Exercícios - André Almeida Menezes

1) Elementos de lógica

1- a) verdadeiro

b) falso

c) não é uma proposição

2) a) $(1<2)$ e $(2<3) \Rightarrow (1\leq 3)$

verdadeira

b) $(1<2) \Rightarrow (10<30)$

verdadeira

c) $1>2 \Rightarrow 2<3$

verdadeira

d) $1>2 \Rightarrow 2>3$

verdadeira

3) $P(x): x \leq x^2$

$Q(x,y): x \leq y^2$

a) $P(2)$ verdadeira

b) $P(1/2)$ falsa

c) $Q(1,1)$ verdadeira

d) $R(t) = Q(1,t)$ não é uma proposição

4) $P(x): x \leq x^2$

a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ falso

b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ verdadeiro

c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$ verdadeiro

d) $P(x)$, para algum $0 \leq x \leq 1$ falso

5) A, B, C não proposições

a) $F \Rightarrow A \equiv (F$ e $A)$ ou nãoF

$\equiv F$ ou V

$\equiv V$

b) $A \Rightarrow B \equiv$ nãoA ou B

$A \Rightarrow B \equiv (A$ e $B)$ ou nãoA

$\equiv$ não(não$((A$ e $B)$ ou não$A))$

$\equiv$ não(não$(A$ e $B)$ e não(nãoA))

$\equiv$ não((nãoA ou nãoB) e A)

$\equiv$ não((A e nãoA) ou (A e nãoB))

$\equiv$ não(F ou (A e nãoB))

$\equiv$ não(A e nãoB)

$\equiv$ nãoA ou não(nãoB)

$\equiv$ nãoA ou B

c) $A \Rightarrow B \equiv$ não$B \Rightarrow$ nãoA

não$B \Rightarrow$ não$A \equiv$ (nãoA e nãoB) ou não(nãoB)

$\equiv$ não(A ou B) ou B

$\equiv$ não(não(não(A ou B) ou B))

$\equiv$ não(não(não(A ou B)) e nãoB)

$\equiv$ não((A ou B) e nãoB)

$\equiv$ não((A e nãoB) ou (B e nãoB))

$\equiv$ não((A e nãoB) ou F)

$\equiv$ não(A e nãoB)

$\equiv$ nãoA ou B

$\equiv A \Rightarrow B$

d) $A \Rightarrow F \equiv$ nãoA

$A \Rightarrow F \equiv (A$ e $F)$ ou nãoA

$\equiv F$ ou nãoA

$\equiv$ nãoA

e) $(A \Rightarrow B)$ ou $(A \Rightarrow C) \equiv A \Rightarrow (B$ ou $C)$

$(A \Rightarrow B)$ ou $(A \Rightarrow C) \equiv$ (nãoA ou B) ou (nãoA ou C)

$\equiv$ nãoA ou B ou C

$\equiv$ nãoA ou (B ou C)

$\equiv A \Rightarrow (B$ ou $C)$

f) $(A \Rightarrow B)$ e $(A \Rightarrow C) \equiv (A \Rightarrow (B$ e $C))$

$A \Rightarrow (B$ e $C) \equiv$ não A ou $(B$ e $C)$

$\equiv$ não(não(não A ou $(B$ e $C)))$

$\equiv$ não(não(não A) e não(B e C))

$\equiv$ não(A e (não B ou não C))

$\equiv$ não(A e não B ou A e não C)

$\equiv$ não(A e não B) e não(A e não C)

$\equiv$ (não A ou não(não(B))) e (não A ou não(não(C)))

$\equiv$ (não A ou B) e (não A ou C)

$\equiv (A \Rightarrow B)$ e $(A \Rightarrow C)$

g) $(B \Rightarrow A)$ ou $(C \Rightarrow A) \equiv (B$ e $C) \Rightarrow A$

$(B \Rightarrow A)$ ou $(C \Rightarrow A) \equiv$ (não B ou A) ou (não C ou A)

$\equiv$ não B ou A ou não C

$\equiv$ (não B ou não C) ou A

$\equiv$ não(não(não B ou não C)) ou A

$\equiv$ não(não(não B) e não(não C)) ou A

$\equiv$ não(B e C) ou A

$\equiv (B$ e $C) \Rightarrow A$

h) $(B \Rightarrow A)$ e $(C \Rightarrow A) \equiv (B$ ou $C) \Rightarrow A$

$(B \Rightarrow A)$ e $(C \Rightarrow A) \equiv$ (não B ou A) e (não C ou A)

$\equiv$ não C e (não B ou A) ou A e (não B ou A)

$\equiv$ (não B e não C) ou (A e não C) ou (A e não B) ou A

$\equiv$ não(B ou C) ou A e (não B ou não C) ou A

$\equiv$ não(B ou C) ou (A e B e C) ou A

$\equiv$ não(B ou C) ou A e ((B e C) ou V)

$\equiv$ não(B ou C) ou A e V

$\equiv$ não(B ou C) ou A

$\equiv (B$ ou $C) \Rightarrow A$

i) $((A \Rightarrow B)$ e $(A \Rightarrow$ não $B)) \Rightarrow$ não A

$\equiv$ ((não A ou B) e (não A ou não B)) $\Rightarrow$ não A

$\equiv$ não((não A ou B) e (não A ou não B)) ou não A

$\equiv$ não((não A ou B)) ou não(não A ou não B) ou não A

$\equiv$ (não(não A) e não B) ou (A e B) ou não A

$\equiv$ (A e não B) ou (A e B) ou não A

$\equiv$ (A e (não B ou B)) ou não A

$\equiv$ (A e V) ou não A

$\equiv$ A ou não A $\equiv V$

6) $I(x) \equiv x \in \mathbb{Z}$

$P(f,x) \equiv I(x) \Rightarrow I(f(x))$

$Q(f,x) \equiv I(f(x)) \Rightarrow I(x)$

a) não satisfaz $P(g,x)$, PARA TODO $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x/2$

b) satisfaz não($P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$)

$g(x) = x/2$

c) satisfaz $Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x$

d) não satisfaz $Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = 10$

7) $L(f) \equiv \lim f(n) = 0$,

$P(n,f,g,h) \equiv f(n) = g(n)(1 + h(n))$,

$B(f,g,h) \equiv L(h)$ e ($P(n,f,g,h)$, para todo $n \in \mathbb{N}$),

$A(f,g) \equiv B(f,g,h)$ para algum $h: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

a) satisfazem $A(f, g)$

$A(f,g) \equiv B(f,g,h)$, para algum $h: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\equiv L(h)$ e $(P(n, f, g, h)$, para todo $n \in \mathbb{N})$

$\equiv (\lim h(n) = 0)$ e $(f(n) = g(n)(1 + h(n))$

$\equiv (\lim h(n) = 0)$ e $\left(\frac{f(n)}{g(n)} - 1 = h(n)\right)$

$$\lim h(n) = 0 = \lim \left(\frac{f(n)}{g(n)} - 1\right)$$

$$0 = \lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) - \lim(1)$$

$$\lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = 1$$

$$f(n) \approx g(n)$$

b) Não satisfazem: $f(n) \neq g(n)$

8) $O(f)$:

$(((n \geq k \Rightarrow |f(n)| \leq c)$, para algum $k > 0)$, para algum $c > 0)$ para todo $\boxed{n \geq k})$

a) $O(n/(n-1))$

se $n = 0$

$$O\left(\frac{0}{0-1}\right) = O\left(\frac{0}{-1}\right) = O(0)$$

$0 \geq k \Rightarrow |f(n)| \leq c$, para algum $k > 0$

$\boxed{0 < k \leq 0 \text{ é falso!}}$

b) $O(n)$

se $n = 0$

$O(0)$

$0 \geq k \Rightarrow |f(n)| \leq c$, para algum $k > 0$

$\boxed{0 < k \leq 0 \text{ é falso}}$

2) Conjuntos e Inteiros

11) Prove que $A = (A-B) \cup B$

$\equiv (A \subseteq (A-B) \cup B)$ e $((A-B) \cup B \subseteq A)$

$\equiv (a \in A \Rightarrow a \in ((A-B) \cup B))$ e $(a \in ((A-B) \cup B) \Rightarrow a \in A)$

$\equiv$ não$(a \in A)$ ou $a \in ((A-B) \cup B)$ e (não$(a \in (A-B) \cup B$

12) Prove que $(A \cup B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

?

$a \in ((A \cup B) \cap C) \equiv a \in (A \cup B)$ e $a \in C$

$\equiv (a \in A$ ou $a \in B)$ e $a \in C$

$\equiv (a \in A$ e $a \in C$ ou $a \in B$ e $a \in C)$

$\equiv a \in (A \cap C)$ ou $a \in (B \cap C)$

$\equiv a \in ((A \cap C) \cup (B \cap C))$

13) $f, g : A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$

a) $\prod_{x \in X} c = c|X|$? falso

$$\prod_{x \in X} c = c \prod_{x \in X - \{x_1\}}$$

$$= c^2 \prod_{x \in X - \{x_1, x_2\}}$$

$$= c^{|X|} \prod_{x \in X - \{x_1, x_2 \dots x_{|X|}\}}$$

$$= c^{|X|} \prod_{x \in X - X} = c^{|X|} \prod_{x \in \emptyset} = c^{|X|}$$

b) $\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)$? falso!

Se $f(x) = 2x$

e $g(x) = 1$

e $X = \{4, 5, 6\}$

$$\prod_{x \in X} (2x + 1) = (2.4+1) * (2.5+1) * (2.6+1)$$

$$= 9 * 11 * 13 = \boxed{1287}$$

$$\prod_{x \in X} 2x + \prod_{x \in X} 1 = 2.4 * 2.5 * 2.6 + 1^3$$

$$= \boxed{960}$$

c) $\sum_{x \in X} f(x) g(x) = \sum_{x \in X} f(x) \cdot \sum_{x \in X} g(x)$?

Se $f(x) = 2x$

e $g(x) = x + 2$

e $X = \{4, 5\}$

falso!

$$\sum_{x \in X} 2x(x+2) = \sum_{x \in X} 2x^2 + 4x$$

$$= 2.4^2 + 4.4 + 2.5^2 + 4.5$$

$$= \boxed{118}$$

$$\sum_{x \in X} 2x \cdot \sum_{x \in X} x + 2 = (2.4 + 2.5)(4+2+5+2)$$

$$= 18 \cdot 13 = \boxed{364}$$

3) Aproximação Assintótica

15) Sabendo que $\lim (H(n) - \ln n) = \gamma$

Prove que $H(n) \approx \ln(n)$, sendo $H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

$$f(x) = g(x)(1 + h(x))$$

e

$$\lim (h(x)) = 0$$

$$H(x) = \ln(x)(1 + h(x))$$

$$H(x) - \ln(x) = \ln(x) h(x)$$

$$\lim (H(x) - \ln(x)) = \lim(\ln(x) h(x))$$

$$\gamma = \lim(\ln(x)) \cdot \lim(h(x))$$

$$\lim (h(x)) = \frac{\gamma}{\lim(\ln(x))}$$

$\lim h(x) = \boxed{0}$ Portanto $H(n) \approx \ln(n)$

16) Prove que $\binom{n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$ $\quad g(n) = \frac{n^2}{2}$

$$f(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

$$\lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = 1$$

$$\lim\left(\frac{\frac{n^2-n}{2}}{\frac{n^2}{2}}\right) = 1$$

$$\lim\left(\frac{n^2-n}{n^2}\right) = 1$$

$$\lim\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim(1) - \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$1 - 0 = 1$$

$1 = 1$ portanto $\binom{n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$

17) Prove que $\sum_{i=1}^{n} i \sim \frac{n^2}{2}$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad g(n) = \frac{n^2}{2}$$

$$\lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = 1$$

$$\lim\left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n^2}{2}}\right) = 1$$

$$\lim\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right) = 1$$

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim 1 + \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$1 = 1$, portanto $\sum_{i=1}^{n} i \sim \frac{n^2}{2}$

18) A partir da aproximação de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Leftrightarrow \lim \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Prove que $\log_b n! \sim n \log_b n$, para todo $b > 1$

$$\log_b n! \sim \log_b \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\log_b n! \sim \log_b \sqrt{2\pi} + \log \sqrt{n} + n \log\left(\frac{n}{e}\right)$$

$$\log_b n! \sim \log_b \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\log n + n\log n - n\log e$$

$$\log_b n! \sim n\log n\left(\frac{\log_b\sqrt{2\pi}}{n\log n} + \frac{\log n}{2n\log n} + 1 - \frac{\cancel{n}\log e}{\cancel{n}\log n}\right)$$

$$\log_b n! \sim n\log n$$

19) Use o resultado do exercício 18 para provar que $\sum_{i=1}^{n} \log_b i \sim n\log_b n$

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i = \log_b 1 + \log_b 2 + \log_b 3 + \dots + \log_b (n-1) + \log_b n$$

$$= \log_b(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n)$$

$$= \log_b(n!) \sim n\log_b n$$

20) A partir da aproximação de Taylor

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \sim e^x \text{ para todo } x \in \mathbb{C}$$

Conclua que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \sim \frac{1}{e}$

Se consideramos que $x = -1$, temos

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sim e^{-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \sim \frac{1}{e}$$

21) Seja $P: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \dots + a_k n^k$$

Com $a_k \neq 0$, um polinomio de grau k

Prove que $P(n) \backsim a_k n^k$

$$\frac{P(n)}{a_k n^k} = \frac{a_0 n^0}{a_k n^k} + \frac{a_1 n^1}{a_k n^k} + \frac{a_2 n^2}{a_k n^k} + \dots + \frac{a_{k-1} n^{k-1}}{a_k n^k} + \frac{a_k n^k}{a_k n^k}$$

$$= \frac{a_0}{a_k n^k} + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \frac{a_2}{a_k n^{k-2}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + 1$$

$$\lim \left(\frac{a_0}{a_k n^k} + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \frac{a_2}{a_k n^{k-2}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + 1 \right) = 1$$

Portanto $P(n) \backsim a_k n^k$

22) Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \backsim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

$$\lim \left(1 - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n} \right)$$

$$= 1 - \lim \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right)$$

Como o dividendo sempre será menor que o divisor temos uma constante entre -1 e 1, que ao ser elevado ao infinito, tende a zero.

Portanto $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \backsim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

23) $$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1$$

$$\backsim \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

$$= \frac{5-3\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n + 1 + \frac{10}{5+3\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

$$\lim \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n + 1 + \frac{10}{5+3\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \right)$$

$$= 1$$

24) Seja $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ e seja

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i$$

Prove que

a) Se $0 < c < 1$, então $S(n) \approx \frac{1}{1-c}$

$$S(n) = c^0 + c^1 + c^2 + c^3 + \dots + c^{n-1} + c^n$$

$$\frac{S(n)}{\frac{1}{1-c}} = 1 - \cancel{c} + \cancel{c} - \cancel{c^2} + \cancel{c^2} - \cancel{c^3} + \cancel{c^3} - \cancel{c^4} + \dots + \cancel{c^{n-1}} - \cancel{c^n} + \cancel{c^n} - c^{n+1}$$

anula com o próximo · anula com o anterior

$$= 1 - c^{n+1}$$

$$\lim(1 - c^{n+1}) = \lim(1) - \lim(c^{n+1})$$

$$= 1$$

Como $0 < c < 1$, ao tender n ao infinito, o limite vai para 0

b) Se $c = 1$ então $S(n) = n+1$

$$S(n) = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1} + 1^n$$

$$S(n) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = (n+1) \cdot 1$$

$$= n+1$$

c) Se $c > 1$ então $S(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$

$$S(n) = c^0 + c^1 + c^2 + \dots + c^{n-1} + c^n$$

$$\frac{S(n)}{\frac{c^{n+1}}{c-1}} = \frac{(c-1)S(n)}{c^{n+1}}$$

Anula com o próximo termo · Anula com o termo anterior

$$= \frac{\cancel{c} - 1 + \cancel{c^2} - \cancel{c} + c^3 - \cancel{c^2} + \dots + \cancel{c^n} - \cancel{c^{n-1}} + c^{n+1} - \cancel{c^n}}{c^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{c^{n+1}} + 1 \qquad \lim\left(\frac{-1}{c^{n+1}} + 1\right) = 1$$

25) Sejam $F, f, g, h: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$ e

$f(n) \leq g(n) \leq h(n)$, para todo $n \geq n_0$

Significa que depois de um certo n_0 as funções não se cruzam mais

Prove que $F \approx f \approx g \approx h$

$$\frac{f(n)}{F(n)} \leq \frac{g(n)}{F(n)} \leq \frac{h(n)}{F(n)}$$

$$\lim\left(\frac{f(n)}{F(n)}\right) \leq \lim\left(\frac{g(n)}{F(n)}\right) \leq \lim\left(\frac{h(n)}{F(n)}\right)$$

Como sabemos que $f(n) \approx F(n)$ e $h(n) \approx F(n)$ sabemos que $\lim\left(\frac{f(n)}{F(n)}\right)$ e $\lim\left(\frac{h(n)}{F(n)}\right)$ são 1

Dessa forma temos

$$1 \leq \lim\left(\frac{g(n)}{F(n)}\right) \leq 1$$

$$\lim\left(\frac{g(n)}{F(n)}\right) = 1$$

o que conclui que $g(n) \approx F(n)$

Assim temos $F \approx f \approx g \approx h$

?26) Sejam $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n))$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0$$

$f(n) \approx g(n)$ se $\lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = 1$

então $\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\cancel{g(n)}(1 + \varepsilon(n))}{\cancel{g(n)}}$

$$\lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = \lim(1 + \varepsilon(n))$$

$$\lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = 1 + \lim(\varepsilon(n))$$

Se $\lim(\varepsilon(n))$ é diferente de 0, isso significa que $\lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)$ é diferente de 1, o que faz com que $f(n)$ não seja aproximadamente igual a $g(n)$.

Se $\lim(\varepsilon(n))$ é igual a 0, $\lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)$ é igual a 1, o que faz com que $f(n) \approx g(n)$.

27) Prove que, se $f, g, h: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então

a) $f(n) \approx f(n)$

$$\lim\left(\frac{f(n)}{f(n)}\right) = 1$$

$$\lim(1) = 1$$

Logo $f(n) \approx f(n)$

b) Se $f(n) \approx g(n)$, então $g(n) \approx f(n)$

$f(n) \approx g(n)$ implica em $f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n))$ e $\lim(\varepsilon(n)) = 0$

Assim temos

$$\frac{1}{1 + \varepsilon(n)} = \frac{g(n)}{f(n)}$$

$$\lim\left(\frac{1}{1 + \varepsilon(n)}\right) = \lim\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right)$$

$$\lim\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right) = \frac{1}{1 + \lim(\varepsilon(n))} \to \text{já se sabe que é } 0$$

$$\lim\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right) = 1$$

Portanto $g(n) \approx f(n)$

4) Piso e Teto

?28) É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique

Para que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$

$$\lfloor f(n) \rfloor = f(n)(1 + \varepsilon(n)) \text{ e } \lim(\varepsilon(n)) = 0$$

$$f(n) - 1 < f(n)(1 + \varepsilon(n)) \leq f(n)$$

$$-1 < f(n)\varepsilon(n) \leq 0$$

$$\lim(-1) < \lim f(n) \cdot \lim \varepsilon(n) \leq \lim 0$$

$$-1 < \lim f(n) \cdot 0 \leq 0$$

$-1 < 0 \leq 0$, Portanto é verdade!

E7

29) É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$, para toda $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Para que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$

$\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor = \sum_{i=1}^{n} f(i) \cdot (1 + \varepsilon(i))$ e $\lim(\varepsilon(i)) = 0$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor}{\sum_{i=1}^{n} f(i)} = 1 + \varepsilon(i)$$ se $f(i) = 3/2$ e $n = 4$

$$\frac{\lfloor 3/2 \rfloor + \lfloor 3/2 \rfloor + \lfloor 3/2 \rfloor + \lfloor 3/2 \rfloor}{3/2 + 3/2 + 3/2 + 3/2} = 1 + \varepsilon(i)$$

$$\frac{4}{6} = 1 + \varepsilon(i)$$

$$\lim 4/6 = \lim 1 + \lim \varepsilon(i)$$

$\lim \varepsilon(i) \to 0$

$2/3 = 1$ É falso!

Portanto não é verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$

30) Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz $x \leq \lceil x \rceil < x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

31) Prove que $\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$

$$x \leq \lceil x \rceil < x+1$$

$$(x+z) \leq \lceil x \rceil + z < (x+z)+1$$

Pelo teorema, sabemos que $\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil$

32) Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$

a) $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Se $n \pm 1$ é par, $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}$

- E assim temos $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2}$
- Além disso $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil$

$$= \left\lceil \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

$$= \frac{n+1}{2} - \lfloor 1/2 \rfloor = \frac{n+1}{2}$$

Se n é par

- $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$ → É inteiro
- $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$

Portanto provamos que $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

b) $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Se n é par

É inteiro

- $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$
- $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{-1}{2} \right\rceil + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$

Se n é ímpar

→ É inteiro

- $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2}$
- $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \frac{n-1}{2}$

Portanto é verdade

33) Sejam $n, m: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$n(a,b) = b - a + 1$$
$$m(a,b) = \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$$

Prove que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$

a) $a+b$ é par se e somente se $n(a,b)$ é ímpar

Supondo que $a+b$ seja par, podemos escrever $a+b=2k$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Assim

$$b = 2k - a$$
$$n(a,b) = 2k - a - a + 1$$
$$n(a,b) = 2(k-a) + 1$$

A soma de uma unidade ao dobro de um número inteiro sempre resulta em um ímpar

Portanto $n(a,b)$ é ímpar

Supondo que $a+b$ seja ímpar, podemos escrever $a+b=2k+1$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Assim

$$b = 2k+1-a$$
$$n(a,b) = 2k+1-a-a+1$$
$$n(a,b) = 2(k-a)+2$$

A soma de duas unidades ao dobro de um número inteiro sempre resulta em par

Portanto se $a+b$ é ímpar, $n(a,b)$ é par

Dessa forma concluímos que

$a+b$ é par se e somente se $n(a,b)$ é ímpar

b) $n(a, m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil$

$$n(a, m(a,b)) = \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - a + 1$$

$$= \left\lfloor \frac{a+b}{2} - a + 1 \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{b-a+1+1}{2} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{m(a,b)+1}{2} \right\rfloor$$

$$= \left\lceil \frac{m(a,b)}{2} \right\rceil$$

c) $n(m(a,b)+1, b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$

$$n(m(a,b)+1, b) = b - \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - 1 + 1$$

$$= \left\lceil b - \frac{a+b}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{b-a+1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

Se $n(a,b)$ é par, $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro

logo $= \frac{n(a,b)}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$

se $n(a,b)$ é ímpar $\frac{n(a,b)-1}{2}$ é inteiro

logo $= \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$

d) $n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$

$= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - \cancel{1} - a + \cancel{1}$

$= \left\lfloor \frac{a+b}{2} - a \right\rfloor$

$= \left\lfloor \frac{b-a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor$

$= \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$

34) Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$

a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

$-x \leq -\lfloor x \rfloor < -x + 1$

$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$

Que é o que queríamos provar

b) $\lceil x \rceil - x < 1$

$x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

$0 \leq \lceil x \rceil - x < 1$

c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

$\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

Por definição $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} / z \leq x\}$

Por definição $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} / z \geq x\}$

Assim sendo $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ significa

$\min\{z \in \mathbb{Z} / z \leq x\} = \max\{z \in \mathbb{Z} / z \geq x\}$

$\{z \in \mathbb{Z} / z \leq x\} \cap \{z \in \mathbb{Z} / z \geq x\} = \{x\}$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$

Se $x \in \mathbb{Z}$

então

$\lfloor x \rfloor = \min\{k \in \mathbb{Z} / k \geq x\}$

$= \min\{x, x+1, x+2, x+3, \dots\}$

$= x$

$\lceil x \rceil = \max\{k \in \mathbb{Z} / k \leq x\}$

$= \max\{x, x-1, x-2, x-3, \dots\}$

$= x$

Assim $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$

e concluímos que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

35) Prove que $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$ é o único inteiro m satisfazendo $x < m \leq x+1$ e conclua daí que $\min\{k \in \mathbb{Z} / k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1$

$\min\{k \in \mathbb{Z} / k > x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Se $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor = x$, então $\min\{k \in \mathbb{Z} / k > x\}$ é $x + 1$

Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor < x$

36) Prove que $\max\{k \in \mathbb{Z} / k < x\} = \lceil x - 1 \rceil$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Se $x \in \mathbb{Z}$, $\max\{k \in \mathbb{Z} / k < x\} = \max\{x-1, x-2, x-3, \dots\}$

$= x - 1 = \lceil x - 1 \rceil$

Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\max\{k \in \mathbb{Z} / k < x\} = \max\{\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor - 1, \lfloor x \rfloor - 2, \dots\}$

$= \lfloor x \rfloor$

Como $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor = \lceil x - 1 \rceil$.

E assim concluímos que

$\max\{k \in \mathbb{Z} / k < x\} = \lceil x - 1 \rceil$

38) Prove que $\forall n > 0$

a) $\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$

$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$

$2^{\lg n - 1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{\lg n} \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg n + 1}$

$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$

$\frac{1}{2} < \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor}}{n} \leq 1 \leq \frac{2^{\lceil \lg n \rceil}}{n} < 2$

$\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$

b) $\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1$ $\quad \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} - 1 < 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}}$

$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n$

$2^{\lg n - 1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{\lg n}$

$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n$

$\frac{1}{2} < \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor}}{n} \leq 1$

$1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$

$0 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} - 1 < 1$

O que satisfaz a inequação descrita acima $\frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} - 1 < 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}}$

c) $\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow x > \lg n$

$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lg n}{\lg 2^x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lg n}{x} \right\rfloor$

Se $x \leq \lg n$, isso significa que $\lg n / x$ é maior ou igual a 1, o que faz com que o Piso seja maior ou igual a 1

Se $x > \lg n$ $\lg n / x$ é maior que 0 e menor que 1, o que faz com que o piso seja igual a 0

Assim provamos que

$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow x > \lg n$

d) $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$, se e somente se n é potência de 2

Se n é potência de 2, podemos escrevê-lo como

$n = 2^k, \forall k \in \mathbb{Z}$

Assim, temos

$\lfloor \lg 2^k \rfloor > \lfloor \lg(2^k - 1) \rfloor$

$\lfloor k \rfloor > \lfloor \lg(2^k - 1) \rfloor$

$k > \lfloor \lg(2^k - 1) \rfloor$

$\lg(2^k - 1) - 1 < \lfloor \lg(2^k - 1) \rfloor \leq \log(2^k - 1)$

e) $\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \iff n$ é potência de 2

f) $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$

39) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Prove que $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil \ \forall x \in \mathbb{R}$

Se $x \in \mathbb{Z}$, o resultado é imediato, pois $\lceil x \rceil = x$

Se $x \notin \mathbb{Z}$, então

$$\lceil x \rceil > x$$

E como f é crescente

$$f(\lceil x \rceil) > f(x)$$

Além disso, não existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f(x) < z < f(\lceil x \rceil)$$

Pois como f é contínua, existiria $z = f(a)$ para algum a tal que $x < a < \lceil x \rceil$, e como $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, a teria que ser um inteiro, o que não é possível.

Como $x \notin \mathbb{Z}$ e $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ não pode pertencer aos inteiros. Logo

$$\lceil f(x) \rceil > f(x)$$

Como $\lceil f(x) \rceil$ é inteiro e $f(\lceil x \rceil)$ pode não ser, então $\lceil f(x) \rceil \geq f(\lceil x \rceil) > f(x)$ e portanto

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil \geq \lceil f(x) \rceil \geq f(\lceil x \rceil) > f(x)$$

Finalmente, como $\lceil f(x) \rceil$ é um inteiro entre $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$ e $f(\lceil x \rceil)$, concluímos que $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$

40) Seja $k \in \mathbb{N}^*$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por
$$f(x) = \frac{x}{k}$$

Prove que

a) f é uma função contínua.

Uma função é contínua se
$$\lim_{x \to n} f(x) = f(n) \quad \forall n \in A$$
sendo A o conjunto analisado

Assim temos
$$\lim_{x \to n} \left(\frac{x}{k}\right) = \frac{n}{k}$$
$$\frac{n}{k} = \frac{n}{k}$$
Logo a função é contínua!

b) f é uma função crescente

f é uma função crescente se $\forall a < b$
$$f(a) < f(b)$$
$$\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$$
O que é verdade $\forall a < b$
Logo a função é crescente.

c) $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R}$

Para $f(x) \in \mathbb{Z}$, x precisa ser multiplo de k, ou seja $x = n.k$, sendo $n \in \mathbb{Z}$

Assim sendo, se $f(x)$ é inteiro, x necessariamente é resultado de uma multiplicação de inteiros, o que resulta em um inteiro.

Com isso concluimos que
$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

5) Indução

49) Prove por indução que
$$\sum_{i=0}^{n} i.2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2$$
Para todo $n \in \mathbb{N}$
$$P(n): \sum_{i=0}^{n} i.2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

HI: seja $a \in \mathbb{N}$
$$\sum_{i=0}^{k} i.2^i = 2^{k+1}(k-1) + 2 \quad \forall k \in [0..a]$$

Passo: Vamos provar que
$$\sum_{i=0}^{a+1} i.2^i = 2^{(a+1)+1}((a+1)-1) + 2$$
$$= 2^{(a+2)} a + 2$$

Sabemos que
$$\sum_{i=0}^{a+1} i2^i = \sum_{i=0}^{a} i2^i + (a+1)2^{(a+1)}$$
Pela HI $= 2^{(a+1)}(a-1) + 2 + (a+1).2^{(a+1)}$
$$= 2^{(a+1)}(a-1+a+1) + 2$$
$$= 2^{(a+1)}.2a + 2$$
$$= 2^{(a+1+1)}.a + 2$$
$$= 2^{(a+2)}.a + 2$$
Portanto $\sum_{i=0}^{a+1} i2^i = 2^{a+2}.a + 2$

Base Vamos provar que
$$\sum_{i=0}^{k} i.2^i = 2^{k+1}(k-1) + 2 \quad \text{para } k=0$$
$$\sum_{i=0}^{0} i.2^i = 2^{0+1}.(0-1) + 2$$
$$0 = -2 + 2 = 0$$

50) Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & \text{se } k=0 \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leqslant k \leqslant n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Prove por indução em n que, se $\underline{0 \leqslant k \leqslant n}$ então $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$P(n): \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n}$$

Hipótese da Indução seja $a \in \mathbb{N}$

$$P(d) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} = 2^{d} \quad \forall \ d \in [0 \ldots a]$$

Passo da Indução Vamos provar que

$$\sum_{k=0}^{a+1} \binom{a+1}{k} = 2^{a+1}$$

Da definição de $\binom{n}{k}$ temos

$$\sum_{k=0}^{a+1} \binom{a+1}{k} = \sum_{k=0}^{a+1} \left(\binom{a}{k} + \binom{a}{k-1} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{a+1} \binom{a}{k} + \sum_{k=0}^{a+1} \binom{a}{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} + \cancel{\binom{a}{a+1}}^{0} + \cancel{\binom{a}{0-1}}^{0} + \sum_{k=1}^{a+1} \binom{a}{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} + \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} = 2 \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}$$

Pela Hipótese da Indução

$$= 2 . 2^{a}$$

$$= 2^{a+1}$$

Assim $\sum_{k=0}^{a+1} \binom{a+1}{k} = 2^{a+1}$

Base da Indução Vamos provar que

$$\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} = 2^{k} \quad \forall k \in \{0\}$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = 2^{k}$$

$$\binom{0}{0} = 2^{0}$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\frac{0!}{0!\,(0-0)!} = 1$$

$$1 = \underline{1}$$

Assim provamos o que desejávamos

51) Prove que

$$P(n,k): \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

Hipótese da indução: seja $a \geqslant k \in \mathbb{N}$

$$P(j): \sum_{i=k}^{j} \binom{i}{k} = \binom{j+1}{k+1} \quad \forall j \in [k \ldots a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \binom{a+2}{k+1}$$

Sabe-se que

$$\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{a} \binom{i}{k} + \binom{a+1}{k}$$

Pela HI $= \binom{a+1}{k+1} + \binom{a+1}{k}$

Pela Definição

$$= \binom{a+2}{k+1}$$

Conclui-se que $\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \binom{a+2}{k+1}$

Base da Indução: seja $b \leqslant k \in \mathbb{N}$

Vamos provar que

$$\sum_{i=k}^{j} \binom{i}{k} = \binom{j+1}{k+1} \quad \forall j \in [b \ldots k]$$

se $b = k$

$$\sum_{i=k}^{k} \binom{i}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

$$\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

$$1 = 1$$

se $b < k$

$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{k} = 0$$

$$\binom{b+1}{k+1} = 0 \quad \text{Pela definição}$$

Assim provamos

$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{k} = \binom{b+1}{k+1} \quad \forall\, b \leqslant k$$

52) Prove por indução em n que dados $x, y \in \mathbb{C}$

$$P(n): \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0$$

<u>Hipótese da Indução</u> seja $a \in \mathbb{N}$

$$P(k): \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = (x+y)^k \quad \forall k \in [1..a]$$

<u>Passo da Indução</u> Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = (x+y)^{a+1}$$

Sabemos que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = \sum_{i=0}^{a+1} \left[\binom{a}{i} + \binom{a}{i-1}\right] x^i y^{a+1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a}{i-1} x^i y^{a+1-i}$$

$$= y\left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i} + \overset{0}{\cancel{\binom{a}{a+1}}} x^{a+1} y^{a+1-i}\right) + \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a}{i-1} x^i y^{a+1-i}$$

$$= y \sum_{i=0}^{a} x^i y^{a-i} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i-1} x^i y^{a+1-i} + \overset{0}{\cancel{\binom{a}{-1}}} x^0 y^{a+1-0}$$

$$= y \sum_{i=0}^{a} x^i y^{a-i} + \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^{i+1} y^{a+1-i-1}$$

$$= y \sum_{i=0}^{a} x^i y^{a-i} + x \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i}$$

Pela Hipótese da Indução

$$= y(x+y)^a + x(x+y)^a$$

$$= (x+y)^a (x+y)$$

$$= (x+y)^{a+1}$$

Assim provamos que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = (x+y)^{a+1}$$

<u>Base da Indução</u>

Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x^i y^{j-i} = (x+y)^j \quad \forall j \in \{1\}$$

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} x^i y^{1-i} = (x+y)^1$$

$$\binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = x+y$$

$$y + x = x + y$$

Assim provamos por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0$$

55) Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix} \quad \forall n > 0$$

Onde F é a sequência de Fibonacci

<u>Hipótese da Indução</u> seja $a \in \mathbb{N}$

$$P(k): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F(k+1) & F(k) \\ F(k) & F(k-1) \end{pmatrix} \quad \forall k \in [1..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} = \begin{pmatrix} F(a+2) & F(a+1) \\ F(a+1) & F(a) \end{pmatrix}$$

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pela Hipótese da Indução

$$= \begin{pmatrix} F(a+1) & F(a) \\ F(a) & F(a-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F(a+1)+F(a) & F(a+1) \\ F(a)+F(a-1) & F(a) \end{pmatrix}$$

Por definição

$$= \begin{pmatrix} F(a+2) & F(a+1) \\ F(a+1) & F(a) \end{pmatrix}$$

Base da Indução

Vamos provar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{j} = \begin{pmatrix} F(j+1) & F(j) \\ F(j) & F(j-1) \end{pmatrix} \forall j \in \{1\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{1} = \begin{pmatrix} F(1+1) & F(1) \\ F(1) & F(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, provamos por indução que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{j} = \begin{pmatrix} F(j+1) & F(j) \\ F(j) & F(0) \end{pmatrix}$$

56) Prove por indução em n que

$$P(n): (\sqrt{2})^{n-1} \leq F(n) \leq 2^{n-1} \ \forall n \geq 3$$

Onde $F(n)$ denota a sequência de Fibonacci

Hipótese da Indução Seja $a \in \mathbb{N}$

$$P(k): (\sqrt{2})^{k-1} \leq F(k) \leq 2^{k-1} \ \forall k [3..a]$$

Passo da Indução Vamos provar que

$$(\sqrt{2})^{a+1-1} \leq F(a+1) \leq 2^{a+1-1}$$

Sabemos que $F(a+1) = F(a) + F(a-1)$

Pela Hipótese da Indução

$$(\sqrt{2})^{a-1} + F(a-1) \leq F(a) + F(a-1) \leq 2^{a-1} + F(a-1)$$

$$(\sqrt{2})^{a-1} + F(a-1) \leq F(a+1) \leq 2^{a-1} + F(a-1)$$

57) O número de comparações no pior caso de um merge sort para um vetor de n elementos é dado pela função

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n - 1, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$, onde T^+ e T^- são as seguintes funções

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-(\lfloor n/2 \rfloor) + n - 1, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2 \\ 2T^+(\lceil n/2 \rceil) + n - 1, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$

$$P(k): T^-(k) \leq T(k) \leq T^+(k) \ \forall k \in [0..a]$$

Passo da Indução Vamos provar que

$$T^-(a+1) \leq T(a+1) \leq T^+(a+1)$$

Sabemos que se $a+1 \geq 2$

- $T^-(a+1) = 2T^-(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor) + a$
- $T(a+1) = T(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil) + a$
- $T^+(a+1) = 2T^+(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil) + a$

Pela HI

- $T^-(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor) \leq T(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor) \leq T^+(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor)$
- $T^-(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil) \leq T(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil) \leq T^+(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil)$

Assim

$$T^-(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + T^-(\lceil \tfrac{a+1}{2} \rceil) \leq T(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + T(\lceil \tfrac{a+1}{2} \rceil) \leq T^+(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + T^+(\lceil \tfrac{a+1}{2} \rceil)$$

Como T^- e T^+ são funções não decrescentes

Sabemos que $T^-(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor) + T^-(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor) \leq T^-(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor) + T^-(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil)$

$T^+(\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor) + T^+(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil) \leq T^+(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil) + T^+(\lceil \frac{a+1}{2} \rceil)$

Assim

$$2T^-(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) \leq T(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + T(\lceil \tfrac{a+1}{2} \rceil) \leq 2T^+(\lceil \tfrac{a+1}{2} \rceil)$$

$$2T^-(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + a \leq T(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + T(\lceil \tfrac{a+1}{2} \rceil) + a \leq 2T^+(\lceil \tfrac{a+1}{2} \rceil) + a$$

Que é $T^-(a+1) \leq T(a+1) \leq T^+(a+1)$

para $a+1 \geq 2$

Base da Indução Vamos provar que

$$T^-(j) \leq T(j) \leq T^+(j) \quad \forall j \in \{0, 1\}$$

$T^-(0) \leq T(0) \leq T^+(0)$

$0 \leq 0 \leq 0$ ✓

$T^-(1) \leq T(1) \leq T^+(1)$

$1 \leq 1 \leq 1$ ✓

58) Dados $n_1, \dots, n_k$, o coeficiente multinomial é definido por

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} = \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Prove por indução em k que

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n_1 + \dots + n_{k-1}}{n_1, \dots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \dots + n_k}{n_k}$$

$\forall k \geq 2$

Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$

$$\binom{n_1 + \dots + n_j}{n_1, \dots, n_j} = \binom{n_1 + \dots + n_{j-1}}{n_1, \dots, n_{j-1}} \binom{n_1 + \dots + n_j}{n_j} \quad \forall j \in [2..a]$$

Passo da Indução Vamos provar que

$$\binom{n_1 + \dots + n_{a+1}}{n_1, \dots, n_{a+1}} = \binom{n_1 + \dots + n_a}{n_1, \dots, n_a} \binom{n_1 + \dots + n_{a+1}}{n_{a+1}}$$

Sabemos que

$$\binom{n_1 + \dots + n_{a+1}}{n_1, \dots, n_{a+1}} = \frac{(n_1 + \dots + n_{a+1})!}{n_1! n_2! \dots n_{a+1}!}$$

$$= \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_a!} \cdot \frac{(n_1 + \dots + n_{a+1})!}{n_{a+1}!}$$

$$= \frac{(n_1 + \dots + n_a)!}{n_1! n_2! \dots n_a!} \cdot \frac{(n_1 + \dots + n_{a+1})!}{(n_1 + \dots + n_a)! (n_{a+1})!}$$

$n = n_1 + \dots + n_{a+1}$

$p = n_{a+1}$

$n - p = n_1 + \dots + n_a$

Por definição

$$= \binom{n_1 + \dots + n_a}{n_1, \dots, n_a} \binom{n_1 + \dots + n_{a+1}}{n_{a+1}}$$

Assim provamos que

$$\binom{n_1 + \dots + n_{a+1}}{n_1, \dots, n_{a+1}} = \binom{n_1 + \dots + n_a}{n_1, \dots, n_a} \binom{n_1 + \dots + n_{a+1}}{n_{a+1}}$$

Base da Indução Vamos provar que

$$\binom{n_1 + \dots + n_d}{n_1, \dots, n_d} = \binom{n_1 + \dots + n_{d-1}}{n_1, \dots, n_{d-1}} \binom{n_1 + \dots + n_d}{n_d}$$

$\forall d \in \{2\}$

$$\binom{n_1 + n_2}{n_1, n_2} = \binom{n_1}{n_1} \binom{n_1 + n_2}{n_2}$$

$$\frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} = 1 \cdot \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!}$$

O que é verdade!

59) Considere o algoritmo de busca binária recursivo.

Prove que Busca(x, v, a, b) é o único inteiro em $[a-1..b]$ satisfazendo

$$x < v[i] \quad \forall i \in [\text{Busca}(x, v, a, b) + 1..b]$$

Considerando o tamanho do vetor como $n = b - a + 1$ e sabendo que $a, b > 0$ e que o vetor v é ordenado vamos provar que $Busca(x, v, a, b)$ é o único inteiro em $[a-1 .. b]$ satisfazendo $x < v[i]$ $\forall i \in [Busca(x, v, a, b) + 1 ... b]$

$$B(x, v, n) = \{$$

60) Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \quad \forall k \in [1 .. a]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|$$

Sabemos que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i \cup A_{a+1}\right|$$

Por definição $= \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| + |A_{a+1}|$

Pela Hipótese da Indução $= \sum_{i=1}^{a} |A_i| + |A_{a+1}|$

$$= \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|$$

Assim provamos que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|$$

Base da Indução vamos provar que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{d} A_i\right| = \sum_{i=1}^{d} |A_i| \quad \forall d \in \{1\}$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{1} |A_i|$$

$$|A_i| = |A_i|$$

62) Prove por indução em $|X|$ que, se X é um Conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$P(|X|): \prod_{x \in X} c = c^{|X|}$$

Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$ e $B_a = \{b_1, \dots, b_a\}$

$$\prod_{b \in B_i} c = c^{|B_i|} \quad \forall i \in [0..a] \quad B_0 \subseteq B_i \subseteq B_a$$

Passo da Indução Vamos provar que

$$\prod_{b \in B_{a+1}} c = c^{|B_{a+1}|}$$

Sabemos que

$$\prod_{b \in B_{a+1}} c = c \prod_{b \in B_a} c$$

Pela Hipótese da Indução

$$= c \cdot c^{|B_a|}$$

$$= c^{|B_a|+1}$$

$$= c^{|B_a \cup \{x_{a+1}\}|}$$

$$= c^{|B_{a+1}|}$$

Assim, $\prod_{b \in B_{a+1}} c = c^{|B_{a+1}|}$

Base da Indução vamos provar que

$$\prod_{b \in B_d} c = c^{|B_d|} \quad \forall d \in \{0\}$$

$$\prod_{b \in B_0} c = c^{|B_0|}$$

$$\prod_{b \in \emptyset} c = c^0$$

$$1 = 1$$

63) Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|$$

Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$ e $X_a = \{b_1, \dots, b_a\}$

$$\sum_{x \in X_i} c = c|X_i| \quad \forall i \in [0..a] \quad B_0 \subseteq B_i \subseteq B_a$$

Passo da Indução Vamos provar que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} c = c|X_{a+1}|$$

Sabemos que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} c = c + \sum_{x \in X_a} c$$

Pela Hipótese da Indução

$$= c + c|X_a|$$

$$= c(|X_a| + 1)$$

$$= c|X_{a+1}|$$

Base da Indução Vamos provar que

$$\sum_{x \in X_d} c = c|X_d| \quad \forall d \in \{0\}$$

$$\sum_{x \in X_0} c = c|X_0|$$

$$\sum_{x \in \emptyset} c = c|\emptyset|$$

$$0 = 0$$

64) Prove por indução em $|X|$ que, que se $f, g: A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$

Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$ e $X_a = \{x_1, \dots x_a\}$

$$\sum_{x \in X_i} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X_i} f(x) + \sum_{x \in X_i} g(x) \quad \forall i \in [0..a]$$

Passo da Indução Vamos provar que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} (f(x)+g(x)) = \sum_{x \in X_{a+1}} f(x) + \sum_{x \in X_{a+1}} g(x)$$

Sabemos que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} (f(x)+g(x)) = \sum_{x \in X_a} (f(x)+g(x)) + f(x_{a+1}) + g(x_{a+1})$$

Pela Hipótese da Indução

$$= \sum_{x \in X_a} f(x) + \sum_{x \in X_a} g(x) + f(x_{a+1}) + g(x_{a+1})$$

$$= \sum_{x \in X_{a+1}} f(x) + \sum_{x \in X_{a+1}} g(x)$$

Assim provamos que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} (f(x)+g(x)) = \sum_{x \in X_{a+1}} f(x) + \sum_{x \in X_{a+1}} g(x)$$

Base da Indução Vamos provar que

$$\sum_{x \in X_d} f(x)+g(x) = \sum_{x \in X_d} f(x) + \sum_{x \in X_d} g(x) \quad \forall d \in \{0\}$$

$$\sum_{x \in X_0} f(x)+g(x) = \sum_{x \in X_0} f(x) + \sum_{x \in X_0} g(x)$$

$$\sum_{x \in \emptyset} f(x)+g(x) = \sum_{x \in \emptyset} f(x) + \sum_{x \in \emptyset} g(x)$$

$$0 = 0+0$$

65) Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f: A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c f(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$

Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$ $X_a = \{x_1, \dots x_a\}$

$$\sum_{x \in X_i} c f(x) = c \sum_{x \in X_i} f(x) \quad \forall i \in [0..a]$$

Passo da Indução Vamos provar que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} c f(x) = c \sum_{x \in X_{a+1}} f(x)$$

Sabemos que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} c f(x) = \sum_{x \in X_a} c f(x) + c f(a+1)$$

Pela Hipótese da Indução

$$= c \sum_{x \in X_a} f(x) + c f(a+1)$$

$$= c \left(\sum_{x \in X_a} f(x) + f(a+1) \right)$$

$$= c \sum_{x \in X_{a+1}} f(x)$$

Assim provamos que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} c f(x) = c \sum_{x \in X_{a+1}} f(x)$$

Base da Indução Vamos provar que

$$\sum_{x \in X_k} c f(x) = c \sum_{x \in X_k} f(x) \quad \forall k \in \{0\}$$

$$\sum_{x \in X_0} c f(x) = c \sum_{x \in X_0} f(x)$$

$$\sum_{x \in \emptyset} c f(x) = c \sum_{x \in \emptyset} f(x)$$

$$0 = c \cdot 0$$

$$0 = 0$$

66) Considere o algoritmo de busca binária. Prove que o número de comparações entre elementos de v na execução de Busca$(x, v, a, a+n-1)$ é no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ para todo $n \geq 1$.

Seja $B: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$. $B(n)$ é a função que determina quantas comparações são realizadas pelo algoritmo. Vamos provar que $B(n) \leq 2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ $\forall n \geq 1$

$$B(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1 \\ 2 + B(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Hipótese da Indução, seja $a \in \mathbb{N}$ /

$$B(k) \leq 2(\lfloor \lg k \rfloor + 1) \quad \forall k \in [1 .. a]$$

69) Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a \quad \forall n \geq 1$$

Prove por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na \quad \forall n \geq 0$$

Hipótese da Indução $d \in \mathbb{N}$

$$f(k) = f(0) + k.a \quad \forall k \in [0 \ldots d]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$f(d+1) = f(0) + (d+1)a$$

Sabemos que por definição

$$f(d+1) = f(d) + a$$

Pela Hipótese da Indução

$$f(d+1) = f(0) + d.a + a$$

$$f(d+1) = f(0) + (d+1)a$$

Base da Indução vamos provar que

$$f(k) = f(0) + k.a \quad \forall k \in \{0\}$$

$$f(0) = f(0) + 0.a$$

O que é verdade.

70) Sejam $f, s: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n) \quad \forall n \geq 1$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i) \quad \forall n \geq 0$$

Hipótese da Indução seja $a > 0$ /

$$f(k) = f(0) + \sum_{i=1}^{k} s(i) \quad \forall k \in [1 \ldots a]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$f(a+1) = f(0) + \sum_{i=1}^{a+1} s(i)$$

Pela definição

$$f(a+1) = f(a) + s(a+1)$$

Pela Hipótese da Indução

$$f(a+1) = f(0) + \sum_{i=1}^{a} s(i) + s(a+1)$$

$$f(a+1) = f(0) + \sum_{i=1}^{a+1} s(i)$$

Base da Indução vamos provar que

$$f(k) = f(0) + \sum_{i=1}^{k} s(i) \quad \forall k \in \{1\}$$

$$f(1) = f(0) + \sum_{i=1}^{1} s(i)$$

Por definição

$$f(0) + s(1) = f(0) + s(1)$$

Como queríamos provar

71) Sejam $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a f(n-1) \quad \forall n \geq 1$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0) \quad \forall n \geq 0$$

Hipótese da Indução seja $b > 0$ /

$$f(k) = a^k f(0) \quad \forall k \in [0 \ldots b]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$f(b+1) = a^{b+1} f(0)$$

Por definição se $b+1 > 0$

$$f(b+1) = a\, f(b)$$

Pela Hipótese da Indução

$$f(b+1) = a . a^b f(0)$$

$$f(b+1) = a^{b+1} f(0)$$

Base da Indução vamos provar que

$$f(k) = a^k f(0) \quad \forall k \in \{0\}$$

$$f(0) = a^0 f(0)$$

$$f(0) = f(0)$$

72) Sejam $f, m: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n) f(n-1) \quad \forall n \geq 1$$

Prove por indução em n, que

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^{n} m(i) \quad \forall n \geq 0$$

Hipótese da Indução seja $a > 0$

$$f(k) = f(0) \prod_{i=1}^{k} m(i) \quad \forall k \in [0 \ldots a]$$

Passo da Indução vamos provar que
$$B(a+1) \leq 2(\lfloor lg\, a+1 \rfloor + 1)$$
Por definição se $a+1 > 1$
$$B(a+1) = 2 + B(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor)$$
se $a+1$ for par
$$\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor = \tfrac{a+1}{2}$$
Pela Hipótese da Indução
$$B(\tfrac{a+1}{2}) \leq 2(\lfloor lg \tfrac{a+1}{2} \rfloor + 1)$$
$$B(\tfrac{a+1}{2}) + 2 \leq 2(\lfloor lg\, a+1 - lg 2 \rfloor + 1) + 2$$
$$B(a+1) \leq 2(\lfloor lg\, a+1 \rfloor - 1 + 1) + 2$$
$$B(a+1) \leq 2\lfloor lg\, a+1 \rfloor + 2$$
se $a+1$ for impar $\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor = \tfrac{a}{2}$

Pela Hipótese da Indução
$$B(\tfrac{a}{2}) \leq 2(\lfloor lg \tfrac{a}{2} \rfloor + 1)$$
$$B(\tfrac{a}{2}) + 2 \leq 2(\lfloor lg\, a - lg 2 \rfloor + 1) + 2$$
$$B(a+1) \leq 2(\lfloor lg\, a \rfloor - 1 + 1) + 2$$
$$B(a+1) \leq 2(\lfloor lg\, a \rfloor) + 2 < 2(\lfloor lg\, a+1 \rfloor) + 2$$
Base da Indução vamos provar que
$$B(k) \leq 2(\lfloor lg\, k \rfloor + 1) \quad \forall k \in \{1\}$$
$$B(1) \leq 2(\lfloor lg 1 \rfloor + 1) \Rightarrow 0 \leq 2$$

67) Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que
$$f(x) = s + mx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Prove que
$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1 \\ m^n x + s\frac{m^n - 1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1 \end{cases}$$

Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$
$$f^k(x) = \begin{cases} x + sk, & \text{se } m = 1 \\ m^k x + s\frac{m^k - 1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1 \end{cases} \quad \forall k \in [0 \dots a]$$

Passo da Indução vamos provar que
$$f^{a+1}(x) = \begin{cases} x + s(a+1), & \text{se } m = 1 \\ m^{a+1} x + s\frac{m^{a+1} - 1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1 \end{cases}$$
Sabemos que
$$f^{a+1}(x) = f^a(x)\, f(x)$$
Por definição
$$f^{a+1}(x) = f^a(x)(s + mx)$$
pela Hipótese da Indução

se $m = 1$
$$f^{a+1}(x) = (x + sa)(s + x) \quad ?$$
se $m \neq 1$
$$f^{a+1}(x) = \left(m^a x + s\frac{m^a - 1}{m-1}\right)(s + mx)$$
$$f^{a+1}(x) = m^a x s + m^{a+1} x^2 + s^2 \frac{m^a - 1}{m-1} + s m x \frac{m^a - 1}{m-1}$$

68) Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo
$$f(n) = f(n-1) + 1 \quad \forall n \geq 1$$
Prove por indução em n, que
$$f(n) = f(0) + n \quad \forall n \geq 0$$
Hipótese da Indução $a \in \mathbb{N}$
$$f(k) = f(0) + k \quad \forall k \in [0 \dots a]$$
Passo da Indução vamos provar que
$$f(a+1) = f(0) + a + 1$$
Por definição
$$f(a+1) = f(a) + 1$$
Pela Hipótese da Indução
$$f(a+1) = f(0) + a + 1$$
Base da Indução vamos provar que
$$f(k) = f(0) + k \quad \forall k \in \{0\}$$
$$f(0) = f(0) + 0 \checkmark$$

Passo da Indução vamos provar que
$$f(a+1) = f(0)\prod_{i=1}^{a+1} m(i)$$
Por definição se $a+1>0$
$$f(a+1) = m(a+1)\, f(a)$$
Pela Hipótese da Indução
$$f(a+1) = m(a+1) \cdot \prod_{i=1}^{a} m(i)\, f(0)$$
$$f(a+1) = \prod_{i=1}^{a+1} m(i) \cdot f(0)$$
Base da Indução vamos provar que
$$f(k) = f(0)\prod_{i=1}^{k} m(i) \quad \forall k \in \{0\}$$
$$f(0) = f(0)\prod_{i=1}^{0} m(i)$$
$$f(0) = f(0)$$

73) Sejam $f, s, m : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que
$$f(n) = m(n)\, f(n-1) + s(n) \quad \forall n \geqslant 1$$
Prove por indução em n que
$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right) \forall n \geqslant 0$$
Hipótese da Indução seja $a>0$
$$f(k) = f(0)\prod_{i=1}^{k} m(i) + \sum_{j=1}^{k}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{k} m(i)\right) \forall k \in [0 \dots a]$$
Passo da Indução vamos provar que
$$f(a+1) = f(0)\prod_{i=1}^{a+1} m(i) + \sum_{j=1}^{a+1}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{a+1} m(i)\right)$$
Por definição se $a+1>0$
$$f(a+1) = m(a+1)\, f(a) + s(a+1)$$
Pela Hipótese da Indução
$$f(a+1) = m(a+1)\left(f(0)\prod_{i=1}^{a} m(i) + \sum_{j=1}^{a}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{a} m(i)\right)\right) + s(a+1)$$
$$f(a+1) = f(0)\prod_{i=1}^{a} m(i)\, m(a+1) + \sum_{j=1}^{a}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{a} m(i)\right) m(a+1) + s(a+1)$$
$$f(a+1) = f(0)\prod_{i=1}^{a+1} m(i) + \sum_{j=1}^{a}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{a+1} m(i)\right) + s(a+1)\prod_{i=a+1+1}^{a+1} m(i)$$
$$f(a+1) = f(0)\prod_{i=1}^{a+1} m(i) + \sum_{j=1}^{a+1}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{a+1} m(i)\right)$$
Base da Indução vamos provar que
$$f(k) = f(0)\prod_{i=1}^{k} m(i) + \sum_{j=1}^{k} s(j)\prod_{i=j+1}^{k} m(i) \quad \forall k \in \{0\}$$
$$f(0) = f(0)\prod_{i=1}^{0} m(i) + \sum_{j=1}^{0}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{0} m(i)\right)$$
$$f(0) = f(0)$$

77) Seja $M(n) : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por $M(n) :=$ a posição do bit mais significativo na representação binária de n, sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1)=0$ e $M(10)=3$.

a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$

b) Prove que a expressão proposta está correta

A posição do bit mais significativo é a mesma coisa que o número de bits de n.

a) $f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leqslant 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & \text{se } n > 1 \end{cases}$

Vamos provar por indução em n que
$$f(n) = M(n) \quad \forall n > 0$$
Hipótese da Indução seja $a > 0$ /
$$f(k) = M(k) \quad \forall k \in [1 \dots a]$$
Passo da Indução vamos provar que
$$f(a+1) = M(a+1)$$
Sabemos por definição que se $a+1 > 1$
$$f(a+1) = f(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + 1$$
Pela Hipótese da Indução
$$f(a+1) = M(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + 1$$
$$\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor = d_{n-1}2^{n-1} + \dots + d_1 2^1 + d_0 2^0 \text{ sendo } n \in \mathbb{N}$$

Se $a+1$ é par $\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor = \frac{a+1}{2}$

$$\frac{a+1}{2} = d_{n-1}2^{n-1} + \ldots + d_1 2^1 + d_0 2^0$$

$$a+1 = d_{n-1}2^{n} + \ldots + d_1 2^2 + d_0 2^1$$

$$\begin{matrix} M(a+1) = n \\ M(\frac{a+1}{2}) = n-1 \end{matrix} \Rightarrow m(a+1) = m(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + 1$$

Se $a+1$ é ímpar $\lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor = \frac{a}{2}$

$$\frac{a}{2} = d_{n-1}2^{n-1} + \ldots + d_1 2^1 + d_0 2^0$$

$$a = d_{n-1}2^{n} + \ldots + d_1 2^2 + d_0 2^1$$

$$a+1 = d_{n-1}2^{n} + \ldots + d_1 2^2 + d_0 2^1 + 1.2^0$$

$$\begin{matrix} M(a+1) = n \\ M(\frac{a}{2}) = n-1 \end{matrix} \Rightarrow M(a+1) = M(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + 1$$

E assim provamos que

$$f(a+1) = M(a+1)$$

Base da Indução vamos provar que

$$f(k) = M(k) \quad \forall k \in \{1\}$$

$$f(1) = M(1)$$

$$0 = M(2^0.1)$$

$$0 = 0$$

Como queríamos provar

78) Considerando o algoritmo $Exp(x,n)$ dado

a) Execute $(2,n)$ para $n \in \{0,1,2,5,11,15,16,20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas

b) Prove por indução em n que $Exp(n,x) = x^n$ $\forall x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$

c) Prove que a execução de $Exp(x,n)$ efetua $\lfloor lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações $\forall x \neq 0$ e $\forall n > 0$ onde $b(n)$ é a função definida pelo número de dígitos 1 na representação binária de n

d) Prove que $Exp(x,n)$ efetua no máximo $2(\lfloor lg n \rfloor + 1)$ multiplicações $\forall x > 0$ e $n > 0$.

a) $Exp(2,0) = 1$, 0 multiplicações

$Exp(2,1) = 2$, 2 multiplicações

$Exp(2,2) = 4$, 3 multiplicações

$Exp(2,5) = 32$ 5 multiplicações

b) $$Exp(x,n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ Exp(x, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)^2, & \text{se } n \text{ é par e } n > 0 \\ x.Exp(x, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)^2, & \text{se } n \text{ é ímpar}, n > 0 \end{cases}$$

Vamos provar por indução em n que

$$Exp(x,n) = x^n \quad \forall x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hipótese da Indução seja $a \in \mathbb{N}$ /

$$Exp(x,k) = x^k \quad \forall k \in [0..a]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$Exp(x,a+1) = x^{a+1}$$

Sabemos que, se $a+1$ é par e maior que 0

$$Exp(x,a+1) = Exp(x, \lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor)^2$$

e

$$\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor = \tfrac{a+1}{2}$$

Portanto

$$Exp(x,a+1) = Exp(x, \tfrac{a+1}{2})^2$$

Pela Hipótese da Indução

$$Exp(x,a+1) = (x^{\frac{a+1}{2}})^2$$

$$Exp(x,a+1) = x^{a+1}$$

Se $a+1$ é ímpar e maior que 0

$$Exp(x,a+1) = x.Exp(x, \lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor)^2$$

e

$$\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor = \tfrac{a}{2}$$

ou seja

$$Exp(x,a+1) = x\, Exp(x, \tfrac{a}{2})^2$$

Pela Hipótese da Indução

$$Exp(x,a+1) = x\,(x^{a/2})^2$$

$$Exp(x,a+1) = x.x^a$$

$$Exp(x,a+1) = x^{a+1}$$

Base da Indução vamos provar que

$$Exp(x,k) = x^k \quad \forall k \in \{0\}$$

$$Exp(x,0) = x^0$$

$$1 = 1$$

c) $M(n) = \begin{cases} 2, \text{ se } n=1 \\ M(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, \text{ se } n \text{ é par e } n>1 \\ M(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2, \text{ se } n \text{ é ímpar e } n>1 \end{cases}$

Vamos provar que $M(n) = \lfloor \lg n \rfloor + b(n) + 1 \ \forall n>0$

Hipótese da Indução seja $a \in \mathbb{N}$ e $a>0$ /

$$M(k) = \lfloor \lg k \rfloor + b(k) + 1 \quad \forall k [1 \ldots a]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$M(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + b(a+1) + 1$$

Por definição se $a+1$ é par,

$$M(a+1) = M(\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor) + 1$$

$$\lfloor \tfrac{a+1}{2} \rfloor \overset{e}{=} \tfrac{a+1}{2}$$

$$M(a+1) = M(\tfrac{a+1}{2}) + 1$$

Pela Hipótese da Indução

$$M(a+1) = \lfloor \lg(\tfrac{a+1}{2}) \rfloor + b(\tfrac{a+1}{2}) + 1 + 1$$

Por definição $b(\frac{a+1}{2}) = b(a+1)$ se $a+1$ é par

$$M(a+1) = \lfloor \lg(a+1) - 1 \rfloor + b(a+1) + 1 + 1$$

$$M(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + b(a+1) + 1$$

se $a+1$ é ímpar e $a+1>1$

$$M(a+1) = M(\tfrac{a}{2}) + 2$$

Pela Hipótese da Indução

$$M(a+1) = \lfloor \lg(\tfrac{a}{2}) \rfloor + b(\tfrac{a}{2}) + 1 + 2$$

$$M(a+1) = \lfloor \lg a - 1 \rfloor + b(\tfrac{a}{2}) + 3$$

Se $a+1$ é ímpar, a é par, o que significa que $b(\frac{a}{2}) = b(a)$. Além disso, por definição se a é par, $b(a)+1 = b(a+1)$

$$M(a+1) = \lfloor \lg a \rfloor + b(a) + 2$$

$$M(a+1) = \lfloor \lg a \rfloor + b(a+1) + 1$$

Como $a+1$ é ímpar $\neq 1$, é impossível que o resultado de $\lg(a+1)$ seja um inteiro. Dessa forma podemos assumir que $\lfloor \lg a \rfloor = \lfloor \lg(a+1) \rfloor$

Portanto $M(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + b(a+1) + 1$

Base da Indução vamos provar que

$$M(k) = \lfloor \lg k \rfloor + b(k) + 1 \quad \forall k \in \{1\}$$

$$M(1) = \lfloor \lg 1 \rfloor + b(1) + 1$$

$$2 = 0 + 1 + 1$$

Como queríamos provar

d) vamos provar por indução em n que

$$M(n) \leq 2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$$

Hipótese da Indução seja $a \in \mathbb{N}$ e $a>0$

$$M(k) \leq 2(\lfloor \lg k \rfloor + 1) \quad \forall k \in [1 \ldots a]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$M(a+1) \leq 2(\lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1)$$

Sabemos que se $a+1>1$ e $a+1$ é par

$$M(a+1) = M(\tfrac{a+1}{2}) + 1$$

$$M(\tfrac{a+1}{2}) = M(a+1) - 1$$

Pela Hipótese da Indução

$$M(\tfrac{a+1}{2}) \leq 2(\lfloor \lg(\tfrac{a+1}{2}) \rfloor + 1)$$

$$M(a+1) - 1 \leq 2(\lfloor \lg a+1 \rfloor - 1 + 1)$$

$$M(a+1) \leq 2(\lfloor \lg a+1 \rfloor) + 1 < 2(\lfloor \lg a+1 \rfloor + 1)$$

Se $a+1>1$ é ímpar

$$M(a+1) = M(\tfrac{a}{2}) + 2$$

$$M(\tfrac{a}{2}) = M(a+1) - 2$$

Pela Hipótese da Indução

$$M(\tfrac{a}{2}) \leq 2(\lfloor \lg \tfrac{a}{2} \rfloor + 1)$$

$$M(a+1) + 2 \leq 2(\lfloor \lg a \rfloor - 1 + 1)$$

$$M(a+1) \leq 2(\lfloor \lg a \rfloor) + 2$$

Como $a+1$ é ímpar $\lfloor \lg a \rfloor = \lfloor \lg(a+1) \rfloor$

$$M(a+1) \leq 2(\lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1)$$

Base da Indução vamos provar que

$$m(k) \leq 2(\lfloor \lg k \rfloor + 1) \quad \forall k \in \{1\}$$

$$m(1) \leq 2(\lfloor \lg 1 \rfloor + 1) \Rightarrow 2 \leq 2$$

79) Considere o algoritmo de mínimo dado. Prove, por indução em n, que, dado $a \in \mathbb{Z}$, a execução de mínimo$(v, a, a+n-1)$ faz $n-1$ comparações entre elementos de v, $\forall n \geq 1$.

Considerando pra função $C(n)$ onde $C: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ é a função que determina o número de comparações do algoritmo, podemos defini-la como

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1 \\ 2C\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, & \text{se } n \text{ é par e } n > 1 \\ C(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + C(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) + 1, & \text{se } n \text{ é ímpar e } n > 1 \end{cases}$$

Vamos provar por indução que $C(n) = a - 1$

Hipótese da Indução seja $i \in \mathbb{N}$ e $i > 0$ /

$$C(k) = k - 1 \quad \forall k \in [1 \ldots i]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$C(i+1) = i$$

Sabemos que se $i+1 > 1$ e $i+1$ é par

$$C(i+1) = 2C(\lfloor \tfrac{i+1}{2} \rfloor) + 1$$

Como $i+1$ é par $\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor = \frac{i+1}{2}$

$$C(i+1) = 2C\left(\tfrac{i+1}{2}\right) + 1$$

Pela Hipótese da Indução

$$C(i+1) = 2\left(\tfrac{i+1}{2} - 1\right) + 1$$

$$C(i+1) = i + 1 - 2 + 1$$

$$C(i+1) = i$$

Se $i+1 > 1$ e $i+1$ é ímpar

$$C(i+1) = C(\lfloor \tfrac{i+1}{2} \rfloor) + C(\lfloor \tfrac{i+1}{2} \rfloor + 1) + 1$$

Como $i+1$ é ímpar $\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor = \frac{i}{2}$

$$C(i+1) = C(\tfrac{i}{2}) + C(\tfrac{i}{2} + 1) + 1$$

Pela Hipótese da Indução

$$C(i+1) = \frac{i}{2} - 1 + \frac{i}{2} + 1 - 1 + 1$$

$$C(i+1) = i$$

Base da Indução vamos provar que

$$C(k) = k - 1 \quad \forall k \in \{1\}$$

$$C(1) = 1 - 1$$

$$0 = 0$$

80) Prove por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i \quad \forall n \in \mathbb{N}$

```
Fatorial(n)
  se n=0
    devolva 1
  devolva n x Fatorial(n-1)
```

Definindo $F(n)$ como a função que representa o algoritmo, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, temos que

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n \cdot F(n-1), & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Vamos provar que

$$F(n) = \prod_{i=1}^{n} i$$

Hipótese da Indução seja $a \in \mathbb{N}$ /

$$F(k) = \prod_{i=1}^{k} i \quad \forall k \in [0 \ldots a]$$

Passo da Indução vamos provar que

$$F(a+1) = \prod_{i=1}^{a+1} i$$

Sabemos que se $a+1 > 0$

$$F(a+1) = (a+1) \cdot F(a)$$

Pela Hipótese da Indução

$$F(a+1) = (a+1) \cdot \prod_{i=1}^{a} i$$

$$F(a+1) = \prod_{i=1}^{a+1} i$$

Base da Indução vamos provar que

$$F(k) = \prod_{i=1}^{k} i \quad \forall k \in \{0\}$$

$$F(0) = \prod_{i=1}^{0} i \qquad 1 = 1 \ \#$$