مدل انتشار دوتایی SI روی شبکه‌ی ترکیبی باراباسی—آلبرت و دنیای کوچک

شبکه‌ی گزارش قبل را با روش دیگری در این گزارش می‌سازیم. شبکه‌ای داریم با 1000 رأس که اتصالات بین رئوس آن از دو نوع مختلف هستند. تعداد از رأس‌ها به روش باراباسی‌آلبرت به یک‌دیگر متصل بوده و دیگر رئوس به روش دنیای کوچک به هم‌دیگر متصل هستند. یال‌های گروه اول (باراباسی‌آلبرت) به رنگ قرمز و یال‌های گروه دوم(دنیای کوچک) به رنگ آبی می‌باشند. لایه دنیای کوچک همبستگی موضعی بالا و مسیرهای کوتاه‌برد را می‌سازد. لایه باراباسی‌آلبرت میانبرهای دوربرد را وارد می‌کند. گره‌ها می‌توانند در هر دو لایه یال داشته باشند.

میانگین درجه لایه آبی برابر مقدار مشخص k_B است که ما تعیین می‌کنیم. در لایه قرمز، هر گره اضافه شده m_R یال جدید اضافه می‌کند و به طور حدودی می‌توان گفت:

$$\langle k \rangle_R \simeq 2m_R$$

در لایه آبی برای $p_B \ll 1$ تابع توزیع درجه پواسونی می‌شود:

$$P_B(k) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-k_B/2}}{(k-k_B/2)} \quad ; \quad \lambda = p_B\frac{k_B}{2}$$

می‌دانیم که ابتدا لایه آبی ساخته می‌شود. بعد از ساختن حلقه احتمال جابه‌جایی یال p_B طوری تنظیم می‌شود که میانگین درجه برابر با k_B باقی بماند. میزان خوشه‌بندی نیز از رابطه زیر پیروی می‌کند.

$$C_B \approx (1-p_B)^3\frac{3(\frac{k_B}{2}-1)}{2(k_B-1)} \tag{۱}$$

رابطه بالا به این روش به دست می‌آید:

- k_B: تعداد همسایه‌ها
- τ_i: تعداد همسایه‌ها که خود به یکدیگر وصل هستند. برای مثال تعداد مثبت‌هایی که رأس i در آن‌ها وجود دارد.
- خوشه بندی: رابطه خوشه‌بندی موضعی به صورت زیر است:

$$C_i = \frac{2\tau_i}{k_B(k_B-1)}.$$

میخواهیم تعداد جفت همسایه‌های متصل به هم را بیابیم. همه N رأس شبکه را روی یک دایره فرض کنید که شماره رأس‌ها در جهت ساعت گرد زیاد می شوند. هر رأس به $\frac{k_B}{2}$ رأس نزدیک سمت چپ و $\frac{k_B}{2}$ رأس نزدیک سمت راست خود وصل است. موقعیت هر همسایه را با عدد صحیح d می‌نویسیم:

$$d = 0, \pm 1, \cdots, \frac{k_B}{2}$$

اگر دو همسایه i دارای موقعیت d_1 و d_2 باشند، آنگاه فاصله بین آن دو

$$|d_1 - d_2|$$

خواهد بود. پس هر رأس به همه رأس‌هایی وصل است که فاصله‌هاش روی دایره کمتر یا مساوی $\frac{k_B}{2}$ باشد. جفت همسایه‌های i را به سه گروه تقسیم می‌کنیم:

- سمت چپ: هر یک از جفت همسایه‌ها در یک سمت از i هستند. به این صورت که موقعیت آن‌ها در بازه $[1, \frac{k_B}{2}[$ باشد.

$$E_L = \sum_{j=1}^{k_B/2} (\frac{k_B}{2} - j) = \frac{k_B}{2}\left(\frac{k_B}{2} - 1\right)\frac{1}{2}$$

- سمت راست: تعداد جفت‌های سمت راست مثل سمت چپ است.

- دو سمت: یک همسایه در چپ $(d_1 < 0)$ و یک همسایه در راست $d_2 > 0$ به همدیگر متصل باشند. برای متصل بودن باید

$$|d_1| + |d_2| \leq \frac{k_B}{2}$$

برقرار باشد. با به دست آوردن حالت‌ها به تساوی زیر می‌رسیم:

$$E_C = E_L.$$

بنابراین تعداد کل جفت همسایه‌های متصل به‌هم برابر است با:

$$\tau_i = 3E_L = 3\frac{k_B}{2}\left(\frac{k_B}{2} - 1\right)\frac{1}{2} = \frac{3(k_B - 2)}{8}$$

رابطه بالا را در رابطه خوشه‌بندی جایگذاری می‌کنیم.

$$C_B^{(0)} = \frac{2}{k_B(k_B - 1)}\left(\frac{3k_B(k_B - 2)}{8}\right) = \frac{3k_B(k_B - 2)}{2(k_B - 1)}$$

حال هر یال با احتمال p_B جابه‌جا می‌شود. یک مثلث تنها در حالتی بعد از جابه‌جایی مثلث باقی می‌ماند که هیچ کدام از یال‌های آن جابه‌جا نشود.

$$C_B(p_B) \simeq (1 - p_B)^3 C_B^{(0)} = (1 - p_B)^3 \frac{3(\frac{k_B}{2} - 1)}{2(k_B - 1)}.$$

حال ساخت لایه قرمز را آغاز می‌کنیم. در این لایه هر رأس جدید در گام t با احتمال زیر به رأس i متصل می‌شود:

$$\Pi(i, t) = (1 - \phi)\frac{k_i^{(R)(t)}}{\sum_j k_j^{(R)}(t)} + \phi\frac{k_i^{(B)(t)}}{\sum_j k_j^{(B)}(t)}$$

در شبکه، برای ساخت لایه قرمز، نوعی وزن برای رئوس در نظر گرفتیم. به طوری که به ازای $\phi = 0$ رئوس جدید اضافه شده، رأس‌های جدید می‌خواهند فقط به رأس‌هایی که درجه قرمز دارند متصل شوند. برای $\phi = 1$ نیز رئوس جدید فقط

به رأس‌هایی که درجه رأس آبی بالایی دارند متصل می‌شوند.

$$R(t) = \sum_j k_j^{(R)}(t) \quad , \quad B = \sum_j k_j^{(B)}$$

تعداد یال‌های آبی در این مرحله ثابت هستند. بعد از t گام داریم:

$$R(t) = 2m_R t$$

بنابراین،

$$\sum_j k_j^{(R)}(t) = R(t) = 2m_R t \quad , \quad \sum_j k_j^{(B)} = B = k_B N_B.$$

با استفاده از نظریه میدان میانگین به معادله دیفرانسیلی زیر می‌رسیم:

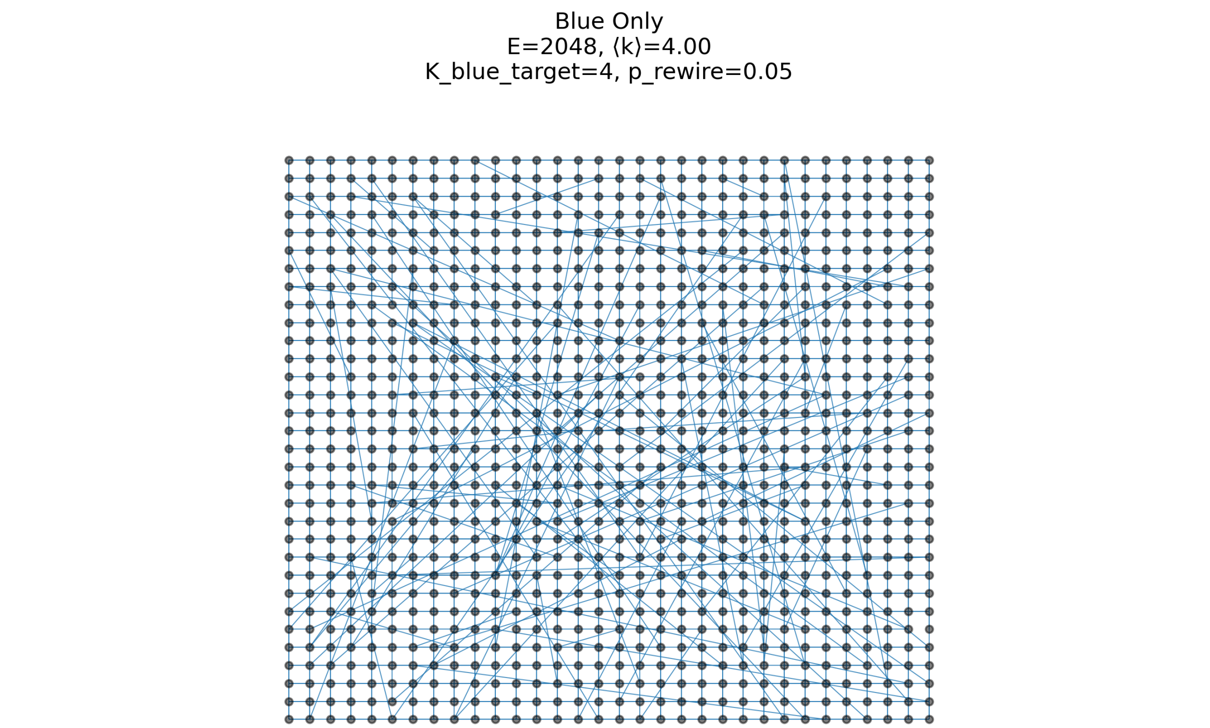
$$\frac{dk_i^{(R)}(t)}{dt} = m_R\Big[(1-\phi)\,\frac{k_i^{(R)}(t)}{2m_R t} \;+\; \phi\,\frac{k_i^{(B)}}{B}\Big], \qquad t \geq s$$

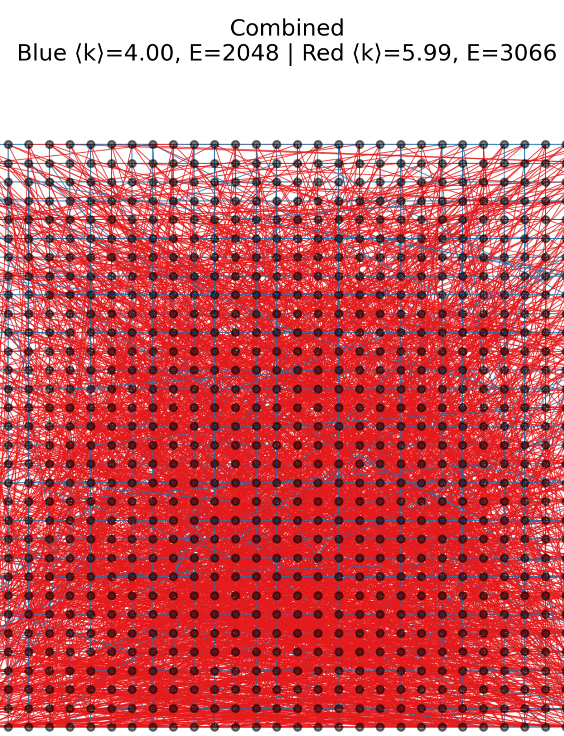
همچنین می‌دانیم که تابع توزیع درجه در لایه قرمز به صورت زیر است:

$$P_R(k) = (1-\mu)\frac{(m_R)^{1/\mu}}{k^{\gamma_R}} \quad ; \quad \gamma_R = 1 + \frac{1}{\mu} = 1 + \frac{1}{1-\phi/2}\ , \ 2 < \gamma_R < 3$$

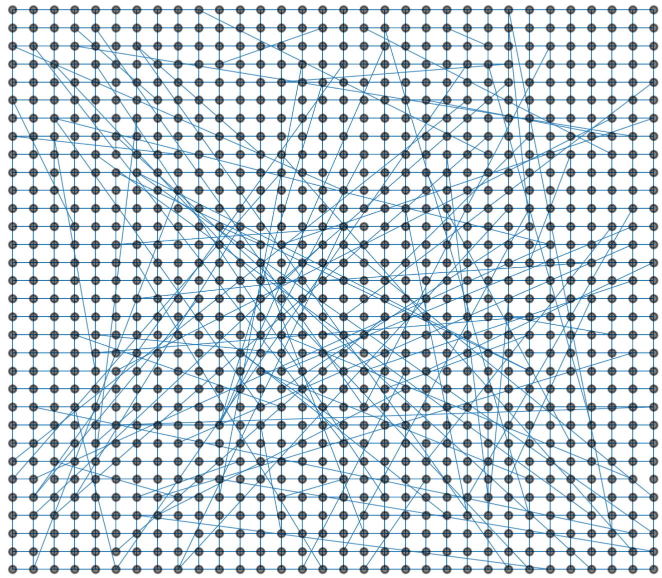
در حالتی که $\phi = 0$ ، $\mu = 1/2$ و $\gamma = 3$ و همان مدل باراباسی آلبرت ساده به دست می‌آید. در حالتی که $\phi \to 1$ دارای دنباله سنگین‌تر یا پهن‌تری است، زیرا $\gamma_R = 2$.

حال شبکه را با کمک پایتون می‌سازیم و نتایج را با روابط به دست آمده مقایسه می‌کنیم. سه مقدار متفاوت را برای میانگین درجه‌ها در نظر می‌گیریم. برای اینکه گراف را به صورت مربع دو بعدی در بیاوریم، تعداد رأس‌ها را برابر با 1024 در نظر می‌گیریم.

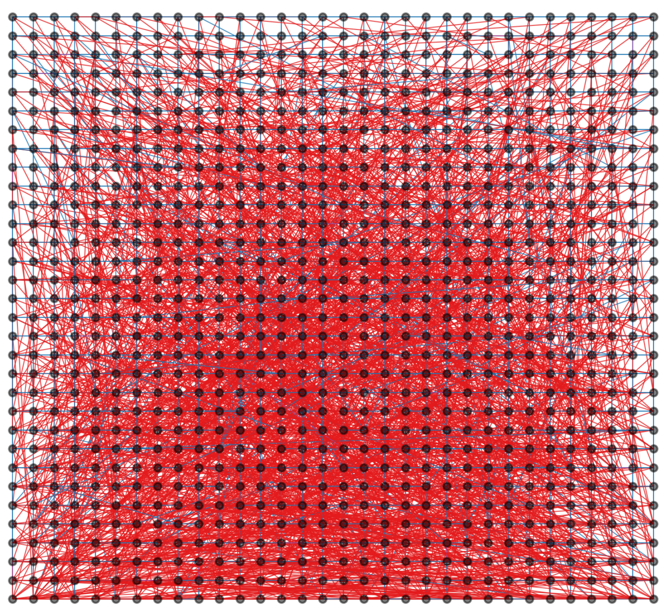

Blue Only
E=2048, ⟨k⟩=4.00
K_blue_target=4, p_rewire=0.05


Combined
Blue ⟨k⟩=4.00, E=2048 | Red ⟨k⟩=5.99, E=3066

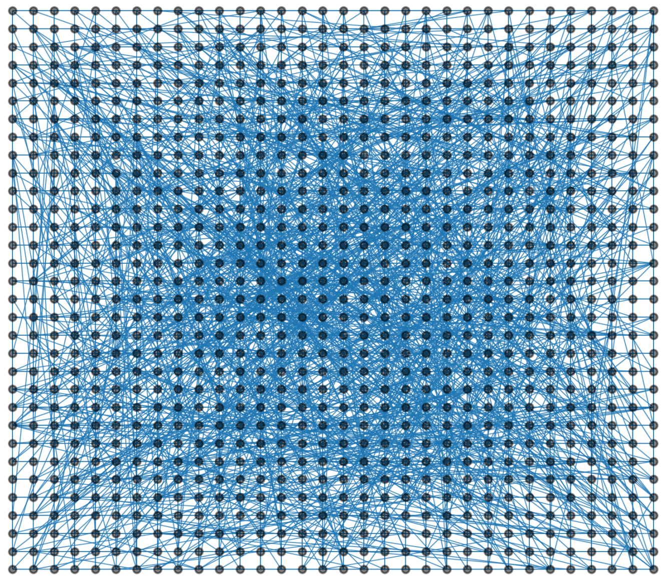
Blue Only
E=2048, ⟨k⟩=4.00
K_blue_target=4, p_rewire=0.05



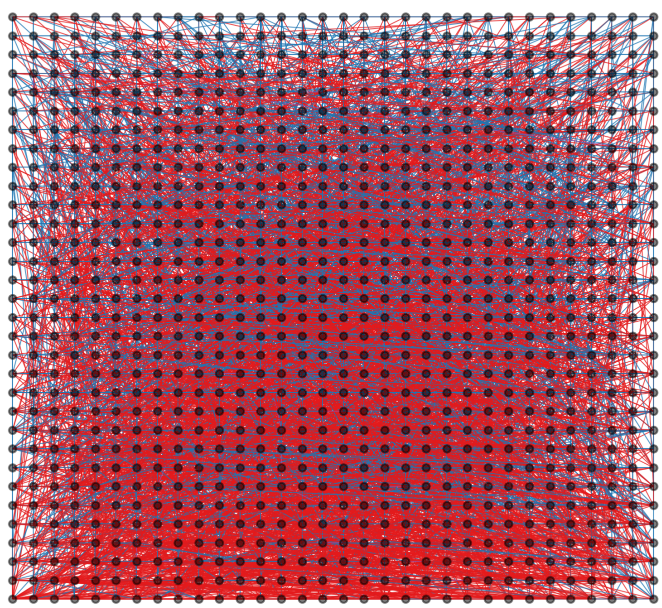
Combined
Blue ⟨k⟩=4.00, E=2048 | Red ⟨k⟩=4.00, E=2046



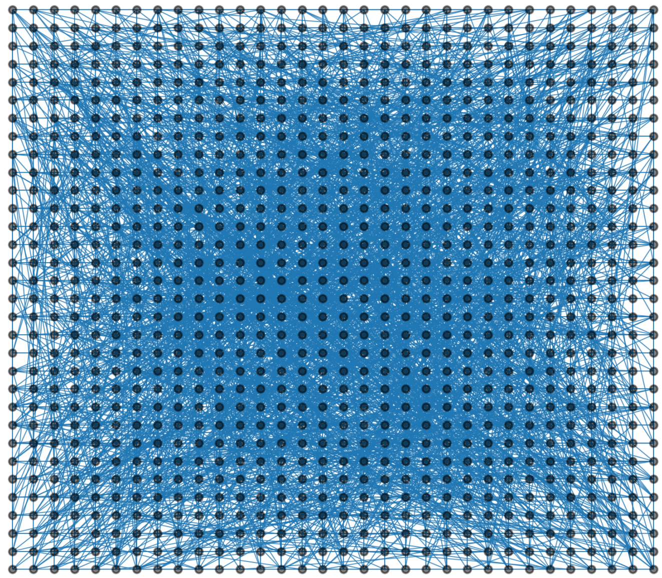
Blue Only
E=3072, ⟨k⟩=6.00
K_blue_target=6, p_rewire=0.05



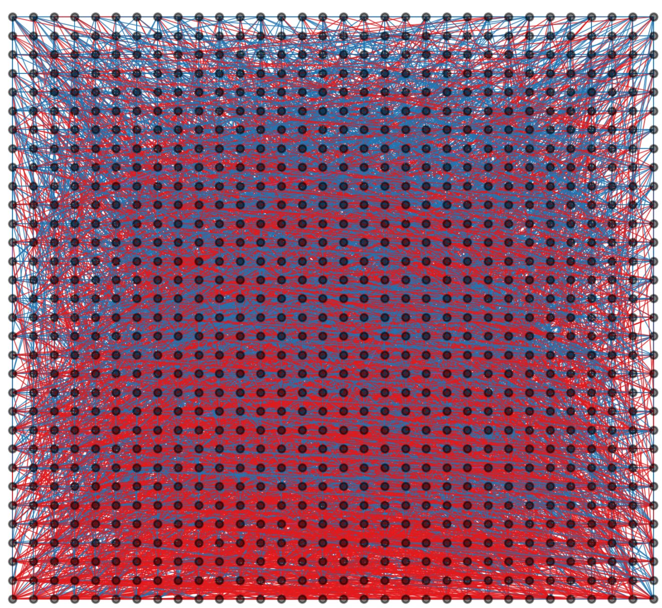
Combined
Blue ⟨k⟩=6.00, E=3072 | Red ⟨k⟩=5.99, E=3066



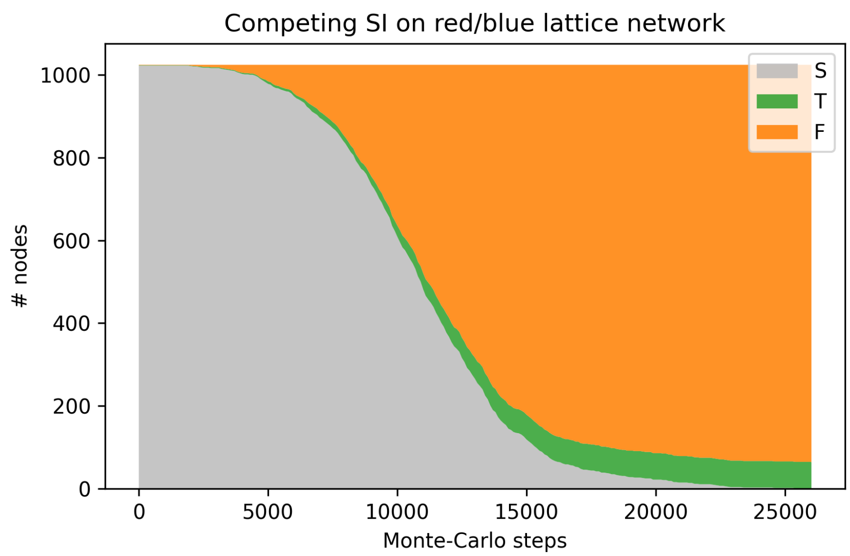
Blue Only
E=4096, ⟨k⟩=8.00
K_blue_target=8, p_rewire=0.05



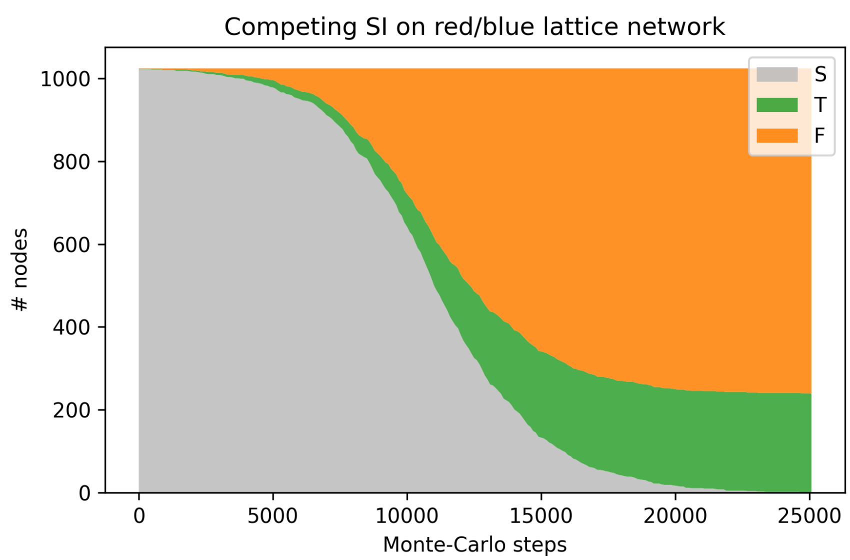
Combined
Blue ⟨k⟩=8.00, E=4096 | Red ⟨k⟩=5.99, E=3066



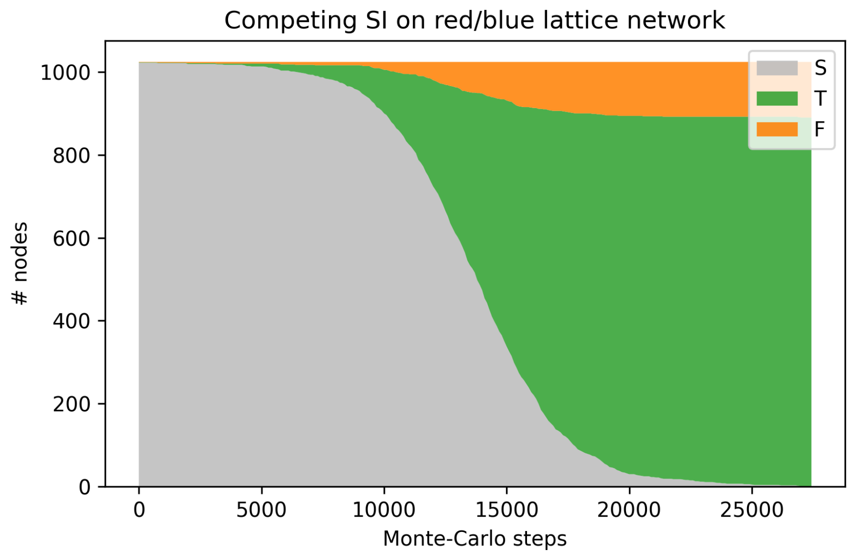
حال انتشار خبر درست و نادرست را در شبکه بررسی می‌کنیم. در این مرحله فرض می‌کنیم که آهنگ انتشار خبر درست و نادرست در کل شبکه یکسان است. ابتدا تمام رئوس را در حالت S قرار می‌دهیم. سپس به طور رندوم دو رأس را انتخاب کرده و در حالت F و T می‌گذاریم. در اولین مرحله β شیوع هر دو را برابر با 0.3 در نظر گرفته‌ایم. متاسفانه موفق نشدم gif درست شده از پروسه شیوع را در فایل قرار دهم. چند بار کد نوشته شده را برای مقدار ثابت β ران کرده و فایل gif هر کدام را با نام‌های $SI - animation - 0.3 - 1$، $SI - animation - 0.3 - 2$ و $SI - animation - 0.3 - 3$ می توان یافت.



شکل ۱: اولین اجرا، $\beta_T = \beta_F = 0.3$



شکل ۲: دومی اجرا، $\beta_T = \beta_F = 0.3$



شکل ۳: سومین اجرا، $\beta_T = \beta_F = 0.3$

از آن‌جایی که رئوس اولیه F و T تصادفی انتخاب می‌شوند، شرایط ویژگی و درجه آن‌ها در پروسه شیوع بسیار تاثیر گذار هستند. اینکه میزان شیوع F و T تا این حد متفاوت باشد شوکه کننده است! به همین دلیل باید جزئیات هر گراف را در سه اجرای بالا بررسی کنیم.

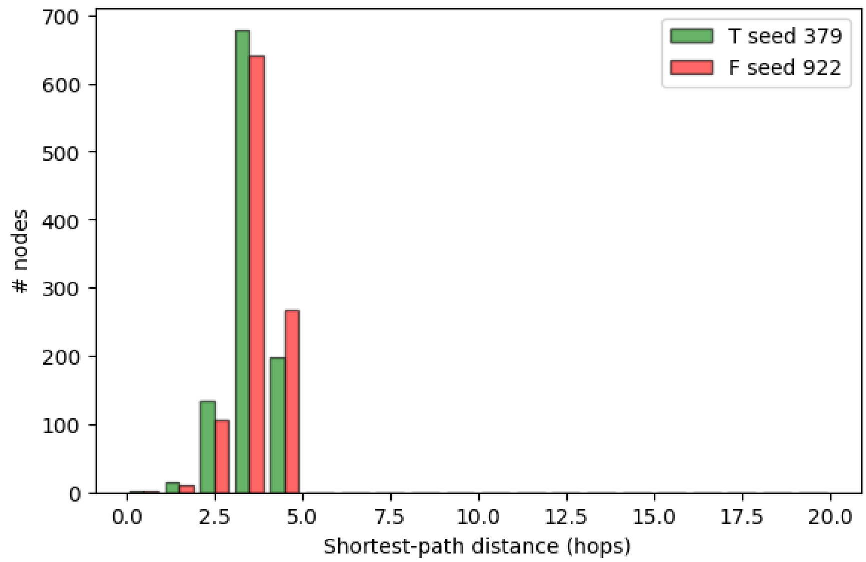
در نمودار اول، دو رأس اولیه دارای ویژگی‌های زیر هستند:

```
--- Node 379 ---
edges through RED  : 6
nbr  248  deg= 13
nbr  437  deg= 13
nbr  231  deg= 12
nbr  226  deg= 11
nbr  419  deg= 10
nbr  488  deg=  9
edges through BLUE : 8
nbr  507  deg= 16
nbr  574  deg= 12
nbr  339  deg= 11
nbr  347  deg= 11
nbr  378  deg= 11
nbr  411  deg= 11
nbr  848  deg= 10
nbr  380  deg=  9

--- Node 922 ---
edges through BLUE : 7
nbr  209  deg= 20
nbr  166  deg= 18
nbr  576  deg= 12
nbr  604  deg= 12
nbr  890  deg= 11
nbr  923  deg=  8
nbr  954  deg=  7
```

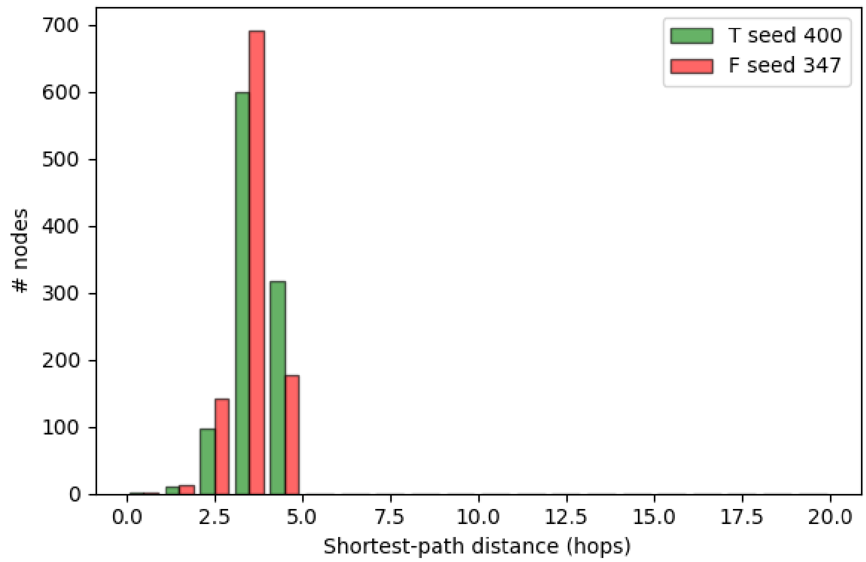
```
edges through RED   : 3
nbr   325   deg= 15
nbr   909   deg= 10
nbr   741   deg=  9
```

رأس 379 در زمان $t = 0$ در حالت T و رأس 922 در این زمان در حالت F قرار داده شده است. خروجی بالا درجه همسایه‌های رئوس اولیه را نشان می‌دهد. رأس اولیه F به رأسی با درجه 20 متصل است بنابراین منطقا انتظار داریم شیوع آن سریع‌تر باشد. برای تحلیل بهتر فاصله رئوس از یکدیگر را در هر گروه T و F بررسی می‌کنیم.



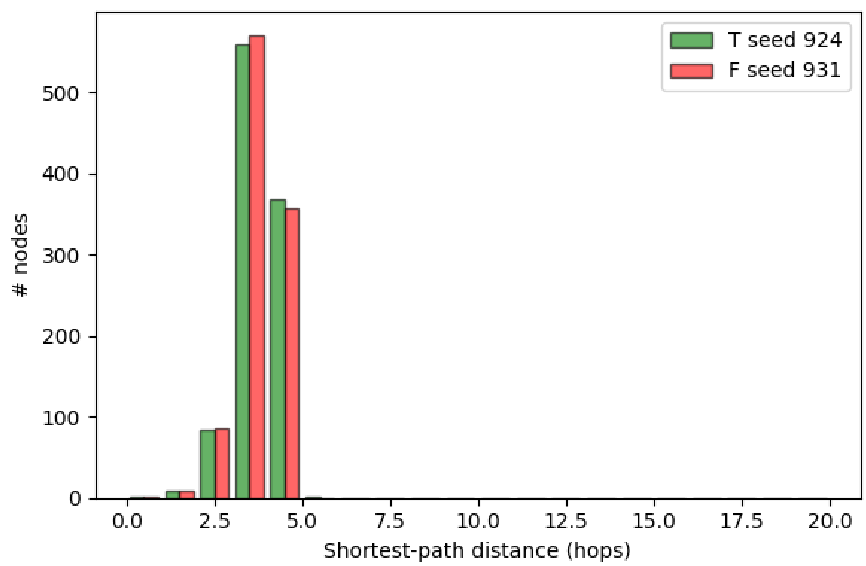
همان طور که مشاهده می‌شود، شعاع گراف حدود ۵ است. بنابراین هر رأس گراف ماکسیمم ۵ گام تا رأس دیگر فاصله دارد. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود، تعداد رأس‌های F که دارای فاصله بالاتر از 3 است بیشتر از T می‌باشد. بنابراین F دسترسی راحت‌تری به اکثر رأس‌های گراف داشته و در آخر تعداد رأس‌های F بیشتر هستند. پس غالب شدن F منطقی است.

برای دو اجرای دیگر نیز به همین صورت عمل می‌کنیم. ماکسیمم فاصله رأس‌ها در اجرای دوم به صورت زیر است.



طبق نمودار بالا و نمودار شیوع زمانی اجرای دوم، متوجه می‌شویم که F مرکزی‌تر است. همچنین تعداد رأس‌هایی که فاصله ماکسیمم بیشتر از 3 دارند برای F بیشتر است، یعنی در این اجرا نیز F دسترسی بیشتری به اکثر رأس‌های گراف دارد.

ماکسیمم فاصله رأس‌ها در اجرای سوم به صورت زیر است.



در این اجرا تقارن بیشتری در ماکسیمم فاصله بین F و T وجود دارد. حتی مرکزیت F بیشتر از T است! یک چیزی که در بررسی اجراها بسیار جالب است این است که تعداد یال‌های آبی رأس‌های اولیه در اینکه کدام خبر غالب می‌شود تاثیر بسیاری دارد، که منطقی هم هست! یال‌های آبی دارای ویژگی دنیای کوچک هستند و رئوسی که توسط این یال‌ها متصل می‌شوند همه به گونه‌ای با یکدیگر ارتباط دارند. T اولیه دارای ۸ یال آبی و ۳ یال قرمز است. در حالی که F اولیه دارای ۷ یال آبی و ۵ یال قرمز است. کسر یال‌های آبی در T بیشتر بوده و به همین دلیل شانس غالب شدن آن بیشتر است.

تا اینجا فقط بررسی حالت $\beta_F = \beta_T = 0.3$ بود. می‌توان مسئله را کمی پیچیده‌تر کرد. برای مثال حالتی که β در لایه آبی و قرمز یکی نباشد. در این صورت به جای دو پارامتر، مقدار چهار پارامتر را باید انتخاب کرده و تغییر دهیم تا ببینیم چه تاثیری دارد. در گزارش بعدی اینکار را انجام می‌دهم.