Matemática Discreta

Terceira prova

1. Quantos divisores positivos tem o número 900?

   Resposta:

   Seja D o conjunto dos divisores positivos de 900. Queremos determinar $|D|$. Pelo Teorema fundamental da aritmética, todos os inteiros positivos maiores que 1 possuem uma decomposição única em fatores primos, dessa maneira temos:

   $$\begin{array}{l|l} 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

   Logo: $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ e esta representação é única.

   Cada divisor de 900 corresponde a uma sequência (m_1, m_2, m_3) onde $0 \leq m_1, m_2, m_3 \leq 2$,

   Em outras palavras a função $f : (m_1, m_2, m_3) \mapsto 2^{m_1} 3^{m_2} 5^{m_3}$ é uma bijeção, isso é o mesmo que $f : [0..2]^3 \mapsto D$, e portanto

   $$|D| = |[0..2]^3| = |[0..2]|^3 = 3^3 = 27$$

2. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

   (a) n lançamentos consecutivos de um dado?

   Resposta:

   " n lançamentos de um dado" $\sim$ "sequências de tamanho n sobre [6]"

   Logo:

   $|n$ lançamentos de um dado$| = |[6]^n| = |[6]|^n = 6^n$

(b) até n lançamentos consecutivos de um dado?
Resposta:

$$\sum_{i=0}^{n} 6^i = \frac{6^{n+1}-1}{6-1} = \frac{6^{n+1}-1}{5} \texttt{(considerando o lançamento vazio)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 6^i = \sum_{i=0}^{n} 6^i - 1 = \frac{6^{n+1}-1}{5} - 1 =$$

$$= \frac{6^{n+1}-6}{5} \texttt{(desconsiderando o lançamento vazio)}$$

3. Um *palíndromo* sobre um conjunto A é uma sequência $(a_1, ..., a_k) \in A^k$ que "permanece a mesma quando lida de trás para frente", isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k$$

(a) Apresente todos os palíndromos de tamanho 3 sobre $\{a, b, c\}$
Resposta:
aaa,aba,aca
bab,bbb,bcb
cac,cbc,ccc

(b) Apresente todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$
Resposta:
aaaa,abba,acca
baab,bbbb,bccb
caac,cbbc,cccc

(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?
Resposta:
@ideia: Perceber que podemos criar uma correspondência entre um palíndromo e apenas uma de suas metades mais seu centro.

Seja P o conjunto de todos os palíndromos de tamanho k sobre um alfabeto A, onde $|A| = n$, queremos determinar uma expressão para $|P|$. Para nos auxiliar, seja $u :=$ "índice do centro de um palíndromo de tamanho n", a seguinte bijeção ocorre:

$$P \sim A^u,$$

isto porque $f : (p_1, p_2, \ldots, p_u) \mapsto (p_1, p_2, \ldots, p_{u-1}, p_u, p_{u-1}, \ldots, p_2, p_1)$ é uma bijeção.

Dessa maneira:

$$|P| = |A^u| = |A|^u = n^u$$

É possível encontrar uma expressão para u em função de n, de várias maneiras, a maneira que acredito ser a esperada na prova, era a de encontrá-lo experimentalmente, uma outra maneira seria encontrando uma expressão para a recorrência abaixo:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0. \\ 1, & \text{se } n = 1. \\ f(n-2) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Resolvendo essa recorrência encontraríamos $u = f(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, que podemos substituir:

$$|P| = n^u = n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

4. Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas, todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?

   Resposta:

$$\binom{a}{k}\binom{v}{n-k}$$

   @ideia: Garantir que temos k bolas azuis e depois complementar com as bolas vermelhas.

   `(Adaptado: notas de aula)`

   Seja B o conjunto das bolas e seja $A \subseteq B$ o conjunto de bolas azuis B. Cada amostra de n bolas de B com exatamente k bolas azuis correspondentes a um par (X, Y) de subconjuntos de B onde

   (a) $X \subseteq A$ e $|X| = k$,

(b) $Y \subseteq B - A$ e $|Y| = n - k$,

isto é,

(a) $X \in \binom{A}{k}$ e

(b) $Y \in \binom{B-A}{n-k}$ e

Consequentemente o número de tais amostras é o tamanho do conjunto:

$$S = \binom{A}{k} \times \binom{B-A}{n-k}$$

isto é:

$$|S| = \left|\binom{A}{k} \times \binom{B-A}{n-k}\right| = \left|\binom{A}{k}\right|\left|\binom{B-A}{n-k}\right| =$$

$$= \binom{|A|}{k}\binom{|B-A|}{n-k} = \binom{|A|}{k}\binom{|B|-|A|}{n-k} = \binom{a}{k}\binom{(a+v)-a}{n-k} =$$

$$= \binom{a}{k}\binom{v}{n-k}$$

5. Quantas diferentes composições admite um inteiro n?

   Resposta:

   @ideia: Contar quantas são todas as k-composições de n, para $1 \leq k \leq n$

   Seja C o conjunto de todas as composições de n, queremos determinar $|C|$. Temos que:

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$$

   onde $C_k :=$ "O conjunto de todas as composições de n de tamanho k"

   Como esses conjuntos são dois a dois disjuntos, temos:

$$|C| = \left|\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |C_k| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$$