

# Compte rendu : Mean Field Games with Congestion Effects

Maxime EIDELBERG  
Simon SHEN

March 6, 2025

## 1 Introduction

Ce projet porte sur l'étude des jeux à champ moyen (Mean Field Games, MFG) avec des effets de congestion. Les MFG ont été introduits par J-M. Lasry et P-L. Lions pour étudier des jeux différentiels déterministes ou stochastiques lorsque le nombre de joueurs tend vers l'infini. Dans ce contexte, les joueurs sont supposés indistinguables et ont une influence négligeable sur le jeu. Chaque stratégie individuelle est influencée par des moyennes de quantités dépendant des états ou des contrôles des autres joueurs.

L'objectif de ce projet est de simuler numériquement des MFG avec des effets de congestion en utilisant des schémas aux différences finies. Nous allons également comparer les résultats obtenus avec ceux d'un problème de contrôle à champ moyen (Mean Field Control, MFC).

## 2 Modèle Mathématique

### 2.1 Formulation Mathématique

Considérons un espace d'état  $\mathbb{R}^d$  et un horizon temporel fini  $T > 0$ . Pour un joueur typique, la dynamique de son état  $X_t^v$  est régie par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dX_t^v = b(X_t^v, m(t, X_t^v), v(t, X_t^v)) dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

où :

- $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est la fonction de dérive,
- $\sigma$  est la volatilité,
- $W_t$  est un mouvement brownien standard,
- $X_0^v$  est une variable aléatoire indépendante dans  $\mathbb{R}^d$ , distribuée selon la loi  $m_0$ .

Le coût total pour un joueur utilisant la stratégie  $v$  est donné par :

$$J_m(v) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T f(X_t^v, m(t, X_t^v), v(t, X_t^v)) dt + \phi(X_T^v, m(T, X_T^v)) \right], \quad (2)$$

où :

- $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est le coût instantané,
- $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est le coût terminal.

## 2.2 Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash pour ce jeu est caractérisé par une paire  $(\hat{m}, \hat{v})$  telle que :

1.  $\hat{v}$  minimise le coût  $J_{\hat{m}}(v)$  sous la contrainte que  $X_t^v$  suit l'EDS (1).
2. Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\hat{m}(t, \cdot)$  est la loi de  $X_t^{\hat{v}}$ .

Le but du projet va être de trouver cet équilibre mais avec des effets de congestions.

## 2.3 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et de Kolmogorov-Fokker-Planck (KFP)

À l'aide des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et de Kolmogorov-Fokker-Planck (KFP), on peut alors caractériser l'équilibre de Nash par un système couplé d'équations aux dérivées partielles (EDP) :

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + H(x, m(t, x), \nabla u(t, x)) = 0, & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ \frac{\partial m}{\partial t}(t, x) - \nu \Delta m(t, x) - \operatorname{div}(m(t, \cdot) H_p(\cdot, m(t, \cdot), \nabla u(t, \cdot))) = 0, & \text{dans } (0, T] \times \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (3)$$

avec les conditions terminales/initiales :

$$u(T, x) = \phi(x, m(T, x)), \quad m(0, x) = m_0(x), \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (5)$$

Ici,  $H$  est l'Hamiltonien défini par :

$$H(x, m, p) = \max_{\gamma \in \mathbb{R}^d} \{-f(x, m, \gamma) - \langle b(x, m, \gamma), p \rangle\}. \quad (6)$$

Et ainsi l'équilibre de Nash est défini pour :

$$\hat{v}(t, x) = \arg \max_{a \in \mathbb{R}^d} \{-f(x, m(t, x), a) - \langle b(x, m(t, x), a), \nabla u(t, x) \rangle\}$$

## 2.4 Équations fondamentales pour le modèle de congestion

Nous considérons un modèle de congestion où  $b(x, m, \gamma) = \gamma$ , et le coût instantané est de la forme :

$$f(x, m, \gamma) = L_0(\gamma, m(x)) + f_0(x, m(x)),$$

où  $L_0 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est donné par :

$$L_0(\gamma, \mu) = \frac{\beta - 1}{\beta} (c_0 + c_1 \mu)^{\frac{\alpha}{\beta - 1}} |\gamma|^{\frac{\beta}{\beta - 1}}.$$

Les paramètres satisfont les conditions suivantes :

- $\beta > 1$ ,
- $0 \leq \alpha \leq \frac{4(\beta - 1)}{\beta}$ ,

- $c_0 \geq 0$ ,
- $c_1 > 0$ .

L'Hamiltonien associé est alors :

$$H(x, m, p) = \max_{\gamma \in \mathbb{R}^d} \{-L_0(\gamma, m(x)) - \langle \gamma, p \rangle\} - f_0(x, m(x)).$$

En utilisant l'expression de  $L_0$ , on obtient :

$$H(x, m, p) = \frac{1}{\beta} \frac{|p|^\beta}{(c_0 + c_1 m(x))^\alpha} - f_0(x, m(x)).$$

De plus, nous supposons que le coût instantané  $f_0$  se décompose en :

$$f_0(x, m(x)) = \tilde{f}_0(m(x)) + g(x),$$

où :

- $\tilde{f}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière,
- $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée.

Cette décomposition permet de simplifier l'écriture de l'Hamiltonien discret et facilite la mise en œuvre numérique du schéma aux différences finies.

Un choix naturel pour l'Hamiltonien discret est :

$$\hat{H}(p_1, p_2, \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{((p_1)_+^2 + (p_2)_-^2)^{\beta/2}}{(c_0 + c_1 \mu)^\alpha},$$

où  $(p_1)_+$  et  $(p_2)_-$  désignent respectivement les parties positive et négative de  $p_1$  et  $p_2$ .

Cet Hamiltonien discret satisfait les propriétés suivantes :

- **Monotonie** : Cette propriété garantit l'unicité de la solution des équations discrètes de HJB et de KFP. Elle assure également que la solution de l'équation KFP discrète reste non négative si la condition initiale est non négative.
- **Consistance** : Cette propriété est essentielle pour assurer la convergence du schéma numérique vers la solution continue lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro.
- **Dérivabilité** : Cette régularité permet d'utiliser la méthode de Newton pour résoudre l'équation HJB discrète de manière efficace.

Ainsi donc, pour un MFG avec effets de congestion, le système forward-backward s'écrit :

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + \frac{1}{\beta} \frac{|\nabla u(t, x)|^\beta}{(c_0 + c_1 m(t, x))^\alpha} = f_0(x, m(t, x)) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t}(t, x) - \nu \Delta m(t, x) - \operatorname{div} \left( \frac{m(t, \cdot)}{(c_0 + c_1 m(t, \cdot))^\alpha} |\nabla u(t, \cdot)|^{\beta-2} \nabla u(t, \cdot) \right) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

avec les conditions aux limites de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial m}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad (10)$$

et les conditions terminales/initiales :

$$u(T, x) = \phi(x, m(T, x)), \quad m(0, x) = m_0(x) \quad (11)$$

### 3 Schéma des Différences Finies

Nous utilisons un schéma aux différences finies pour discrétiser les équations HJB et KFP. Soit  $N_T$  et  $N_h$  deux entiers positifs. On considère  $N_T + 1$  et  $N_h$  points en temps et en espace respectivement. Posons  $\Delta t = T/N_T$ ,  $h = 1/(N_h - 1)$ , et  $t_n = n \cdot \Delta t$ ,  $x_i = i \cdot h$  pour  $(n, i) \in \{0, \dots, N_T\} \times \{0, \dots, N_h - 1\}$ . On approxime  $u$  et  $m$  respectivement avec les vecteurs  $U$  et  $M$  in  $\mathbb{R}^{(N_T+1) \times N_h}$ , ainsi,  $u(t_n, x_i) \approx U_i^n$  et  $m(t_n, x_i) \approx M_i^n$  pour chaque  $(n, i)$  dans  $\{0, \dots, N_T\} \times \{0, \dots, N_h - 1\}$ .

Pour prendre en compte les conditions aux limites de Neumann, on introduit des ghost nodes  $x_{-1} = -h$ ,  $x_{N_h} = 1 + h$  et on pose:

$$U_{-1}^n = U_0^n, \quad U_{N_h}^n = U_{N_h-1}^n, \quad M_{-1}^n = M_0^n, \quad M_{N_h}^n = M_{N_h-1}^n$$

#### 3.1 Opérateurs des différences finies

On introduit les opérateurs suivant:

$$\partial_t w(t_n, x) \longleftrightarrow (D_t W)^n = \frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t}, \quad n \in \{0, \dots, N_T - 1\}, \quad W \in \mathbb{R}^{N_T+1}$$

$$\partial_x w(t, x) \longleftrightarrow (DW)_i = \frac{W_{i+1} - W_i}{h}, \quad i \in \{0, \dots, N_h - 1\}, \quad W \in \mathbb{R}^{N_h}$$

$$\partial_x^2 w(t, x_i) \longleftrightarrow (\Delta_h W)_i = \frac{W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}}{h^2}, \quad i \in \{0, \dots, N_h - 1\}, \quad W \in \mathbb{R}^{N_h}$$

$$[\nabla_h W]_i = ((DW)_i, (DW)_{i-1}), \quad i \in \{0, \dots, N_h - 1\}, \quad W \in \mathbb{R}^{N_h}$$

On peut réécrire tout cela sous forme matricielle. Pour une matrice  $W \in \mathbb{R}^{(N_T+1) \times N_h}$ , on a:

$$(\partial_x(t_n, x_i))_{\substack{0 \leq n \leq N_T \\ 0 \leq i \leq N_h-1}} \longleftrightarrow \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0^0 & W_0^1 & \cdots & W_0^{N_T} \\ W_1^0 & W_1^1 & \cdots & W_1^{N_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N_h-1}^0 & W_{N_h-1}^1 & \cdots & W_{N_h-1}^{N_T} \end{pmatrix}$$

Dans la dernière colonne, on prend en compte les conditions de Neumann, en considérant que  $U_{N_h} = U_{N_h-1}$  et  $M_{N_h} = M_{N_h-1}$ . Soit  $D_x$  la matrice ci-dessus.

De même, on va obtenir:

$$(\partial_x^2(t_n, x_i))_{\substack{0 \leq n \leq N_T \\ 0 \leq i \leq N_h-1}} \longleftrightarrow \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0^0 & W_0^1 & \cdots & W_0^{N_T} \\ W_1^0 & W_1^1 & \cdots & W_1^{N_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N_h-1}^0 & W_{N_h-1}^1 & \cdots & W_{N_h-1}^{N_T} \end{pmatrix}$$

Notons  $D_x^2$  la matrice ci-dessus.

Remarquons que la matrice de  $((DW)_{i-1} = \frac{1}{h}(W_i - W_{i-1}))_{0 \leq i < N_h}$  est (en raison des conditions de Neumann):

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.2 Résolution de l'équation HJB

L'équation HJB discrétisée est résolue en utilisant une méthode de Newton-Raphson.

L'équation HJB discrétisée est donnée, en utilisant l'Hamiltonien discret défini précédemment par :

$$\begin{cases} -(D_t U_i)^n - \nu(\Delta_h U^n)_i + \tilde{H}(x_i, [\nabla_h U^n]_i) = g(x_i) + \tilde{f}_0(M_i^{n+1}), & 0 \leq i < N_h, 0 \leq n < N_T \\ U_{-1}^n = U_0^n, & 0 \leq n < N_T \\ U_{N_h}^n = U_{N_h-1}^n, & 0 \leq n < N_T \\ U_i^{N_T} = \phi(x_i, M_i^{N_T}), & 0 \leq i < N_h \end{cases}$$

C'est un schéma d'Euler implicite car l'équation est backward en temps. Pour obtenir  $M^{n+1}$  et  $U^{n+1}$ , on introduit

$$\mathcal{F}(U^n, U^{n+1}, M^{n+1}) := \begin{pmatrix} -(D_t U_0)^n - \nu(\Delta_h U^n)_0 + \tilde{H}(x_0, [\nabla_h U^n]_0) - g(x_0) - \tilde{f}_0(M_0^{n+1}) \\ \vdots \\ -(D_t U_i)^n - \nu(\Delta_h U^n)_i + \tilde{H}(x_i, [\nabla_h U^n]_i) - g(x_i) - \tilde{f}_0(M_i^{n+1}) \\ \vdots \\ -(D_t U_{N_h-1})^n - \nu(\Delta_h U^n)_{N_h-1} + \tilde{H}(x_{N_h-1}, [\nabla_h U^n]_{N_h-1}) - g(x_{N_h-1}) - \tilde{f}_0(M_{N_h-1}^{n+1}) \end{pmatrix}$$

Quand on résout l'équation HJB, le but est de trouver  $U^n$  connaissant  $U^{n+1}$  et  $M^{n+1}$ . La condition  $U_i^{N_T} = \phi(M_i^{N_T})$  permet l'initialisation pour  $n = N_T$ . Pour  $n < N_T$ , on utilise Newton-Raphson, ce qui consiste à estimer  $U^n$  comme limite de la suite  $(U^{n,k})_k$  définie par

$$U^{n,k+1} = U^{n,k} - \mathcal{J}^{-1}(U^{n,k}, U^{n+1}, M^{n+1}) \mathcal{F}(U^{n,k}, U^{n+1}, M^{n+1})$$

avec  $\mathcal{J}^{-1}(V, U^{n+1}, M^{n+1})$  la Jacobienne de la map  $V \mapsto \mathcal{F}(V, U^{n+1}, M^{n+1})$ . On initialisera  $U^{n,0} = U^{n+1}$ . Les itérations de Newton s'arrête quand  $\|\mathcal{F}(U^{n,k}, U^{n+1}, M^{n+1})\|$  est inférieur à un seuil  $10^{-12}$ .

### 3.3 Formule fermée de la Jacobienne

Soit  $\mathcal{F}_i$  la  $i$ -eme coordonnée de  $\mathcal{F}(U^n, U^{n+1}, M^{n+1})$ . La matrice Jacobienne est définie comme:

$$\mathcal{J}(V, U^{n+1}, M^{n+1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial V_0} & \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial V_{N_h-1}} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial V_0} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial V_{N_h-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{F}_{N_h-1}}{\partial V_0} & \frac{\partial \mathcal{F}_{N_h-1}}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_{N_h-1}}{\partial V_{N_h-1}} \end{pmatrix}$$

On observe que (en posant  $A = -g(x_i) - \tilde{f}_0(M_i^{n+1})$ ):

$$\mathcal{F}_i = -(D_t U_i)^n - \nu(\Delta_h U^n)_i + \tilde{H}(x_i, [\nabla_h U^n]_i) - g(x_i) - \tilde{f}_0(M_i^{n+1})$$

$$= -\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + \frac{1}{\beta h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} ((U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2)^{\beta/2} + A$$

Ce terme dépend uniquement de  $U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n$ , ainsi la jacobienne est tridiagonale. On a alors:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U_{i-1}^n} = -\frac{\nu}{h^2} - \frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} (U_i^n - U_{i-1}^n)_+ ((U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2)^{\beta/2-1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U_i^n} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu}{h^2} + \frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} ((U_{i+1}^n - U_i^n)_- + (U_i^n - U_{i-1}^n)_+) ((U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2)^{\beta/2-1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U_{i+1}^n} = -\frac{\nu}{h^2} - \frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} (U_{i+1}^n - U_i^n)_- ((U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2)^{\beta/2-1}$$

Notons  $J_H$  la jacobienne de  $U^n \mapsto (\tilde{H}(x_i, [\nabla_h U^n]_i))_{0 \leq i < N_h}$  évaluée en  $U^n$ , dans les équations ci-dessus. Ce sera utile par la suite. On obtient de nouveau une matrice tridiagonale telle que:

$$(J_H)_{i,i-1} = -\frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} (U_i^n - U_{i-1}^n)_+ ((U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2)^{\beta/2-1}$$

$$(J_H)_{i,i} = \frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} ((U_{i+1}^n - U_i^n)_- + (U_i^n - U_{i-1}^n)_+) ((U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2)^{\beta/2-1}$$

$$(J_H)_{i,i+1} = -\frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} (U_{i+1}^n - U_i^n)_- ((U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2)^{\beta/2-1}$$

### 3.4 Résolution de l'équation KFP

Pour définir une discrétisation appropriée de l'équation KFP, nous discutons d'abord de la manière de discrétiser  $\partial_x (m(t, \cdot) |\partial_x u(t, \cdot)|^{\beta-2} \partial_x u(t, \cdot)) (x)$ . Rappelons que

$$\partial_x (m(t, \cdot) |\partial_x u(t, \cdot)|^{\beta-2} \partial_x u(t, \cdot)) (x) = \partial_x (m(t, x) \partial_p H_0(x, \partial_x u(t, x)))$$

Considérons une fonction  $w \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \Omega)$ . En utilisant l'intégration par parties et en tenant compte des conditions aux limites de Neumann, en supposant que  $\partial_p H(x, 0) = 0$ , nous obtenons :

$$- \int_{\Omega} \partial_x (m(t, x) \partial_p H_0(x, \partial_x u(t, x))) w(t, x) dx = \int_{\Omega} m(t, x) \partial_p H_0(x, \partial_x u(t, x)) \partial_x w(t, x) dx$$

Il est naturel de proposer l'approximation suivante du membre de droite ci-dessus :

$$h \sum_{i=0}^{N_h-1} M_i^{n+1} \left( \partial_{p_1} \tilde{H}(x_i, [\nabla_h U^n]_i) \frac{W_{i+1}^n - W_i^n}{h} + \partial_{p_2} \tilde{H}(x_i, [\nabla_h U^n]_i) \frac{W_i^n - W_{i-1}^n}{h} \right)$$

En effectuant une intégration par parties discrète, nous obtenons l'équivalent discret du membre de gauche sous la forme  $-h \sum_{i=0}^{N_h-1} \mathcal{T}_i(U^n, M^{n+1}) W_i^n$ , où

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i(U, M) &= \frac{1}{h} \left( M_i \partial_{p_1} \tilde{H}(x_i, [\nabla_h U^n]_i) - M_{i-1} \partial_{p_1} \tilde{H}(x_{i-1}, [\nabla_h U^n]_{i-1}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{h} \left( M_{i+1} \partial_{p_2} \tilde{H}(x_{i+1}, [\nabla_h U^n]_{i+1}) - M_i \partial_{p_2} \tilde{H}(x_i, [\nabla_h U^n]_i) \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant considérer la version discrète suivante de l'équation KFP, complétée par les conditions aux limites de Neumann et la condition terminale :

$$\begin{cases} (D_t M_i)^n - \nu (\Delta_h M^{n+1})_i - \mathcal{T}_i(U^n, M^{n+1}) = 0, & 0 \leq i < N_h, 0 \leq n < N_T \\ M_1^n = M_0^n, & 0 < n \leq N_T \\ M_{N_h}^n = M_{N_h-1}^n, & 0 < n \leq N_T \\ M_i^0 = \bar{m}_0(x_i), & 0 \leq i < N_h \end{cases}$$

où, par exemple :

$$\bar{m}_0(x_i) = \int_{|x-x_i| \leq h/2} m_0(x) dx \quad \text{ou} \quad \bar{m}_0(x_i) = m_0(x_i)$$

Ce schéma est également implicite, mais contrairement au schéma HJB, il consiste en une boucle progressive. À partir du pas de temps 0,  $M_i^0 = \bar{m}_0(x_i)$  fournit une formule explicite pour  $M^0$ . La  $n$ -ième étape consiste à calculer  $M^{n+1}$  étant donnés  $U^n$  et  $M^n$ . Le système KFP étant linéaire, il peut être résolu par des méthodes d'algèbre linéaire de base.

Nous introduisons  $\mathcal{T}(U, M) := (\mathcal{T}_0(U, M), \dots, \mathcal{T}_{N_h-1}(U, M))^T$ . Remarquons que  $M \mapsto \mathcal{T}(U^n, M)$  est une application linéaire. Soit  $A$  la matrice associée. Alors  $A = (-J_H)^T$ .

En tenant compte du fait que  $(D_t M)^n = \frac{1}{\Delta t} (M^{n+1} - M^n)$ , nous pouvons finalement réécrire notre système :

$$\frac{M^{n+1} - M^n}{\Delta t} - \nu D_x^2 M^{n+1} + (J_H)^T M^{n+1} = 0$$

Trouver  $M^{n+1}$  revient alors à résoudre :

$$(I_{N_h} - \nu \Delta t D_x^2 + \Delta t (J_H)^T) M^{n+1} = M^n$$

Ce système linéaire peut être résolu efficacement en utilisant des techniques d'algèbre linéaire standard, garantissant que la solution  $M^{n+1}$  est unique et cohérente avec les conditions aux limites données.

### 3.5 Résolution du système forward-backward

L'idée principale est d'utiliser des itérations de points fixes de type Picard pour calculer  $\mathcal{M} := (M^n)_{0 \leq n \leq N_T}$  et  $\mathcal{U} := (U^n)_{0 \leq n \leq N_T}$ .

Soit  $0 < \theta < 1$  un paramètre (par exemple,  $\theta = 0.01$ ). Soit  $(\mathcal{M}^{(k)}, \mathcal{U}^{(k)})$  l'approximation courante de  $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ . La prochaine approximation  $(\mathcal{M}^{(k+1)}, \mathcal{U}^{(k+1)})$  est calculée comme suit :

- Résoudre l'équation HJB discrète en utilisant  $(\mathcal{M}^{(k)}, \mathcal{U}^{(k)})$ . La solution est nommée  $\hat{\mathcal{U}}^{(k+1)}$ .
- Résoudre l'équation KFP discrète en utilisant  $(\mathcal{M}^{(k)}, \hat{\mathcal{U}}^{(k+1)})$ . La solution est nommée  $\hat{\mathcal{M}}^{(k+1)}$ .
- Définir  $(\mathcal{M}^{(k+1)}, \mathcal{U}^{(k+1)}) = (1 - \theta)(\mathcal{M}^{(k)}, \mathcal{U}^{(k)}) + \theta(\hat{\mathcal{M}}^{(k+1)}, \hat{\mathcal{U}}^{(k+1)})$ .

Les itérations sont arrêtées lorsque la norme de l'incrément  $(\mathcal{M}^{(k+1)}, \mathcal{U}^{(k+1)}) - (\mathcal{M}^{(k)}, \mathcal{U}^{(k)})$  devient inférieure à un seuil donné, par exemple  $10^{-6}$ .

Pour initialiser la boucle, nous définissons  $M_i^{n,(0)} = \bar{m}_0(x_i)$  pour tout  $0 \leq i < N_h$  et  $0 \leq n \leq N_T$ . La valeur initiale de la matrice  $U^{(0)}$  a peu d'impact sur la convergence de l'algorithme. Nous définissons  $U_i^{n,(0)} = 0$  pour tout  $i, n$ .

### 3.6 Remarques d'Implémentation

- La matrice Jacobienne  $\mathcal{J}$  pour HJB est creuse et peut être assemblée via des différences finies.
- L'opérateur  $\mathcal{T}(U^n)$  dans KFP est antisymétrique, assurant la conservation de la masse :  $\sum_i M_i^n = \text{const.}$
- Le paramètre  $\theta$  doit être petit (ex.  $0.01 \leq \theta \leq 0.2$ ) pour garantir la convergence. Le paramètre  $\theta$  contrôle la vitesse de convergence : une valeur plus petite de  $\theta$  conduit à une convergence plus lente mais plus stable, tandis qu'une valeur plus grande peut accélérer la convergence au risque de l'instabilité.

## 4 Premiers résultats

Paramètres à Tester

Les simulations du Mean Field Game (MFG) doivent être effectuées avec les données suivantes :

- Domaine spatial :  $\Omega = ]0, 1[$
- Horizon temporel :  $T = 1$
- Fonction  $g(x)$  :  $g(x) = 0$
- Hamiltonien  $H_0$  : donné par l'équation (7) :

$$H_0(p, \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{|p|^\beta}{(c_0 + c_1 \mu)^\alpha},$$



et l'Hamiltonien discret est donné par l'équation (16) :

$$\hat{H}(p_1, p_2, \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{((p_1)_+^2 + (p_2)_-^2)^{\beta/2}}{(c_0 + c_1 \mu)^\alpha}.$$

- Paramètres à tester :

1.  $\beta = 2, c_0 = 0.1, c_1 = 1, \alpha = 0.5, \sigma = 0.02$
2.  $\beta = 2, c_0 = 0.1, c_1 = 5, \alpha = 1, \sigma = 0.02$
3.  $\beta = 2, c_0 = 0.01, c_1 = 2, \alpha = 1.2, \sigma = 0.1$
4.  $\beta = 2, c_0 = 0.01, c_1 = 2, \alpha = 1.5, \sigma = 0.2$
5.  $\beta = 2, c_0 = 1, c_1 = 3, \alpha = 2, \sigma = 0.002$

- Fonction  $\tilde{f}_0 : \tilde{f}_0(m(x)) = \frac{m(x)}{10}$

- Coût terminal  $\phi : \phi(x, m) = -\exp(-40(x - 0.7)^2)$

- Condition initiale  $m_0 : m_0(x) = \sqrt{\frac{300}{\pi}} \exp(-300(x - 0.2)^2)$

- Discrétisation :

- Nombre de points spatiaux :  $N_h = 201$

- Nombre de points temporels :  $N_T = 100$

- Paramètre de relaxation  $\theta$  : Choisir  $\theta$  dans l'intervalle  $[0.001, 0.2]$  pour assurer la convergence de la méthode des points fixes. Si la méthode ne converge pas, réduire  $\theta$ .

- Critères d'arrêt :

- Méthode de Newton :  $10^{-12}$

- Méthode des points fixes :  $2 \times 10^{-5}$  (avec des normes normalisées telles que  $\|(1, \dots, 1)\| = 1$ )

## 4.1 Étude des résultats

Nous avons commencé par tracer les contours des solutions de HJB et de Fokker-Planck dans le plan  $(x, t)$ .

### 4.1.1 Contours de la solution de HJB

On peut observer généralement, pour les contours de  $U$ , que pour le haut du graphe ( $t$  proche de 1) les contours sont très serrés, cela indique un fort gradient de  $U(x, t)$  donc de grands changements de valeur pour une faible variation de  $x$ . De plus, pour  $t$  plus petit, les contours deviennent plus espacés et la valeur optimale varie donc plus doucement avec  $x$ . La couleur violette signifie que  $U$  est plus faible, ce qui est logique car à mesure que le temps avance vers 0, il n'y a plus d'opportunité d'optimisation. Cela peut indiquer une convergence vers un état stationnaire.

On peut interpréter cela de cette façon: En début d'horizon temporel (grand  $t$  car backward system), les décisions prises ont un impact fort sur  $U$  tandis qu'en fin d'horizon, les opportunités de contrôle diminuent.

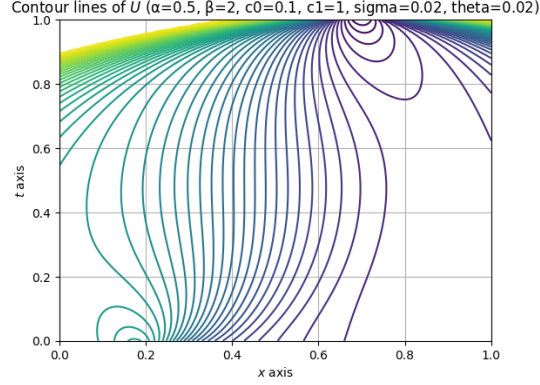


Figure 1: Contours de la solution de l'équation HJB

#### 4.1.2 Contours de la solution de Fokker-Planck

On peut observer, pour les contours de  $M$ , deux "noeuds" présents aux horizons  $t = 1$  et  $t = 0$  à différentes positions. Le premier horizon à  $t = 0$  peut être interprété comme la condition initiale, et on observe donc une transition de probabilité vers le noeud à  $t = 1$ , ce qui peut s'expliquer comme une politique optimale qui pousse la distribution dans cette direction.

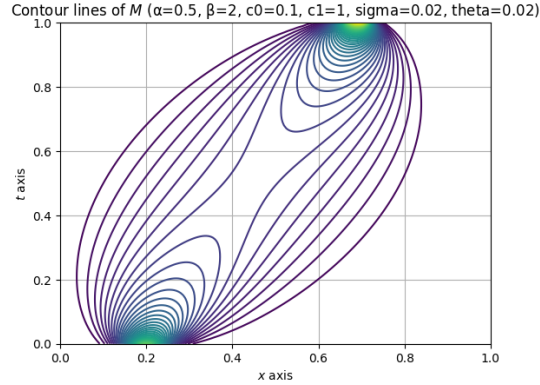


Figure 2: Contours de la solution de l'équation de Fokker-Planck

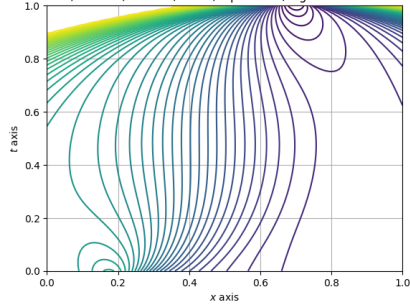
### Résultats pour les 5 sets de paramètres

#### 4.2 Set 1 : $\beta = 2$ , $c_0 = 0.1$ , $c_1 = 1$ , $\alpha = 0.5$ , $\sigma = 0.02$

##### 4.2.1 Contours de $U$ (HJB)

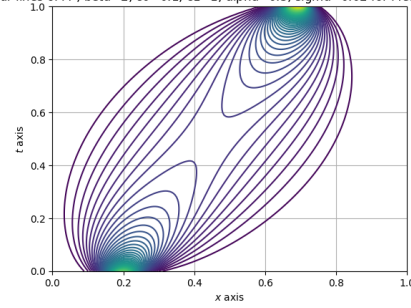
Les contours de  $U$  montrent une forte variation près de  $t = 1$ , indiquant un gradient élevé de  $U$  à cet horizon temporel. Cela suggère que les décisions prises en début de période ont un impact significatif sur

Contour lines of  $U$  ,  $\beta=2$ ,  $c_0=0.1$ ,  $c_1=1$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\sigma=0.02$  for Mean Field Game



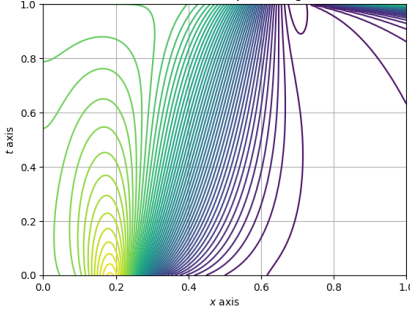
(a) Contours de  $U$  (parameters set 1)

Contour lines of  $M$  ,  $\beta=2$ ,  $c_0=0.1$ ,  $c_1=1$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\sigma=0.02$  for Mean Field Game



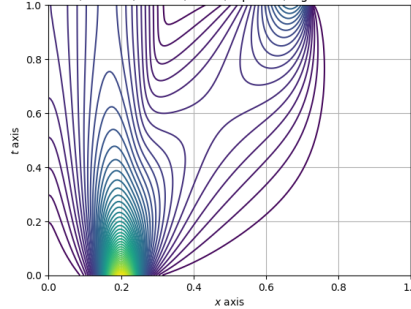
(b) Contours de  $M$  (parameters set 1)

Contour lines of  $U$  ,  $\beta=2$ ,  $c_0=0.1$ ,  $c_1=5$ ,  $\alpha=1$ ,  $\sigma=0.02$  for Mean Field Game



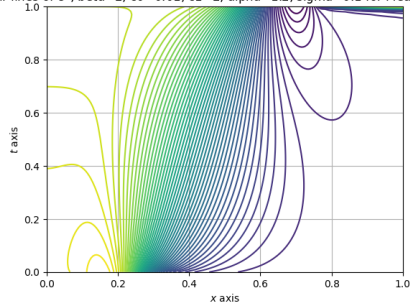
(c) Contours de  $U$  (parameters set 2)

Contour lines of  $M$  ,  $\beta=2$ ,  $c_0=0.1$ ,  $c_1=5$ ,  $\alpha=1$ ,  $\sigma=0.02$  for Mean Field Game



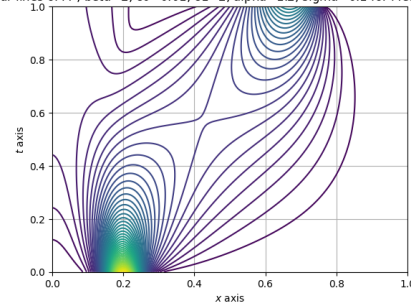
(d) Contours de  $M$  (parameters set 2)

Contour lines of  $U$  ,  $\beta=2$ ,  $c_0=0.01$ ,  $c_1=2$ ,  $\alpha=1.2$ ,  $\sigma=0.1$  for Mean Field Game

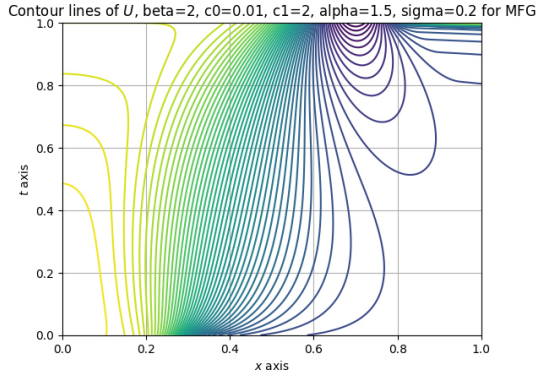


(e) Contours de  $U$  (parameters set 3)

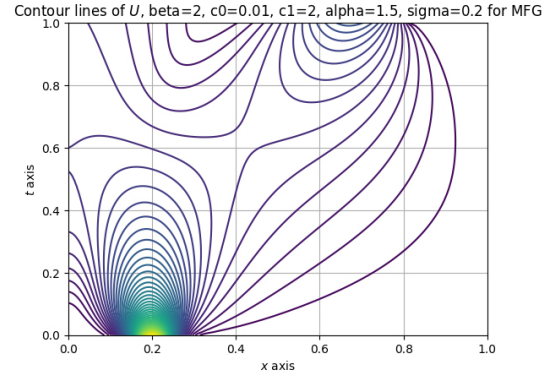
Contour lines of  $M$  ,  $\beta=2$ ,  $c_0=0.01$ ,  $c_1=2$ ,  $\alpha=1.2$ ,  $\sigma=0.1$  for Mean Field Game



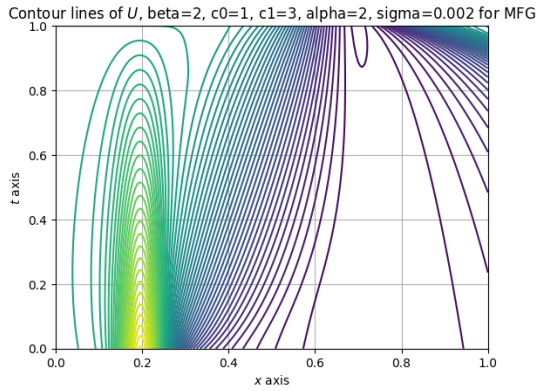
(f) Contours de  $M$  (parameters set 3)



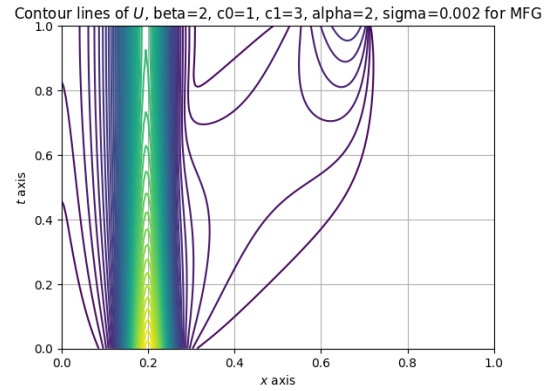
(a) Contours de  $U$  (parameters set 4)



(b) Contours de  $M$  (parameters set 4)



(c) Contours de  $U$  (parameters set 5)



(d) Contours de  $M$  (parameters set 5)

Figure 4: Ensemble des images avec leurs légendes

la valeur de  $U$ . À mesure que  $t$  diminue, les contours deviennent plus espacés, indiquant une variation plus douce de  $U$  avec  $x$ . Cela peut être interprété comme une convergence vers un état stationnaire où les opportunités de contrôle diminuent.

#### 4.2.2 Contours de $M$ (Fokker-Planck)

Les contours de  $M$  montrent une transition claire entre deux "nœuds" aux horizons  $t = 0$  et  $t = 1$ . Cela indique une politique optimale qui pousse la distribution de probabilité vers une position spécifique à  $t = 1$ . La distribution initiale à  $t = 0$  est concentrée, puis se diffuse progressivement vers la position finale.

### 4.3 Set 2 : $\beta = 2$ , $c_0 = 0.1$ , $c_1 = 5$ , $\alpha = 1$ , $\sigma = 0.02$

#### 4.3.1 Contours de $U$ (HJB)

Les contours de  $U$  montrent une structure similaire à celle du Set 1, mais avec des variations plus prononcées. Cela peut être dû à une congestion plus forte (valeur plus élevée de  $c_1$ ). Les gradients sont plus marqués, ce qui indique une plus grande sensibilité aux décisions prises en début de période.

#### 4.3.2 Contours de $M$ (Fokker-Planck)

Les contours de  $M$  montrent une diffusion plus rapide et une transition moins nette entre les deux nœuds. Cela peut être dû à une congestion plus forte ( $\alpha = 1$ ). La distribution initiale se diffuse plus rapidement, ce qui rend la transition moins marquée.

### 4.4 Set 3 : $\beta = 2$ , $c_0 = 0.01$ , $c_1 = 2$ , $\alpha = 1.2$ , $\sigma = 0.1$

#### 4.4.1 Contours de $U$ (HJB)

Les contours de  $U$  montrent une diffusion plus large, avec des gradients moins prononcés que dans les cas précédents. Cela peut être dû à une congestion encore plus forte ( $\alpha = 1.2$ ) et à une volatilité plus élevée ( $\sigma = 0.1$ ). Les décisions prises en début de période ont un impact moins localisé, ce qui se traduit par une diffusion plus progressive de l'information.

#### 4.4.2 Contours de $M$ (Fokker-Planck)

Les contours de  $M$  montrent une diffusion très large, avec une transition très progressive entre les deux nœuds. Cela est cohérent avec une congestion très forte ( $\alpha = 1.2$ ) et une volatilité élevée ( $\sigma = 0.1$ ). La distribution initiale se diffuse très rapidement, ce qui rend la transition presque imperceptible.

### 4.5 Set 4 : $\beta = 2$ , $c_0 = 0.01$ , $c_1 = 2$ , $\alpha = 1.5$ , $\sigma = 0.2$

#### 4.5.1 Contours de $U$ (HJB)

Les contours de  $U$  montrent une structure très différente, avec des gradients très faibles et une diffusion très large. Cela peut être dû à une congestion très forte ( $\alpha = 1.5$ ) et à une volatilité très élevée ( $\sigma = 0.2$ ). Les décisions prises en début de période ont un impact très diffus, ce qui se traduit par une variation très douce de  $U$  avec  $x$ .

#### 4.5.2 Contours de $M$ (Fokker-Planck)

Les contours de  $M$  montrent une diffusion très faible, avec une transition très nette entre les deux nœuds. Cela peut être dû à une congestion très forte ( $\alpha = 1.5$ ) et à une volatilité très élevée ( $\sigma = 0.2$ ). La distribution initiale reste très concentrée, ce qui rend la transition très marquée.

#### 4.6 Set 5 : $\beta = 2$ , $c_0 = 1$ , $c_1 = 3$ , $\alpha = 2$ , $\sigma = 0.002$

##### 4.6.1 Contours de $U$ (HJB)

Les contours de  $U$  montrent une structure très différente, avec des gradients très faibles et une diffusion très large. Cela peut être dû à une congestion très forte ( $\alpha = 2$ ) et à une volatilité très faible ( $\sigma = 0.002$ ). Les décisions prises en début de période ont un impact très diffus, ce qui se traduit par une variation très douce de  $U$  avec  $x$ .

##### 4.6.2 Contours de $M$ (Fokker-Planck)

Les contours de  $M$  montrent une diffusion très faible, avec une transition très nette entre les deux nœuds. Cela peut être dû à une congestion très forte ( $\alpha = 2$ ) et à une volatilité très faible ( $\sigma = 0.002$ ). La distribution initiale reste très concentrée, ce qui rend la transition très marquée.

#### 4.7 $U$ et $M$ en fonction du temps

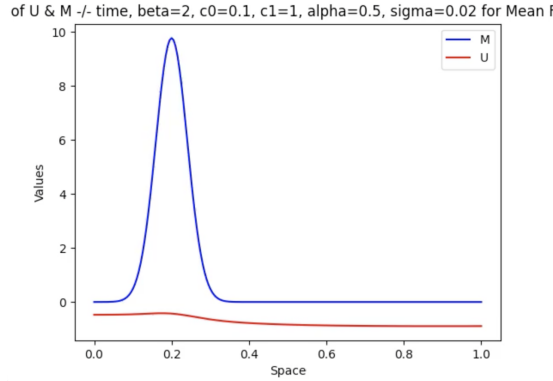


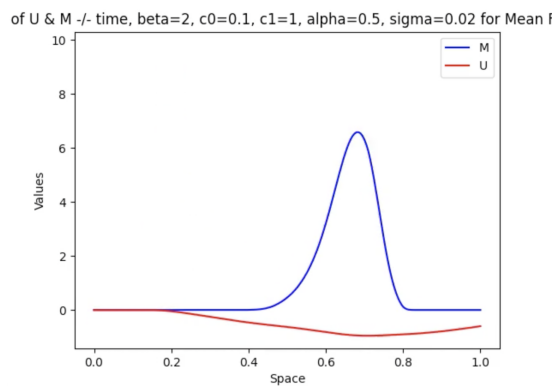
Figure 5:  $U$  et  $M$  à l'instant initial

Pour le set de paramètre 1, on a une congestion faible, ainsi, la densité de probabilité  $M$ , à une forme de gaussienne, et sa moyenne converge vers le minimum de la fonction  $U$ .

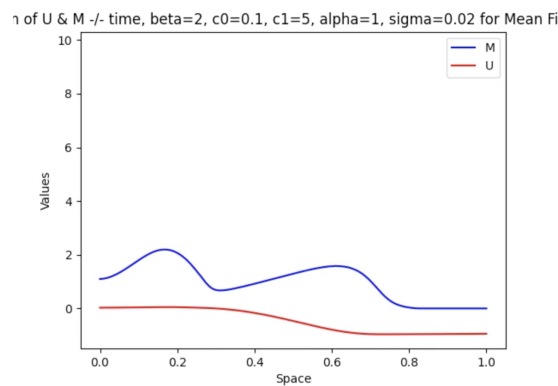
Au contraire pour le set de paramètre 2, la congestion est beaucoup plus forte, et on observe une sorte de superposition de 2 gaussiennes, ainsi il y a une sorte de double régime.

Pour le set de paramètre 5, la volatilité est beaucoup plus faible que les autres cas, la vitesse de déplacement vers le minimum est beaucoup plus faible, il y a apparition claire de 2 régimes.

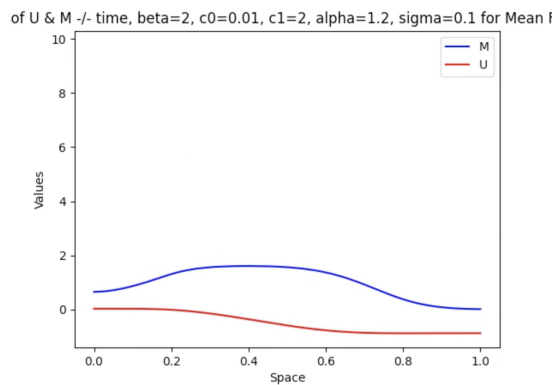
Pour le set de paramètre 3, la volatilité est élevée, la vitesse de déplacement est rapide, cependant les joueurs n'ont pas le temps de prendre une décision.



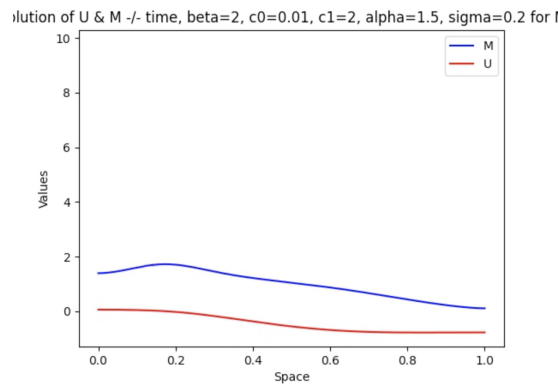
(a) U et M à l'instant final pour le set 1 de paramètres



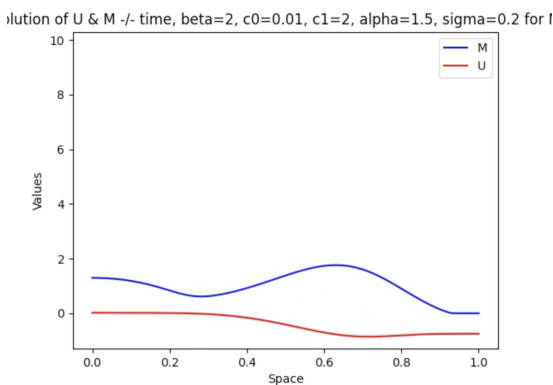
(b) U et M à l'instant final pour le set 2 de paramètres



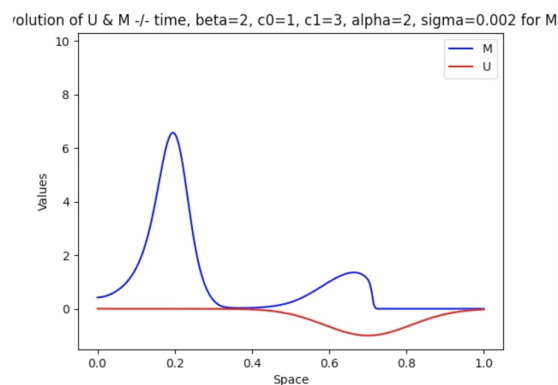
(c) U et M à un instant intermédiaire pour le set 3 de paramètres



(d) U et M à un instant intermédiaire pour le set 4 de paramètres



(e) U et M à l'instant final pour le set 4 de paramètres



(f) U et M à l'instant final pour le set 5 de paramètres

## 5 Mean Field Control

Alors que les MFG étudient les équilibres de Nash dans des jeux avec un nombre infini de joueurs égoïstes, le MFC suppose que tous les agents suivent une stratégie commune optimisée pour un objectif global. Cette approche est utile, par exemple, lorsqu'un planificateur contrôle une foule d'agents (comme des robots) qui interagissent via des quantités globales ou locales.

Le comportement asymptotique des agents est décrit par la théorie de McKean-Vlasov, où la dynamique d'un agent représentatif dépend de la distribution statistique des états (le champ moyen). Contrairement aux MFG, où les stratégies des autres joueurs sont fixes, dans le MFC, les perturbations de la stratégie commune affectent directement le champ moyen. Cela conduit à un problème de contrôle où l'objectif est d'optimiser une fonction de coût globale.

Le MFC donne lieu à un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) de type forward-backward, similaire à celui des MFG, mais qui peut être interprété comme les conditions d'optimalité d'un problème de minimisation. Ces problèmes ont des applications en finance et en gestion des risques, notamment lorsque la distribution des états influence la dynamique ou la fonction de coût.

Le système d'équations aux dérivées partielles (EDP) qui apparaît dans le cadre du contrôle de champ moyen est le suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{1}{\beta} \frac{\left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^\beta}{(c_0 + c_1 m(t, x))^\alpha} - \frac{c_1 \alpha}{\beta} \frac{m(t, x) \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^\beta}{(c_0 + c_1 m(t, x))^{\alpha+1}} \\ = g(x) + \tilde{f}_0(m(t, x)) + m(t, x) \tilde{f}'_0(m(t, x)), \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m(t, \cdot)}{(c_0 + c_1 m(t, \cdot))^\alpha} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right|^{\beta-2} \frac{\partial}{\partial x} u(t, \cdot) \right) (x) = 0, \quad \text{dans } (0, T] \times \Omega, \quad (13)$$

avec les conditions aux limites de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0, \quad \text{sur } (0, T), \quad (14)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial m}{\partial x}(t, 1) = 0, \quad \text{sur } (0, T), \quad (15)$$

et les conditions finales et initiales :

$$u(T, x) = \phi(x), \quad m(0, x) = m_0(x), \quad \text{dans } \Omega. \quad (16)$$

Il peut être démontré que si  $\beta > 1$ ,  $0 \leq \alpha < 1$  et  $\tilde{f}_0$  est convexe, alors il existe une unique solution à ce système.

Numériquement, on a une situation très semblable, cependant il faudra changer la matrice Jacobienne pour la résolution de HJB



## 5.1 Matrice Jacobienne 2

Soit  $\mathcal{F}_i$  la  $i$ -eme coordonnée de  $\mathcal{F}(U^n, U^{n+1}, M^{n+1})$

Après calculs, on obtient un matrice jacobienne tridiagonale. On a alors:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U_{i-1}^n} = -\frac{\nu}{h^2} - \left( \frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} + \frac{c_1 \alpha M_i}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^{\alpha+1}} \right) (U_i^n - U_{i-1}^n)_+ \left( (U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2 \right)^{\beta/2-1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U_i^n} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\nu}{h^2} + \left( \frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} - \frac{c_1 \alpha M_i}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^{\alpha+1}} \right) \left( (U_{i+1}^n - U_i^n)_- + (U_i^n - U_{i-1}^n)_+ \right) \left( (U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2 \right)^{\beta/2-1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U_{i+1}^n} = -\frac{\nu}{h^2} - \left( \frac{1}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^\alpha} + \frac{c_1 \alpha M_i}{h^\beta (c_0 + c_1 M_i)^{\alpha+1}} \right) (U_{i+1}^n - U_i^n)_- \left( (U_{i+1}^n - U_i^n)^2 + (U_i^n - U_{i-1}^n)^2 \right)^{\beta/2-1}$$

## 6 Comparaison avec le Contrôle à Champ Moyen

Nous avons également implémenté un schéma numérique pour le problème de contrôle à champ moyen (MFC) et comparé les résultats avec ceux du MFG. Les différences entre les deux approches sont discutées. Nous avons tracé les courbes de  $U$  et  $M$  pour les deux types de Mean Field avec les mêmes paramètres :  $\beta = 2, c_0 = 0.1, c_1 = 1, \alpha = 0.5$  et  $\sigma = 0.02$ .

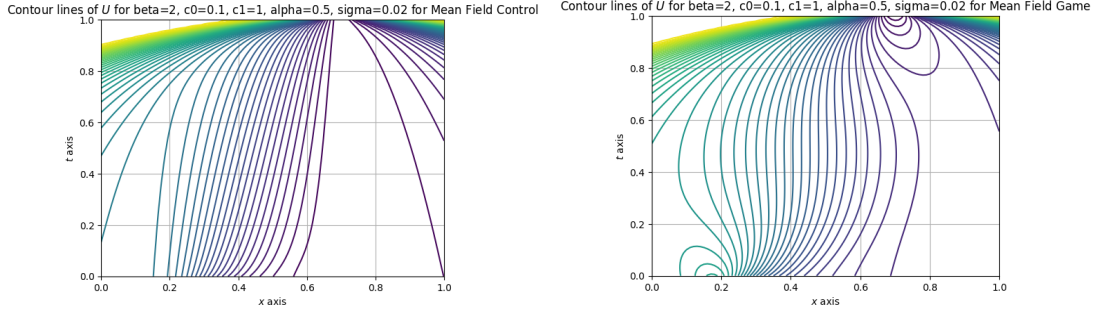


Figure 7: Solution de HJB pour MFC (gauche) Solution de HJB pour MFG (droite)

On peut voir que les deux figures sont similaires pour  $t=1$  ce qui peut s'expliquer par la même initialisation, mais on voit que dans le cas MFG, il y a des boucles revenant à cet état et les lignes étant plus verticales qu'en MFC ne possédant pas de boucles et ayant des traits bien plus verticaux pour  $t$  décroissant. On peut interpréter cela de cette façon : En MFC, le contrôle optimal est global et agit sur l'ensemble des joueurs, ce qui peut empêcher ces boucles et créer une dynamique plus linéaire vers la solution finale. De plus, en MFG, les traits sont plus arrondis car chaque joueur optimise son propre objectif en fonction des autres joueurs, ce qui donne une diffusion plus progressive de l'information et des stratégies plus hétérogènes.

On trace aussi les fonctions de densité  $M$  solutions de Fokker-Planck:

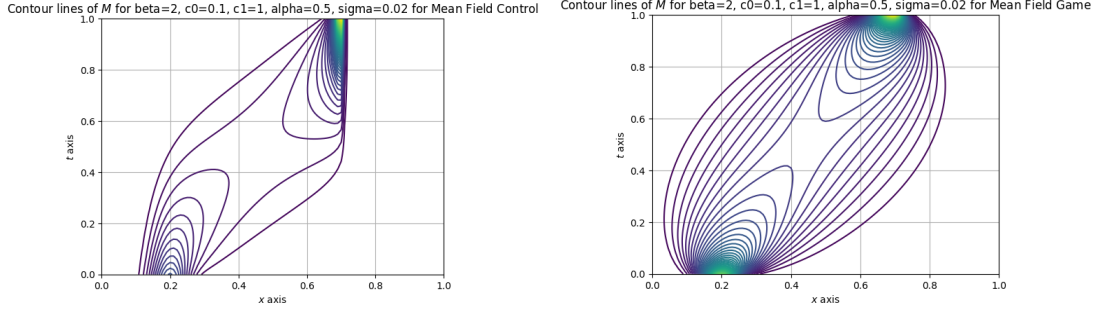


Figure 8: Solution de Fokker-Planck pour MFC (gauche) Solution de Fokker-Planck pour MFG (droite)

On voit que MFC impose une forte centralisation des trajectoires : les agents sont poussés vers une cible unique d'une manière plus contrainte. Tandis que, MFG laisse plus de flexibilité : chaque agent adapte son comportement en fonction des autres, ce qui donne des trajectoires plus naturelles et moins strictement dirigées.

## 7 Réponses aux questions théoriques

### Question 1 : Conservation de la masse de $M^n$

La masse totale  $\sum_{i=0}^{N_h-1} M_i^n$  est conservée grâce aux conditions aux limites de Neumann. L'équation de Fokker-Planck discrète (19a) s'écrit :

$$(D_t M_i)^n - \nu(\Delta_h M^{n+1})_i - \mathcal{T}_i(U^n, M^{n+1}, \widetilde{M}^{n+1}) = 0.$$

En sommant sur tous les indices spatiaux  $i$ , les termes de divergence discrète  $\mathcal{T}_i$  et le terme de diffusion  $\sum_i (\Delta_h M^{n+1})_i$  s'annulent par sommation par parties discrète, grâce aux conditions de Neumann homogènes (19b)-(19c). Ainsi, la masse totale reste constante à chaque pas de temps :

$$\sum_{i=0}^{N_h-1} M_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{N_h-1} M_i^n.$$

### Question 2 : Unicité dans l'équation HJB discrète

Supposons deux solutions  $U^n$  et  $V^n$  de l'équation HJB discrète (17a)-(17d). Notons  $W^n = U^n - V^n$ . Au temps terminal  $n = N_T$ ,  $W^{N_T} = 0$  d'après (17d). Par récurrence descendante, supposons  $W^{n+1} = 0$ . L'équation (17a) pour  $U^n$  et  $V^n$  donne :

$$-\frac{W^n}{\Delta t} - \nu \Delta_h W^n + \hat{H}([\nabla_h U^n]_i, M_i^{n+1}) - \hat{H}([\nabla_h V^n]_i, M_i^{n+1}) = 0.$$

Par monotonie du Hamiltonien discret  $\hat{H}$  (propriété  $\hat{\mathbf{H}}_1$ ), si  $W^n$  atteint un maximum positif en  $(n_0, i_0)$ , alors  $\hat{H}([\nabla_h U^{n_0}]_{i_0}, \cdot) \leq \hat{H}([\nabla_h V^{n_0}]_{i_0}, \cdot)$ , ce qui contredit l'équation. Ainsi,  $W^n \leq 0$ . En répétant

l'argument pour  $-W^n$ , on montre  $W^n \geq 0$ . Par double inégalité,  $W^n = 0$ , ce qui prouve l'unicité de la solution.

### Question 3 : Unicité dans l'équation KFP discrète

Nous savons que trouver  $M_{n+1}$  étant donné  $M_n$  et  $(U_n)_n$  revient à résoudre l'équation 29 :

$$(I_{N_h} - \nu \Delta t D_x^2 + \Delta t (JH)^T) M_{n+1} = M_n$$

Nous noterons :

$$B = M_n$$

Nous allons montrer que  $B^T$  est une  $M$  matrice.

Tout d'abord, pour  $B_{i,i}^T = B_{i,i} > 0$  pour tout  $0 \leq i < N_h$ . En effet :

$$B_{i,i} = 1 - \nu \Delta t \cdot \frac{1}{h^2} + \Delta t \cdot (JH)_{i,i}^T \geq 1 + \nu \Delta t \cdot \frac{1}{h^2} + \Delta t \cdot (JH)_{i,i}^T$$

ce qui est strictement positif en rappelant la forme de  $JH$  dans les équations (19) - (21).

Ensuite, pour  $j \neq i$ , on a :

$$B_{i,j}^T \leq 0$$

En effet :

$$B_{i,j}^T = -\nu \Delta t \cdot \frac{1}{h^2} + \Delta t \cdot (JH)_{i,j} \leq 0$$

pour la même raison.

Enfin, la propriété  $\sum_{j=0}^{N_h-1} B_{i,j}^T > 0$  provient du fait que la somme des coefficients sur n'importe quelle ligne de  $JH$  est nulle (ce qui est également vrai pour  $D_x^2$ ), ce qui entraîne :

$$\sum_{j=0}^{N_h-1} B_{i,j}^T = 1 - \nu \Delta t \cdot 0 + \Delta t \cdot 0 > 0$$

Ainsi,  $B^T$  possède la propriété  $M$ , ce qui implique que  $B^T$  est inversible, et donc  $B$  l'est aussi. Par conséquent, le système  $BM_{n+1} = M_n$  admet une solution unique  $M_{n+1} \in \mathbb{R}^{N_h}$ . L'équation KFP possède donc une solution unique.

### Question 4 : Positivité de $M^n$

D'après la question précédente, nous savons que  $(M_n)_n$  satisfait :

$$BM_{n+1} = M_n,$$

avec  $B^T$  une matrice  $M$ . Il en résulte que les coefficients de  $(B^T)^{-1}$  sont tous non négatifs, et donc ceux de  $B^{-1}$  le sont aussi.

Ainsi, l'égalité  $M_{n+1} = B^{-1}M_n$  implique que, chaque fois que  $M_n \geq 0$ , nous avons également  $M_{n+1} \geq 0$ .

Enfin, en partant de  $M_0 \geq 0$ , nous obtenons  $M_1 \geq 0$ , puis  $M_2 \geq 0$ , et ainsi de suite. Par conséquent,  $M_0 \geq 0$  implique que  $M_n$  est positif pour tout  $n$ .

## 8 Conclusion

Ce projet a permis de simuler numériquement des jeux à champ moyen avec effets de congestion. Les résultats obtenus sont en accord avec la théorie et montrent l'importance des effets de congestion dans la dynamique des joueurs. La comparaison avec le contrôle à champ moyen a également été instructive.

## Annexe

### Codes et Scripts

### Références

- Y. Achdou et I. Capuzzo-Dolcetta, *Mean field games: numerical methods*, SIAM J. Numer. Anal., 48 (2010), pp. 1136-1162.
- J.-M. Lasry et P.-L. Lions, *Mean field games*, Jpn. J. Math., 2 (2007), pp. 229-260.