Matemática Discreta

Segunda prova

1. Considere o Algoritmo Exp(x, n) dado por

```
Exp(x, n)
---------------------------------------------
Se n = 0
    Devolva 1                            ▷ (a)
e ← Exp(x, ⌊n/2⌋)                        ▷ (b)
e ← e × e                                ▷ (b)
Se n é par
    Devolva e
Devolva x × e                            ▷ (c)
```

(a) Expresse o número de multiplicações efetuadas na execução de Exp(x, n) por meio de uma recorrência

Resposta:

Considere:

$M_{exp}(n) :=$ Quantidade de multiplicações efetuadas ao executar Exp(x, n), onde $x \in \mathbb{R}$

$$M_{exp}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \ \texttt{(Nenhuma multiplicão é efetuada (a)).} \\ M_{exp}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se n é par e } n \geq 2 \ \texttt{(Multiplicações marcadas com (b))} \\ M_{exp}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 + 1, & \text{se n é ímpar e } n \geq 1 \ \texttt{(Multiplicações (b) e (c)).} \end{cases} \tag{1}$$

Simplificando essa recorrência utilizando o operador mod:

$$M_{exp}(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0. \\ M_{exp}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 + (n \bmod 2), & \text{se } n \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

(b) Resolva essa recorrência

Resposta:

Como $M_{exp}(n)$ tem a forma:

$$f(n) = f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0$$

É possível resolvê-la usando:

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0$$

onde:

$$u = min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}$$

Para esse problema temos:
$h(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \qquad h^i(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$
$s(n) = n \bmod 2 + 1$
$n_0 = 1$
Encontrando o u:

$$u = min\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 1\}$$

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 1$$
$$\frac{n}{2^k} < 1$$
$$n < 2^k$$
$$\lg n < \lg 2^k$$
$$\lg n < k$$
$$k > \lg n$$

$$u = min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n\} = \lfloor \lg n \rfloor + 1$$

Substituindo na fórmula:

$$f(n) = f\Big(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\Big) + \sum_{i=0}^{u-1} \Big(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2 + 1\Big) =$$

$$= f\Big(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\Big) + \sum_{i=0}^{u-1} \Big(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\Big) + \sum_{i=0}^{u-1} 1 =$$

$$= f\Big(\Big\lfloor \frac{n}{2^u} \Big\rfloor\Big) + \sum_{i=0}^{u-1} \Big(\Big\lfloor \frac{n}{2^i} \Big\rfloor \bmod 2 \Big) + u =$$

$$= f\Big(\Big\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}} \Big\rfloor\Big) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor + 1 - 1} \Big(\Big\lfloor \frac{n}{2^i} \Big\rfloor \bmod 2 \Big) + \lfloor \lg n \rfloor + 1 =$$

$$= f(0) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \Big(\Big\lfloor \frac{n}{2^i} \Big\rfloor \bmod 2 \Big) + \lfloor \lg n \rfloor + 1 =$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \Big(\Big\lfloor \frac{n}{2^i} \Big\rfloor \bmod 2 \Big) + \lfloor \lg n \rfloor + 1$$

Comentários: Essa questão no final afirma que o número de multiplicações efetuadas pelo algoritmo Exp(x, n) é igual ao número de bits uns de n, mais o número de bits totais de n, isso é visto nos itens do exercício 72 e no exercício 95 há uma recorrência similar.

2. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0. \\ 2f(n-1) + n^2, & \text{se } n \geq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Resposta:
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-2)G$$

onde G é o PC de $g(n) = n^2 1^n$, e pelo Corolário 38:

$$G = (X-1)^{2+1} = (X-1)^3$$

Logo o PC de $f(n)$ é:

$$(X-2)(X-1)^3$$

Portanto, $f(n)$ tem a seguinte forma:

$$f(n) = c_0 2^n + c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot n^2$$

Encontrando as constantes
$f(0) = 3 = c_0 + c_1$
$f(1) = 2f(0) + 1^2 = 7 = 2c_0 + c_1 + c_2 + c_3$
$f(2) = 2f(1) + 2^2 = 18 = 4c_0 + c_1 + 2c_1 + 4c_3$
$f(3) = 2f(2) + 3^2 = 45 = 8c_0 + c_1 + 3c_2 + 9c_3$
Esse sistema de equações pode ser resolvido realizando operações na matriz aumentada, a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 18 \\ 8 & 1 & 3 & 9 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -7 & 3 & 9 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 7 & -3 & -9 & -21 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 9, \quad c_1 = -6, \quad c_2 = -4, \quad c_3 = -1,$$

Como, $f(n)$ tem a forma:

$$f(n) = c_0 2^n + c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot n^2$$

Para essa instância temos:

$$f(n) = 9 \cdot 2^n - 6 - 4n - n^2, \text{ para todo } n \geq 0$$

`Comentários: Essa questão é uma instância da recorrência vista no exercício 119(e)`

3. Dê uma expressão livre de somatórios para

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j$$

Resposta:
Primeiro será encontrado uma expressão para o somatório mais interno:

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n-1} i + n = s(n-1) + n$$

Dessa maneira $s(n)$ é uma RLnH, cujo PC é dado por:

$$(X-1)G$$

onde G é o PC de $g(n) = n^1 1^n$, e pelo Corolário 38:

$$(X-1)^{1+1} = (X-1)^2$$

e portanto o PC de $s(n)$

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3$$

Logo, $s(n)$ tem a forma:

$$s(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$$

Encontrando as constantes:
$s(0) = 0 = c_0$ (c_0 `será ignorado`)
$s(1) = s(0) + 1 = 1 = c_1 + c_2$
$s(2) = s(1) + 2 = 3 = 2c_1 + 4c_2$
Esse sistema de equações pode ser resolvido realizando operações na matriz aumentada, a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2},$$

Como $s(n)$ tem a forma:

$$s(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$$

Temos para essa instância:

$$s(n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{n+n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Portanto:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

Usando (4) para simplificar o somatório original temos:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j = \sum_{i=0}^{n} \frac{i(i+1)}{2}$$

Por fim para encontrar uma expressão fechada para esse somatório, ele será transformado em uma recorrência.

$$s'(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = s'(n-1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

Dessa maneira $s(n)$ é uma RLnH cujo PC é dado por:

$$(X-1)G'$$

onde G' é o PC de $g'(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, pelo Corolário 38(Geral)

$$G' = (X-1)^3$$

e portanto o PC de $s'(n)$ é:

$$(X-1)(X-1)^3 = (X-1)^4$$

Logo, $s'(n)$ tem a forma:

$$s'(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3$$

Encontrando as constantes:

$s'(0) = 0 = c_0$ (c_0 `novamente será ignorado, para simplificar o sistema)`

$s'(1) = s'(0) + \frac{1(1+1)}{2} = 1 = c_1 + c_2 + c_3$

$s'(2) = s'(1) + \frac{2(2+1)}{2} = 4 = 2c_1 + 4c_2 + 8c_3$

$s'(3) = s'(2) + \frac{3(3+1)}{2} = 10 = 3c_1 + 9c_2 + 27c_3$

Esse sistema de equações pode ser resolvido realizando operações na matriz aumentada, a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 27 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 24 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 24 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{6},$$

Como $s'(n)$ tem a forma:

$$s'(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3$$

Temos para essa instância:

$$s'(n) = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

Dessa maneira concluímos que:

$$s'(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} j = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

`Comentários:  Combinação dos exercícios 125 e 127(a)`