Matemática Discreta

Terceira Prova

13 de dezembro de 2021

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser **enviada** até as 19h45 para `renato.carmo.rc@gmail.com` (turma A) ou `menottid@gmail.com` (turma B).
2. O Subject: da mensagem deve ser "`CI1237: Prova 3`";
3. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,
   (a) o nome do arquivo deve ser seu "login" na rede do Departamento de Informática (por exemplo, `jbas18.pdf`);
   (b) O arquivo pode ser produzido digitalmente com LaTeX ou qualquer outro software, ou pode ser uma série de fotos de folhas manuscritas;
   (c) as respostas devem estar na mesma ordem das questões;
   (d) a resposta de cada questão deve iniciar uma página nova;
   (e) a resposta de cada questão pode ocupar várias páginas;
   (f) em cada questão, apresente o raciocínio que conduz à solução;
   (g) caso o arquivo seja produzido a partir de fotos de folhas manuscritas,
      i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;
      ii. cuide para que a fotografia/"scan" seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Menotti estará em `https://bbb.c3sl.ufpr.br/b/dav-c6i-ccw-rbg` para esclarecer eventuais dúvidas.

Você pode usar todos os resultados já vistos na disciplina como **lemas, teoremas e corolários** (inclusive aqueles cujas demonstrações são deixadas como exercícios) **sem necessidade de prová-los**: basta enunciá-los.

Você pode consultar o material online da disciplina (notas de aula, slides etc) mas não pode comunicar-se com os colegas até as 19h30.

Boa prova.

1. (15 pontos) A família de Carlos é formada por 5 pessoas: ele, sua esposa Ana e mais 3 filhos, que são Carla, Vanessa e Tiago. Eles desejam tirar uma foto da família para enviar como presente ao avô materno das crianças.

   Determine o número de possibilidades de os membros da família poderem se organizar para tirar a foto de forma que Carlos e Ana sempre fiquem lado a lado.

2. (15 pontos) Dado um conjunto de n letras distintas, quantas são as palavras (isto é, sequências de letras) de qualquer tamanho que podem ser formadas com estas letras, sem repetir nenhuma?

3. (15 pontos) Um robô está na posição $(0, 0)$ de um sistema de coordenadas inteiras e a cada instante pode dar um passo "para a direita" ou "para cima". Cada passo numa direção aumenta de 1 sua posição no sistema nessa direção. De quantas maneiras diferentes ele pode atingir a posição (n, m)?

4. (20 pontos) De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que as urnas ímpares tenham pelo menos uma bola cada?

5. Considere um painel de luzes natalinas onde n^2 lâmpadas são dispostas como uma matriz de n linhas e n colunas. Vamos chamar de uma *configuração* do painel cada possível combinação de lâmpadas acesas ou apagadas.

   (a) (2 pontos) Quantas são as configurações do painel?

   (b) (2 pontos) Em quantas delas a primeira linha tem todas as lâmpadas acesas?

   (c) (3 pontos) Em quantas delas a primeira e a última linhas tem todas as lâmpadas acesas?

   (d) (3 pontos) Sabendo que $n > 3$, em quantas configurações a primeira, a $\lfloor n/2 \rfloor$-ésima e a penúltima linha tem todas as lâmpadas acesas?

   (e) (25 pontos) Em quantas configurações alguma linha tem todas as lâmpadas acesas?

Gabarito

1. Para que Carlos e Ana apareçam juntos (lado a lado), podemos considerá-los como uma única pessoa que irá permutar com as outras três, num total de 24 possibilidades, i.e., $4! = 4.3.2.1$.

   Porém, para cada uma dessas 24 possibilidades, Carlos e Ana podem trocar de lugar entre si, de 2 maneiras distintas, i.e., $2! \times 4! = 48$.

   Sendo assim, existem 48 possibilidades de Carlos e Ana tirarem a foto lado a lado.

2. O número de palavras de tamanho k é $\binom{n}{k}k!$. O total então é

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k! = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}k! = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \lfloor en! \rfloor .$$

3. É o número de sequências de $\{\rightarrow, \uparrow\}^{n+m}$ com exatamente n $\rightarrow$'s que é $\binom{n+m}{n}$

4. Sendo $[n]$ o conjunto das urnas e

$$s = \sum_{u=1}^{n}(u \mod 2) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

   o número de bolas nas urnas ímpares, cada distribuição corresponde a uma distribuição de $k-s$ bolas idênticas por n urnas distintas, onde depois acrescentamos uma bola às $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ urnas ímpares, e portanto temos

$$\binom{n+(k-s)-1}{n-1} = \binom{n+k-1-\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n-1}.$$

5. (a) 2^{n^2}

   (b) $2^{n(n-1)}$

   (c) $2^{n(n-2)}$

   (d) $2^{n(n-3)}$

   (e) Dado $I \subseteq [n]$, seja C_I o conjunto das configurações em que todas as linhas $i \in I$ tem todas as lâmpadas acesas. O conjunto das configurações com alguma linha com todas as lâmpadas acesas é

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} C_{\{k\}},$$

   e daí,

$$|A| = \left| \bigcup_{k=1}^{n} C_{\{k\}} \right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} C_{\{i\}} \right| .$$

Generalizando os itens anteriores temos que

$$\left|\bigcap_{i\in I} C_{\{i\}}\right| = 2^{n(n-|I|)},$$

e consequentemente

$$\sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} C_{\{i\}}\right| = \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} 2^{n(n-|I|)} = \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} 2^{n(n-k)} = \binom{n}{k} 2^{n(n-k)} = \binom{n}{k} \frac{2^{n^2}}{2^{nk}} = 2^{n^2} \frac{\binom{n}{k}}{2^{nk}},$$

e daí,

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} C_{\{i\}}\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} 2^{n^2} \frac{\binom{n}{k}}{2^{nk}} = 2^{n^2} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{2^{nk}}.$$

possível provar que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{2^{nk}} &= 1 - (1 - 2^{-n})^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n = 1 - \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{(2^n - 1)^n}{2^{n^2}}\right) = \frac{2^{n^2} - (2^n - 1)^n}{2^{n^2}}\end{aligned}$$

de forma que

$$|A| = 2^{n^2} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{2^{nk}} = 2^{n^2} \frac{2^{n^2} - (2^n - 1)^n}{2^{n^2}} = 2^{n^2} - (2^n - 1)^n.$$