复旦大学计算机科学技术学院

2021-2022 学年第一学期《线性代数》期中考试试卷答案

一.(10') 证明矩阵乘法的结合律，即 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$。

证明：设矩阵 $A = [a_{ik}]_{m\times l}$，$B = [b_{kt}]_{l\times n}$，和 $C = [c_{tj}]_{n\times r}$
先计算左边

$$[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} (AB)_{it} c_{tj} = \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kt} \right) c_{tj} = \sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \left(a_{ik} b_{kt} c_{tj} \right), \tag{1}$$

再计算右边

$$[\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_{ij} = \sum_{k'=1}^{l} a_{ik'} (BC)_{k'j} = \sum_{k'=1}^{l} a_{ik'} \left(\sum_{t'=1}^{n} b_{k't'} c_{t'j} \right) = \sum_{k'=1}^{l} \sum_{t'=1}^{n} \left(a_{ik'} b_{k't'} c_{t'j} \right). \tag{2}$$

比较左右两边，观察求和顺序，可知

$$\sum_{k'=1}^{l} \sum_{t'=1}^{n} \left(a_{ik'} b_{k't'} c_{t'j} \right) = \sum_{t'=1}^{n} \sum_{k'=1}^{l} \left(a_{ik'} b_{k't'} c_{t'j} \right) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \left(a_{ik} b_{kt} c_{tj} \right), \tag{3}$$

所以将方程 1, 2和 3放在一起，可以得到

$$[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_{ij} = [\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_{ij}. \tag{4}$$

即 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ 命题得证。
提醒：矩阵乘法是矩阵最重要的基础操作之一，要严格从定义出发去以避免循环证明。

二.(10') 用矩阵的初等变换求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的秩，并写出行向量组的一个极大线性无关组。

解：进行简单的行初等变换，可得

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&5&-3&0\\1&0&-1&1&1\\0&1&3&-2&-2\\2&1&1&1&0\\3&-1&2&-1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&8&-6&3\\1&0&-1&1&1\\0&1&3&-2&-2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{5}$$

第一、二、三、四行构成行向量组的一个极大线性无关组:
$\boldsymbol{\alpha_1}=(3,0,5,-3,0),\boldsymbol{\alpha_2}=(1,0,-1,1,1)$,
$\boldsymbol{\alpha_3}=(0,1,3,-2,-2),\boldsymbol{\alpha_4}=(2,1,1,1,0)$.
提醒：寻找的是矩阵的行向量组构成的极大线性无关组，所以是在行向量里面进行挑选而非进行初等变换后的结果。此外，因为初等变换的不唯一，所以极大线性无关组也不唯一。

三.(10') 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&3&-2\\-3&-1&1\end{bmatrix}$，判断 $\mathbf{A}$ 是否可逆。若可逆，求出 $\mathbf{A}^{-1}$; 否则求伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$.

解：$\because|\mathbf{A}|=1\times(3-2)-2\times(-2+1)-3\times(4-3)=0,\therefore\mathbf{A}$ 不可逆。
另外，$\mathbf{A}$ 的伴随矩阵为

$$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}1&1&1\\4&4&4\\7&7&7\end{bmatrix}. \tag{6}$$

提醒：M_{ij} 为将 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列划去后所得的 $n-1$ 阶子矩阵的行列式，而元素 a_{ij} 的代数余子式则为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。另外，请务必注意伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 的第 i 行第 j 列的元素为 A_{ji}。

四.(10') 已知 $a^2\neq b^2$, 证明下列方程组有唯一解，并求其解。

$$\begin{cases}ax_1 & & + & & & bx_{2n} & = & 1\\ & ax_2 & + & & bx_{2n-1} & & = & 1\\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ & & ax_n + & bx_{n+1} & & & = & 1\\ & & bx_n + & ax_{n+1} & & & = & 1\\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ & bx_2 & + & & ax_{2n-1} & & = & 1\\ bx_1 & & + & & & ax_{2n} & = & 1\end{cases}$$

解：若要证明该非齐次线性方程组有唯一解，只需证明系数矩阵满秩或行列式不为零。分析系数矩阵发现需要对 a 和 b 的取值进行讨论，因为 $a^2 \neq b^2$，所以 a 和 b 不能同时为零。故分三种情况进行讨论：

(1) 当 $a \neq 0, b = 0$ 时，易知方程组有唯一解 $x_i = \frac{1}{a}$。

(2) 当 $a = 0, b \neq 0$ 时，易知方程组有唯一解 $x_i = \frac{1}{b}$。

(3) 当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时，需要对系数矩阵进行分析，可直接进行行列初等变换

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & & & b & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & & a & b & & & \\ & & b & a & & & \\ & & \cdots & \cdots & & & \\ & b & & & & a & \\ b & & & & & & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & a & b & & \\ & & 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & 0 & & & \frac{a^2-b^2}{a} & \\ 0 & & & & & \frac{a^2-b^2}{a} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

其行列式 $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n \neq 0$. 故方程组有唯一解。

分别考虑第 i 个和第 $2n + 1 - i$ 个方程对 $(i = 1, ..., n)$，可得如下方程组

$$\begin{cases} ax_i + bx_{2n+1-i} = 1, \\ bx_i + ax_{2n+1-i} = 1. \end{cases} \tag{8}$$

解之可得 $x_i = x_{2n+1-i} = \frac{1}{a+b}$. 整理结果可得

$$x_i = \frac{1}{a+b}, \quad i = 1, \ ..., 2n. \tag{9}$$

提醒：请多观察矩阵内部的结构，并注意分类讨论。

五.(10') 试证多项式组 $1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 也是线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一组基底。并求由基底 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 到基底 $1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 的过渡矩阵。($\mathbb{R}[x]_{n+1}$:$\mathbb{R}$ 上次数小于等于 n 的一元多项式的集合。)

解：由二项式定理可知，对任意 $k \in \{0,1,2,\cdots,n\}$ 有

$$(x-1)^k = (-1)^k + C_k^1(-1)^{k-1}x + C_k^2(-1)^{k-2}x^2 + \cdots + C_k^{k-1}(-1)x^{k-1} + x^k$$

$$= (1, x, x^2, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)\begin{bmatrix} (-1)^k \\ C_k^1(-1)^{k-1} \\ C_k^2(-1)^{k-2} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0, \end{bmatrix} \tag{10}$$

则

$$(1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n) = (1, x, x^2, \cdots, x^n)\mathbf{P}, \tag{11}$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & C_n^1(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_n^2(-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} . \tag{12}$$

由于 $\det(\mathbf{P}) = 1 \neq 0$ 且 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 是线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一组基底，所以 $1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 也是线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一组基底。

提醒：主要考察线性空间的概念，需要用到二项式定理。

六.(10') 已知 $\mathbb{R}^3$ 中线性变换 $\mathbf{T}$ 在基底 $\{\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta_3}\}$ 下的表示矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\eta_1} = (-1,1,1)^T, \boldsymbol{\eta_2} = (1,0,-1)^T, \boldsymbol{\eta_3} = (0,1,1)^T$。求 $\mathbf{T}$ 在自然基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的表示矩阵。

解：已知

$$T[\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta_3}] = [\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta_3}]\boldsymbol{P}. \tag{13}$$

设所求矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$，有

$$T[\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}] = [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]\boldsymbol{P}_1, \tag{14}$$

由

$$[\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta_3}] = [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]\boldsymbol{A}, \tag{15}$$

于是

$$\begin{aligned} T[\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta_3}] &= [\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta_3}]\boldsymbol{P}, \\ T[\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]\boldsymbol{A} &= [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]\boldsymbol{AP}, \\ T[\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}] &= [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]\boldsymbol{APA}^{-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

故有

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{APA}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

提醒：主要考察不同基之间的过渡矩阵。

七.(10') 证明：若 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$r(\mathbf{A}) = r$，则存在 $m \times r$ 矩阵 $\mathbf{B}$, $r \times n$ 矩阵 $\mathbf{C}$，其中 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{C}) = r$，使得 $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$。

证明：因为 $r(\mathbf{A}) = r$，经过一系列行列初等变换将其化为标准形，所以存在 m 阶可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = \mathbf{U}, \tag{18}$$

于是 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{Q}^{-1}$. 更进一步，可得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}. \tag{19}$$

令 $\mathbf{B}_{m\times r} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{C}_{r\times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}$，则两个等式右边分别为 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的标准形。此时，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的秩均为 r，且 $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$，命题得证。
提醒：主要考察矩阵秩的定义。

八.(10') 设非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的系数矩阵的秩为 $r, \boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \ldots, \boldsymbol{\eta_{n-r+1}}$ 是它的 $n - r + 1$ 个线性无关的解。
试证它的任一解可表示为：

$$\mathbf{x} = k_1\boldsymbol{\eta_1} + k_2\boldsymbol{\eta_2} + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta_{n-r+1}}$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$。

解：取向量组

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1, \tag{20}$$

下证该向量组是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系.
由

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})\xrightarrow[c_j-c_i]{j=2,\cdots n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1), \tag{21}$$

已知 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})$ 线性无关，初等变换不改变向量组的线性相关性，所以 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$ 线性无关。从而 $(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1)$ 线性无关，又注意到该向量组的向量个数为 $n-r$, 故它是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一组基础解系。则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\boldsymbol{x}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_3(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1), \tag{22}$$

整理得

$$\boldsymbol{x}=(1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}, \tag{23}$$

记 $k_1=1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1}$，则 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$，同时

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}. \tag{24}$$

提醒：主要考察非齐次线性方程组解的结构。

九.(10') 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

（提示：利用范德蒙德行列式的结果）

解：把行列式上下翻转：从第 $n+1$ 行开始，第 $n+1$ 行经过 n 次相邻对换到第 1 行；新的第 $n+1$ 行（原式中的第 n 行）经次对换到第 2 行。重复此

过程，经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}. \tag{25}$$

此为 n+1 阶范德蒙德行列式。对照范德蒙德行列式的写法，记 $a=x_1, a-1=x_2,\cdots,a-n=x_{n+1}$. 即

$$x_i=a-(i-1), x_j=a-(j-1). \tag{26}$$

所以

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geq i>j\geq 1} -(i-j) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} \times \prod_{n+1\geq i>j\geq 1}(i-j) \\ &= \prod_{n+1\geq i>j\geq 1}(i-j) \end{aligned} \tag{27}$$

提醒：主要考察范德蒙德行列式和行列式的计算。

十.(10') 设 $\{\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n},\}$ 是 n 维空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，又 $\boldsymbol{V}$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha_{n+1}}$ 在这组基下的坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$全不为零。证明 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_{n+1}}$ 中任意 n 个向量必定构成 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，并求 α_1 在基 $\{\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n+1}}\}$ 下的坐标。

解：只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关。若这 n 个向量不包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ ，那么结论显然成立；若包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ ，不失一般性考虑 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$。设

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathbf{0}, \tag{28}$$

代入 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，则有

$$k_{n+1}x_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_{n+1}x_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{n+1}x_n+k_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}. \tag{29}$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 是 n 维空间的一组基，所以

$$\left\{\begin{array}{ccc} k_{n+1}x_1 & = & 0, \\ k_{n+1}x_2+k_2 & = & 0, \\ & \vdots & \\ k_{n+1}x_n+k_n & = & 0. \end{array}\right. \tag{30}$$

因为 $x_i\neq 0$ ，所以 $k_2=k_3=\cdots=k_{n+1}=0$ 。故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性无关，结论成立。设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n+1}}\}$ 下的坐标为 $(y_2,y_3,\cdots,y_{n+1})$。即有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+y_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \\ &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+y_{n+1}(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= x_1y_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_1+(y_2+x_2y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(y_n+x_ny_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_n) \end{aligned} \tag{31}$$

于是

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1y_{n+1} & = & 1, \\ x_2y_{n+1}+y_2 & = & 0, \\ & \vdots & \\ x_ny_{n+1}+y_n & = & 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y_{n+1} & = & \frac{1}{x_1}, \\ y_2 & = & -\frac{x_2}{x_1}, \\ & \vdots & \\ y_n & = & -\frac{x_n}{x_1}. \end{array}\right. \tag{32}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_{n+1}}\}$ 下的坐标为 $(-\frac{x_2}{x_1},-\frac{x_3}{x_1},\cdots,-\frac{x_n}{x_1},\frac{1}{x_1})$ 。
提醒：主要考察线性空间和线性变换的基本定义。