f(n)
\end{aligned}$$

Provarei agora o segundo item. Por hipótese, $f(n)$ satisfaz a RLH cujo PC é $P(x)Q_i(x)$. Pelo primeiro item, sabemos que se $f(n)$ satisfaz uma certa RLH, então $f(n)$ também satisfaz uma RLH cujo PC é o produto do PC da primeira RLH com um polinômio do primeiro grau. Portanto, se $f(n)$ satisfaz a RLH cujo PC é $P(x)Q_i(x)$, então $f(n)$ também satisfaz a RLH cujo PC é $P(x)Q_{i+1}(x)$. □

Teorema 98. adaptar

Seja $f(n) = a_1f(n-1) + \cdots + a_kf(n-k) + cg(n)$*, em que* $c \in \mathbb{C}$ *e* $g(n) = b_1g(n-1) + \cdots + b_qg(n-q)$*. Uma função satisfaz* $f(n)$ *se, e somente se, satisfaz a RLH* $h(n)$ *cujo PC é* $(x^k - a_1x^{k-1} - \cdots - a_k)(x^q - b_1x^{q-1} - \cdots - b_q)$*.*

Demonstração. Como o PC de $g(n)$ é $x^q - b_1x^{q-1} - \cdots - b_q$, então $g(n)$ satisfaz $h(n)$.Seja $h(n) = d_1h(n-1) + \cdots + d_mh(n-m)$. Vamos supor que $p(n)$ satisfaz $h(n)$.

$$\begin{aligned}
& a_1p(n-1) + \cdots + a_kp(n-k) + cg(n) = \\
= \; & a_1[d_1p(n-2) + \cdots + d_mp(n-m-1)] + \cdots + a_k[d_1p(n-1-k) + \cdots + d_mp(n-m-k)] + \\
& +c[d_1g(n-1) + \cdots + d_mg(n-m)] = \\
= \; & d_1[a_1p(n-2) + \cdots + a_kp(n-k-1) + cg(n-1)] + \cdots + d_m[a_1p(n-1-m) + \cdots + \\
& +a_kp(n-k-m) + cg(n-m)] = \\
= \; & d_1p(n-1) + \cdots + d_mp(n-m) = \\
= \; & p(n)
\end{aligned}$$

Logo, se $p(n)$ satisfaz $h(n)$, então $p(n)$ satisfaz $f(n)$.Considere agora a definição para o vetor v_n.

$$v_n = \begin{bmatrix} f(n+k-1) \\ \vdots \\ f(n) \\ g(n+k) \\ \vdots \\ g(n+k-q+1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{q-1} & b_q \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(n+k-2) \\ \vdots \\ f(n-1) \\ g(n+k-1) \\ \vdots \\ g(n+k-q) \end{bmatrix} = Av_{n-1}$$

$$v_n = Av_{n-1} = A^2 v_{n-2} = \dots = A^n v_0$$

Como o módulo do determinante de A é $a_k b_q$, então se $p(n)$ satisfaz $f(n)$, existe apenas um vetor v_0 que representa $p(n)$, e cada v_0 representa apenas uma função. Como $f(0),\dots,f(k-1),g(0),\dots,g(q-1)$ podem variar livremente, então as funções que satisfazem $f(n)$ formam um espaço vetorial S_f de dimenssão $k+q=m$. Seja S_h o espaço vetorial formado pelas funções que satisfazem $h(n)$. Como $S_h \subset S_f$ e $dim(S_h) = dim(S_f)$, então $S_h = S_f$. Portanto, se $p(n)$ satisfaz $f(n)$, então $p(n)$ satisfaz $h(n)$. $\square$

Referências Bibliográficas

Titu Andreescu and Zuming Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Springer, 2004.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866.

William Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 1 of *Wiley series in probability and mathematical statistics: Probability and mathematical statistics*. Wiley, 3 edition, 1971. ISBN 9780471257097. URL http://books.google.com.br/books?id=NFNQAAAAMAAJ.

Stasys Jukna. *Extremal combinatorics - with applications in computer science*. Texts in theoretical computer science. Springer, 2001. ISBN 978-3-540-66313-3. URL http://www.springer.com/computer/theoretical+computer+science/book/978-3-540-66313-3.

László Lovász, József Pelikán, and Katalin Vesztergombi. *Discrete Mathematics — Elementary and Beyond*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo, 2003. ISBN 978-0387955858.

E. Schrödinger. *What is Life?: The Physical Aspect of the Living Cell*. What is Life?: The Physical Aspect of the Living Cell. The University Press, 1944. URL http://books.google.com.br/books?id=154CAAAAMAAJ.

Jorge Stolfi and Anamaria Gomide. Elementos de matemática discreta para computação, 2011. URL http://www.ic.unicamp.br/~anamaria/livro/2013-03-12-livro.pdf.

Chris Tuffley. The principle of inclusion-exclusion, 2009. URL http://www.mathsolympiad.org.nz/wp-content/uploads/2009/

02/inclusion-exclusion.pdf&ei=sj2DU73XL6m0sQTL24CwCQ&
usg=AFQjCNEh4U_iyB_WDYPDzSAYj_3MFZrIIQ&sig2=
9YLp0YGfZI4Mv8OQsoHNNA.