nota: 39

Questão ①

a) $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$

0/10

Vamos dividir a prova em duas partes:

1. Se $f(i)$ é inteiro, temos que: $\lfloor f(i) \rfloor = f(i)$, então

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i).$$

2. Se $f(i)$ não é inteiro, temos que: $\lfloor f(i) \rfloor < f(i)$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor < \sum_{i=1}^{n} f(i).$$

Tanto em ① quanto em ② prova-se que a expressão $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$ é falsa, pois em ① são iguais e não próximas, e em ② uma é menor que a outra.

Questão 1

10/10

b) $\lg n \approx \log n$

$$\lim \frac{\lg n}{\log n} = \frac{\frac{\log n}{\log 2}}{\log n} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{\cancel{\log n}}{\cancel{\log n}} = \lg 10 \neq 1$$

Falso.

Questão ②

2/10

a) Vamos provar por indução em n que
$S(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hip. Indutiva: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que: $S(k) = k^2$ para todo $k \in [0..a]$.

Passo Indutivo: Vamos provar que $S(a+1) = (a+1)^2$.

Vamos dividir a prova em dois casos:

1. a é par:

$$\boxed{S(a+1) = (a+1)^2}$$
$$= a^2 + 2a + 1$$
$$= 2a + 1 + S(a)$$

Onde $\boxed{\underline{S(a)} \text{ é } \underline{\text{par}}}$ e $\underline{2a+1}$ é $\underline{\text{ímpar}}$

Então $(a+1)^2$ é ímpar.

2. a é ímpar:

$$\boxed{S(a+1) = (a+1)^2}$$
$$= a^2 + 2a + 1$$
$$= 2a + 1 + S(a)$$

Onde $\boxed{\underline{S(a)} \text{ é } \underline{\text{ímpar}}}$ e $\underline{2a+1}$ é $\underline{\text{par}}$

Então $(a+1)^2$ é par.

base?

Questão (2)

7/10

b) Seja $S(n)$ o número de somas e subtrações na execução do algoritmo.

Vamos provar por indução em n que:

$$S(n) \leq 6(\lfloor \lg n \rfloor + 1) \quad \text{p/ todo } n \geq 1.$$

Hip. Indutiva: Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que: $S(k) \leq 6(\lfloor \lg k \rfloor + 1)$ p/ todo $k \in [1..p]$.

Passo Indutivo: Vamos provar que $S(p+1) \leq 6(\lfloor \lg(p+1) \rfloor + 1)$.

Do algoritmo temos que, para $n > 0$:

$$S(p+1) = 6 + S\boxed{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}$$

$$\boxed{S(p+1) = 6 + S\left(\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor\right)}$$

Da H.I. temos que $\boxed{S(n) \leq 6(\lfloor \lg n \rfloor + 1)}$, então:

$$S(p+1) \boxed{\leq} 6 + 6\left(\left\lfloor \lg\left(\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor\right) \right\rfloor + 1\right)$$

$$= 6\left(\left\lfloor \lg\left(\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor\right) \right\rfloor + 2\right)$$

$$= 6\left(\left\lfloor \lg\left(\frac{p+1}{2}\right) \right\rfloor + 2\right)$$

$$= 6(\lfloor \lg(p+1) - 1 \rfloor + 2)$$

$$= 6(\lfloor \lg(p+1) \rfloor - 1 + 2)$$

$$= 6(\lfloor \lg(p+1) \rfloor + 1).$$

Base Indutiva: Vamos provar para $n = 1$

1. $S(1) = 6$.

2. $6(\lfloor \lg 1 \rfloor + 1) = 6(1) = 6$.

1/10

Questão 3

Hip. Indutiva: Existe um primo $p_k \le 2^{2^{k-1}}$ p/ todo $k \in [1..a]$

Base: $p_1 = 2^{2^0}$

$p_1 = 2^1$

$p_1 = 2 \rightarrow$ primo