

# Matemática Discreta

## Primeira Prova

7 de junho de 2021

### Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser enviada até as 17h30 para [renato.carmo.rc@gmail.com](mailto:renato.carmo.rc@gmail.com) (turma A) ou [menottid@gmail.com](mailto:menottid@gmail.com) (turma B).
2. O Subject: da mensagem deve ser “CI1237: Prova 1”;
3. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,
  - (a) o nome do arquivo deve ser seu “login” na rede do Departamento de Informática (por exemplo, `jbas18.pdf`);
  - (b) as respostas devem estar na mesma ordem das questões/ítems;
  - (c) a resposta de cada questão/item deve iniciar uma página nova;
  - (d) a resposta de cada questão/item pode ocupar várias páginas;
  - (e) por favor,
    - i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;
    - ii. cuide para que a fotografia/”scan” seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Menotti estará em <https://meet.google.com/djw-vfmg-jmv> para esclarecer eventuais dúvidas.

Boa prova.

1. Prove que não é verdade que:

- (a) (10 pontos)  $\sum_{i=1}^n \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^n f(i)$ , para todo  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (b) (10 pontos)  $\lg n \approx \log n$ .

2. Considere o seguinte algoritmo para computar o quadrado de um inteiro  $n$ .

$S(n)$
Se $n = 0$ Devolva 0 $q \leftarrow S(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ $q \leftarrow q + q + q + q$ Se $n$ é ímpar $q \leftarrow q + n + n - 1$ Devolva $q$

- (a) (25 pontos) Prove que o algoritmo está correto<sup>1</sup>, isto é, que  $S(n) = n^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) (25 pontos) Prove que o número de somas e subtrações efetuadas na execução de  $S(n)$  é no máximo  $6(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ , para todo  $n \geq 1$ .

3. (30 pontos) Para cada  $n \geq 1$ , Seja  $p_n$  o  $n$ -ésimo número primo (por exemplo,  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5$ ). Prove que<sup>2</sup>  $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$  para todo  $n \geq 1$ .

<sup>1</sup>**Sugestão:** Estude separadamente os casos em que  $n$  é par ou ímpar.

<sup>2</sup>**Sugestão:** Use o fato de que  $p_{n+1} \leq 1 + \prod_{i=1}^n p_i$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .