Matemática Discreta

Terceira Prova

17 de março de 2021

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser enviada até as 17h40 para `menottid@gmail.com` (turmas A, B e C) ou `renato.carmo.rc@gmail.com` (turma D).

2. A duração da prova é de 120 minutos. Os 10 minutos restantes até as 17h40 são para preparo e envio da mensagem de e-mail.

3. O Subject: da mensagem deve ser "`CI1237: Prova 3`";

4. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,

   (a) o nome do arquivo deve ser seu "login" na rede do Departamento de Informática, todo em minúsculas (por exemplo, `jbas18.pdf`);

   (b) as respostas devem estar na mesma ordem das questões;

   (c) a resposta de cada questão deve iniciar uma página nova;

   (d) a resposta de cada questão pode ocupar várias páginas;

   (e) em cada questão, além da resposta, deve ser apresentado o raciocínio que leva a ela;

   (f) caso o arquivo seja produzido com LaTeX você ganha 10 pontos de bônus;

   (g) caso o arquivo seja montado a partir de fotos de folhas manuscritas, por favor,

      i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;

      ii. cuide para que a fotografia seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Renato estará em `http://meet.google.com/kbs-tzjx-unk` para esclarecer eventuais dúvidas.

Você pode usar todos os resultados já vistos na disciplina (**lemas, teoremas e corolários** inclusive aqueles cujas demonstrações são deixadas como exercícios) **sem necessidade de prová-los**: basta enunciá-los.

Você pode consultar o material online da disciplina (notas de aula, slides etc) mas não deve comunicar-se com os colegas até todos entregarem a prova.

Observe que as questões da prova somam mais de 100 pontos.

Boa prova.

1. (30 pontos) Uma equipe de três estudantes participará da Olimpíada de Informática. A prova consiste de quatro problemas e a estratégia da equipe é que cada problema seja atribuído a um único estudante e que cada estudante resolva ao menos um problema. De quantas maneiras distintas a distribuição pode ocorrer, de forma a obedecer a estes critérios?

2. (20 pontos) Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 100 000 que são múltiplos de 10 ou 15 ou 25?

3. (35 pontos) Considere o problema de distribuir k bolas distintas por n urnas distintas e seja $0 \leq p \leq 1$. Dê uma estimativa[1] para o valor de k em função de n e p para que a chance de haver ao menos uma urna com mais de uma bola seja pelo menos p.

4. (35 pontos) Um estudante propõe o seguinte algoritmo para computar uma permutação sem ponto fixo sobre $[n]$ sendo $n > 1$.

```
PSPF(n)
  Enquanto 0 < 1
    p ← permutação sobre [n] escolhida uniformemente ao acaso
    Se p não tem ponto fixo
      Devolva p
```

À objeção de que o algoritmo pode demorar anos para dar uma resposta ou até mesmo nunca terminar a execução, o estudante responde que a probabilidade de o laço do algoritmo executar mais de 50 iterações é menor que a de acertar a mega-sena com uma aposta simples. O estudante está certo? Justifique[2].

[1] **Sugestão:** Se necessário, use a desigualdade $(1 - x) \leq e^{-x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

[2] **Sugestão:** Calcule a probabilidade de uma permutação sobre $[n]$ ter ponto fixo para cada $n \in [2..5]$.

Gabarito

1. Um dos estudantes terá que resolver 2 problemas. Então, este estudante poderá resolver $\binom{4}{2} = 4 \times 3/2 = 6$ diferentes combinações de problemas. Os demais problemas que sobram vão para os dois outros estudantes. Neste caso, temos no total $6 \times 2 = 12$ possibilidades.

   Considerando que temos 3 estudantes que vão pegar 2 problemas por vez, então temos
   $$12 + 12 + 12 = 36 \text{ possibilidades} \tag{1}$$

2. Seja $p \in \mathbb{N}$ e
   $$|M_p| = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$
   o tamanho do conjunto dos números em $[n]$ que são múltiplos de p.

   Para contarmos quantos são os múltiplos inteiros e positivos de 10 ou de 15 ou de 25 que são menores ou iguais à 100 000, basta tomar a união dos conjuntos dos múltiplos de cada conjunto
   $$|M_{10} \cup M_{15} \cup M_{25}|.$$

   E para calcular o tamanho deste conjunto, basta aplicarmos o princípio da inclusão-exclusão, fazendo
   $$\begin{aligned} A_1 &= M_{10}, \\ A_2 &= M_{15}, \\ A_3 &= M_{25}, \end{aligned}$$
   temos

$$\begin{aligned}
|M_{10} \cup M_{15} \cup M_{25}| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= (-1)^{1+1} \sum_{I \in \binom{3}{1}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + (-1)^{2+1} \sum_{I \in \binom{3}{2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + (-1)^{3+1} \sum_{I \in \binom{3}{3}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{I \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + \sum_{I \in \{\{1,2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|
\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
|M_{10} \cup M_{15} \cup M_{25}| &= \left(\left| \bigcap_{i \in \{1\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{3\}} A_i \right| \right) \\
&\quad - \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{1,3\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2,3\}} A_i \right| \right) \\
&\quad + \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i \right| \right) \\
&= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&\quad + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)
\end{aligned}
$$

Ou ainda,

$$
\begin{aligned}
|M_{10} \cup M_{15} \cup M_{25}| &= (|M_{10,10000}| + |M_{15,10000}| + |M_{25,10000}|) \\
&\quad - (|M_{10,10000} \cap M_{15,10000}| + |M_{10,10000} \cap M_{25,10000}| + |M_{15,10000} \cap M_{25,10000}|) \\
&\quad + (|M_{10,10000} \cap M_{15,10000} \cap M_{25,10000}|)
\end{aligned}
$$

É importante observar que

$$
\begin{aligned}
M_{10} \cap M_{15} &= M_{30}, \\
M_{10} \cap M_{25} &= M_{50}, \\
M_{15} \cap M_{25} &= M_{75}, \\
M_{10} \cap M_{15} \cap M_{25} &= M_{150},
\end{aligned}
$$

e, portanto

$$
\begin{aligned}
|M_{10} \cup M_6 \cup M_{10}| &= (|M_{10}| + |M_{15}| + |M_{25}|) \\
&\quad - (|M_{30}| + |M_{50}| + M_{75}|) \\
&\quad + (|M_{150}|) \\
&= \left(\left\lfloor \frac{100000}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100000}{25} \right\rfloor \right) \\
&\quad - \left(\left\lfloor \frac{100000}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100000}{50} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100000}{75} \right\rfloor \right) \\
&\quad + \left(\left\lfloor \frac{100000}{150} \right\rfloor \right) \\
&= (10000 + 6666 + 4000) - (3333 + 2000 + 1333) + (666) \\
&= 20666 - 6666 + 14666 = 14666.
\end{aligned}
$$

Portanto temos 14666 números que são os inteiros positivos menores ou iguais a 100000 que são múltiplos de 10 ou 15 ou 25.

3. Para $n = 365$ e $p = 1/2$ este é o problema dos aniversários.

   A probabilidade de não haver mais de uma bola por urna é $\frac{n_k}{n^k}$.

   O valor procurado é k tal que

$$\frac{n_k}{n^k} \leq 1 - p$$

   Como

$$\frac{n_k}{n^k} = \ldots = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right) < e^{-\sum_{i=0}^{k-1} i/n} = \ldots < e^{-\frac{(k-1)^2}{2n}}.$$

   basta k tal que

$$e^{-\frac{(k-1)^2}{2n}} \leq 1 - p$$

   ou seja

$$e^{-\frac{(k-1)^2}{2n}} \leq 1 - p$$

   e portanto,

$$-\frac{(k-1)^2}{2n} \leq \ln(1-p)$$

   isto é

$$\frac{(k-1)^2}{2n} \leq \ln\frac{1}{1-p}$$

   ou seja

$$k \geq \sqrt{2n\ln\frac{1}{1-p}} + 1,$$

   e portanto, basta

$$k = \left\lceil \sqrt{2n\ln\frac{1}{1-p}} \right\rceil + 1.$$

4. (a) # permutações com ponto fixo: $n!\left(1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$

   (b) probabilidade de sortear uma permutação com ponto fixo: $1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \leq 2/3$ para todo $n > 1$

   (c) probabilidade de o laço executar mais de 50 iterações: $< (2/3)^{50} < 1/637\,621\,500$

   (d) probabilidade de acertar a mega-sena com uma aposta simples: $1/50\,063\,860$