4/10

Questão 1

a)

Vamos provar por indução em n que:

$$m \le V[i] \le M, \text{ p/ todo } a \le i \le a+n-1.$$

Hip. Indutiva: Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que: $m \le V[i] \le M$, p/ todo $a \le i \le a+k-1$, p/ todo $k \in [1..p]$.

Passo: Vamos provar que $m \le V[i] \le M$, p/ todo $a \le i \le a+(p+1)-1$
$a \le i \le a+p$.

Do algoritmo MinMax() temos que, se $p+1>1$, então:
C() são chamadas da função.

$$C(p+1) = C(m-a+1) + C((a+(p+1)-1)-(m+1)+1)+1$$
$$= C(m-a+1)+C(a+p-m)+1,$$

Onde:

$$m = \left\lfloor \frac{a+(a+(p+1)-1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a+p}{2} \right\rfloor = \left\lfloor a+\frac{p}{2} \right\rfloor = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor,$$

Então:

$$m-a+1 = a+\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1,$$

e,

$$a+p-m = a+p-\left(a+\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right) = a+p-a-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil,$$

portanto,

$$C(p+1) = C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) + C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) + 1.$$

Se $1 \le \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1 \le p$ e $1 \le \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \le p$, então, pela H.I. temos

$$C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$$

$$C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1$$

Temos que:

$$C(p+1) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1 + 1 = p.$$

Então temos, portanto $m \le V[i] \le M$ p/ todo $a \le i \le a+p$.

Continuação ① a)

Base: Do algoritmo temos que, se $p=1$:

$$C(1) = 0 = p-1.$$

Questão ①

5/10

b) Seja $C(n)$ a soma do nº de invocações de max() e min() em (~~MaxMin(v,a,a+n-1)~~). MinMax(v, a, a+n-1)

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 2, \\ \boxed{C\left(\frac{n-1}{2}\right) + C\left(\frac{n}{2}\right)} + 2, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Questão ②

6/10

$$\sum_{i=0}^{n} i3^{i} \approx an^{b}c^{n}$$

Primeiro, iremos retirar o somatório da expressão:

Pelo corolário 38, temos:

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} g(n) \qquad g(n) = n3^{n} = n^{1}3^{n}$$

Então temos:

$$(x-1)(x-3)^{1+1} = (x-1)(x-3)^{2} \text{; raízes } 1;3;3$$

$$\{n^{0}1^{n}, n^{0}3^{n}, n^{1}3^{n}\}$$

$$S(n) = an^{0}1^{n} + bn^{0}3^{n} + cn^{1}3^{n}$$

$$\begin{aligned} S(0) &= a+b \\ S(1) &= a+3b+3c \\ S(2) &= a+9b+18c \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} a+b=0 \rightarrow a=-b \\ a+3b+3c=3 \\ a+9b+18c=21 \end{cases}$$

Substituindo $a=-b$ nas demais equações:

$$\begin{cases} -b+3b+3c=3 \\ -b+9b+18c=21 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} 2b+3c=3 \\ 8b+18c=21 \end{aligned}$$

$$b = \frac{3-3c}{2} \qquad 6c+12=21$$

$$c = \frac{3}{2} \therefore b = -\frac{3}{4} \text{ e } a = \frac{3}{4}$$

$$S(n) = \frac{3}{4}.1^{n} - \frac{3}{4}.3^{n} + \frac{3}{2}.3^{n}$$

$$= \frac{3}{4}.1^{n} - \frac{3^{n+1}}{4} + \frac{3^{n+1}}{2}$$

$$= \frac{3}{4}.1^{n} + \frac{3^{n+1}}{4} = \frac{3^{n+1} + 3.1^{n}}{4}$$

$$\boxed{\frac{3^{n+1} + 3.1^{n}}{4} \approx an^{b}c^{n}}$$

Questão ③

10/10

Dados que sejam 9 jogos, e desses 9 jogos temos 5 vitórias, 3 derrotas e 1 empate. Para achar o número de maneiras distintas fazemos a permutação destes elementos:

$$P_9^{5,3,1} = \frac{9!}{5!\,3!\,1!} = \frac{9.8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,6.1} = 504.$$

10/10

Questão 4

Temos $\binom{10}{2}$ possibilidades jogos no total:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}.2} = \frac{90}{2} = 45.$$

Mas não podemos considerar jogos onde unitam 2 canhotos, então vamos calcular a possibilidade disso acontecer:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Por fim, temos $45 - 6 = 39$ possibilidades.