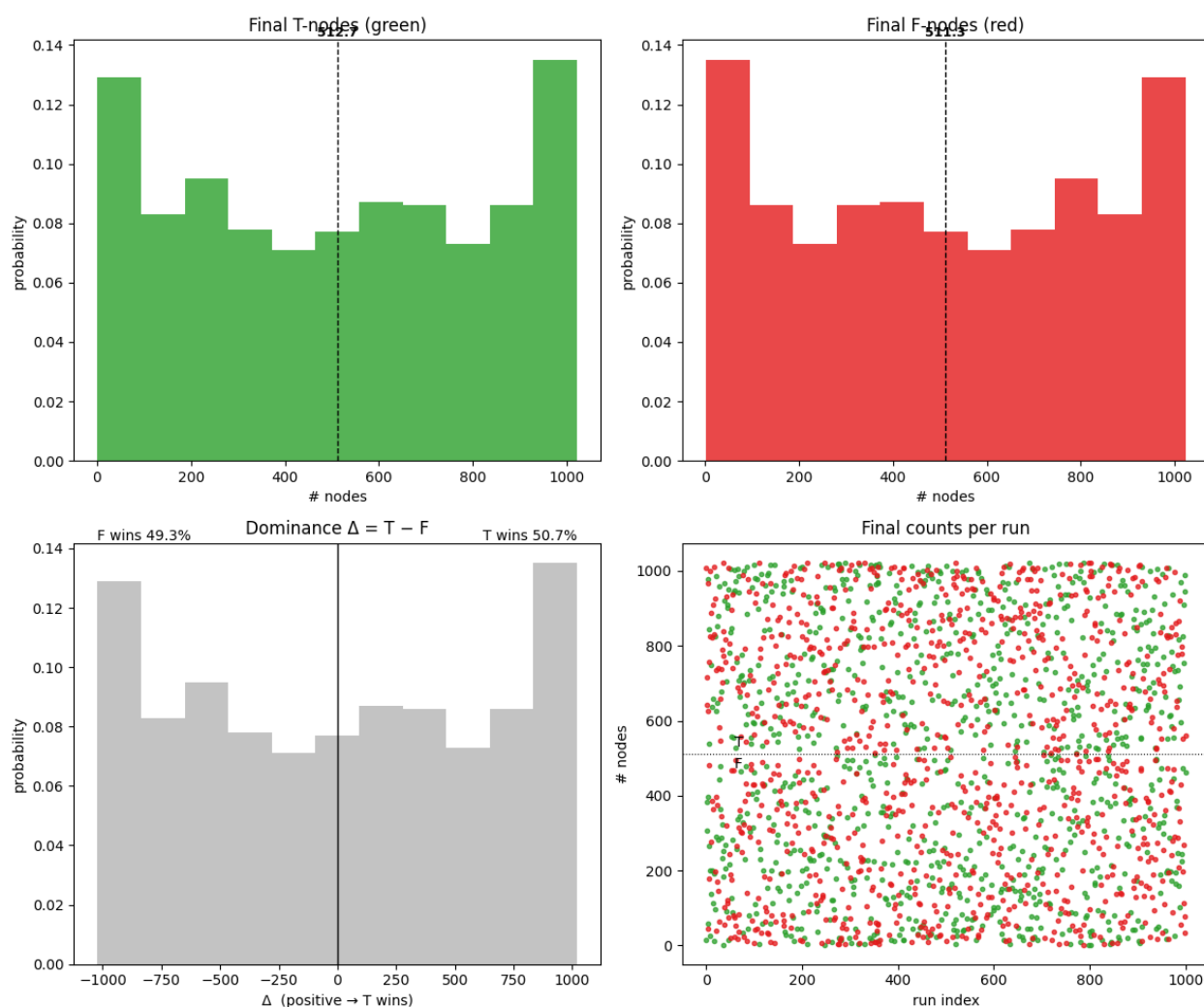


مدل انتشار دوتایی SI روی شبکه‌ی ترکیبی باراباسی-آلبرت و دنیای کوچک

در گزارش قبل متوجه شدیم که شرایط اولیه تاثیر بسیاری در سرنوشت T و F دارند. در این گزارش بررسی می‌کنیم که برای تعداد رأس‌های T و F به چه صورت توزیع شده‌اند. شبکه دقیقاً به سبک شبکه‌ی گزارش پیشین ساخته شده و در گسترش T و F ، اتصالات شبکه هیچ‌گونه تغییری نمی‌کنند.

ابتدا شکل‌های 1000 اجرای انجام شده برای $\beta_T = 0.35$ و $\beta_F = 0.35$ را تحلیل می‌کنیم. انتظار داریم که تا حد خوبی نمودارهای T و F متقارن بوده و احتمال برد T و F تقریباً پنجاه پنجاه باشد.

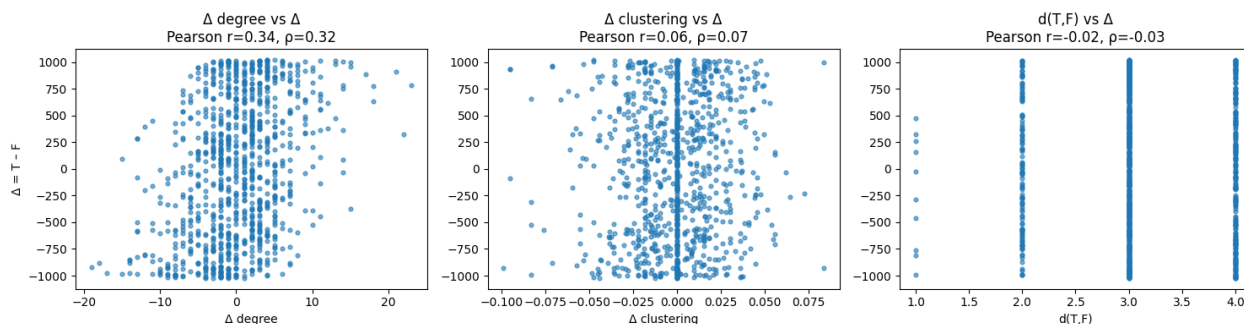


نمودار اول (نمودار بالا سمت چپ)، احتمال رخ دادن را بر حسب تعداد رأس‌هایی که در نهایت در حالت T قرار

گرفته‌اند نشان می‌دهد. این نمودار تقریباً به شکل یک خط صاف است و فقط در مقادیر شدید (نزدیک به صفر یا N) تیغه می‌زند. این یعنی در بسیاری از مواقع یکی از دو گروه T و F کاملاً بر شبکه غالب می‌شود. نمودار دوم (بالا سمت راست) به مانند نمودار قبل است اما برای F . تقارن بین نمودار اول و دوم نیز انتظار می‌رفت چون $T + F \approx N$. میانگین تعداد رأس‌هایی که در نهایت در حالت F قرار دارند برابر با 511.3 و این مقدار برای T برابر با 512.7 می‌باشد. نزدیک بودن میانگین برای این دو نمودار نیز از برابر بودن β_T و β_F انتظار می‌رفت. هر دو نمودار اول و دوم شکل نمایی دارند. بر خلاف توزیع‌های توانی که دم بلندی دارند و مقیاس مشخصی در آن‌ها وجود ندارد، در این نمودارها یک اندازه متوسط یا حد مشخص وجود دارد که بیشتر اجراها نزدیک به آن متوقف می‌شوند. این معمولاً زمانی اتفاق می‌افتد که فرآیند T زیر آستانه باشد یعنی به هر دلیل آهنگ رشد T آنقدر نیست که بتواند به بخش بزرگی از شبکه برسد و زود متوقف می‌شود. در مدل ما توقف T به خاطر این است که F سریع‌تر است و معمولاً زودتر به رأس‌های آزاد می‌رسد و آن‌ها را می‌گیرد. T فقط زمانی می‌تواند خیلی بزرگ شود که از همان ابتدا مزیت بزرگی (مثل درجه اولیه خیلی بالا) داشته باشد.

نمودار سوم نشان دهنده احتمال رخ دادن Δ بر حسب اختلاف تعداد F و T در پایان هر اجرا ($\Delta = T - F$) است. قسمت مثبت نمودار نشان‌دهنده حالت‌هایی است که T در آخر در آن‌ها برنده است. این نمودار نیز متقارن و خطی‌طور است. T و F برتری چندانی نسبت به یکدیگر ندارند.

شکل بعدی برای بررسی تاثیر شرایط اولیه بر روی برد رسم شده است.



ضریب همبستگی پیرسون و اسپیرمن برای متغیرهای متفاوت در شکل بالا قرار داده شده است. رابطه‌ای که بر حسب آن مقدار پیرسون حساب شده برابر است با:

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (1)$$

در حالتی که $r = +1$ ، یک خط صاف با شیب مثبت داریم، به این معنا که با افزایش X ، Y همیشه افزایش می‌یابد. برای $r = 0$ رابطه‌ی خطی‌ای وجود ندارد و برای $r = -1$ و X و Y رابطه خطی عکس دارند.

در اولین نمودار سمت چپ، نشان دهنده $\Delta = T - F$ بر حسب اختلاف درجه رأس برای دو رأس اول انتخاب شده است. همچنین ضریب پیرسون برای این نمودار برابر $r \approx 0.34$ بوده و نشان می‌دهد که وقتی رأس اولیه T دارای درجه رأس بیشتری از F است، امکان برد T کمی بیشتر است.

نمودار وسط نشان دهنده $\Delta = T - F$ بر حسب ضریب خوشه‌بندی برای دو رأس اولیه T و F است. همچنین این نمودار دارای ضریب پیرسون $r \approx 0.06$ می‌باشد. این یعنی این که رأس‌هایی اولیه F و T عضوی از یک خوشه باشند تاثیر خاصی بر روی اینکه چه کسی در آخر می‌برد ندارد.

نمودار سمت راست نشان دهنده $\Delta = T - F$ بر حسب طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس اولیه F و T است. همچنین این نمودار دارای ضریب پیرسون $r \approx 0.01$ بوده و یعنی اگر فاصله بین دو رأس انتخاب شده برای F و T زیاد باشد،

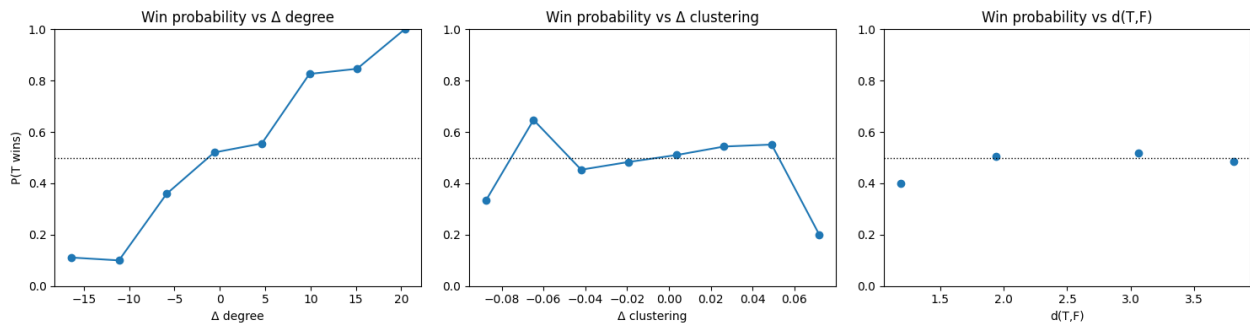
این موضوع تقریباً هیچ تأثیری بر روی نتیجه نهایی ندارد.

ضریب دیگری که محاسبه شده، ضریب اسپیرمن است که با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود،

$$\rho = \frac{\text{Cov}(\text{rank}(X), \text{rank}(Y))}{\sigma_{\text{rank}(X)} \sigma_{\text{rank}(Y)}}. \quad (2)$$

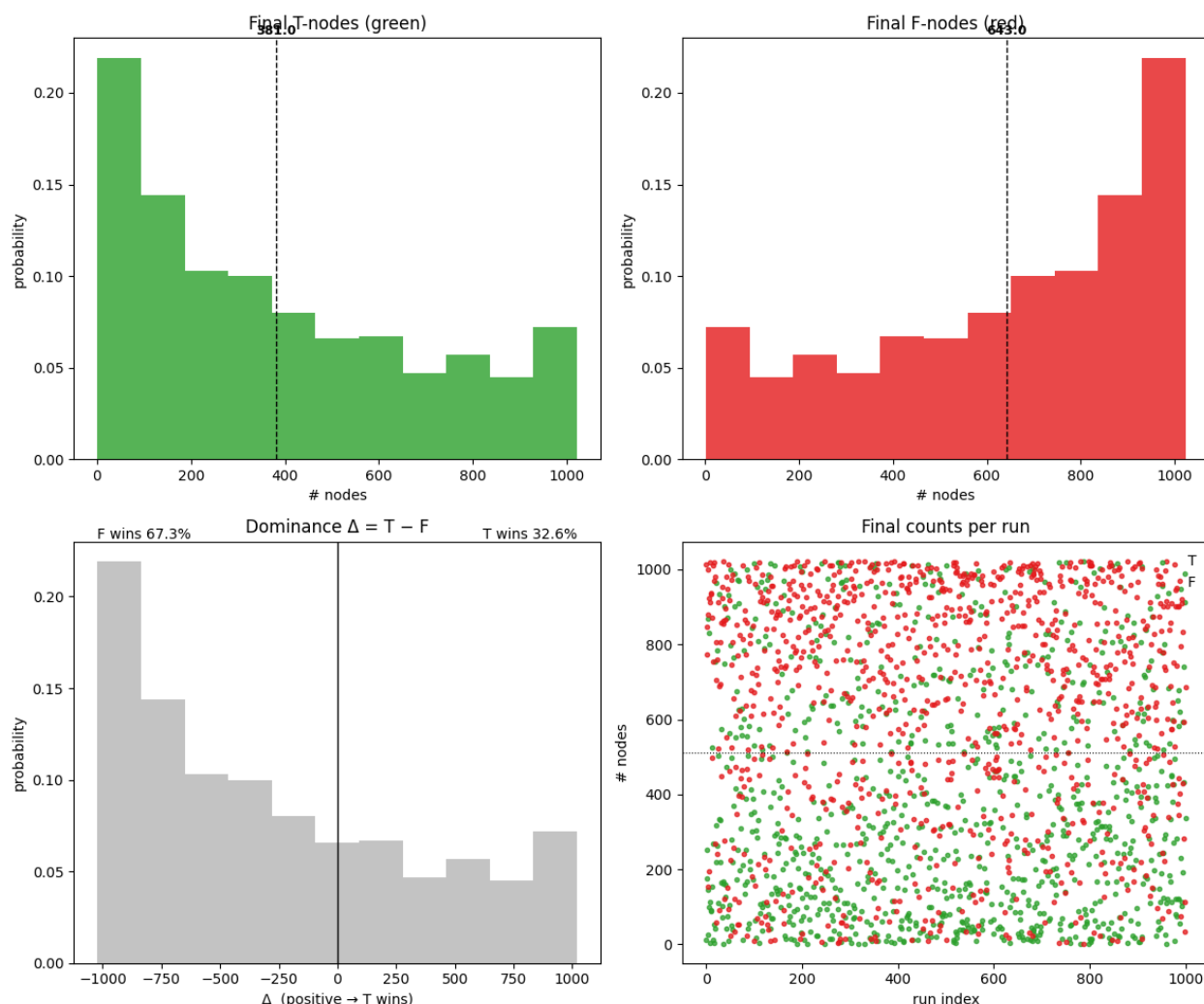
نتایج محاسبه ضریب اسپیرمن با ضریب پیرسون مشابه است و تنها نمودار سمت چپ نشان دهنده وجود رابطه‌ای بین برد نهایی و شرط اولیه می‌باشد.

نمودار بعدی نشان دهنده احتمال برد T بر حسب شرایط اولیه به مانند درجه رأس، ضریب خوشه‌بندی و فاصله بین دو رأس T و F اولیه است.

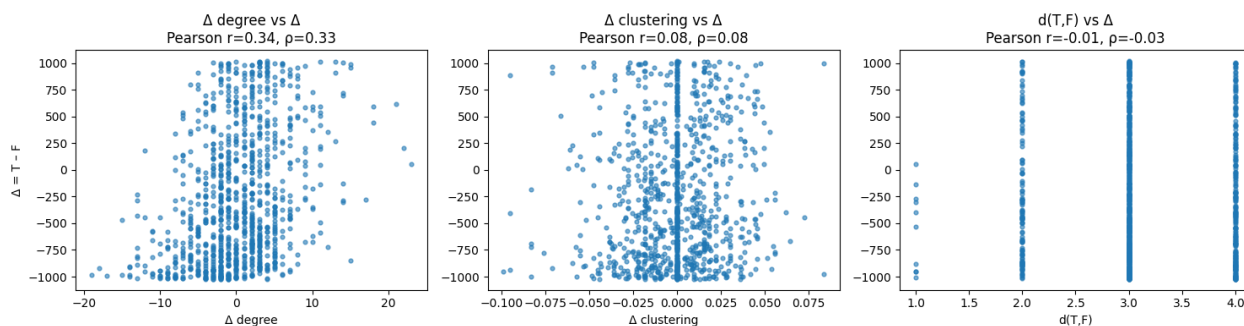


از آنجایی که نتایج این نمودار با نمودارهایی قبلی یکی است، نیازی به تحلیل آن نمی‌باشد.

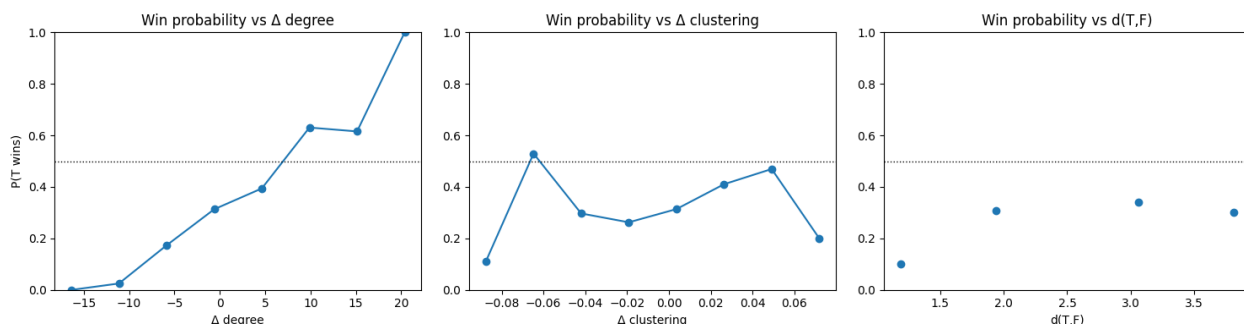
حال با تغییر مقدار β_F دوباره هزار اجرا را تکرار می‌کنیم. این بار $\beta_F = 0.40$ و $\beta_T = 0.35$ می‌باشد. شکل‌های خروجی در زیر قرار داده شده‌اند.



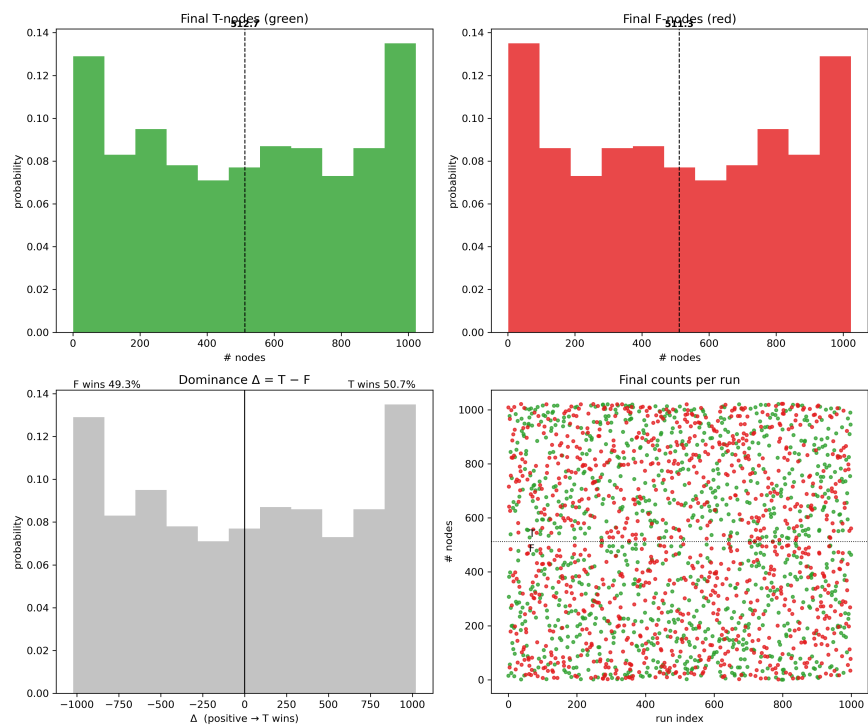
نمودار اول (بالا سمت راست)، به سمت چپ متمایل است و به مقدار ماکسیمم نزدیک نمی‌شود. میانگین کمتر از 500 بوده و یعنی بیشتر اوقات T می‌بازد. نمودار دوم (بالا سمت چپ)، تقریباً قرینه نمودار اول بوده و به سمت راست متمایل است. یعنی در بسیاری از اجراها F تعداد خیلی زیادی از رئوس را می‌گیرد. شکل سوم (پایین سمت چپ)، نشان می‌دهد که حدوداً در 67.3 درصد مواقع F برنده نهایی است. این کاملاً مطابق تفاوت β ها است. در نمودار آخر مشاهده می‌کنیم که نقاط سبز بیشتر در نیمه پایین یقرار دارند و نقاط قرمز قرمز بیشتر در نیمه بالایی. البته گاهی T با مزیت درجه یا شانس می‌تواند ببرد اما تمایل غالب به نفع F است.



در این شکل مشاهده می‌کنیم که همبستگی پیرسون و اسپیرمن، تنها برای نموداری که مربوط به اختلاف درجه رأس اولیه است، برابر با صفر نمی‌باشد. پس یعنی مثل حالت قبل مزیت بیشتر بودن درجه رأس اولیه برای T همچنان Δ را افزایش می‌دهد. به نفع T است اما این افزایش باید با برتری β_F رقابت کند. تعداد نقاط در سمت چپ نمودار اول این شکل بیشتر بوده، یعنی در بیشتر مواقع Δ منفی بوده و مزیت بیشتر بودن درجه رأس اولیه بر بیشتر بودن β_F غلبه نکرده است.



نمودار سمت چپ این شکل نشان می‌دهد که اگر Δ درجه منفی باشد، احتمال برد T تقریباً برابر با صفر است. اما در این نمودار یک روند صعودی نیز مشاهده می‌شود که نشان می‌دهد در صورتی که Δ درجه رأس اولیه خیلی مثبت شود، T می‌تواند جبران کند و حتی گاهی به 100 درصد برد برسد!! نمودار وسط روند منظم و قابل پیش‌بینی‌ای ندارد و به نظر می‌رسد بیشتر با نویز تغییر می‌شود. نمودار سمت راست نیز نشان می‌دهد که مقدار فاصله بین رأس اولیه T و F ، تاثیر خاصی بر روی اینکه کدام در آخر می‌برد ندارد.



شکل ۱: