（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2025～2026 学年第一学期期中考试试卷

（答案）

课程名称：____数学分析 BI__________ 课程代码：__MATH10012.02__

开课院系：____数学科学学院__________ 考试形式：闭卷

姓　名：________________ 学　号：________________ 专　业：________________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	总　分
得　分								

（以下为试卷正文）

注意：答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. 计算下列各题（每小题5分，共40分）

   1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$。

   [解]：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$$

   2) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right)\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{1-\cos x^{\frac{3}{4}}}$。

   [解]：

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right)\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{1-\cos x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot\frac{x}{3}}{\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3}$$

3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$

[解]:

$$\lim_{x\to 1-}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}=\lim_{x\to 1-}e^{\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{\frac{-1}{1-x}}}=e$$

4) 设函数$f(x)$在x_0处连续，并且存在$A\in R$使得$A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$，问$f(x)$在$x_0$处是否可导？如果可导，请证明，如果不一定可导，请举出反例。

[解]:

不一定可导。（3 分）

反例：$f(x)=|x|$.

取$x_0=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0-\Delta x|}{\Delta x}=0$

但是$|x|$在$x_0=0$处不可导.

5) 求由方程$e^{xy}+x^2y-1=0$确定的隐函数$y=y(x)$的导函数$y'(x)$。

[解]:

$(e^{xy}+x^2y-1)'=0$

$(y+xy')e^{xy}+2xy+x^2y'=0$

$$y'(x)=-\frac{y\,e^{xy}+2xy}{x\,e^{xy}+x^2}=-\frac{y(1+2x-x^2y)}{x(1+x-x^2y)}$$

6) 求曲线$\begin{cases}x=e^t cost\\ y=e^t sint\end{cases}$在$t=\frac{\pi}{6}$处的切线方程。

[解]：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{e^t\sin t+e^t\cos t}{e^t\cos t-e^t\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}$$

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}},y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}$$

切线方程：

$$y=(2+\sqrt{3})x-(1+\sqrt{3})e^{\frac{\pi}{6}}$$

7) 求函数$f(x)=\frac{\ln x}{x^\alpha}$的单调区间(其中$\alpha>0$)。

[解]：

$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$

$$f'(x)=(x^{-\alpha}\ln x)'=-\alpha x^{-\alpha-1}\ln x+x^{-\alpha-1}=x^{-\alpha-1}(-\alpha\ln x+1)$$

驻点：$x=e^{\frac{1}{\alpha}}$

	$\left(0,e^{\frac{1}{\alpha}}\right)$	$\left(e^{\frac{1}{\alpha}},+\infty\right)$
$f'(x)$	>0	<0
$f(x)$	单调增加	单调减少

8) 判断函数$arctan\left(\frac{1}{1+x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$的间断点的类型（要说明原因）。

[解]：

$arctan\left(\frac{1}{1+x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$的定义域$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$

$-1,0$是间断点. （2 分）

$$\lim_{x\to-1-}arctan\left(\frac{1}{1+x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=-\frac{\pi}{2},\lim_{x\to-1+}arctan\left(\frac{1}{1+x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

所以$x=-1$是函数的第一类间断点（也可以写跳跃间断点）.

$$\lim_{x\to0-}arctan\left(\frac{1}{1+x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0+}arctan\left(\frac{1}{1+x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=0$$

所以$x=0$是函数的第一类间断点（也可以写可去间断点）.

（装订线内不要答题）

2. (10 分) 设当$x \to 0$时，$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3\ln(1+x)} \sim \alpha x^{\beta}$，求$\alpha,\beta$的值

[解]:

当$x \to 0$时

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt[3]{1+3\ln(1+x)} = 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2} \cdot 9\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

所以

$$\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3\ln(1+x)} = x^2 + o(x^2), x \to 0$$

得

$$\alpha = 1, \beta = 2$$

3. (10 分) 设$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, (\alpha > 1)$。(1) 求导函数$f'(x)$；(2) 确定$\alpha$的取值范围，使得$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

[解]:

(1) 当$x \in (-\infty, 0)$时，令$u = |x| = -x$，则$(|x|^{\alpha})' = (u^{\alpha})' \cdot (-x)' = -\alpha|x|^{\alpha-1}$

$$f'(x) = (|x|^{\alpha})'\sin\frac{1}{x} + |x|^{\alpha}\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = -\alpha|x|^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - |x|^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$$

当$x \in (0,+\infty)$时

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$$

当$x = 0$时，由于$\alpha > 1$，得

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x} = 0 \text{ (2 分)}$$

所以

$$f'(x) = \begin{cases} -\alpha|x|^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - |x|^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

(2) 由于当$1 < \alpha \le 2$时，$f'(0+)$与$f'(0-)$都不存在，所以$f'(x)$在$x = 0$处不连续，而当$\alpha > 2$时$f'(0+) = f'(0-) = f'(0)$，并且当$x \in (-\infty, 0)$和$x \in (0,+\infty)$时$f'(x)$都是初等函数，因此当$\alpha > 2$时$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

4. (10 分) 设数列$\{x_n\}$是一有界数列，如果$\{x_n\}$的所有收敛子列都有相同的极限，则$\{x_n\}$收敛。这个命题是否正确，为什么？

[解]:

正确。

（用反证法来证明其正确性.）

【方法一】

令$A \in R$为某有界数列$\{x_n\}$的所有收敛子列的极限， 假设此数列不收敛。则

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in Z^+, \exists n > N: |x_n - A| \geq \varepsilon_0$$

取$N_1 = 1, \exists n_1 > N_1: \left|x_{n_1} - A\right| \geq \varepsilon_0$

取$N_2 = n_1, \exists n_2 > N_2: \left|x_{n_2} - A\right| \geq \varepsilon_0$

……

取$N_k = n_{k-1}, \exists n_k > N_k: \left|x_{n_k} - A\right| \geq \varepsilon_0$

由此可得$\{x_n\}$的一个子列$\left\{x_{n_k}\right\}$，$\forall k \in Z^+: \left|x_{n_k} - A\right| \geq \varepsilon_0$.

由$\{x_n\}$的有界性知$\left\{x_{n_k}\right\}$是有界数列，所以$\left\{x_{n_k}\right\}$存在收敛子列$\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$，令$\lim\limits_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = B$.

对于上述$\varepsilon_0, \exists L \in Z^+, \left|x_{n_{k_L}} - B\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

$$|B - A| = \left|B - x_{n_{k_L}} + x_{n_{k_L}} - A\right| \geq \left|x_{n_{k_L}} - A\right| - \left|B - x_{n_{k_L}}\right| > \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$$

这与$\{x_n\}$的所有收敛子列都有相同极限矛盾，所以“数列$\{x_n\}$不收敛”的假设是错误的。

所以此命题正确。

【方法二】

假设满足上述条件的的某个有界数列$\{x_n\}$不收敛，则根据 Cauchy 收敛原理可得:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in Z^+, \exists n, m > N: |x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$$

取$N_1 = 1, \exists n_1, m_1 > N_1: \left|x_{n_1} - x_{m_1}\right| \geq \varepsilon_0$

取$N_2 = \max(n_1, m_1), \exists n_2, m_2 > N_2: \left|x_{n_2} - x_{m_2}\right| \geq \varepsilon_0$

……

取$N_k = \max(n_{k-1}, m_{k-1}), \exists n_k, m_k > N_k: \left|x_{n_k} - x_{m_k}\right| \geq \varepsilon_0$

由此可得$\{x_n\}$的两个子列$\left\{x_{n_k}\right\}, \left\{x_{m_k}\right\}$，$\forall k \in Z^+: \left|x_{n_k} - x_{m_k}\right| \geq \varepsilon_0$.将此性质记为$(*)$.

由$\{x_n\}$的有界性知$\left\{x_{n_k}\right\}, \left\{x_{m_k}\right\}$都是有界数列，所以$\left\{x_{n_k}\right\}$存在收敛子列$\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$

对于$\{x_{m_k}\}$的子列$\{x_{m_{k_l}}\}$也存在收敛子列$\left\{x_{m_{k_{l_p}}}\right\}$，而收敛子列$\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$的子列$\left\{x_{n_{k_{l_p}}}\right\}$也收敛

有条件知$\left\{x_{m_{k_{l_p}}}\right\}, \left\{x_{n_{k_{l_p}}}\right\}$收敛到同一个实数，记此实数为$A$，则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in Z^+, \forall p > P: \left|x_{n_{k_{l_p}}} - x_{m_{k_{l_p}}}\right| \leq \left|x_{n_{k_{l_p}}} - A\right| + \left|x_{m_{k_{l_p}}} - A\right| < \varepsilon$$

这与性质$(*)$矛盾，所以“数列$\{x_n\}$不收敛”的假设是错误的。

所以此命题正确。

（装订线内不要答题）

5. (10 分) 问$f(x)=x\sin x$在$[0,+\infty)$上是否一致连续，为什么？

[解]：

不一致连续。

不一致连续的定义：$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in[0,+\infty),|x'-x''|<\delta:|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$

取$x_n'=2n\pi+\frac{1}{2n\pi},x_n''=2n\pi-\frac{1}{2n\pi},n\in Z^+$

$$|x_n'\sin x_n'-x_n''\sin x_n''|=\left|\left(2n\pi+\frac{1}{2n\pi}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{1}{2n\pi}\right)-\left(2n\pi-\frac{1}{2n\pi}\right)\sin\left(2n\pi-\frac{1}{2n\pi}\right)\right|$$

$$=\left|\left(2n\pi+\frac{1}{2n\pi}\right)\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)+\left(2n\pi-\frac{1}{2n\pi}\right)\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\right|=4n\pi\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}4n\pi\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}{\frac{1}{2n\pi}}=2$

所以$\exists N\in Z^+,\forall n>N:|x_n'\sin x_n'-x_n''\sin x_n''|>1$

取$\varepsilon_0=1,\forall\delta>0$，取$n=\max\left(N,\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right),|x_n'-x_n''|=\frac{1}{n\pi}<\delta,|x_n'\sin x_n'-x_n''\sin x_n''|>1=\varepsilon_0$

所以$f(x)=x\sin x$在$[0,+\infty)$上不一致连续。

(导数无界不能推出不一致连续，考察函数$f(x)=\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}},x\in[1,+\infty)$.)

6. (10 分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$，证明：

$$\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

[证]: 函数$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的二阶导数，则任取$x\in[a,b]$

$\exists\xi\in(a,x)$，使得$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$,

$\exists\eta\in(x,b)$，使得$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-b)^2=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-b)^2$

将上述两式相减，得

$$0=f(a)-f(b)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2-\frac{f''(\eta)}{2}(x-b)^2$$

所以，结合$f''(x)$在$[a,b]$上连续，得$\forall x\in[a,b]$

$$|f(a)-f(b)|\leq\left|\frac{f''(\xi)}{2}\right|(x-a)^2+\left|\frac{f''(\eta)}{2}\right|(x-b)^2\leq\frac{1}{2}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\left((x-a)^2+(x-b)^2\right)$$

而当$x=\frac{a+b}{2}$时，$(x-a)^2+(x-b)^2=\frac{(b-a)^2}{2}$，所以

$$|f(a)-f(b)|\leq\frac{(b-a)^2}{4}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

即

$$\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

7. (10 分) 证明：若函数$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内二阶可微，且$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则在区间$(x_0,+\infty)$内至少有一点$\xi$，满足$f''(\xi)=0$。

[证]：由函数$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内二阶可微可知，$f(x)$与$f'(x)$在$(x_0,+\infty)$内连续。

1) 若$\forall x\in(x_0,+\infty), f(x)=0$，则任取$\xi\in(x_0,+\infty)$即可。

2) 若$\exists x_1\in(x_0,+\infty), f(x_1)\neq 0$. 不妨设$f(x_1)>0$

由于$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，所以$\exists\delta>0,\forall x\in(x_0,x_0+\delta), f(x)<f(x_1)$. $\exists X>x_0+\delta,\forall x>X, f(x)<f(x_1)$.

由此可得$f(x)$在$\left[x_0+\frac{\delta}{2},X+1\right]$上的最大值也是$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上的最大值，令$f(x_2)=\max\limits_{x\in\left[x_0+\frac{\delta}{2},X+1\right]} f(x)$，所以

$f(x_2)$是$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上的一个极大值，由$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内的二阶可微性可知：$f'(x_2)=0, f''(x_2)\leq 0$。

2.1) 若$f''(x_2)=0$，则令$\xi=x_2$即可

2.2) 若$f''(x_2)<0$，（用反证法来证明）

假设$\forall x\in(x_2,+\infty), f''(x)\neq 0$，则由$f''(x_2)<0$可知，$\forall x\in(x_2,+\infty), f''(x)<0$, 即$f'(x)$在$[x_2,+\infty)$上严格单调减少，任一取点$x_3\in(x_2,+\infty)$,则$f'(x_3)<f'(x_2)=0$

$$\forall x\in(x_3,+\infty),\exists\eta\in(x_3,x), f(x)-f(x_3)=f'(\eta)(x-x_3)<f'(x_3)(x-x_3)$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x_3)+f'(x_3)(x-x_3)\big)=-\infty$

这与$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$矛盾。所以前述假设是错误的。

综上所述，对于满足题目条件的函数$f(x)$，$\exists\xi\in(x_0,+\infty)$，$f''(\xi)=0$.

（本题的证明过程中用到了下面的结论：

$$\text{设} f(x) \text{在} [a,b] \text{上可微，} f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0, \text{则存在} \xi\in(a,b), \text{使得} f'(\xi)=0$$

由于我们已经证明过这个结论，所以可以直接使用，无需单独证明。）