Questão 1

10/10

$$\frac{\binom{30}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{593775}{50063860} = 0{,}0118 \text{ ou } 1{,}18\%$$

onde $\binom{30}{6}$ é a combinação dos 30 ímpares e

$\binom{60}{6}$ todas as combinações possíveis.

Questão (2)

Dado $p \in N$, vamos chamar M_p o conjunto dos números em $[n]$ que são múltiplos de p e menores que n.

3/10

$$M_p = \{p, 2p, \ldots, \lfloor \tfrac{n}{p} \rfloor p\}$$

Então:

$$|M_p| = \lfloor \tfrac{n}{p} \rfloor$$

Nosso caso $n = 100\,000$, temos então, a união dos tamanhos dos conjuntos dos múltiplos do enunciado:

$$|(M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_7)| \boxed{- |M_5| - |M_7|}$$

Pelo princípio de inclusão/exclusão, para 4 elementos, temos:

$$|M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_7| = (|M_3| + |M_4| + |M_5| + |M_7|) - (\cancel{|M_3 \cap M_4|}\ |M_3 \cap M_4| + |M_3 \cap M_5| + \ldots)$$
$$- (|M_3 \cap M_4 \cap M_5| + |M_3 \cap M_4 \cap M_7| + \ldots) + (|M_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap M_7|).$$

Então temos:

$$|M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_7| = (|M_3| + |M_4| + |M_5| + |M_7|) - (|M_{12}| + |M_{15}| + \ldots) -$$
$$- (|M_{60}| + |M_{84}| + \ldots) + (|M_{420}|).$$

Substituindo pela def. de M_p definida:

$$|M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_7| = \left\lfloor \frac{100\,000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{7} \right\rfloor -$$
$$- \left(\left\lfloor \frac{100\,000}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{28} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{35} \right\rfloor \right) -$$
$$- \left(\left\lfloor \frac{100\,000}{60} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{84} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{140} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100\,000}{105} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{100\,000}{420} \right\rfloor \right) =$$

$$= 33333 + 25.000 + 20.000 + 14.285 - (8.333 + 6.666 + 4.761 + 5.000 + 3.571 + 2.857) -$$
$$- (1.666 + 1.190 + 714 + 952) + 238 = 57.146$$

Por fim,

$$|M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_7| - |M_5| - |M_7| = 57.146 - 20.000 - 14.285 = \underline{22.861}.$$

Questão 3

a) $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = \frac{5.\cancel{4}^{2}.\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,\cancel{2}_{1}.1} = 10.$

pois são soluções não negativas (3 ords).

10/10

b) ~~Também são soluções não negativas~~:

$$\cancel{(O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_n = p)}$$

$$\cancel{\binom{n+p-1}{p-1}}.$$

b) Também são soluções não negativas:

$$O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_n = K$$

$$\binom{n+K-1}{K-1}.$$

1/10

Questão 4

Seja A o conjunto de 3 naturais que vão de 1 a 30 e que a soma é par, então:

10/10

$$A = \left\{ B \in \binom{[30]}{3} \Big/ \sum_{b \in B} b \text{ é par} \right\}$$

$B \in \binom{[30]}{3}$, então temos que $\sum_{b \in B} b$ é par se, e somente se

(i) Todos os elementos de B são pares

(ii) Um dos elementos é par

Então:

$$A = A_T \cup A_U \text{, em que:}$$

$$A_T = \left\{ B \in \binom{[30]}{3} \Big/ \text{todo } b \in B \text{ é par} \right\}$$

$$A_U = \left\{ B \in \binom{[30]}{3} \Big/ \text{um único } b \in B \text{ é par} \right\}$$

A_T e A_U são disjuntos, então

$$|A| = |A_T| + |A_U| \quad \text{, teorema 43.}$$

Seja T e U os conjuntos de pares e ímpares em [30], respectivamente:

$$T = \{2, 4, 6, 8, \dots, 30\}$$
$$U = \{1, 3, 5, \dots, 29\}$$

Então:

(i) Os elementos de A_T correspondem aos subconj. de tamanho 3 de T

(ii) Os elementos de A_U correspondem aos pares (X, Y) de subconj. de [30], em que:

1. $X \subseteq T$ e $|X| = 1 \longrightarrow X \in \binom{T}{1}$
2. $Y \subseteq U$ e $|Y| = 2 \longrightarrow Y \in \binom{U}{2}$

Continuação (4)

$$A_T = \binom{T}{3}$$

$$A_U = \binom{T}{1}\cdot\binom{U}{2}$$

Então:

$$|A| = |A_T| + |A_U| = \left|\binom{T}{3}\right| + \left|\binom{T}{1}\cdot\binom{U}{2}\right| = \binom{|T|}{3} + \binom{|T|}{1}\binom{|U|}{2} =$$

★

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

$$\star \;= \frac{|T|_3}{3!} + \frac{|T|_1}{1!}\cdot\frac{|U|_2}{2!} = \frac{15_3}{3!} + \frac{15_1}{1!}\cdot\frac{15_2}{2!} =$$

$$= \frac{\cancelto{5}{15}\cdot\cancelto{7}{14}\cdot 13}{\cancelto{1}{\cancelto{3}{6}}} + \frac{15}{1}\cdot\frac{15\cdot\cancelto{7}{14}}{\cancelto{1}{2}} = 5.7.13 + 15(15.7) = 455 + 15(105) = 2030.$$

Questão 5

Este é um cálculo que lembra muito o paradoxo dos aniversários, já que o baralho tem 52 cartas, a primeira carta tem chance $\frac{1}{52}$, a segunda $\frac{1}{51}$, e assim por diante, então temos;

2/10

$$\frac{1}{52!}$$

Mas isso é a chance para 100% de acerto.

Para 50% teríamos $\frac{1}{52!} \cdot 2$ (~~para~~).

Então a máquina teria que fazer $\boxed{\frac{52!}{2n}}$ iterações para chegar em 50% de chance.