2022～2023学年第一学期期中考试试卷

□ A 卷

课程名称：高等数学　课程代码：

开课院系：数学科学学院　考试形式：闭卷

姓 名：钱忆　学 号：22307110266　专 业：自科

题 目	1	2	3	4	5	6	7	总分
得 分	24	14	11	7	8	8	2	84

（装订线内不要答题）

一、计算下列极限(每题6分，共24分)

24

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\arcsin 3x}\int_0^x(1+\tan t)^{\frac{1}{2t}}dt$。
2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+3^4+\cdots+(2n-1)^4}{2^4+4^4+\cdots+(2n)^4}$。
3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt[3]{1+3x+\frac{9x^2}{2}}}{x^3}$。
4. 求 $\dfrac{d^n}{dx^n}\ln\left(e^{\sin x}(x^2-1)\right)$。

(1) 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^{\frac{1}{2x}}}{3\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}(1+\tan x)^{\frac{1}{2x}}$

$\tan x \sim x$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}(1+x+o(x))^{\frac{1}{2x}}=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}}$

(2) $a_n=1^4+3^4+\cdots+(2n-1)^4$ 单增且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

$b_n=2^4+4^4+\cdots+(2n)^4$ 单增且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$

由Stolz定理 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(2n-1)^4}{(2n+2)^4-(2n)^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n^2+4n+1+4n^2-4n+1)(4n^2+4n+1-4n^2+4n-1)}{(4n^2+8n+4+4n^2)(4n^2+8n+4-4n^2)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n(4n^2+1)}{(2n+1)(4n^2+4n+2)}$ 同除 n^3 即可

$=1$

(2) ~~积分~~和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^4}{\sum_{k=1}^{n}(2k)^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^4\cdot\frac{2}{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2n}\right)^4\cdot\frac{2}{2n}}$

n等分 $\int_n^1 \frac{2k-1}{2n}$ 相当于 $\int_0^2 x^4dx=1$

$\int_n^1 \frac{2k}{2n}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+3x+\frac{9x^2}{2})^{\frac{1}{3}}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ ~~…~~

$-1-\frac{1}{3}(3x+\frac{9x^2}{2})-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(-\frac{2}{3})(3x+\frac{9x^2}{2})^2-\frac{\frac{1}{3}\times(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{6}(3x+\frac{9x^2}{2})^3+o(3x+\frac{9x^2}{2})$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{3}{2}$

(4) $f(x)=\ln[e^{\sin x}(x^2-1)]=\sin x+\ln(x^2-1)=\sin x+\ln(x-1)+\ln(x+1)$. $(x>1)$.

① $g(x)=\sin x$　$g'(x)=\cos x$　$g''(x)=-\sin x$　$g'''(x)=-\cos x$.

$\therefore g^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

② $\varphi(x)=\ln(x-1)$　$\varphi'(x)=\frac{1}{x-1}$　$\varphi''(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$　$\varphi'''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$

$\therefore \varphi^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{(x-1)^n}=\dfrac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(x-1)^n}$

同理 $k(x)=\ln(x+1)$，$k^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(x+1)^n}$.

综上：原式 $=\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)=f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)+\varphi^{(n)}(x)+k^{(n)}(x)$

$=\sin(x+\frac{n\pi}{2})+(n-1)!(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{(x-1)^n}+\dfrac{1}{(x+1)^n}\right)$.

二、计算下列各题(共14分)

1. （8分）已知函数$y=y(x)$由参数方程$x=\sin t+t,\ y=t+\ln t$, $(t>0)$所确定，试求$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$。

2. （6分）已知函数$y=y(x)$由方程$e^y=x^{2x+y}$ $(x>0)$所确定，试求$\frac{dy}{dx}$。

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{t}}{1+\cos t}=\frac{t+1}{t(1+\cos t)}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-\frac{1}{t^2}(1+\cos t)+\cancel{\sin t}(1+\frac{1}{t})\sin t}{(1+\cos t)^2}}{1+\cos t}$

$=\frac{(t^2+t)\sin t-(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)^3}$

2. ∵ $x>0$ 则 $\ln x$ 存在
∴ 两侧同时取ln. 得 $y=(2x+y)\ln x$ $(x>0)$.

两侧同时对x求导 $y'=(2+y')\ln x+\frac{1}{x}(2x+y)$

整理得 $y'=\frac{2\ln x+2+\frac{y}{x}}{1-\ln x}$

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{2\ln x+2+\frac{y}{x}}{1-\ln x}=\frac{2x\ln x+2x+y}{x(1-\ln x)}$

三、计算下列各题(共14分)

1. （6分）求曲线$y^2=2x+2y-1$在点$(2,3)$处的切线方程。

2. （8分）求$\arccos x$的$2n$阶带Peano余项的Maclaurin展开式。

1. 把$(2,3)$分别代入左右两侧

$y^2=9$. $2x+2y-1=4+6-1=9$

即$(2,3)$在曲线上.

对曲线两侧同时对x求导： $2y\cdot y'=2+2y'$

代入 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 得 $y'=\frac{1}{2}$

∴ 切线 $y=\frac{1}{2}(x-2)+3$ $y=\frac{1}{2}x+2$.

2. $f(x)=\arccos x$ $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

对 $g(t)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 展开式求为

$g(t)=1+\cancel{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}}(-\frac{1}{2})t+\frac{(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})}{2!}t^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}t^3+\cdots+o(t$

$=1-\frac{1}{2}t+\frac{3}{16}t^2+\cdots+\frac{(2n-1)!}{2^n n!}(-1)^n t^n+o(t^n)$

∴ $f'(x)=-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{k!\,2^k}(-1)^k(-x^2)^k+o(x^{2n})$

$=-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!}{2^k k!}x^{2k}+o(x^{2n})$

积分并整理得

$f(x)=\int_0^x f'(t)dt$

$\ldots \sum^{n} (2k-1)!! \ldots \frac{x^{2k+1}}{\ldots}+o(x^{2n+1})-x$

四、计算下列积分(每题8分，共24分)

1. $\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$。

2. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$。

3. $\int_0^1 x f(x) dx$, 其中$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$。

1. 令 $x=\sin t$ ∴ $\arcsin x = t$

$\therefore$ 原式 $= \int \frac{\sin^2 t \cdot t \, d\sin t}{\cos t}$

$= \int t\sin^2 t \, dt = \int t \, d\cot t$

$\cancel{= \frac{1}{2}t^2\sin^2 t - \int t^2 2\cos t \sin t \, dt}$

$\cancel{= \frac{1}{2}t^2\sin^2 t - \int \frac{1}{2}t^2 \sin 2t \, dt}$

$\cancel{= \frac{1}{2}t^2\sin^2 t - \frac{1}{6}t^3\sin 2t + \frac{1}{6}\int t^3 d\sin 2t}$

~~1. 原式 $= \int x^2 \arcsin x \, d\arcsin x = \int x^2 d(\arcsin x)^2 \cdot \frac{1}{2}$~~

~~$= \frac{1}{2}x^2(\arcsin x)^2 - \frac{1}{2}\int(\arcsin x)^2 dx$~~

$= -t\cot t + \int \cot t \, dt$

$= -t\cot t$

~~原式 $= \int -\frac{\arcsin x}{x} d\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{-x} + \int \sqrt{1-x^2} \, d\frac{\arcsin x}{x}$~~

~~令 $t = \sin x$ ∴ 原式 $= \int \sin^2 x$~~

2. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \xlongequal[x=\frac{1-t^2}{t^2+1}]{t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \int t \cdot \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{-4t^2 dt}{(t^2+1)^2}$

$\xlongequal[a=\arctan t]{t=\tan a} \int \frac{-4\tan^2 a \sec^2 a \, da}{\sec^4 a} = -4\int \frac{\tan^2 a \, da}{\sec^2 a} = -4\int \frac{1+\tan^2 a - 1}{1+\tan^2 a} da$

$= -4a + 4\int \frac{da}{1+\tan^2 a} = -4a + 4\int \cos^2 a \, da = -4a + 2a + \int \cos 2a \, d2a$

$= -2a + \int \sin 2a + C = -2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sin 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$

3. $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) \frac{1}{2} dx^2 = -\cos t \Big|_0^1 = 1 - \cos 1$

8

五、(8分) 求常数a, b使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+\sin x+1} + \arctan x - ax - b\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}.$$

① $\lim_{x\to0^+} \frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\cos^3 x\sqrt{\tan\sin x}}{\sqrt{\sin\tan x}} = \lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\tan\sin x}{\sin\tan x}}$

$x\to0$时 利用 $\sin x \sim x \quad \tan x \sim x$

原式 $= 1$.

② 等式上下同除x 整理得 $a = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+\sin x+1} + \frac{\arctan x}{x}\right)$

又有 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{x} = 0$

$\therefore a = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+\sin x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+A}$

$A = \sin x + 1 \in [0, 2]$ ∴ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+A} = 1$.

∴ $a = 1$.

③ $b+1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+\sin x+1} + \arctan x - x\right) = \frac{\pi}{2} + \lim_{x\to+\infty}\frac{-x\sin x - x}{x^2+\sin x+1} =$

∴ $b = \frac{\pi}{2} - 1$

综上所述 $a=1 \quad b=\frac{\pi}{2}-1$

8

六、(8分)设$f(x)=\int_0^3 t|x-t|dt,\ x\in[0,4]$。试求函数$f(x)$的值域（要求说明理由）。

(A) ① $x\geq t$ 时 $f(x)=\int_0^3 t(x-t)dt = \frac{1}{2}xt^2\Big|_{t=0}^{t=3} - \frac{1}{3}t^3\Big|_0^3$

$= \frac{9}{2}x - 9$

② $x<t$ 时 $f(x) = 9-\frac{9}{2}x$

(B)

① $x\in[3,4]$ $x\geq t$ $\therefore f(x)=\frac{9}{2}x-9$

$\therefore f(x)$ 值域 $[\frac{9}{2}, 9]$

② $x\in[0,3)$ $f(x) = \cancel{\frac{9}{2}x} \int_x^3 (t^2-xt)dt + \int_0^x (-t^2+xt)dt$

$= \frac{1}{2}xt^2\Big|_{t=x}^{t=3} - \frac{1}{3}t^3\Big|_x^3$

$-\frac{1}{2}xt^2\Big|_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{3}t^3\Big|_0^x$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x + 9$

$f'(x) = x^2 - \frac{9}{2}$ $x_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 先减再增

$f(x_0) = 9 - \frac{9}{\sqrt{2}} + 9$ $f(0)=9$ $f(3)=\frac{9}{2}$

$\therefore f(x)$ 值域为 $[9-\frac{9\sqrt{2}}{2}, 9]$

2

七、(8分) 设$f(x)$于$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$,试证明如下两个论断:

(1)若$\int_a^x f(t)dt\leq 0,\ x\in(a,b)$,则$f(x)\equiv 0$。

(2)若$f(x)\leq\int_a^x f(t)dt,\ x\in(a,b)$,则$f(x)\equiv 0$。

1) ~~设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 则 $F(x)=\frac{|F(x)|+F(x)}{2}+\frac{-|F(x)|+F(x)}{2}$.~~

~~又 $\because F(x)\leq 0$~~

~~$\therefore F(x)=\frac{-|F(x)|+F(x)}{2}$.~~

$f(x)\geq 0 \Rightarrow \int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x 0\,dt = 0$

又 $\int_a^x f(t)dt\leq 0$

$\left(\int_a^x f(t)dt \equiv 0\right)$

$\Downarrow$

$f(x)\equiv 0$

对 $f(x)\geq 0$ 分两种情况

① $f(x)\equiv 0$ $\int_a^x f(t)dt = 0$.

② 若 $\exists x_0\in[a,b]$, $f(x_0)>0$

此时有 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\therefore \exists\delta>0$ 使当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $f(x)>0$

$\therefore \int_a^x f(t)dt = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)dt + \int M \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)dt > 0$

即 $\int_a^x f(t)dt > 0$

由题意 当 $\int_a^x f(t)dt\leq 0$ 时 只有情况①满足 $\therefore f(x)\equiv 0$

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$

$F'(x)\leq F(x) \Rightarrow F(x)=0$

设 $g(x)=\frac{F(x)}{e^x}$ $g'(x)=\frac{F'(x)-F(x)}{e^x}\leq 0$