nota=70

10/10

Questão (1)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 3, \\ 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3, & \text{para todo } n \geq 4. \end{cases}$$

Temos $f(n) = m(n) f(h(n)) + s(n)$, $\forall n \; n \geq n_0$, onde:

$m(n) = 2$, $s(n) = n - 3$, $h(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$, $n_0 = 4$ e $h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{4^k} \right\rfloor$.

$h^k(n) < n_0$, temos: $\left\lfloor \frac{n}{4^k} \right\rfloor < 4 \iff \frac{n}{4^k} < 4 \iff n < 4^{k+1} \iff k > \log_4 n - 1$

Pelo Teorema 13 temos que:

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} / h^k(n) < n_0\} = \lfloor \log_4 n - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \log_4 n \rfloor.$$

Então:

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) =$$

$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^u} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{u-1} 2 + \sum_{i=0}^{u-1} s\left(\left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor\right) \prod_{j=0}^{i-1} 2 =$$

$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^u} \right\rfloor\right) \cdot 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 3\right) \cdot 2^i =$$

$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^u} \right\rfloor\right) \cdot 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 3 \sum_{i=0}^{u-1} 2^i =$$

$$= 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 3\left(2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} - 1\right) =$$

$$= -3 \cdot 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} + 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} \cdot f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 3 =$$

$$= 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) - 3\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 3$$

Questão 2

10/10

$$f(n)=\begin{cases} n, & \text{se } n\leq 2,\\ 6f(n-1)-11f(n-2)+6f(n-3), & \text{se } n\geq 3.\end{cases}$$

~~f(n)~~ Tendo $f(n)-6f(n-1)+11f(n-2)-6f(n-3)=0$ satisfazemos uma RLH cujo PC é:

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

Com o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

1	1	-6	11	-6
	1	-5	6	0

$\rightarrow (x-1)$ e x^2-5x+6, por soma e produto obtemos: $(x-2)(x-3)$.

As raízes são $x_1=1$, $x_2=2$ e $x_3=3$. Com isso, temos:

$\{n^0 1^n, n^0 2^n, n^0 3^n\}$.

$f(n)=an^0 1^n+bn^0 2^n+cn^0 3^n$.

Acharemos a, b e c através de um sistema linear em $f(0), f(1)$ e $f(2)$:

$$\begin{aligned} an^0 1^n+bn^0 2^n+cn^0 3^n&=0 \iff \\ an^0 1^n+bn^0 2^n+cn^0 3^n&=1 \iff \\ an^0 1^n+bn^0 2^n+cn^0 3^n&=2 \iff \end{aligned}\begin{cases} a+b+c=0 & \text{I}\\ a+2b+3c=1 & \text{II}\\ a+4b+9c=2 & \text{III}\end{cases}$$

de I temos: $a=-b-c$, substituindo temos:

$$\begin{cases}-b-c+2b+3c=1 \rightarrow\\ -b-c+4b+9c=2 \rightarrow\end{cases}\begin{cases} b+2c=1 \text{ I} \rightarrow b=1-2c\\ 3b+8c=2 \text{ II}\end{cases}$$

Substituindo b em II; $3(1-2c)+8c=2 \therefore \boxed{c=-\frac{1}{2}}$

$b=1-2\left(-\frac{1}{2}\right) \therefore \boxed{b=2}$ e $a=-2-\left(-\frac{1}{2}\right) \therefore \boxed{a=-\frac{3}{2}}$

Com isso temos que:

$$f(n)=-\frac{3}{2}+2\cdot 2^n-\frac{1}{2}\cdot 3^n$$

$$f(n)=-\frac{3}{2}+2^{n+1}-\frac{3^n}{2}.$$

Questão 3

8/10

$$f(n) = \begin{cases} n^3, & \text{se } n \leq 2, \\ 12f(n-1) - 35f(n-2) + 5^n, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Parte Homogênea:

$f(n) - 12f(n-1) + 35f(n-2)$

satisfaz uma RLH cujo PC é

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

cujas raízes, por soma e produto, são:

$$(x-5)(x-7),$$

$x_1 = 5$ e $x_2 = 7$.

Parte não-homogênea:

$g(n) = 5^n$

$5^n = 5^n \cdot n^0$

A g que satisfaz a RLH é $(x-5)$.

Com isso, as raízes descobertas são

$x_1 = 5$, $x_2 = 7$ e $x_3 = 5$

$\{n^0 \cdot 5^n, n^0 \cdot 7^n, n^0 \cdot 5^n\}$

Continuação 3

$$f(n) = an^0 5^n + bn^0 7^n + cn^1 5^n$$

Acharemos a, b e c através de um sistema linear

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \text{I} \\ 5a+7b+5c=1 & \text{II} \\ 25a+49b+50c=8 & \text{III} \end{cases}$$

I $\rightarrow$ $a = -b-c$, substituindo, temos:

$$\begin{cases} 5(-b-c)+7b+5c=1 \\ 25(-b-c)+49b+50c=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b=1 \\ 24b+25c=8 \end{cases} \rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

Substituindo,

$$24\left(\frac{1}{2}\right)+25c=8$$

$$\boxed{c=-\frac{4}{25}}$$

$$a=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{25}\right)$$

$$\boxed{a=-\frac{17}{50}}$$

Com isso, temos que:

$$f(n) = -\frac{17}{50}\cdot 5^n + \frac{1}{2}\cdot 7^n - \frac{4}{25}\cdot n\cdot 5^n$$