Matemática Discreta

Treino para a Segunda Prova

3 de fevereiro de 2021

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser enviada até as 17h40 para `menottid@gmail.com` (turmas A, B e C) ou `renato.carmo.rc@gmail.com` (turma D).

2. A duração da prova é de 120 minutos. Os 10 minutos restantes até as 17h40 são para preparo e envio da mensagem de e-mail.

3. O Subject: da mensagem deve ser "`CI1237: Prova 2`";

4. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,

   (a) o nome do arquivo deve ser seu "login" na rede do Departamento de Informática, todo em minúsculas (por exemplo, `jbas18.pdf`);

   (b) as respostas devem estar na mesma ordem das questões;

   (c) a resposta de cada questão deve iniciar uma página nova;

   (d) a resposta de cada questão pode ocupar várias páginas;

   (e) em cada questão, além da resposta, deve ser apresentado o raciocínio que leva ela;

   (f) caso o arquivo seja produzido com LaTeX você ganha 10 pontos de bônus;

   (g) caso o arquivo seja montado a partir de fotos de folhas manuscritas, por favor,

      i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;

      ii. cuide para que a fotografia seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Menotti estará em `http://meet.google.com/eve-qvqz-usu` para esclarecer eventuais dúvidas.

Boa prova.

1. (25 pontos) O Algoritmo de Strassen é um algoritmo recursivo para multiplicação de matrizes quadradas que, para matrizes suficientemente grandes, faz menos operações aritméticas do que o algoritmo usual.

   A função $M(n)$, abaixo, estabelece um limitante superior para o número $S(n)$ de operações aritméticas na execução do Algoritmo de Strassen com duas matrizes quadradas de ordem n como entrada, isto é, $S(n) \leq M(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$M(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 7M\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 18\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

   Resolva esta recorrência.

2. (25 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 1, & \text{se } 1 \leq n \leq 2, \\ 8f(n-1) - 19f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

3. (25 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + 2^n, & \text{se } n > 3. \end{cases}$$

4. (25 pontos) Dê uma expressão livre de somatórios para

$$\sum_{i=0}^{n} i(2^i - i).$$

Respostas

1. Temos
$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$
onde
$$h(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, m(n) = 7, s(n) = 18\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2, n_0 = 2,$$
e, portanto,
$$h^k(n) = \left\lceil \frac{n}{2^k} \right\rceil,$$
e
$$h^k(n) < n_0, \text{ se e somente se } \left\lceil \frac{n}{2^k} \right\rceil < 2, \text{ ou seja, } \frac{n}{2^k} \leq 1, \text{ isto é, } 2^k \geq n,$$
ou seja,
$$k \geq \lg n \text{ e } u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq \lg n\right\} = \lceil \lg n \rceil.$$
Então
$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\
&= f\left(\left\lceil \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \right\rceil\right)\prod_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 7 + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} s\left(\left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil\right)\prod_{j=0}^{i-1} 7 \\
&\stackrel{?}{=} f\left(\left\lceil \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \right\rceil\right) 7^{\lceil \lg n \rceil} + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 7^i \left(18\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil}{2} \right\rceil^2\right) \\
&= 7^{\lceil \lg n \rceil} f\left(\left\lceil \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \right\rceil\right) + 18\sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 7^i \left(\left\lceil \frac{n}{2^{i+1}} \right\rceil\right)^2.
\end{aligned}$$
Como
$$\lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg 2n, \text{ se e somente se } 2^{\lg n} \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg 2n},$$
e
$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq \frac{1}{n}, \text{ se e somente se } \frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1,$$
então,
$$\left\lceil \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \right\rceil = 1.$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 7^{\lceil \lg n \rceil} f\left(\left\lceil \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \right\rceil\right) + \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 7^i \left(\left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil\right)^2 \\
&= 7^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 7^i \left(\left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil\right)^2 \\
&= 7^{\lceil \lg n \rceil} + \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 7^i \left(\left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil\right)^2 \\
&= n^{(\lceil \lg n \rceil / \lg n) \lg 7} + \frac{9}{2} \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 7^i \left(\left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil\right)^2, \ \text{para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

2. $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$X^3 - 8X^2 + 19X - 12 = (X-1)(X-3)(X-4)$$

e

$$f(n) = a1^n + b3^n + c4^n = a + b3^n + c4^n.$$

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a + b3^0 + c4^0, \\
f(1) &= a + b3^1 + c4^1, \\
f(2) &= a + b3^2 + c4^2,
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
(1)\ 0 &= a + b + c, \\
(2)\ 1 &= a + 3b + 4c, \\
(3)\ 1 &= a + 9b + 16c,
\end{aligned}
$$

fazendo (2)-(1) e (3)-(1), vem que,

$$
\begin{aligned}
1 &= 2b + 3c, \\
1 &= 8b + 15c,
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
(4)\ 4 &= 8b + 12c, \\
(5)\ 1 &= 8b + 15c,
\end{aligned}
$$

fazendo (4)-(5), vem que,

$$c = -1,$$

e substituindo $c = -1$ em (1) e (2), vem que

$$
\begin{aligned}
(6)\ 1 &= a + b, \\
(7)\ 5 &= a + 3b,
\end{aligned}
$$

fazendo (7)-(6), vem que

$$b = 2,$$

e então

$$a = -1$$

Portanto

$$f(n) = a1^n + b3^n + c4^n = -1.2^n + 2.3^n - 1.4^n = 2.3^n - 4^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. $f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-2)(X-3)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 2^n.$$

Como

$$2^n = 1n^0 2^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-2)^{0+1} = (X-2),$$

e f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-2)(X-3)(X-2) = (X-2)^2(X-3),$$

e

$$f(n) = a2^n + bn^1 2^n + c3^n = a2^n + bn2^n + c3^n.$$

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= a2^0 + b0.2^0 + c3^0, \\ f(1) &= a2^1 + b1.2^1 + c3^1, \\ f(2) &= a2^2 + b2.2^2 + c3^2, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} 0 &= a + 0b + c, \\ 1 &= 2a + 2b + 3c, \\ 2 &= 4a + 8b + 9c. \end{aligned}$$

Como

$$a = -c, \tag{1}$$

então

$$\begin{aligned} 1 &= -2c + 2b + 3c, \\ 2 &= -4c + 8b + 9c, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 1 &= 2b + c, \\ 2 &= 8b + 5c, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (1)\ 4 &= 8b + 4c, \\ (2)\ 2 &= 8b + 5c, \end{aligned}$$

e fazendo (2)-(1), vem que

$$c = -2 \text{ e } a = 2$$

e daí,

$$4 = 8b + 4(-2) = 8b - 8,$$

e portanto,

$$b = \frac{3}{2}.$$

Portanto

$$f(n) = a2^n + bn2^n + c3^n = 2.2^n + \frac{3}{2}n2^n - 2.3^n = 2^n(\frac{3n}{2} + 2) - 2.3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

4. Podemos escrever o somátorio $s(n)$ como

$$s(n) = s_1(n) - s_2(n)$$

onde

$$\begin{aligned} s_1(n) &= \sum_{i=0}^{n} i2^i, \\ s_2(n) &= \sum_{i=0}^{n} i^2, \end{aligned}$$

Como visto no Exercício **??**(a) temos que

$$s_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

e usando a notação do Corolário **??** temos

$$s_1(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

com

$$g(n) = n2^n.$$

Como

$$g(n) = n^1 2^n$$

podemos concluir que a função s_1 satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)(X-2)^{1+1}=(X-1)(X-2)^2$.

Pelo Teorema **??**, temos

$$s_1(n)=a1^n+bn^0 2^n+cn^1 2^n=a+b2^n+cn2^n,$$

onde (a,b,c) é dado pela solução do sistema

$$\begin{aligned} s_1(0) &= a+b2^0+c.0.2^0, \\ s_1(1) &= a+b2^1+c.1.2^1, \\ s_1(2) &= a+b2^2+c.2.2^2, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} (1)\ 0 &= a+b+0c, \\ (2)\ 2 &= a+2b+2c, \\ (3)\ 10 &= a+4b+8c, \end{aligned}$$

de (1) vem que

$$a=-b,$$

e então substituindo $a=-c$ em (2) e (3), temos

$$\begin{aligned} 2 &= -b+2b+2c, \\ 10 &= -b+4b+8c, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} (4)\ 2 &= b+2c, \\ (5)\ 10 &= 3b+8c, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} (6)\ 6 &= 3b+6c, \\ (7)\ 10 &= 3b+8c, \end{aligned}$$

fazendo (7)-(6), vem que

$$c=2,$$

Substituindo $c=2$ em (4) ou (5), vem que

$$b=-2,$$

e então

$$a=2.$$

Portanto

$$s_1(n)=a+b2^n+cn2^n,=2-2.2^n+2.n.2^n=2^{n+1}(n-1)+2,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} s(n) &= s_1(n)-s_2(n) \\ &= 2^{n+1}(n-1)+2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 2^{n+1}(n-1)-\frac{n(n+1)(2n+1)-12}{6},\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$