

# 効率とシステムサイズの関係に対する 確率モデルによる考察

先進理工学部物理学科4年  
山崎研究室 藤本将太郎

# Outline

- 背景
- 作成したモデルの説明
- 解析結果
- まとめ
- 展望と課題

# 背景

## アロメトリー則 ( $E \sim M^{3/4}$ )

- 動物の体のサイズ(質量 $M$ )と、基礎代謝率 $E$ の関係
- 代謝率は体重に対して比例関係ではなく、 $3/4$ 乗ほどでスケールされる

## ホヤの実験によるシステムサイズと代謝率の関係

- ホヤ: 群体を形成
- 任意に群体の構成個数を変更可能
- 群体サイズと代謝率の間に、アロメトリー則のような関係

アロメトリー則は種の違いや成長による細胞機能自体の変化によるものではなく、  
実際のシステムのサイズによって代謝率が変わっている?

## 一般化

系のシステムサイズが大きくなると、その特徴量が単純に比例して大きくはならず、相互作用等によってそれよりも小さくなるような系

具体例として会議を取り上げることにする

## アプローチ

- モデルの作成
- 解析的計算、数値シミュレーション
- 会議の質となりうる特徴量を考察
- システムサイズ(参加者の人数)に対する応答

## 作成したモデルの説明

## 意見

$a$  個の実数値のパラメータで表現。 $R^a$  上の領域  $\Omega$  における点

## 参加者

意見の集合。 $\Omega$  上の部分集合

## 参加者たち

参加者の集まり。 $\Omega$  上の部分集合の集まり(集合族)

## 会議

意見の連鎖。意見間のネットワーク + 参加者の(有向)ネットワーク

## 仮定

- ある時刻における発言は一つのみ
- 一人の平均発言時間は参加者数に依らない



## 会議進行に関するいくつかの設定の場合分け

1. 参加者から一人選ばれ、その中から意見( $x \in [0, 1]$ )が一様に選ばれる
  - A. 参加者を選ぶ確率: 等しい
  - B. 参加者を選ぶ確率: 参加者間の距離に依存
2. 意見を参照して次の意見が選ばれる
  - A. 影響なし
  - B. 一つの意見を参照
    - a. 議題
    - b. 一つ前
  - C. 二つの意見を参照
    - a. 議題+一つ前
    - b. 二つ前まで

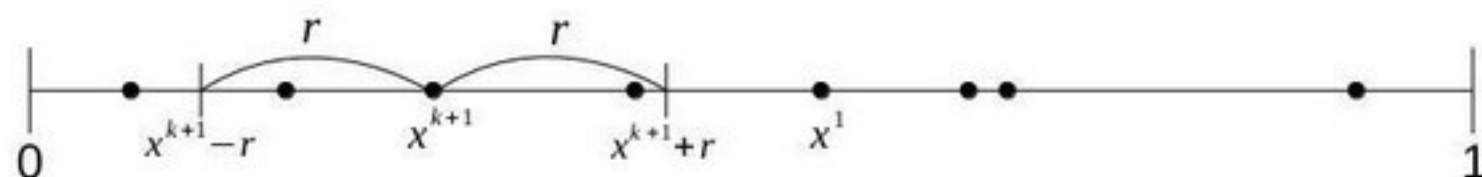
# 解析結果

それぞれの場合について、そのシミュレーション・解析の概要を示す

**1-A. 意見が $[0, 1]$ の一様乱数、参加者を選ぶ確率が等しいとき**

## 条件:

- 閾値 $r$ で定められる領域内に入った点すべてにエッジを張る



## 結果:

- 時刻 $k$ に発言がなされたとき、領域に入る点の個数は二項分布 $B(k, p(r) = -r^2 + 2r)$ に従う
- 二項分布の期待値が $E(X) = kp$ で表せることから、 $k$ 番目の発言によって張られるエッジの数の期待値は $(-r^2 + 2r)k$
- 参加者に関する情報は含んでいない  
⇒ 意見のネットワークだけでは参加者の効果を考慮できない

**1-B. 意見が $[0, 1]$ の一様乱数、参加者を選ぶ確率が参加者間の距離に依存するとき**

- 意見についての条件は同じ  
⇒ 意見のネットワークは全く同一の性質

シミュレーションの1例を示す( $r = 0.5$ )。

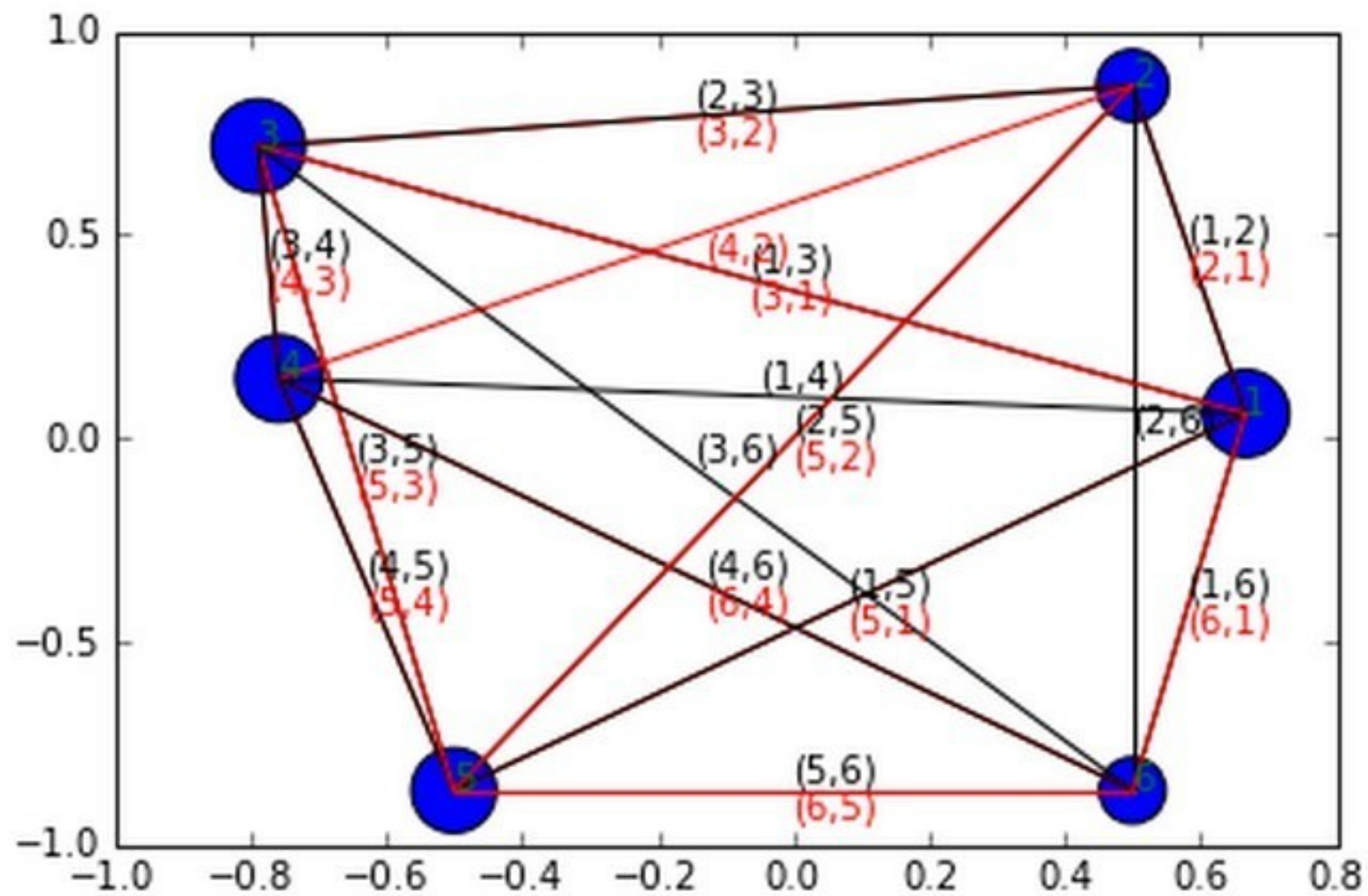


図1. 発言者の発現頻度と張られたエッジのグラフ



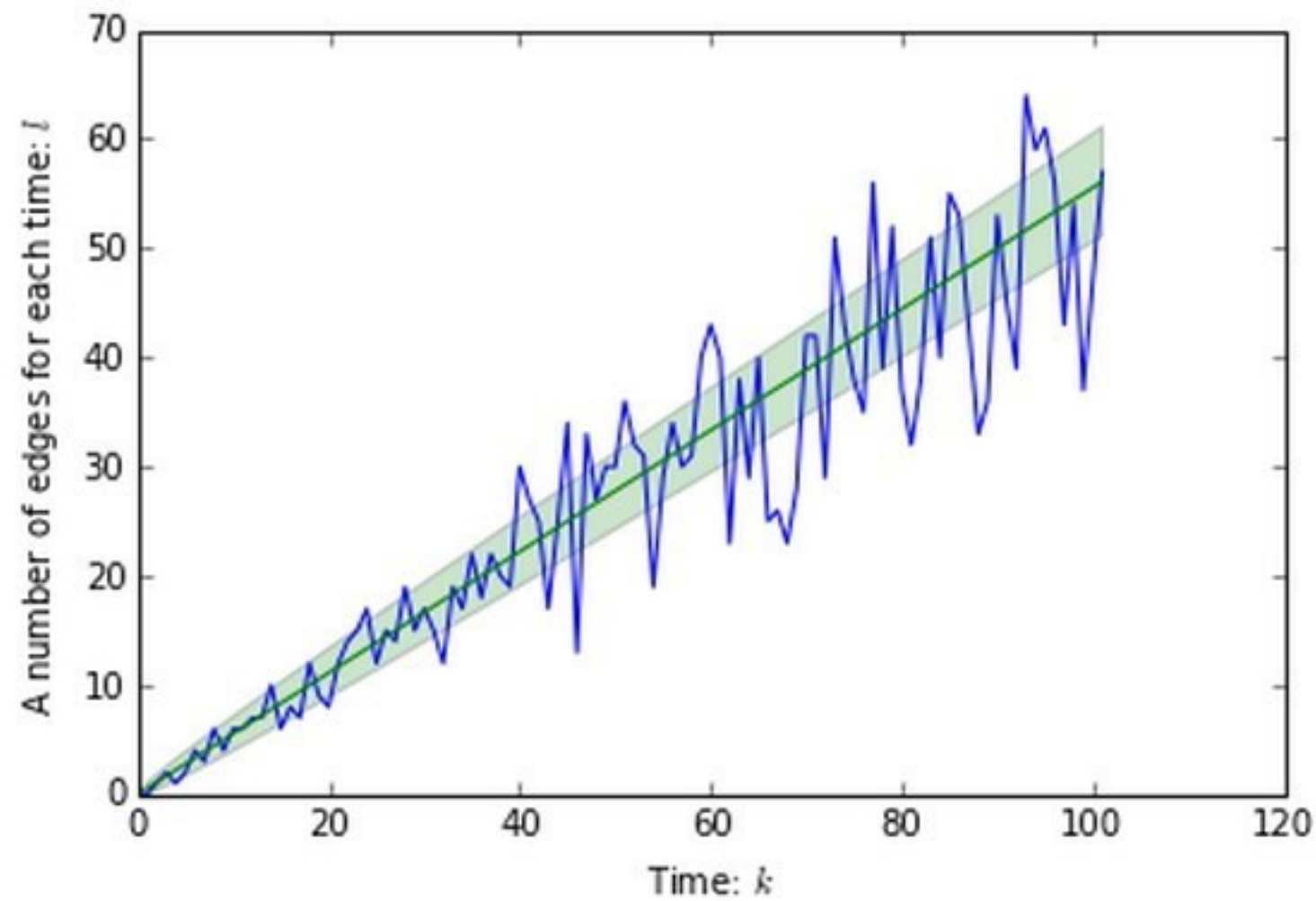


図2. 時刻 $k$ に選ばれた点から張られたエッジの数

- 緑の曲線: 計算によって得た時刻 $k$ とエッジの数の間の関係式

$$l = (-r^2 + 2r)k$$

⇒ 一致



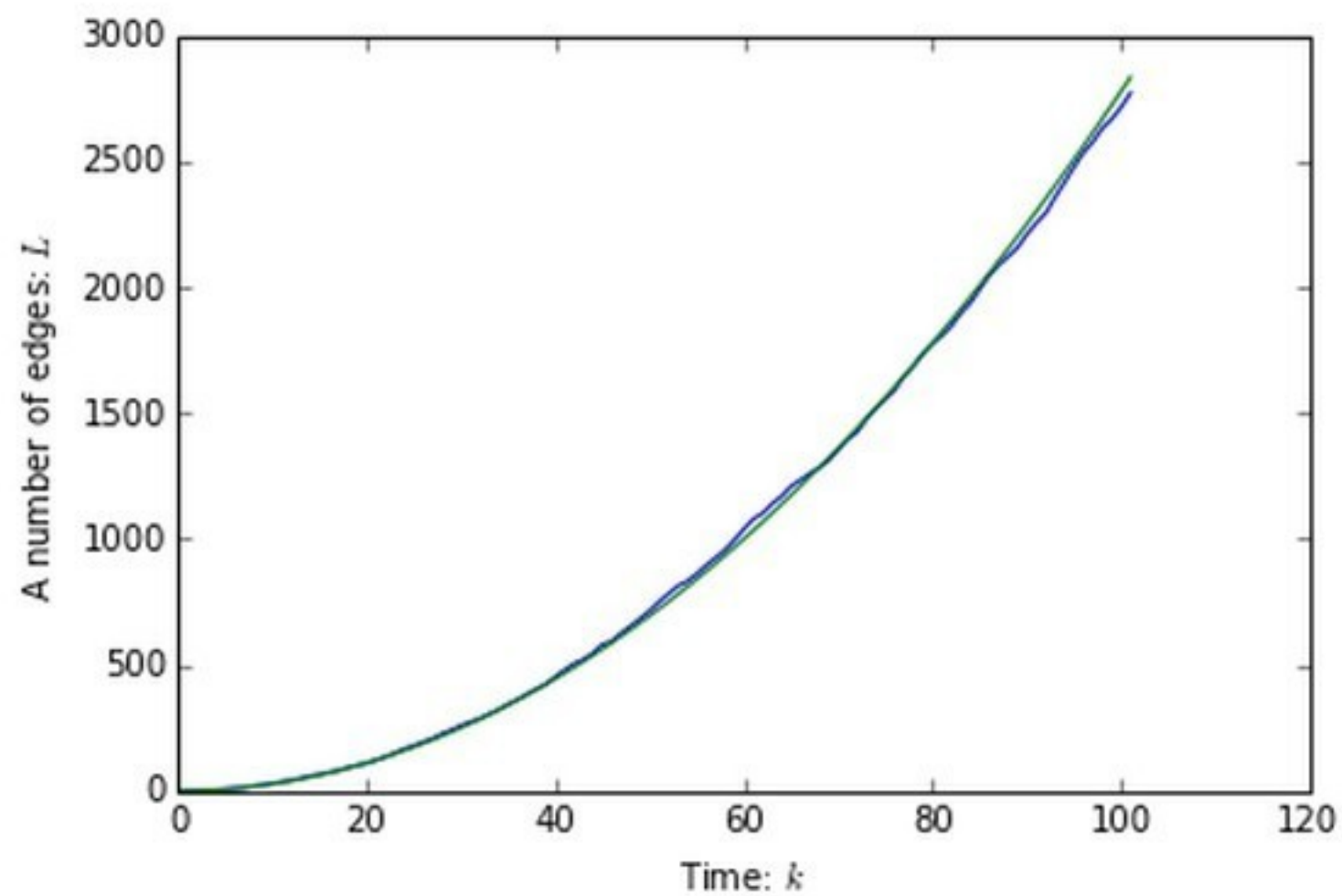


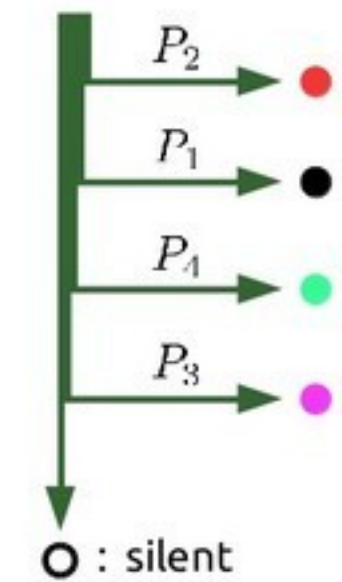
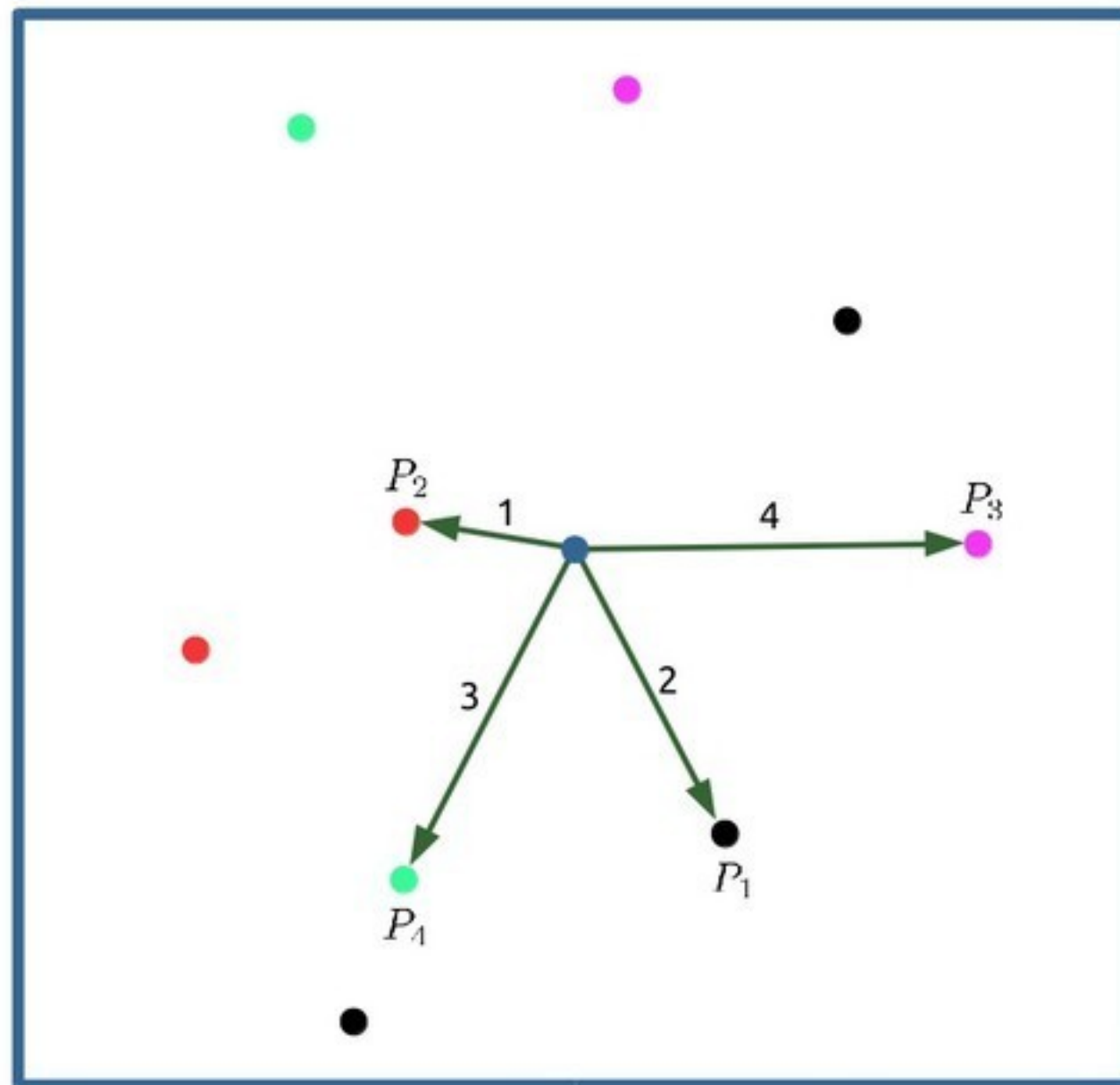
図3. 時刻 $k$ までのエッジの数の総和

$$L = \frac{1}{2} (-r^2 + 2r) k^2 \quad (\text{理論値})$$

- 参加者間のネットワークは、一つ前の参加者のみに依存する  
⇒ マルコフ連鎖

## **2. 過去の意見を参照して次の意見が選ばれる**

- 発言者の意見は意見空間上に有限個ずつ分布
- 各参加者ごとに、参照する意見から最も近いものを選ぶ
- 意見の近さの順に発言者は発言の機会を得る
- 各発言者は発言確率 $P_i$ にしたがって発言
- 発言しないときは次の参加者に発言権が移る



## 2-A. 独立に意見が選ばれる場合

- 人 $i$ が $n$ 人中 $r + 1$  ( $r = 1, 2, \dots, n - 1$ ) 番目に発言権を得たとき、自分まで発言権が回ってくる確率

$$p_{r+1}(i) = \frac{\sum_{J=\langle j_0, \dots, j_{r-1} \rangle_r} \prod_{j \in J} (1 - P_j)}{{}_{n-1}C_r}.$$

$J = \langle j_0, j_1, \dots, j_{r-1} \rangle_r$  は、 $i$ を除く $n - 1$  個の要素から  
 $r$  個選んだときの組み合わせのうちの1揃いをあらわす

- 1番目に発言権を得たときは当然

$$p_0(i) = 1$$

- 人 $i$ が $r$ 番目の発言権を得る確率は等しい
- 人 $i$ が発言する確率の期待値

$$p(i) = \frac{\sum_{r=0}^n p_r(i)}{n} P_i.$$

- この確率はそれぞれの人 $i$ によって異なる
- 毎時刻ごとにこの確率でそれぞれの人が発言する

⇒ 単純な確率過程に帰着



## 2-B. 一つの意見を参照する場合

- 点 $x$ と点 $y$ の間の意見の近さの指標  
 $\Rightarrow a$ 次元ユークリッド距離

$$\begin{aligned} D(x, y) &= d(x, y) \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_a - y_a)^2} \end{aligned}$$

$K = 30, N = 6, S = 50, a = 2, p = 0.6$  のとき

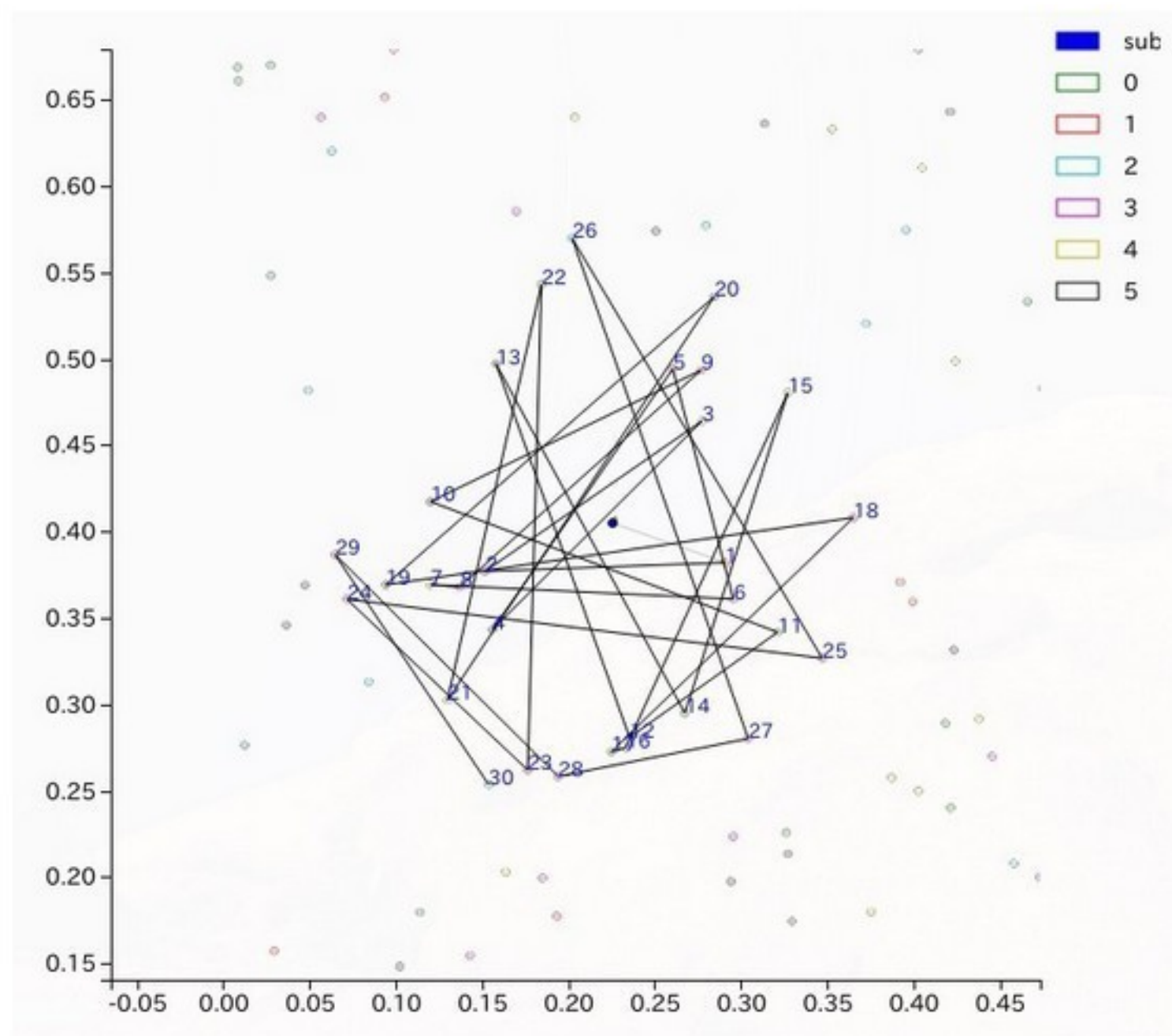


図4.2-B-a - 議題のみを参照

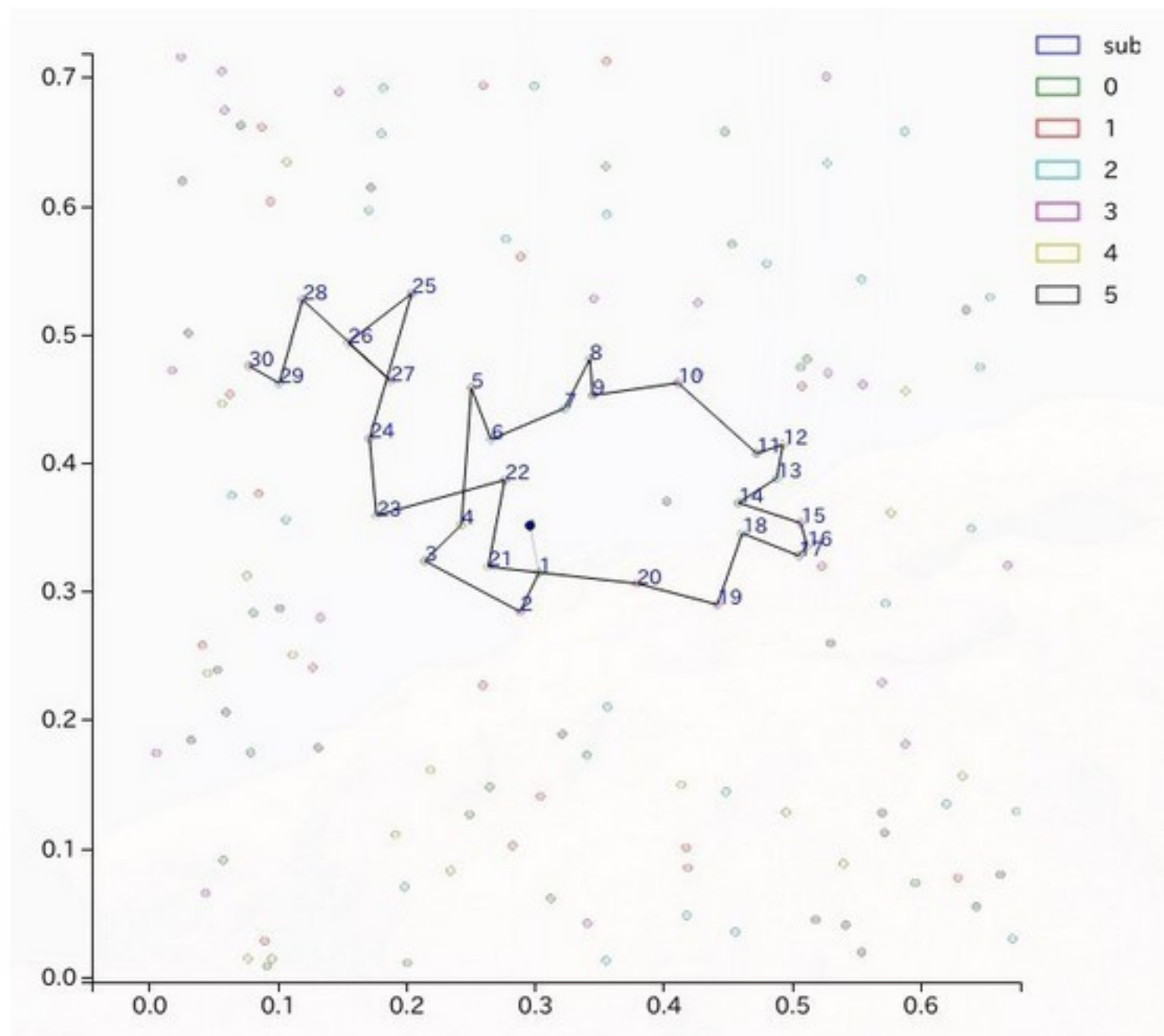


図5.2-B-b - 一つ前の意見を参照

## 結果

- $N \rightarrow \text{大}$ 
  - $\Rightarrow$  意見の密度  $\rightarrow$  大
  - $\Rightarrow$  軌跡の範囲  $\rightarrow$  小
- $p \rightarrow \text{大}$ 
  - $\Rightarrow$  軌道は直線的
- $p \rightarrow \text{小}$ 
  - $\Rightarrow$  軌跡はより"ギザギザ"。沈黙で中断されて島になる部分が多くなる

## 2-C. 二つの意見を参照する場合

- 点 $x$ から2点 $y, z$ までの近さの指標

$$D(x, (y, z)) = \alpha d(x, y) + \beta d(x, z) \quad (\alpha, \beta > 0)$$

$K = 30, N = 6, S = 50, a = 2, p = 0.6,$   
 $\alpha = 2.5, \beta = 1$  のとき

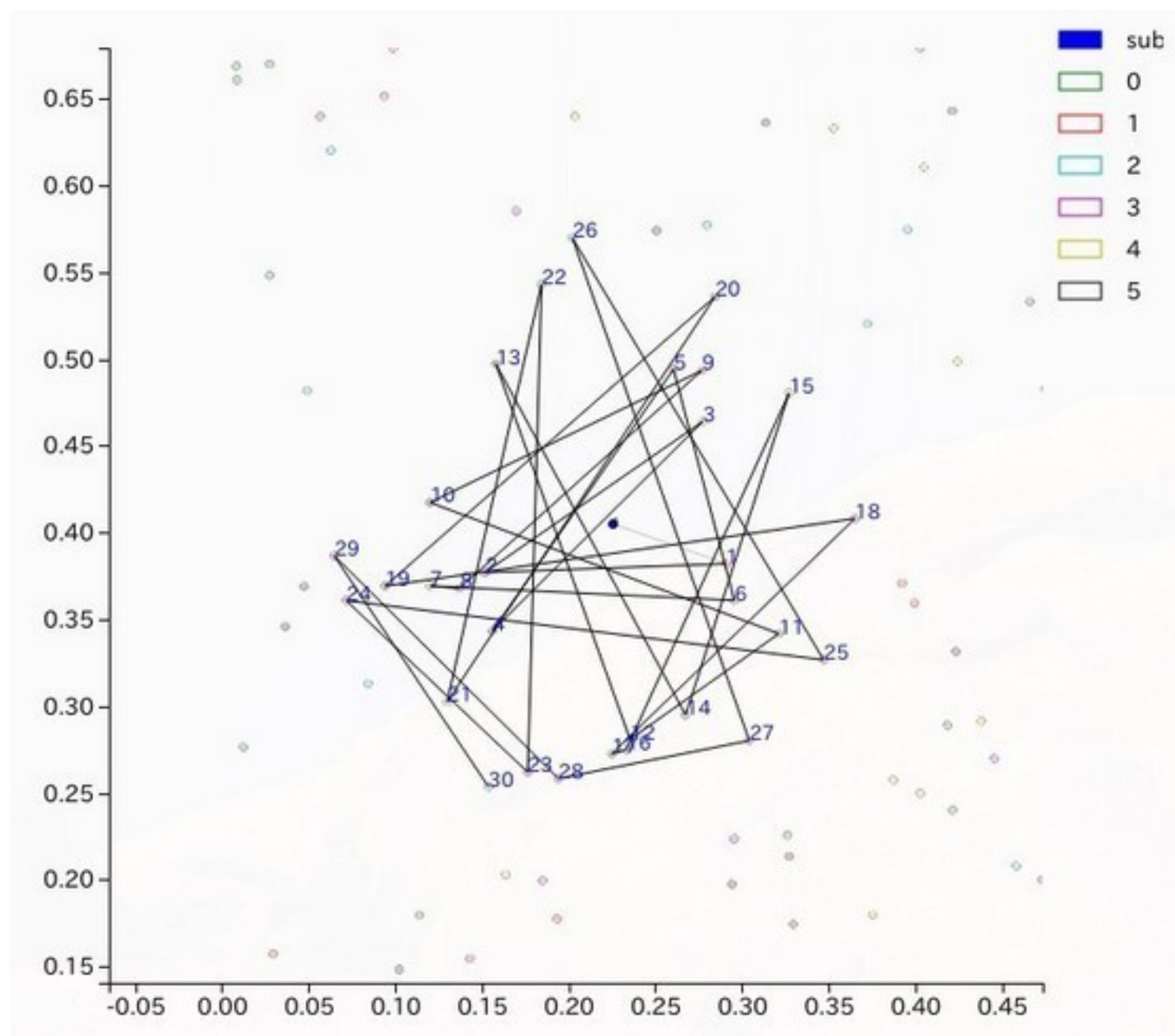


図6.2-C-a - 議題+一つ前の意見を参照

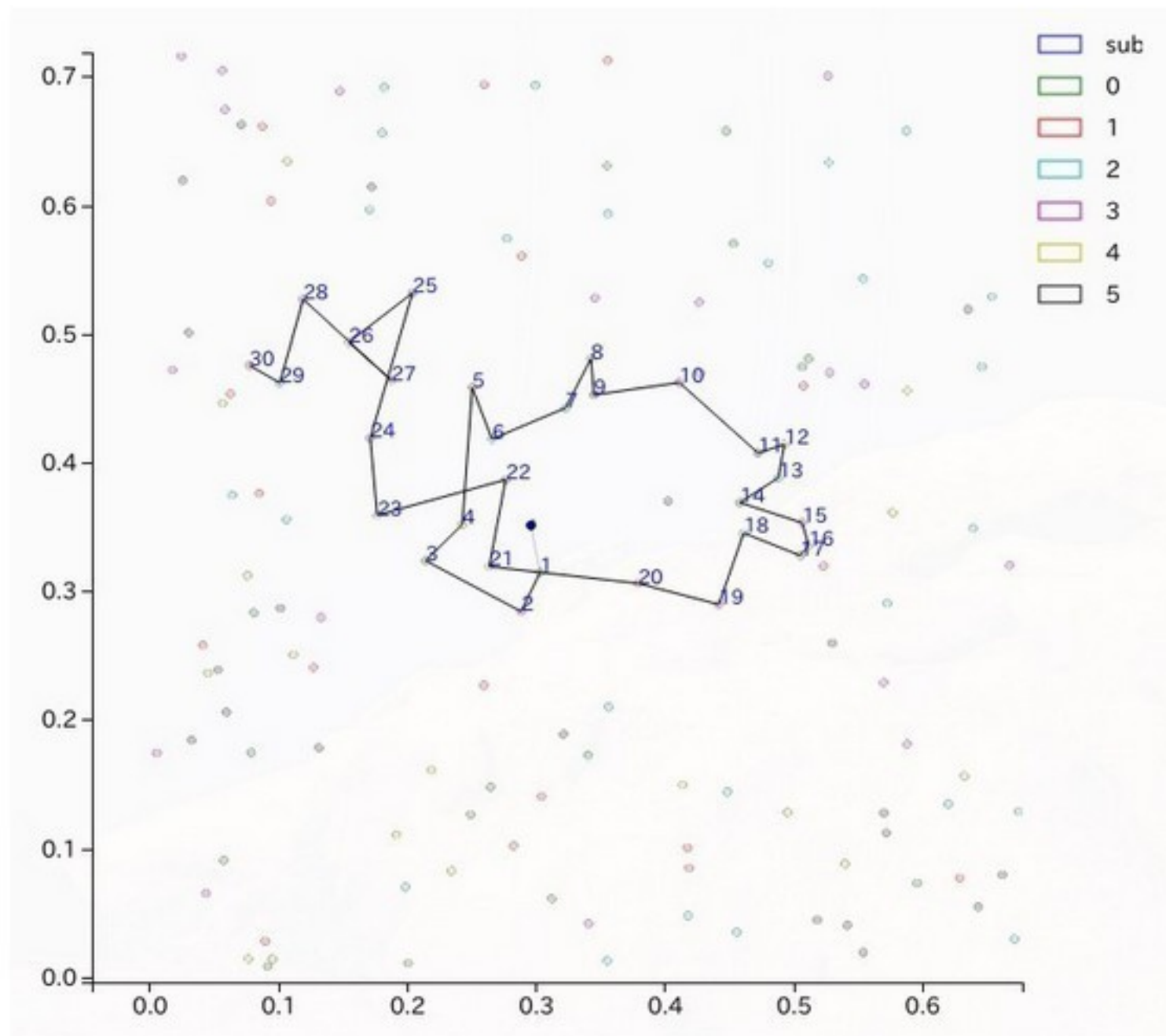


図7.2-C-b - 二つ前までの意見を参照



## 結果

- 全体の描く軌跡の大きさは一つ前のみの点を参照した場合より小さい
- 戻りの効果が強くなるので同じ $p$ でもギザギザした軌跡になる

## まとめ

- システムサイズの変化によって質が変化する系としての会議
- いくつかのモデルからシステムサイズである人数と  
系の特徴量の間関係を見た
- 系のサイズによって状態が変化するモデルの条件を考察した

## 展望と課題

- 考えているような系の他の条件とは?
- より検証しやすい系のデータを実際に解析
- さらにどのように一般化されるか

## 参考文献

- Geoffrey West, James Brown, Brian Enquist, *A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology*, *Science*, Vol.276, No.5309, pp.122-126, 1997.
- C. R. White, P. Cassey, T. M. Blackburn, Allometric exponents do not support a universal metabolic allometry, *Ecology*, **88**(2), 315-323 (2007).
- T. Kolokotronis, V. Savage, E. J. Deeds, W. Fontana, Curvature in metabolic scaling, *Nature L*, 464, 753-756 (2010)
- J. Kozlowski, J. Weiner, Interspecific allometries are by-products of body size optimization, *The American Naturalist*, **149**(2) (1997).
- G. B. West, J. H. Brown, Life's universal scaling laws, *Physics Today*, **57**, 36-49 (2004).
- H. A. Feldman, T. A. McMahon, The  $\frac{3}{4}$  mass exponent for energy metabolism is not a statistical artifact, *Respiration Physiology*, **52**, 149-163, (1983).



- G. B. West, J. H. Brown, The origin of allometric scaling laws in biology from genomes to ecosystems towards a quantitative unifying theory of biological structure and organization, *The Journal of Experimental Biology*, **208**, 1575-1592 (2005).
- V. M. Savage, J. F. Gilloly, W. H. Woodruff, G. B. West, A. P. Allen, B. J. Enquist, J. H. Brown, The predominance of quarter-power scaling in biology, *Functional Ecology*, **18**, 257-282 (2004).
- 本川 達雄, 「ホヤー群体形成と自己組織化」, 『自己組織化ハンドブック』, 330 - 331, 2009.
- 石川 正純・足立 にれか・岡本 浩一, 会議分析のための数値シミュレーション技法-組織内集団に見られる意思決定モデルの開発-, 社会技術研究論文集, 2004.
- 城 綾実・細馬 宏通, 多人数会話における自発的ジェスチャーの同期, *Cognitive Studies*, **16**(1), 103-119, 2009.

- 藤本 学・大坊 郁夫, 小集団の会話の展開に及ぼす会話者の発話行動傾向の影響, *The Japanese Journal of Experimental Social Psychology*, **47**(1), 51-60, 2007.
- 高良 美樹, 集団討議の参加者の人数が集団決定および個人決定に及ぼす影響について, *人間科学*, **1**, 67-84, 1998.
- 山本浩・森隆一・藤曲哲郎, シミュレーションによる確率論, 日本評論社, 137-143, 1993.