UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

CyC - Practica 6

Facundo Tomatis

(Ejercicio 1)

Consigna: Determinar cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas:

a) $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

b) $n^3 \in O(n^2)$

c) $n^2 \in \Omega(n^3)$

d) $2^n \in \Theta(2^{n+1})$

e) $n! \in O((n+1)!)$

f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, f(n) \in O(n) \implies [f(n)]^2 \in O(n^2)$

g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, f(n) \in O(n) \implies 2^{f(n)} \in O(2^n)$

h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, k \in \mathbb{R}^{\geq 0}, kf(n) \in O(f(n))$

i) Para todo polinomio $p(n)$ de grado m, $p(n) \in O(n^m)$

j) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta \implies n^\alpha \in O(n^\beta)$

Respuesta:

a) $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$ ☑ por $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/g(n) \in R^+ \implies f(n) \in \Theta(g(n))$

b) $n^3 \in O(n^2)$ ☒ por $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/g(n) \to \infty \implies f(n) \notin O(g(n))$

c) $n^2 \in \Omega(n^3)$ ☒ por $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = 0 \implies f(n) \notin \Omega(g(n))$

d) $2^n \in \Theta(2^{n+1})$ ☑ por $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/g(n) \in \mathbb{R}^+ \implies f(n) \in \Theta(g(n))$

e) $n! \in O((n+1)!)$ ☑ por $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = 0 \implies f(n) \in O(g(n))$

f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, f(n) \in O(n) \implies [f(n)]^2 \in O(n^2)$ ☑ por propiedad de potencias

g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, f(n) \in O(n) \implies 2^{f(n)} \in O(2^n)$ ☒
Contraejemplo: $f(n) = 2n \in O(n) \implies 2^{2n} \leq c * 2^n$ que es absurdo ya que a medida que n crezca $2^{2n} > c * 2^n$

h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, k \in \mathbb{R}^{\geq 0}, k * f(n) \in O(f(n))$ ☑
$k * f(n) \leq p * f(n), p = c + k, c \in \mathbb{R}^{\geq 0} \therefore k * f(n) \in O(f(n))$

i) Para todo polinomio $p(n)$ de grado m, $p(n) \in O(n^m)$ ☑
si el coeficiente principal es positivo se puede probar por regla del maximo $[O(f(n) + g(n)) = O(max(f(n), g(n)))]$ o si no por limite

j) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta \implies n^\alpha \in O(n^\beta)$ ☑ por limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)/g(n) = \mathbb{R}^{\geq 0} \implies f(n) \in O(g(n))$

(Ejercicio 2)

Consigna: Probar que se cumplen las siguientes propiedades para $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

- Reflexividad:
  - **a)** $f(n) \in O(f(n))$
  - **b)** $f(n) \in \Theta(f(n))$
  - **c)** $f(n) \in \Omega(f(n))$
- Transitividad
  - **d)** Si $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(h(n)) \implies f(n) \in O(h(n))$
  - **e)** Si $f(n) \in \Theta(g(n))$ y $g(n) \in \Theta(h(n)) \implies f(n) \in \Theta(h(n))$
  - **f)** Si $f(n) \in \Omega(g(n))$ y $g(n) \in \Omega(h(n)) \implies f(n) \in \Omega(h(n))$
- Simetria
  - **g)** $f(n) \in \Theta(g(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$
- Simetria transpuesta
  - **h)** $f(n) \in O(g(n)) \iff g(n) \in \Omega(f(n))$

Respuesta:

a) Por definicion $O(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ / c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $t(n) \leq cf(n), n \geq n_0\}$, va estar incluida $f(n)$ ya que incluye todas las mayores o iguales a la constante c y esta contiene a la funcion donde $c = 1$ por lo que $f(n) \in O(f(n))$

b) Por definicion $\Omega(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ / c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $t(n) \geq cf(n), n \geq n_0\}$ por lo que este conjunto de funciones va a tener a la misma $f(n)$ debido a que hay una funcion donde $c = 1$ y las infinitas menores sin incluir el 0 $(0 < c \leq 1)$

c) Por definicion $\Theta(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ / c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $c_1 f(n) \leq t(n) \leq c_2 f(n), n \geq n_0\}$ existe una funcion que sea $c_1 = c_2 = 1$ por lo que $f(n)$ esta incluida.

d) $f(n) \in O(g(n))$ si $\exists(c_0)$ tq $f(n) \leq c_0 g(n), n \geq n_0$ **d.1**
$g(n) \in O(h(n))$ si $\exists(c_1)$ tq $g(n) \leq c_1 h(n), n \geq n_1$ **d.2**
$f(n) \in O(h(n))$ si $\exists(c_2)$ tq $f(n) \leq c_2 h(n), n \geq n_2, c_2 = c_0 * c_1, n_2 = max(n_0, n_1)$ **d.3**

e) Si $d.1$ y $f.1$ entonces $f(n) \in \Theta(g(n))$ **e.1**
Si $d.2$ y $f.2$ entonces $g(n) \in \Theta(h(n))$ **e.2**
Si $d.3$ y $f.3$ y $e.1$ y $e.2$ entonces $f(n) \in \Theta(h(n))$

f) $f(n) \in \Omega(g(n))$ si $\exists(c_0)$ tq $f(n) \geq c_0 g(n), n \geq n_0$ **f.1**
$g(n) \in \Omega(h(n))$ si $\exists(c_1)$ tq $g(n) \geq c_1 h(n), n \geq n_1$ **f.2**
$f(n) \in \Omega(h(n))$ si $\exists(c_2)$ tq $f(n) \geq c_2 h(n), n \geq n_2, c_2 = c_0 * c_1, n_2 = max(n_0, n_1)$ **f.3**

g) Se utiliza la propiedad de simetria transpuesta demostrada en el inciso *(h)*
Si $f(n) \in \Theta(g(n)) \iff f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n)) \iff g(n) \in \Omega(f(n)) \wedge g(n) \in O(f(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$

h) Por definicion si $f(n) \in O(g(n)), f(n) \leq c * g(n), c \in \mathbb{R}^+$ por lo que $g(n) \geq 1/c * f(n)$ cumpliendo la definicion de $g(n) \in \Omega(f(n))$ y viceversa