

Fundamentos de Organización de Datos

Clase 6

Agenda

Arboles

- Binarios
- AVL
- Multicamino
- Balanceados

Arboles Balanceados

- Características
- B, B*, B+
- Operaciones
- Prefijos simples

Arboles → introducción

Problemas con los índices?

- La búsqueda binaria aun es costosa
- Mantener los índices ordenados es costoso
- Solución → RAM
- Objetivo → persistencia de datos

Árboles

- Estructuras de datos que permiten localizar en forma más rápida información de un archivo, tienen intrínsecamente búsqueda binaria

Arboles binarios

Que es un árbol binario?

- Estructuras de datos donde cada nodo tiene dos sucesores, a izquierda y a derecha

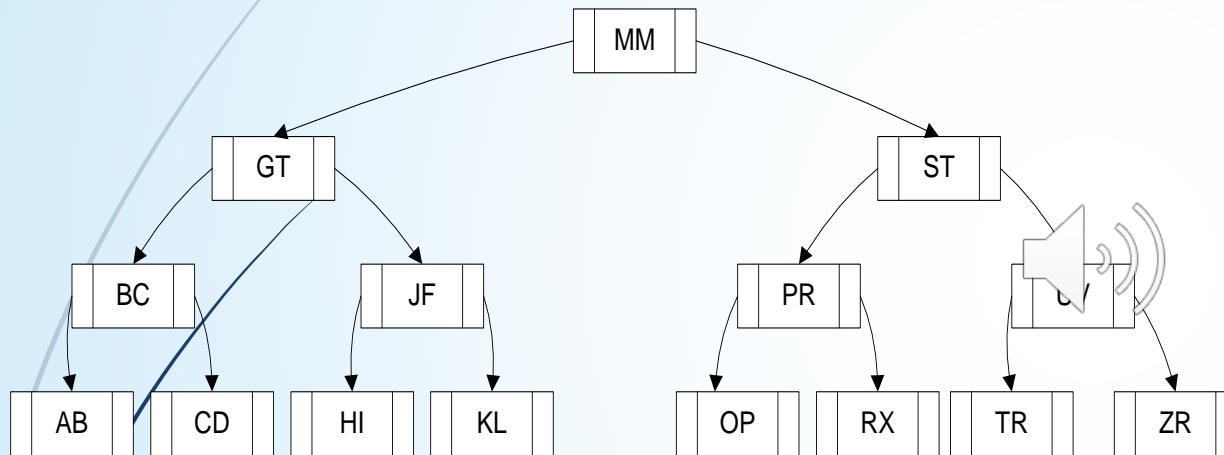
Un árbol binario, puede implantarse en disco?

- Como lograr la persistencia?

Ejemplo → supongamos estas claves

- MM ST GT PR JF BC UV CD HI AB KL TR OP RX ZR

Arboles binarios



Raíz → 0

| | Clave | Hijo izq | Hijo Der |
|---|-------|-------------|-------------|
| 0 | MM | 1 | 2 |
| 1 | GT | 3 | 4 |
| 2 | ST | 8 | 11 |
| 3 | BC | 5 | 6 |
| 4 | JF | 7 | 14 |
| 5 | AB | -1 | -1 |
| 6 | CD | -1 | -1 |
| 7 | HI | -1 | -1 |

| | Clave | Hijo izq | Hijo Der |
|----|-------|-------------|-------------|
| 8 | PR | 9 | 10 |
| 9 | OP | -1 | -1 |
| 10 | RX | -1 | -1 |
| 11 | UV | 12 | 13 |
| 12 | TR | -1 | -1 |
| 13 | ZR | -1 | -1 |
| 14 | KL | -1 | -1 |

Construccion de un arbol binario

```
Type arbol = record;
```

```
    elemento: tipodedato;
```

```
    hijo_izq, hijo_derecha: ^arbol;
```

```
End
```



```
Type arbol = record
```

```
    elemento: tipodedato;
```

```
    hijo_izq, hijo_derecha: integer;
```

```
End
```

```
indice: file of arbol;
```

Construccion de un arbol binario

Al principio

| elemento | H Izq | H Derecha |
|----------|-------|-----------|
|----------|-------|-----------|

Llega el primer elemento MM



Raiz --> 0

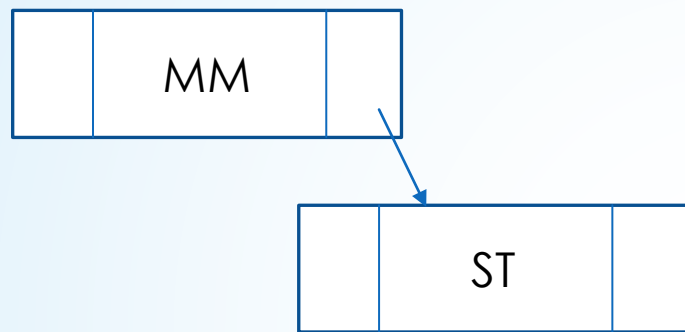
| | | |
|--|----|--|
| | MM | |
|--|----|--|

| | elemento | H Izq | H Derecha |
|---|----------|-------|-----------|
| 0 | MM | -1 | -1 |

Construccion de un arbol binario

Llega el elemento ST

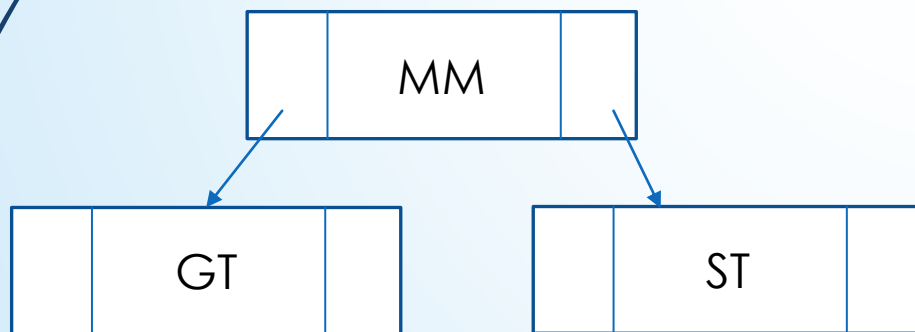
Raiz --> 0



| | elemento | H Izq | H Derecha |
|---|----------|-------|-----------|
| 0 | MM | -1 | -1 1 |
| 1 | ST | -1 | -1 |

Llega el elemento GT

Raiz --> 0

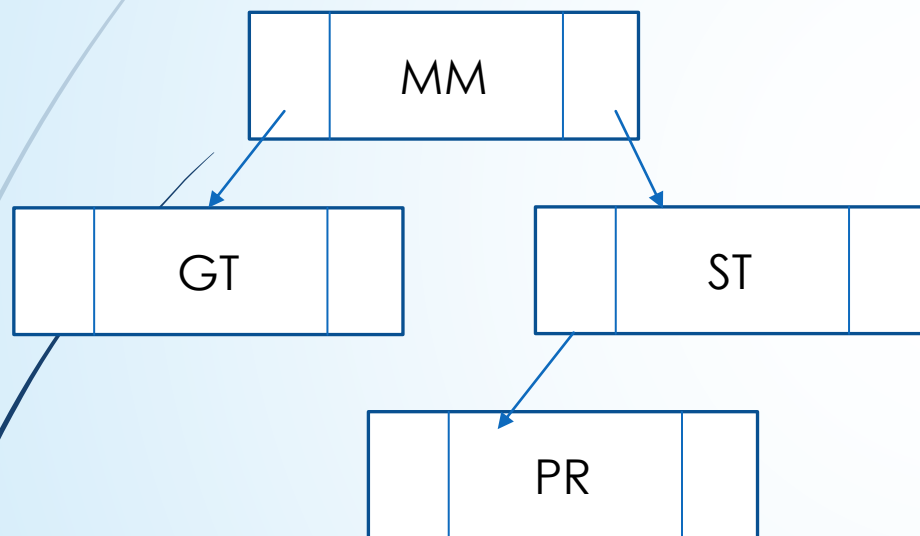


| | elemento | H Izq | H Derecha |
|---|----------|-------|-----------|
| 0 | MM | -1 2 | 1 |
| 1 | ST | -1 | -1 |
| 2 | GT | -1 | -1 |

Construccion de un arbol binario

Llega el elemento PR

Raiz --> 0



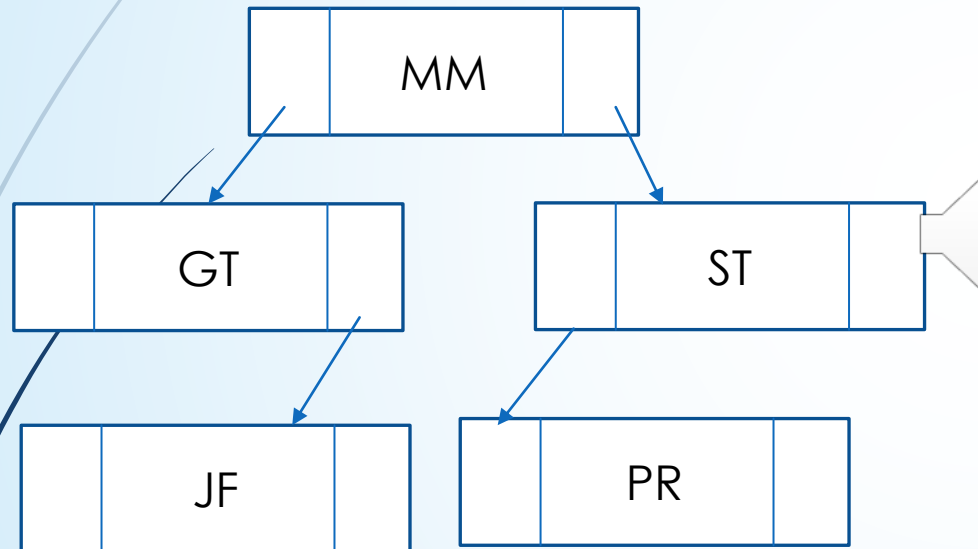
| | elemento | H Izq | H Derecha |
|---|----------|-------|-----------|
| 0 | MM | 2 | 1 |
| 1 | ST | -1 3 | -1 |
| 2 | GT | -1 | -1 |
| 3 | PR | -1 | -1 |



Construccion de un arbol binario

Llega el elemento JF

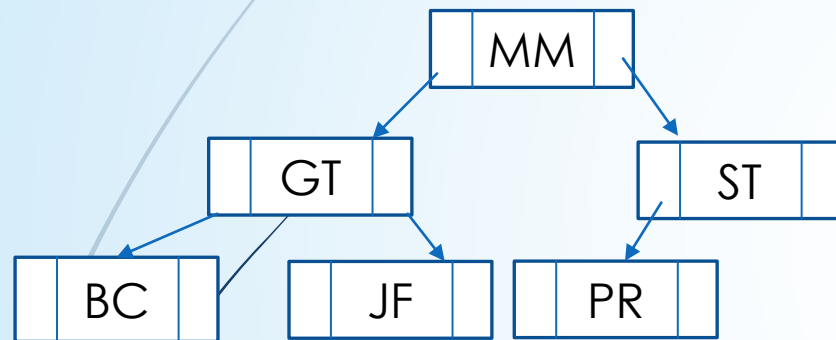
Raiz --> 0



0
1
2
3
4

| elemento | H Izq | H Derecha |
|----------|-------|-----------|
| MM | 2 | 1 |
| ST | 3 | -1 |
| GT | -1 | -1 4 |
| PR | -1 | -1 |
| JF | -1 | -1 |

Construccion de un arbol binario



Llega el elemento BC

Raiz --> 0



0

1

2

3

4

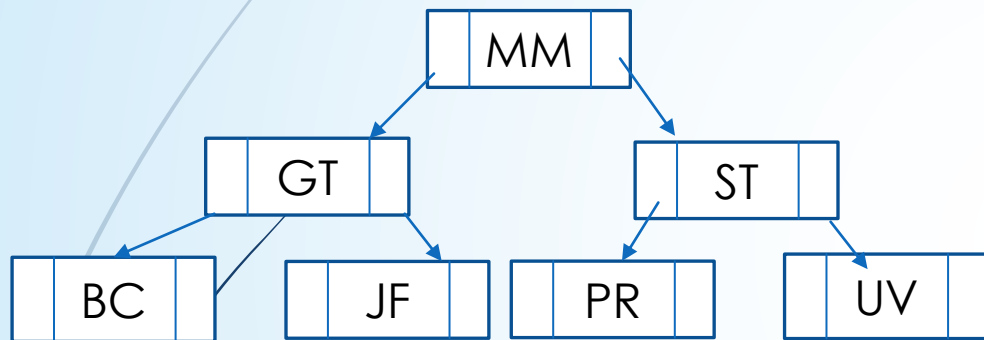
5

| elemento | H Izq | H Derecha |
|----------|-------|-----------|
| MM | 2 | 1 |
| ST | 3 | -1 |
| GT | -1 5 | 4 |
| PR | -1 | -1 |
| JF | -1 | -1 |
| BC | -1 | -1 |

Construccion de un arbol binario

Llega el elemento UV

Raiz --> 0



0

1

2

3

4

5

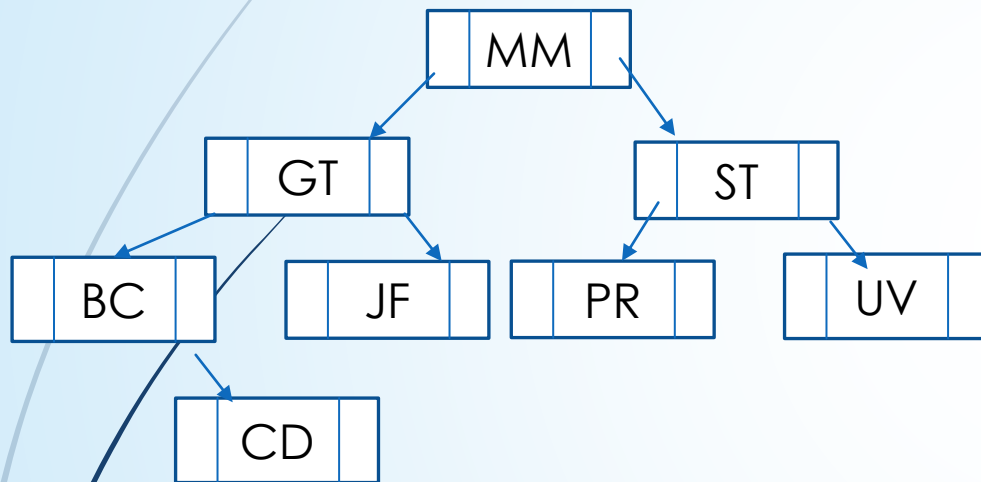
6

| elemento | H Izq | H Derecha |
|----------|-------|-----------|
| MM | 2 | 1 |
| ST | 3 | -1 6 |
| GT | 5 | 4 |
| PR | -1 | -1 |
| JF | -1 | -1 |
| BC | -1 | -1 |
| UV | -1 | -1 |

Construccion de un arbol binario

Llega el elemento CD

Raiz --> 0



0

1

2

3

4

5

6

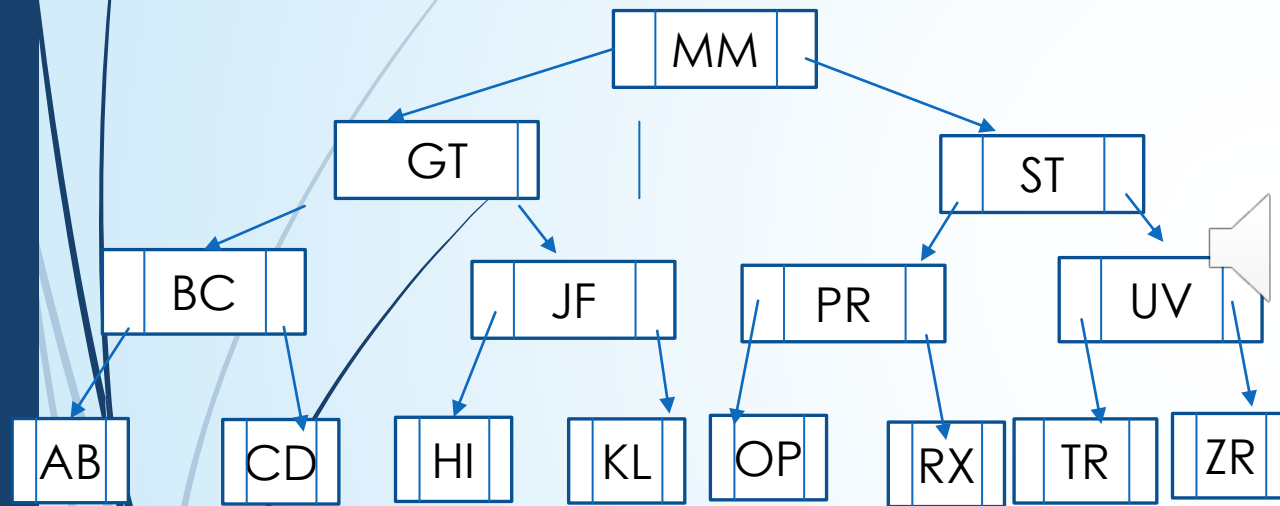
7

| elemento | H Izq | H Derecha |
|----------|-------|-----------|
| MM | 2 | 1 |
| ST | 3 | 6 |
| GT | 5 | 4 |
| PR | -1 | -1 |
| JF | -1 | -1 |
| BC | -1 | -1 7 |
| UV | -1 | -1 |
| CD | -1 | -1 |

Construccion de un arbol binario

Llega el elemento HI AB KL TR OP RX ZR

Raiz --> 0



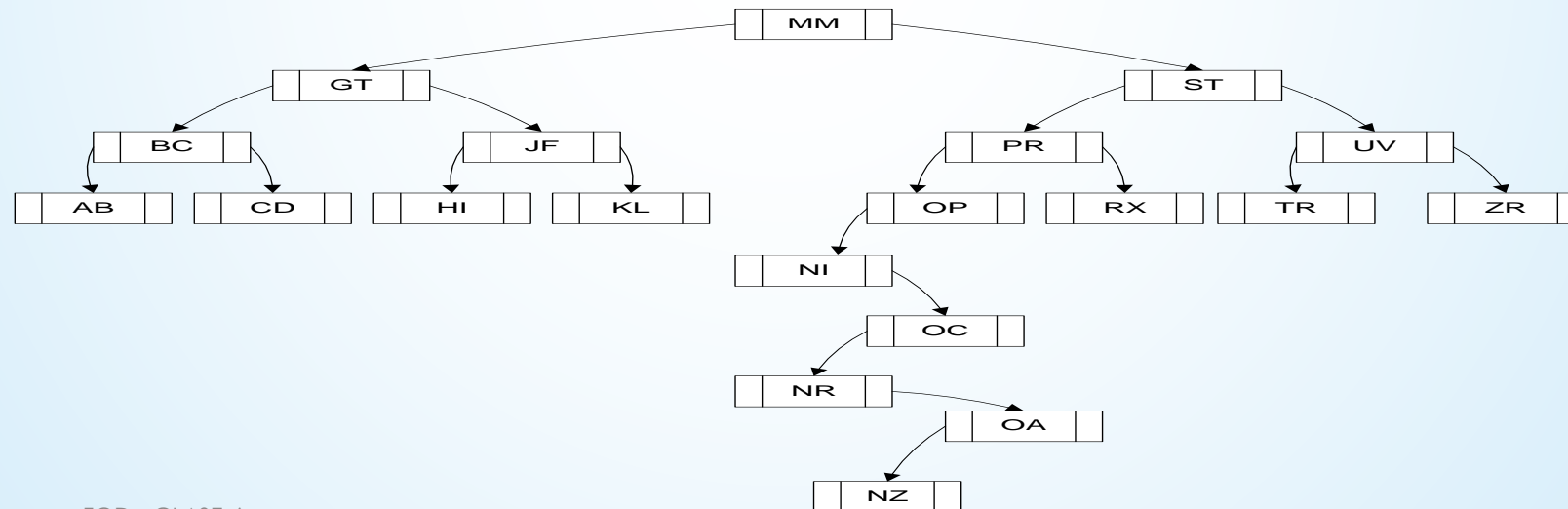
| | elemento | H Izq | H Derecha |
|----|----------|-------|-----------|
| 0 | MM | 2 | 1 |
| 1 | ST | 3 | 6 |
| 2 | GT | 5 | 4 |
| 3 | PR | -1 12 | -1 13 |
| 4 | JF | -1 8 | -1 10 |
| 5 | BC | -1 9 | 7 |
| 6 | UV | -1 11 | -1 14 |
| 7 | CD | -1 | -1 |
| 8 | HI | -1 | -1 |
| 9 | AB | -1 | -1 |
| 10 | KL | -1 | -1 |
| 11 | TR | -1 | -1 |
| 12 | OP | -1 | -1 |

Arboles binarios

Árbol balanceado: un árbol está balanceado cuando la altura de la trayectoria más corta hacia una hoja no difiere de la altura de la trayectoria más grande.

Inconveniente de los binarios: se **desbalancean** fácilmente.

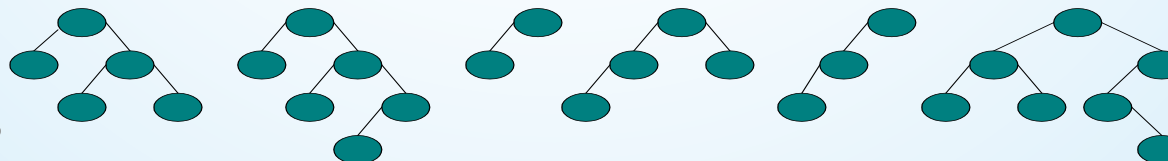
Supongamos que llegan las claves: OC NR OA NZ



Árboles AVL

Árboles AVL

- Árbol binario balanceado en altura (BA(1)) en el que las inserciones y eliminaciones se efectúan con un mínimo de accesos.
- Árbol balanceado en altura:
 - Para cada nodo existe un límite en la diferencia que se permite entre las alturas de cualquiera de los subárboles del nodo (BA(k)), donde k es el nivel de balance)
 - Ejemplos:



Arboles AVL y Binarios

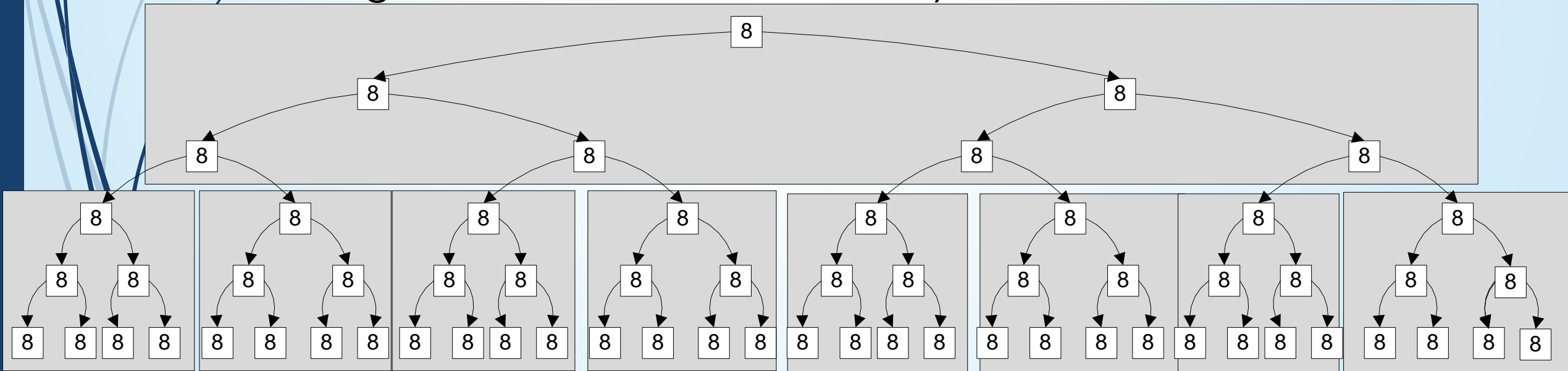
Características/Conclusiones

- Estructura que debe ser respetada
- Mantener árbol, rotaciones restringidas a un área local del árbol
 - Binario: → Búsqueda: $\log_2(N+1)$
 - AVL: → Búsqueda: $1.44 \log_2(N+2)$
 - Ambas performance por el peor caso posible

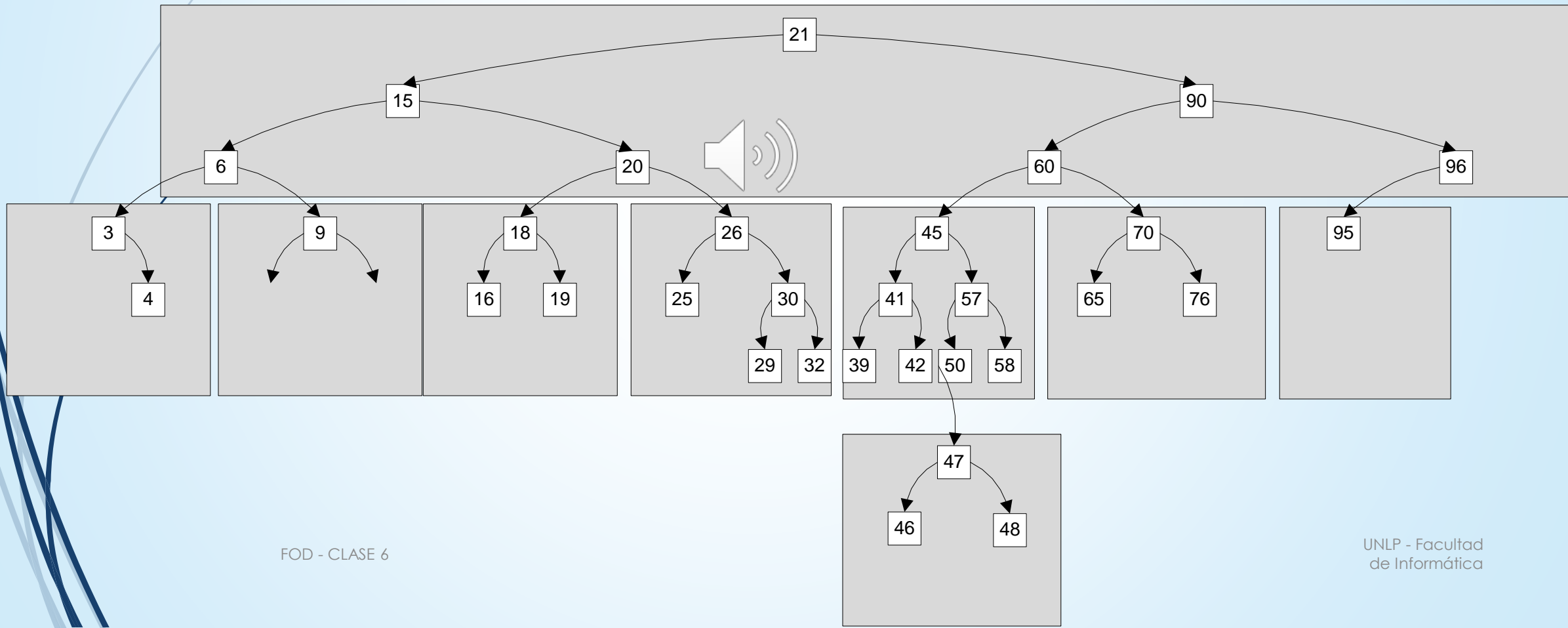
Árboles Binarios Paginados

Árboles binarios paginados

- Problemas de almacenamiento secundario, buffering, páginas de memoria, varios registros individuales, minimiza el número de accesos
- Problema: construcción descendente, como se elige la raíz?, cómo va construyendo balanceado?



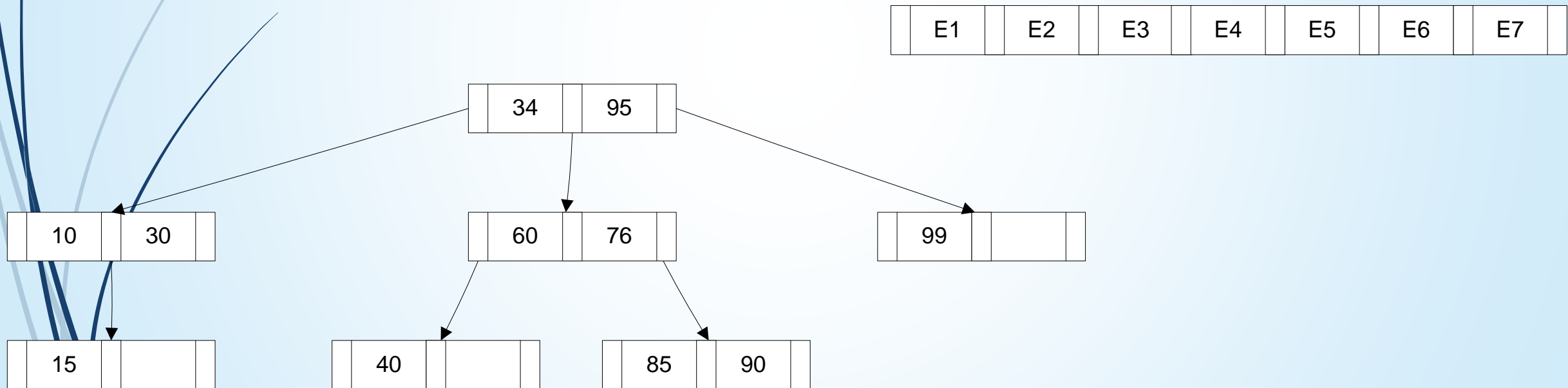
Árboles Binarios Paginados



Árboles multcamino

Generalización de árboles binarios, c/nodo tiene k punteros y $k-1$ claves (o registros), disminuye la profundidad del árbol,

- Orden del árbol.



Arboles balanceados

Son árboles multicamino con una construcción especial en forma ascendente que permite mantenerlo balanceado a bajo costo.

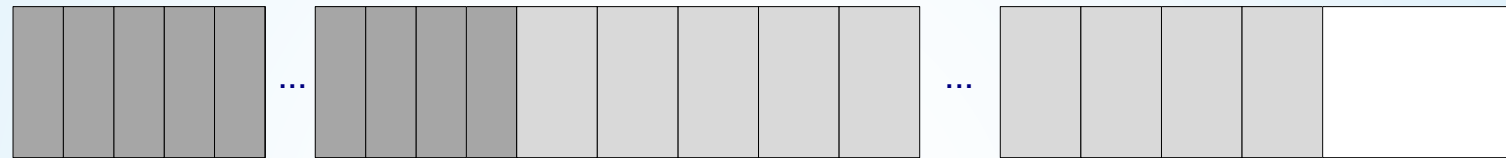
Propiedades de un árbol B de orden M:

- Ningún nodo tiene más de M hijos
- C/nodo (menos raíz y los terminales) tienen como mínimo $\lceil M/2 \rceil$ hijos
- La raíz tiene como mínimo 2 hijos (o sino ninguno)
- Todos los nodos terminales a igual nivel
- Nodos no terminales con K hijos contienen K-1 registros. Los nodos terminales tienen:
 - Mínimo $\lceil M/2 \rceil - 1$ registros
 - Máximo $M - 1$ registros

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------------------|
| PO | R1 | P1 | R2 | P2 | R3 | P3 | R4 | P4 | R5 | P5 | Nro de registros |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------------------|

Arboles Balanceados

Formato del nodo

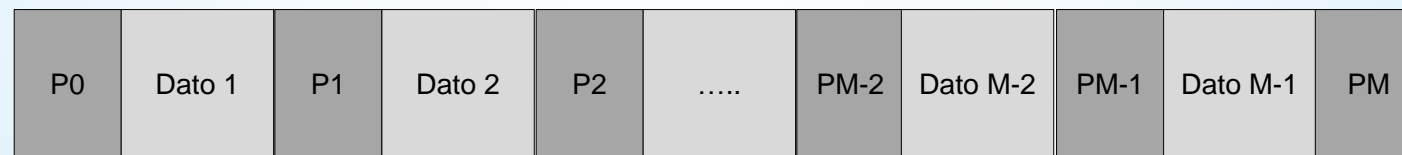


Hijos (M celdas)

Datos (M -1 celdas)

Nro de Registros

Formato del Nodo para archivo del índice arbol b



Formato Gráfico del Nodo del índice arbol B

Arboles balanceados

Creacion:

- Dadas las claves: 43 2 53 88 75 80
15 49 60 20 57 24
- Como se construye el árbol?
- Como se genera el archivo de datos que persiste el árbol?

Arboles Balanceados

| Nodo Raiz: 7 | | | | | | | | |
|--------------|----------|----|----|----|-------|----|----|-----------|
| | Punteros | | | | Datos | | | Nro Datos |
| 0 | -1 | -1 | -1 | | 2 | 15 | | 2 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 57 | 60 | 75 | 3 |
| 2 | 0 | 5 | 3 | | 20 | 43 | | 2 |
| 3 | -1 | -1 | | | 49 | | | 1 |
| 4 | -1 | -1 | | | 88 | | | 1 |
| 5 | -1 | -1 | | | 24 | | | 1 |
| 6 | 1 | 4 | | | 80 | | | 1 |
| 7 | 2 | 6 | | | 53 | | | 1 |



Tipo de Árbol

Orden

ARBOL B

4

CREAR

N° a insertar

+

24

>>

N° a eliminar

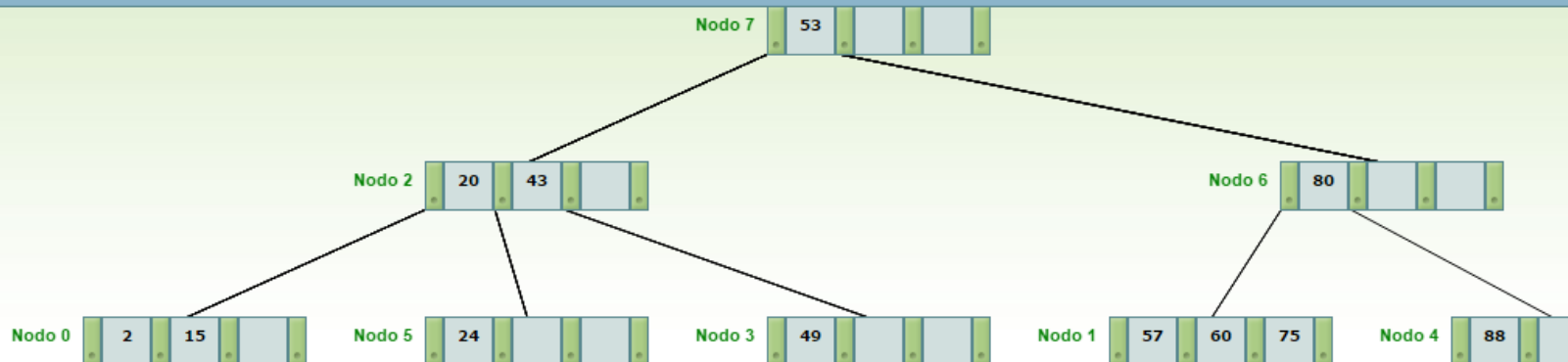
-

>>

N° a buscar

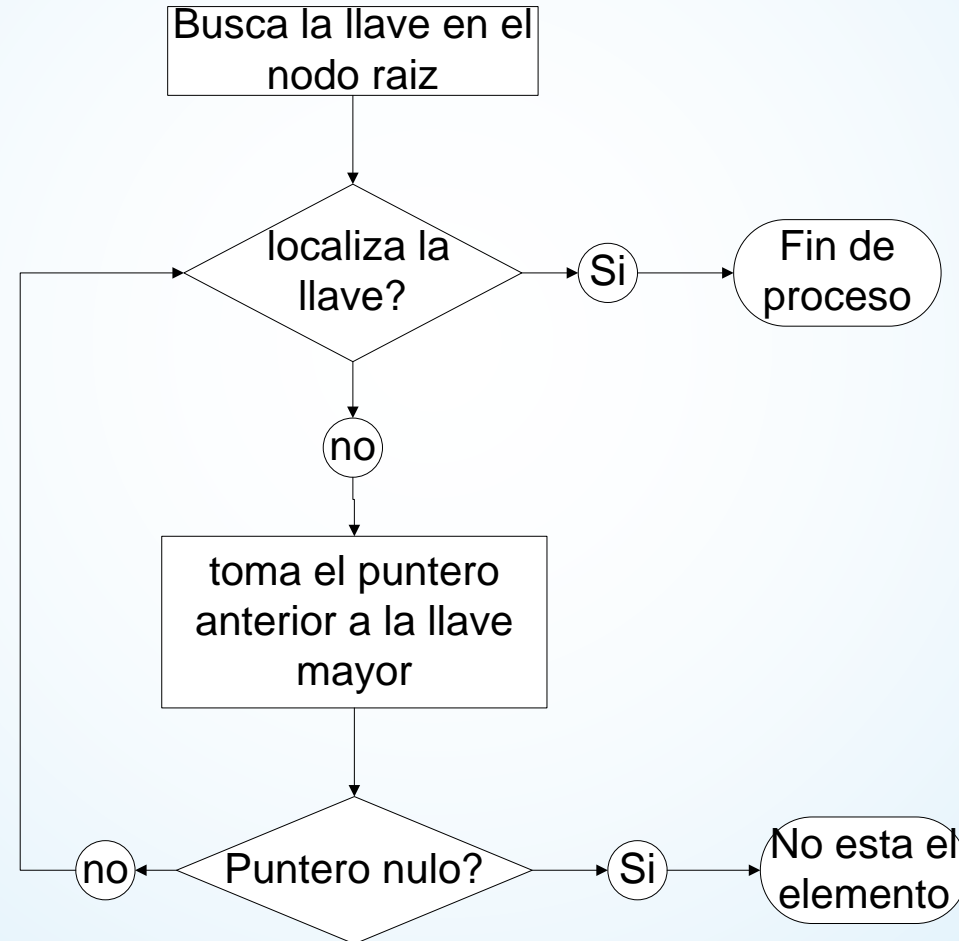
BUSCAR

LIMPIAR



Árboles Balanceados

- Búsqueda de información:



Arboles Balanceados

Performance de búsqueda

- Mejor caso: 1 lectura
- Pero caso: h lecturas (con h altura del árbol)
- Cual es el valor de h ?
 - Axioma: árbol balanceado de Orden M , si el número de elementos del árbol es $N \rightarrow$ hay $N+1$ punteros nulos en nodos terminales.

Árboles Balanceados

Cota
para
h

| Nivel | # mínimo de descendientes |
|-------|---------------------------|
| 1 | 2 |
| 2 | $2 * [M/2]$ |
| 3 | $2 * [M/2] * [M/2]$ |
| | |
| h | $2 * [M/2]^{h-1}$ |

Relación entre h y # de nodos

$$N+1 \geq 2 * [M/2]^{h-1}$$

$$h \leq [1 + \log_{[M/2]} ((N+1)/2)]$$

Si $M = 512$ y $N = 1000000 \rightarrow h \leq 3.37$ (4 lecturas encuentra un registro)

Árboles Balanceados

Inserción (creación)

- Los registros se insertan en un nodo Terminal
- Casos posibles
 - El registro tiene lugar en el nodo Terminal (no se produce overflow): solo se hacen reacomodamientos internos en el nodo
 - El registro no tiene lugar en el nodo Terminal (se produce overflow): el nodo se divide y los elementos se reparten entre los nodos, hay una promoción al nivel superior, y esta puede propagarse y generar una nueva raíz.

Árboles Balanceados

Performance de la inserción

- Mejor caso (sin overflow)
 - H lecturas
 - 1 escritura
- Peor caso (overflow hasta la raíz, aumenta en uno el nivel del árbol)
 - H lecturas
 - $2h+1$ escrituras (dos por nivel más la raíz)
- Estudios realizados
 - $M = 10$ 25% divisiones
 - $M = 100$ 2% divisiones

Árboles Balanceados

Eliminación

- Siempre eliminar de nodos terminales (trabajamos con árboles)
- Si se va a eliminar un elemento que no está en nodo terminal → llevarlo primero a nodo terminal
- Posibilidades ante eliminación
 - Mejor caso: borra un elemento del nodo y no produce underflow, solo reacomodos (# elementos $\geq [M/2]-1$)
 - Peor caso: se produce underflow, #elementos $< [M/2] - 1$
- Dos soluciones
 - Redistribuir
 - concatenar

Árboles Balanceados

Definición: nodo adyacente hermano

- Dos nodos son adyacentes hermanos si tienen el mismo padre y son apuntados por punteros adyacentes en el padre.

Redistribuir

- Cuando un nodo tiene underflow puede trasladarse llaves de un nodo adyacente hermano (en caso que este tenga suficientes elementos)

Concatenación:

- Si un nodo adyacente hermano está al mínimo (no le sobra ningún elemento) no se puede redistribuir, se concatena con un nodo adyacente disminuyendo el # de nodos (y en algunos casos la altura del árbol)

Árboles Balanceados

Performance de la eliminación

- Mejor caso (borra de un nodo Terminal)
 - H lecturas
 - 1 escritura
- Peor caso (concatenación lleva a decrementar el nivel del árbol en 1)
 - $2h - 1$ lecturas
 - $H + 1$ escrituras

Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

Eliminación

- Redistribución
- Concatenación

Inserción

- ???????
- División

Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

La redistribución podría posponer la creación de páginas nuevas

Se pueden generar árboles B más eficientes en términos de utilización de espacio

Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

Árbol B especial en que cada nodo está lleno por lo menos en $2/3$ partes

Propiedades (orden M)

Cada página tiene máximo M descendientes

Cada página, menos la raíz y las hojas, tienen al menos $\lceil (2M - 1) / 3 \rceil$ descendientes

La raíz tiene al menos dos descendientes (o ninguno)

Todas las hojas aparecen en igual nivel

Una página que no sea hoja si tiene K descendientes contiene $K-1$ llaves

Una página hoja contiene por lo menos $\lceil (2M - 1) / 3 \rceil - 1$ llaves, y no más de $M-1$.

Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

Operaciones de Búsqueda

- Igual que el árbol B común

Operaciones de Inserción

- Tres casos posible
 - **Derecha:** redistribuir con nodo adyacente hermano de la derecha (o izq. si es el último)
 - **Izquierda o derecha:** si el nodo de la derecha está lleno y no se puede redistribuir, se busca el de la izquierda.
 - **Izquierda y derecha:** busca llenar los tres nodos, estos tendrán un $\frac{3}{4}$ parte llena.

Ejemplos

Árboles Balanceados $\rightarrow B^*$

Costo de la redistribución

| | Mejor | Peor |
|-----------|-------|------------------------------|
| Derecha | RRWW | RRWWWW |
| Izq o der | RRWW | RRRWWWW (divido solo dos) |
| Izq y der | RRWW | RRRWWWWW |

Árboles Balanceados

Técnicas
de
paginado

estrategias de reemplazo: LRU (last
recently used)

Análisis
numérico

llaves = 2400 # páginas = 140 Altura = 3 niveles

1 5 10 20

3.00 1.71 1.42 0.97

Árboles Balanceados

Archivos
secuenciales
indizados

Permiten una mejor
recorrida por algún
tipo de orden

Indizado (ordenado por una llave)

Secuencial (acceder por orden físico,
devolviendo el registro en orden de llave)

Hasta ahora métodos
disjuntos, se opta:

rápida recuperación (Árbol)

Recuperación ordenada (secuencial)

Debemos encontrar
una solución que
agrupe ambos casos

Árboles Balanceados

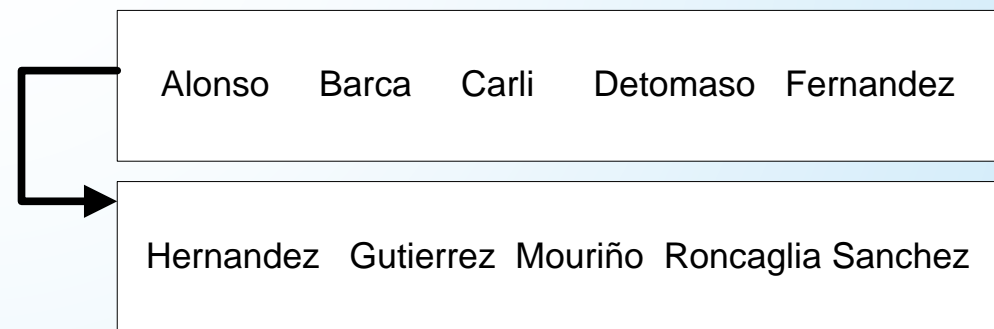
Conjunto de secuencias

- Conjunto de registros que mantienen un orden físico por llave mientras que se agregan o quitan datos, si podemos mantenerlo podemos indizarlos

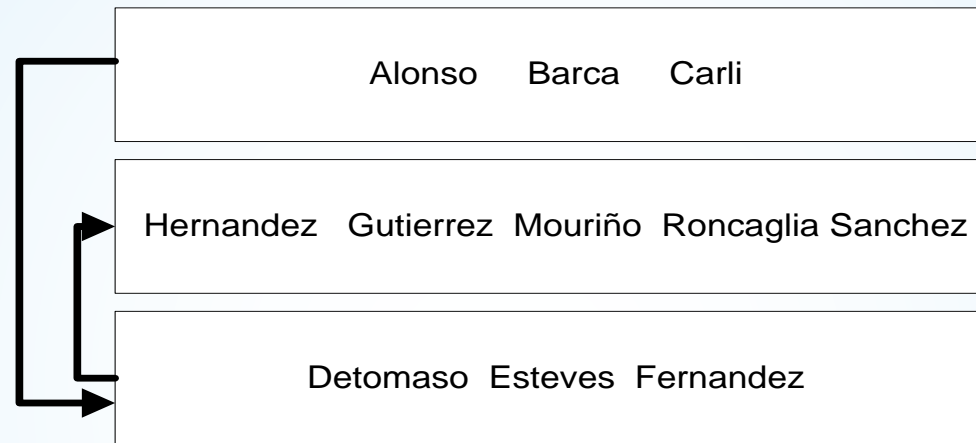
Posible solución

- Mantener bloques de datos
- Cada bloque con registros y puntero al siguiente

Alonso Barca Carli Detomaso Fernandez



Árboles Balanceados



Costo

- Aumenta el tamaño del archivo (fragmentación interna)
- No hay orden físico salvo dentro del un bloque.
- Tamaño del bloque
 - Debe permitir almacenar varios bloques en RAM (redistribución)
 - Las E/S deben ser rápidas y sin necesidad de desplazamientos
- Como logramos ahora una rápida búsqueda?

Árboles Balanceados → B+

Consiste en un conjunto de grupos de registros ordenados por clave en forma secuencial, junto con un conjunto de índices, que proporciona acceso rápido a los registros.

Propiedades

- Cada página tiene máximo M descendientes
- Cada página, menos la raíz y las hojas, tienen entre $[M/2]$ y M hijos
- La raíz tiene al menos dos descendientes (o ninguno)
- Todas las hojas aparecen en igual nivel
- Una página que no sea hoja si tiene K descendientes contiene $K-1$ llaves
- Los nodos terminales representan un conjunto de datos y son linkeados juntos.

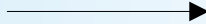
Los nodos no terminales no tienen datos sino punteros a los datos.

Árboles Balanceados \rightarrow B+

Nodo Raíz



Nodo Inicial



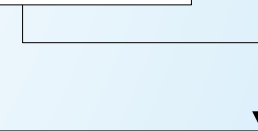
Alfa Beta Kappa Phi

Se inserta Gamma

Nodo Raíz



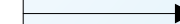
Gamma



Nodo Inicial



Alfa Beta



Gamma Kappa Phi

Árboles Balanceados \rightarrow B+

Separadores

- Derivados de las llaves de los registros que limitan un bloque en el conjunto de secuencia
- Separadores más cortos, ocupan espacio mínimo

Árbol B+ de prefijos simples

- Árbol B+ en el cual el conjunto índice está constituido por separadores más cortos

Árboles Balanceados → B+

Nodo Raíz

G

Alfa Beta

Gamma Kappa Phi

Nodo Inicial

Nodo Raíz

Gon

Garcia Gomez

Gonzalez Gutierrez Hernandez

Nodo Inicial

Árboles Balanceados → conclusiones

| | Árbol B | Árbol B+ |
|--------------------------|--------------------|-------------------------|
| Ubicación de datos | Nodos (cualquiera) | Nodo Terminal |
| Tiempo de búsqueda | = | = |
| Procesamiento secuencial | Lento (complejo) | Rápido (con punteros) |
| Inserción eliminación | Ya discutida | Puede requerir + tiempo |

Árboles

- Operaciones clásicas
- Comparaciones

| | Árbol B | Árbol B+ |
|--------------------------|--------------------|-------------------------|
| Ubicación de datos | Nodos (cualquiera) | Nodo Terminal |
| Tiempo de búsqueda | = | = |
| Procesamiento secuencial | Lento (complejo) | Rápido (con punteros) |
| Inserción eliminación | Ya discutida | Puede requerir + tiempo |