UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

CyC - Practica 1

Facundo Tomatis

(Ejercicio 1)

Consigna:
Probar la siguiente ley distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Respuesta:
$A \cup (B \cap C)$
$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$
$x \in A \vee x \in (B \wedge C)$
$x \in (A \vee B) \wedge x \in (A \vee C)$
$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

(Ejercicio 2)

Consigna:
Probar la siguiente ley de Morgan: El Complemento de A unión B es igual al complemento de A intersección el complemento de B
Respuesta:
$\overline{(A \cup B)}$
$\neg(x \in A \vee x \in B)$
$x \notin A \wedge x \notin B$
$\overline{A} \cap \overline{B}$

(Ejercicio 3)

Consigna:
Probar que el complemento del complemento de A es igual a A
Respuesta:
$\neg\neg A$
$\neg(x \notin A)$
$x \in A$
A

(Ejercicio 4)

Consigna:
Sea A el conjunto de los números naturales tales que, si son mayores que 5 o bien terminan en 5, entonces contienen algún dígito 1 ó 2

a) Cuáles de los siguientes números pertenecen a A:
3, 5, 10, 15, 30, -10

b) Expresar el enunciado como una fórmula proposicional donde m significa "mayores que 5", t es "terminan en 5", u es "contiene algún dígito 1" y d es "contiene algún dígito 2"

c) Transformar la fórmula del inciso anterior de manera que no tenga una implicación y aplicar una ley de Morgan al resultado. Expresarlo en una frase.

Respuesta:

a) 3, 10, 15

b) $(m \vee t) \rightarrow (u \vee d)$

c) $\neg(m \vee t) \vee (u \vee d) = (\neg m \wedge \neg t) \vee (u \vee d)$
Numeros tales que no sean mayores que 5 y no terminen en 5 o que contengan un digito 1 o 2

(Ejercicio 5)

Consigna:
Sean: $X = \{x/x \in \mathbb{N}$, x es impar$\}$
$Y = \{y/y \in \mathbb{N}$, y es primo$\}$
$Z = \{z/z \in \mathbb{N}$, z es múltiplo de 3$\}$
Describir cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $X \cap Y$

b) $X \cap Z$

c) $Y \cap Z$

d) $Z - Y$

e) $X - (Y \cap Z)$

f) $(Y \cap Z) - X$

g) $X \cup Y$

Respuesta:

a) $X \cap Y = Y$

b) $X \cap Z = \{w/w \in \mathbb{N}, w = 3x, x \in \mathbb{N}, x = 2k+1, k \in \mathbb{N}\}$

c) $Y \cap Z = \{3\}$

d) $Z - Y = Z - \{3\}$

e) $X - (Y \cap Z) = X - \{3\}$

f) $(Y \cap Z) - X = \varnothing$

g) $X \cup Y = X$

(Ejercicio 6)

Consigna:
Calcular los conjuntos de partes en los siguientes casos:

a) $\varnothing$

b) $\{a, b, c\}$

c) $\{\varnothing\}$

d) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

e) $\{a, \{b, c\}\}$

Respuesta:

a) $\rho(\varnothing) = \{\{\}, \{\varnothing\}\}$

b) $\rho(\{a, b, c\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

c) $\rho(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

d) $\rho(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\{\}, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

e) $\rho(\{a, \{b, c\}\}) = \{\{\}, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}$

(Ejercicio 7)

Consigna:
Presentar una lista con todos los elementos en cada uno de los conjuntos siguientes:

a) $\{x, y\} \times \{a, b, c\}$

b) $\{a, b, c\} \times \{x, y\}$

c) $\{x, y\} \times \{y, x\}$

d) $\{x, y\}^2 \times \{\}$

e) $\{\}^{10} \times \{2, 3, 4\}^{20}$

f) $\{1\}^5$

g) $\{1, 2\} \times \{a\} \times \{a, b\}$

Respuesta:

a) $A = \{x, y\}, B = \{a, b, c\}$
$\{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$

b) $\{(x, y)/x \in B \wedge y \in A\}$

c) $\{(x, y), (x, x), (y, y), (y, x)\}$

d) $\{\}$

e) $\{\}$

f) $\{(1,1,1,1,1)\}$

g) $\{(1,(a,a)),(1,(a,b)),(2,(a,a)),(2,(a,b))\}$

(Ejercicio 8)

Consigna:
¿Cuál es el cardinal de $A \times B$ si $|A| = n$ y $|B| = m$?
Respuesta:
$|A \times B| = n \times m$

(Ejercicio 9)

Consigna:
Demostrar por inducción que si A es un conjunto finito $|A| = n \implies |\rho(A)| = 2^n$
Respuesta:
caso base n=0
$A = \varnothing, \rho(\varnothing)| = 2^0 = 1 = 2^n$
Hi:
$A' = A \cup \{n+1\}$
$|A'| = n+1$
$\rho(A') = \rho(A) \cup \{x/x = \{n+1\} \cup k, k \in \rho(A)\}$
$|\rho(A')| = |\rho(A)| + |\{x/x = \{n+1\} \cup k, k \in \rho(A)\}|$
$|\rho(A')| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

(Ejercicio 10)

Consigna:
Mostrar que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$
Respuesta:
Probar **10.1** $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^+|$
y **10.2** $|\mathbb{N}^+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$
para **10.2** es simple encontra una funcion inyectiva ya que se puede utilizar la funcion identidad.
para **10.1** se puede utilizar el orden canonico de las tuplas formadas para mapear la suma de los mismos: el primero (0,0) a 0, (0,1) y (1,0) a 1, etc
por lo que queda demostrado que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$

(Ejercicio 11)

Consigna:
Mostrar que $|\mathbb{Q}^+| \leq |\mathbb{N}|$, siendo $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los racionales positivos
Respuesta:
Siendo i, j el numerador y el denominador respectivamente se puede utilizar la siguiente funcion para obtener un numero entero a partir de estos:
$f/f : \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$

(Ejercicio 12)

Consigna:
Mostrar que la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de R a 0, 1 es menor o igual a la del conjunto de todas las funciones que van:

a) de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$

b) de $\mathbb{R}$ a $\{a, b, c\}$

Respuesta:
Probar que:
$|\{f/f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}\}| \leq |\{f/f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}\}|$
es facil de demostrar gracias a la funcion identidad, las funciones que van de reales a 0,1 son un subconjunto de las funciones de reales a naturales
$|\{f/f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}\}| \leq |\{f/f : \mathbb{R} \to \{a, b, c\}\}|$
se puede utilizar una funcion que convierta el 0 a 'a' y 1 a 'b'

(Ejercicio 13)

Consigna:
Dar un ejemplo de 2 conjuntos disjuntos no vacíos, A y B tales que:

a) $|A| < |B| < |A \cup B|$

b) $|A| < |B| = |A \cup B|$

c) $|A| = |B| = |A \cup B|$

Respuesta:

a) $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$

b) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{R} - \mathbb{N}$

c) $A = \{x/x \text{ es par}\}, B = \{x/x \text{ es impar}\}$

(Ejercicio 14)

Consigna:
Mostrar que $|\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}| = |\mathbb{N}|$
Respuesta:
$|\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}| \leq |\mathbb{N}|$
usar funcion identidad
$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} - \{7, 9, 15, 34, 21, 344, 990\}|$
g(n)=n+1000

(Ejercicio 15)

Consigna:
¿El conjunto de todas las frases en el idioma español es contable o incontable? Justificar.
Respuesta:
A = frases en el idioma español
$|A| \leq |\mathbb{N}|$
utilizar el orden canonico de las frases para convertir cada frase formada a un numero unico segun su orden

---

(Ejercicio 16)

Consigna:
Dar ejemplos para mostrar que la intersección de 2 conjuntos incontables puede ser

a) finita

b) infinita contable

c) incontable

Respuesta:

a) $(\mathbb{R} - \mathbb{R}^{+}) \cap \mathbb{R}^{+}$

b) $\mathbb{R} \cap (\rho(\mathbb{N}) \cup \mathbb{N})$

c) $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}$

(Ejercicio 17)

Consigna:
Mostrar que la unión de 2 conjuntos contables es contable
Respuesta:
$|\mathbb{N} \cup \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$
$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

(Ejercicio 18)

Consigna:
Muestre que, si X es un conjunto incontable e Y es un conjunto contable, entonces X-Y debe ser incontable
Respuesta:
$|\mathbb{R} - \mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$
$|\mathbb{R} - \mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$
usando identidad
$|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} - \mathbb{N}|$
usando funcion que no permita los naturales ej: $\frac{n}{n+1}$

(Ejercicio 19)

Consigna:
Mostrar que un conjunto puede tener la misma cardinalidad que un subconjunto propio de sí mismo.
Respuesta:
P es el conjunto de los naturales pares
$|P| = |\mathbb{N}|$
$|P| \leq |\mathbb{N}|$
usando la funcion identidad
$|\mathbb{N}| \leq |P|$
usando una funcion que convierta el natural a un numero par ej: $f(n) = n \times 2$