Изчисляване на грациозни дървета

1 Въведение

Дадено е дърво (V, E) с n върха. Нека V $\equiv J_n$, където $J_n \coloneqq \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq n\}$. Тоест всеки връх ще представлява индекс в масив. Сега може да въведем стойности на върховете. Това са числата $w_0 \dots w_{n-1}$, като стойността на върхът i е w_i. Налагаме следните ограничения върху тях:

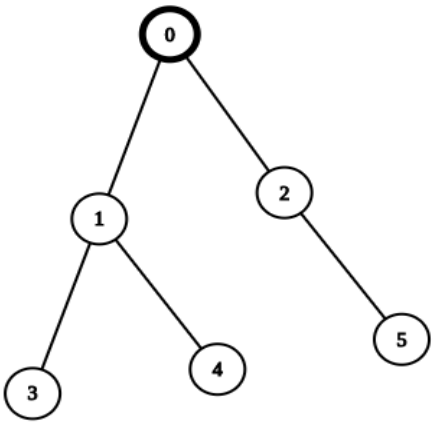
1. $\forall i \in J_n : 1 \leq w_i \leq 2n - 1$
2. $\forall i \in J_n : w_i \equiv 1 \pmod 2$
3. $\forall i, j \in J_n : i \neq j \implies w_i \neq w_j$
4. $\forall e_1, e_2 \in E : e_1 \neq e_2 \implies h(e_1) \neq h(e_2)$,
   където $h(\{i, j\}) \coloneqq \|i - j\|$.

Ако съществуват $w_0 \dots w_{n-1}$, за която са изпълнени горните условия, казваме, че дървото е грациозно.

1.1 Четене на дървото от файл

На първия ред пише n, броя върхове. Следват $n - 1$ реда с две числа — ребрата между върховете. На следващата страница има пример. След като прочетем дървото го пазим във масив от вектори, където на позиция i стои вектор от съседите на върха i.

Фигура 1: Примерен вход



6	
0	1
0	2
1	3
1	4
2	5

2 Backtracking

За да решим проблема, правим пълно обхождане. Избираме наредба, в която ще обхождаме върховете. Последователно им присвояваме всички възможни стойности. След като приключим с всички върхове проверяваме дали изпълняват условията 1–4.

Algorithm 1 Brute-Force

```
1:  function PERMUTE(i)
2:      if i = n then
3:          if w_0 ... w_{n-1} is a valid assignment then
4:              PRINT(w_0 ... w_{n-1})
5:              exit recursion
6:          else
7:              return
8:      for w ← 1, 3 ... 2n − 1 do
9:          w_i ← w
10:         PERMUTE(i + 1)
```

Да подобрим горното търсене, като не винаги изпълняваме ред 10. В този момент имаме стойностите $w_0 \dots w_i$. Ако те нарушават условията 1–4, няма смисъл да изпълняваме ред 10. Важно е да изпълняваме тази проверка възможно най-бързо:

Algorithm 2 Backtrack

```
1: usedValues[1 . . . 2n] ← zeroes
2: usedDiff[1 . . . 2n] ← zeroes
3: function BACKTRACK(i)
4:     if i=n then
5:         PRINT(w_0 . . . w_{n−1})
6:         exit recursion
7:     for w ← 1, 3 . . . 2n − 1 do
8:         d ← ‖w_{PARENT(i)} − w_i‖
9:         if usedValues[w] = 0 and usedDiff[d] = 0 then
10:            w_i ← w
11:            usedValues[w] ← 1, usedDiff[d] ← 1
12:            PERMUTE(i + 1)
13:            usedValues[w] ← 0, usedDiff[d] ← 0
```

Обръщаме внимание на ред 8. За да бъде ефикасна проверката за уникални разлики, избираме произволен връх за корен и вкореняваме дървото. Пренареждаме върховете, така че да са топологично сортирани. С други думи, ако в момента разглеждаме връх i, то задължително ще сме разгледали родителя му. Още повече, няма да сме разгледали децата му. В противен случай наредбата няма да е топологично сортирана. Така единствената нова разлика ще е между v_i и родителя му. За да е дефинирана функцията PARENT в корена, правим лека модификация.

Algorithm 3 Calling Backtrack

```
1: for w ← 1, 3 . . . 2n − 1 do
2:     w_0 ← w, usedValues[w] = 1
3:     BACKTRACK(1)
4:     usedValues[w] = 0
```

Програмата действително работи по-бързо, но за далеч от желано време. Проблемът е там, че Brute Force алгоритъма е $\mathcal{O}(n^n)$. За алгоритъма 2 не може да твърдим време, по-добро от $\mathcal{O}(n!)$.

Да подобрим 2, като изберем наредба на върховете. **Most restrained variable** винаги избира най-ограничения връх, докато не изчерпа всики. Така ефекта от BACKTRACK се засилва най-много. За начален връх няма еднозначен победител — всеки връх може да е всяка стойност. Затова избираме този с най-голяма степен според **degree heuristic**. Добрата вест е, че понеже обхождаме върховете в топологично сортиран ред, автоматично изпълняваме MRV. За първи връх ще подредим върховете по

степен и един по един ще ги използваме за корен.

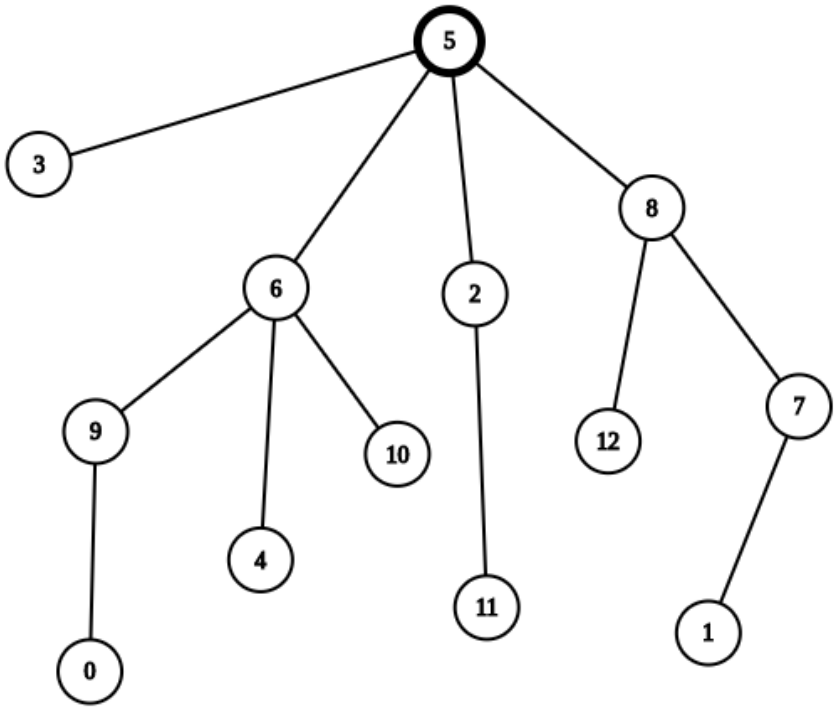
Ред 7 на BACKTRACK също е важен. Ако разгледаме стойностите, който е по-вероятно да стигнат до решение, ще намалим времето за търсене.

3 Експеримент

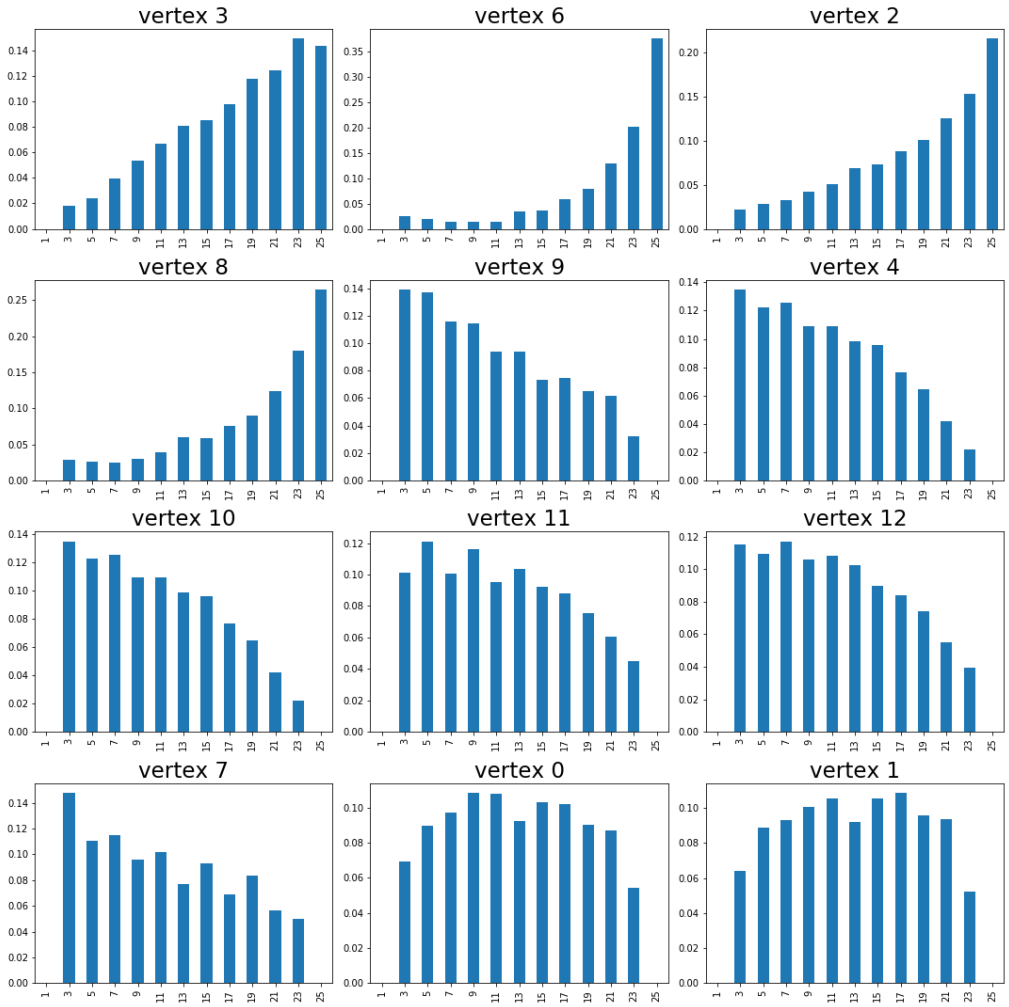
Нека разгледаме произволен връх i като случайна величина X_i. Дефинираме $\mathbb{P}(X_i = x) = \frac{\text{броя решения, за който } w_i = x}{\text{всички решения}}$. Всъщност на всяка стъпка в рекурсията правим избор за стойност на връх, като намаляме множеството от решения. Търсим тогава такива x за върховете i, за който $\mathbb{P}(X_i = x)$ е възможно най-голямо.

Да видим емпирично как изглежда $\mathbb{P}$ спрямо X_i. Фиг. 2 показва произволен граф с 13 върха. Фиг. 3 показва разпределението на всеки връх. За корен е избран 5, като $w_5 = 1$.

Фигура 2: Произволен граф при n=13



Фигура 3: Разпределнието на върховете



Забелязва се, че за върховете с нечетна дълбочина е по-добре да пробваме с големите стойности първо. Обратно, при другите е по-добре с ниските стойности. Също е важна подредбата на върховете. Например доста по-сигурни сме, че връх 6 трябва да е голям, отколкото връх 3. От такава гледна точка е по-добре връх 6 да е преди 3, за да има по-голям достъп до високите стойности.

Забележка Причината връх 6 да предпочита високи, а не ниски стойности, е поради избора за w_5. Ако w_5 бе $2n-1$, графиката щеше да изглежда наобратно. Произволно рехишме w_5 да е 1. Въпреки това е важно да е в един от краищата на интервлите, понеже е от висока степен. Така разликите между него и съседите му ще бъдат високи $(2n-2, 2n-4\ldots)$. Именно тези разлики най-трудно се получават.

Добрата вест е, че може да предскажем този ефект. Например, връх с много наследници е по-важен от такъв без изобщо. Емпирочно важни са следните атрибути:

- брой наследници
- дълбоча
- височина
- дали е листо или не

Тренирайки machine learning алгоритъм с тях, ще определим приоритет за всеки връх. Започвайки от корена, ще наредим върховете, така че тези с най-голям приоритет да са възможно най-напред в наредбата. Важно е да получим топологично сортиране на графа. Така общата схема на работа е:

Algorithm 4 Main Loop

```
G ← Read tree from file
(r_0 ... r_{n-1}) ← sort descending vertices by degree
for r ∈ (s_0 ... s_{n-1}) do
    Choose r as the root of the tree
    prio[0 ... n − 1] ← Predict node priorities
    (v_0 ... v_{n-1}) ← OrderNodes(G, r, prio)
    w_r ← 1
    Alternating-Backtrack(v_1)
```

Algorithm 5 OrderNodes

```
1: function OrderNodes(G, root, prio)
2:     q ← ∅
3:     Enque(q, root, ∞)
4:     order ← ∅
5:     while q is not empty do
6:         u ← Dequeue(q)
7:         InsertBack(order,u)
8:         for v ∈ Children(u) do
9:             Enque(q, v, prio[v])
10:    return order
```

Algorithm 6 Alternating-Backtrack

```
1: usedValues[1 . . . 2n] ← zeroes
2: usedDiff[1 . . . 2n] ← zeroes
3: function Alternating-Backtrack(v_i)
4:     if v_i is one last the last vertex then
5:         Print(w_0 . . . w_{n−1})
6:         exit recursion
7:     if Depth(v_i) ≡ 0 (mod 2) then
8:         valueOrder ← 1, 3 . . . 2n − 1
9:     else
10:        valueOrder ← 2n − 1, 2n − 3 . . . 1
11:    for w in valueOrder do
12:        d ← ‖w_{Parent(v_i)} − w_i‖
13:        if usedValues[w] = 0 and usedDiff[d] = 0 then
14:            w_{v_i} ← w
15:            usedValues[w] ← 1, usedDiff[d] ← 1
16:            Permute(v_{i+1})
17:            usedValues[w] ← 0, usedDiff[d] ← 0
```

4 Заключение

Каква е равносметката? Alternating-Backtrack сама по себе си подобравя много бързодействието. Разбира се, от време на време има дървета, който отнемат твърде много време за изчисление. Например при n=50 от 100 дървета не стига време за 2. Backtrack вероятно щеше да изчисли общо 2.

А дали има смисъл от machine learning? Ако направим подредба спрямо броя наследници, което е най-важния атрибут, получаваме друг резултат — 90 от 100 дървета. За равносметка, приблизително при n=73 ще получим същия процент успех, а именно 90%, с Alternating-Backtrack. Дори ако и двата алгоритъма успеят да намерят решение за разумно време, Alternating-Backtrack ще бъде доста по-бърз. Времето, което отделяме за определяне на приоритет, се изплаща при търсенето.