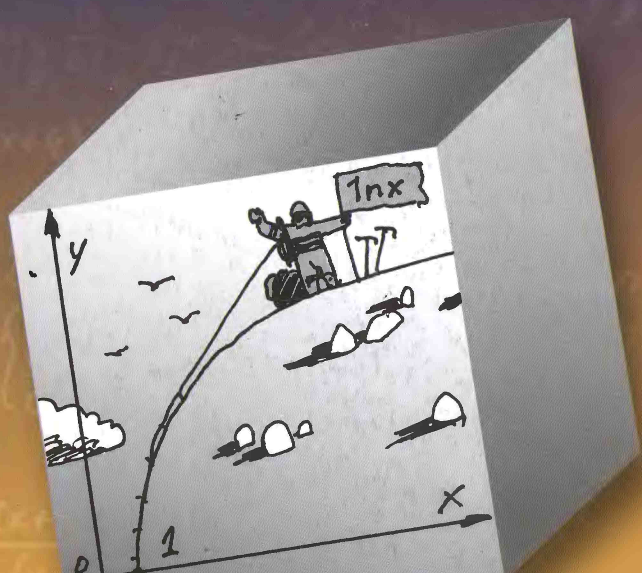
МАТЕМАТИКА • ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

Логарифмы



Для тех, кто хочет учиться

А. Х. Шахмейстер

Логарифмы

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

VICTORY
ПЕТРОГЛИФ
МЦНМО

С.-Петербург
Москва

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6
Ш 32

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано
Московским институтом открытого образования (МИОО) и Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А.Х.
Ш32 Логарифмы / А.Х. Шахмейстер — 5-е издание, исправленное и дополненное — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО, 2016. — 288с.: илл.— ISBN 978-5-98712-266-2, ISBN 978-5-91673-079-1, ISBN 978-5-4439-0648-5

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

ISBN 978-5-91673-079-1 («Виктория плюс»)
ISBN 978-5-4439-0648-5 (МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-266-2 («Петроглиф»)

Посвящается памяти Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 10-11 классов (20 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–2	**Определение логарифма и его свойства** (стр. 5–13) Практикум 1 (4, 7, 11, 13, 16, 17) Тренировочная работа 1 (12, 18, 20)
3–5	**Основные теоремы о логарифмах** (стр. 17–38) Практикумы 2 (3, 5, 8, 12, 13) Тренировочная работа 2 (5, 10, 16, 18) Тренировочная работа 3 (2, 4, 7, 10) Тренировочная работа 4 (4, 7, 10, 11)
6–8	**Примеры решения показательных уравнений** (стр. 39–57) Практикумы 5 (4, 6, 9, 10, 14) Тренировочная работа 5 (5, 8, 11, 14) Практикумы 6 (3, 5, 7, 9) Тренировочные карточки 1 (на свойства логарифмов) (3-я карточка)
9–12	**Логарифмические и показательные уравнения и неравенства** (способы решений) (стр. 62–104) Практикум 7 (3, 5, 7, 10) Тренировочная работа 6 (4, 7, 10, 14, 15) Практикум 8 (3, 5, 8, 9) Практикум 9 (2, 5, 6, 9) Тренировочная работа 8 (3, 9, 10, 12)
13–20	**Логарифмические и показательные уравнения и неравенства** (обобщение) (стр. 132–177) **Решение систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств** Тренировочная работа 11 (5, 8, 10, 12, 13) Тренировочная работа 12 (2, 5, 6, 10) Практикум 11 (1, 3, 5, 10, 13, 15) Тренировочная работа 13 (3, 4, 8, 11, 14) Зачетные карточки 1 (5-я и 6-я карточки) Зачетные карточки 2 (2-я, 7-я *(2, 4, 5)* и 8-я *(2, 4, 5)*)

Программа разработана по материалам книги и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Определение логарифма и его свойства

Напомним, что в выражении $a^b = c$

a — основание степени;

b — показатель степени;

a^b — степень числа a;

c — значение степени числа a.

Определение логарифма

Логарифмом числа $\boldsymbol{c}$ по основанию $\boldsymbol{a}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$) называется **показатель** степени $\boldsymbol{b}$, в которую надо возвести основание $\boldsymbol{a}$, чтобы получить число $\boldsymbol{c}$, т. е. если $a^b = c$, то можно записать $\boldsymbol{\log_a c = b}$.

Таким образом, показатель степени — это и есть логарифм (при определенных условиях).

Если $a > 0$, то и $a^b > 0$, поэтому $c > 0$. Следовательно, при условии $a > 0$, $a \neq 1$ и $c > 0$ $\log_a c \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} a^b = c$.

Практикум 1

Запишите в виде логарифмического равенства (1–5):

1. $3^4 = 81 \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_3 81 = 4.$

2. $2^{-5} = \dfrac{1}{32} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_2 \dfrac{1}{32} = -5.$

3. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3.$

4. $\sqrt[3]{125} = 5 \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_{125} 5 = \frac{1}{3}.$

5. $\sqrt[4]{16^3} = 8 \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_{16} 8 = \frac{3}{4}.$

6. $\left(1-\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3}.$

Так как здесь $a = 1-\sqrt{3}$, $b = 2$, $c = 4-2\sqrt{3}$, $\left(a^b = c\right)$, то записать в чистом виде логарифмическое равенство нельзя.

$a = 1-\sqrt{3} < 0$, но по определению $a > 0$.

Можно поступить иначе.

$\left(1-\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}-1\right)^2$, тогда

$\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 4-2\sqrt{3} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_{\sqrt{3}-1}\left(4-2\sqrt{3}\right) = 2.$

7. $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2\sqrt{2}-3.$

Здесь $c = 2\sqrt{2}-3 < 0$, поэтому записать в виде логарифмического равенства нельзя по двум причинам:

а) $c > 0$ по определению логарифма;

б) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2\sqrt{2}-3$ справедливым равенством не является, так как $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$[1].

Вычислите логарифм (8–13):

8. $\log_2 0{,}25.$

Пусть $\log_2 0{,}25 = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} 2^x = 0{,}25$; $2^x = 2^{-2}$; $x = -2$;

$\log_2 0{,}25 = \boxed{-2}.$

[1] См. книгу Шахмейстер А. Х. «Уравнения», 2008 г. С. 5–6.

9. $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$.

Пусть $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3\sqrt{3}$; $\quad 3^{-x} = 3^{1+\frac{1}{2}}$;

$x = -1{,}5$; $\quad \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = \boxed{-1{,}5}$.

10. $\log_{\sqrt[4]{2}} 8$.

Пусть $\log_{\sqrt[4]{2}} 8 = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(\sqrt[4]{2}\right)^x = 8$; $\quad 2^{\frac{1}{4}x} = 2^3$;

$x = 12$; $\quad \log_{\sqrt[4]{2}} 8 = \boxed{12}$.

11. $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6}$.

Пусть $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6} = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(6\sqrt[6]{6}\right)^x = \sqrt[4]{6}$;

$\left(6^{1+\frac{1}{6}}\right)^x = 6^{\frac{1}{4}}$; $\quad \frac{7}{6}x = \frac{1}{4}$; $\quad x = \frac{3}{14}$; $\quad \log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6} = \boxed{\frac{3}{14}}$.

12. $\log_3^2 9$.

Пусть $\log_3 9 = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} 3^x = 9$; $\quad x = 2$, т. е. $\log_3 9 = 2$,

значит, $\log_3^2 9 = (\log_3 9)^2 = 2^2 = \boxed{4}$.

13. $\log^3_{(2-\sqrt{5})^2} \dfrac{1}{9-4\sqrt{5}}$.

Пусть $\log_{(2-\sqrt{5})^2} \dfrac{1}{9-4\sqrt{5}} = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(\left(2-\sqrt{5}\right)^2\right)^x = \dfrac{1}{9-4\sqrt{5}}$.

Так как $\left(2-\sqrt{5}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$

и $\dfrac{1}{9-4\sqrt{5}} = \left(9-4\sqrt{5}\right)^{-1}$,

то $\left(9-4\sqrt{5}\right)^x = \left(9-4\sqrt{5}\right)^{-1} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} x = -1$.

Т. е. $\log_{(2-\sqrt{5})^2} \dfrac{1}{9-4\sqrt{5}} = -1$,

тогда $\log^3_{(2-\sqrt{5})^2} \dfrac{1}{9-4\sqrt{5}} = \left(\log_{(2-\sqrt{5})^2} \dfrac{1}{9-4\sqrt{5}}\right)^3 = \boxed{-1}$.

Решите уравнение, используя определение логарифма (14–17):

14. $\log_2 x = 3 \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} 2^3 = x.$

Так как $\log_a c = b \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} a^b = c$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ c > 0 \end{cases}$, то $\boxed{x = 8}$.

Ответ: $x = 8$.

15. $\log_x 4 = 2 \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} x^2 = 4.$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$, но $a = x > 0$, значит $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

16. $\log_{3-2\sqrt{2}} x = \dfrac{1}{2} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} x = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

но $3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$.

$x = \left(\left(\sqrt{2} - 1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Так как $\sqrt{2} - 1 > 0$, то $x = \sqrt{2} - 1$.

Ответ: $x = \sqrt{2} - 1$.

17. $\log_{\sqrt[3]{x}} \sqrt{2} = \dfrac{3}{4} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} (\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{4}} = \sqrt{2};$

$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{2}; \quad x^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}.$

Возведем обе части уравнения в четвертую степень (обе части неотрицательны).

$x = \left(\sqrt{2}\right)^4; \quad x = 4.$

Ответ: $x = 4$.

Тренировочная работа 1

Запишите в виде логарифмического равенства (1–8):

1. $5^3 = 125$;

2. $3^{-4} = \frac{1}{81}$;

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$;

4. $\sqrt[4]{256} = 4$;

5. $\sqrt[3]{8^2} = 4$;

6. $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$;

7. $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{6} - 5$;

8. $\left(\sqrt{5} - 1\right)^{\frac{3}{4}} = \left(6 - 2\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{8}}$.

Вычислите логарифм (9–15):

9. $\log_3 \frac{1}{9}$;

10. $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$;

11. $\log_{\sqrt[4]{3}} 27$;

12. $\log_{7\sqrt[5]{7}} \sqrt[3]{7}$;

13. $\log_4^2 16$;

14. $\log_{\sqrt{\sqrt{3}+2}} \left(4\sqrt{3} + 7\right)^{\frac{1}{3}}$;

15. $\log_{\sqrt{2}+1} \left(5\sqrt{2} - 7\right)$.

Решите уравнение (16–20):

16. $\log_x 4 = \frac{1}{3}$;

17. $\log_{3x} \sqrt{8} = \frac{3}{2}$;

18. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3x} = -3$;

19. $\log_{14-6\sqrt{5}} \left(3 - \sqrt{5}\right)^{\frac{x}{3}} = -\frac{1}{2}$;

20. $\log_{\sqrt{5x}} \sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}$.

Решение тренировочной работы 1

Запишите в виде логарифмического равенства (1–8):

1. $5^3 = 125 \overset{\text{опр.}}{\iff} \log_5 125 = 3.$

2. $3^{-4} = \dfrac{1}{81} \overset{\text{опр.}}{\iff} \log_3 \dfrac{1}{81} = -4.$

3. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{9}{4} \overset{\text{опр.}}{\iff} \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{9}{4} = -2.$

4. $\sqrt[4]{256} = 4 \overset{\text{опр.}}{\iff} \log_{256} 4 = \dfrac{1}{4}.$

5. $\sqrt[3]{8^2} = 4$, т. е. $\left(8^2\right)^{\frac{1}{3}} = 4 \overset{\text{опр.}}{\iff} \log_{8^2} 4 = \dfrac{1}{3}$, но можно записать иначе $\log_8 4 = \dfrac{2}{3}.$

6. $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$

Если в качестве основания положить $a = 1 - \sqrt{2}$, так как $1 - \sqrt{2} < 0$, то записать логарифмическое равенство нельзя.

После преобразования $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$ равенство $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ можно записать в виде $\log_{\sqrt{2}-1}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 2.$

7. $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{6} - 5.$

В данном примере, если в качестве числа c положить $c = 2\sqrt{6} - 5$, то истинного логарифмического равенства записать нельзя.

$c = 2\sqrt{6} - 5 < 0$. Но по определению $c > 0$!

Изначально было дано ложное равенство. В области действительных чисел нет числа, квадрат которого был бы отрицательным числом.

8. $\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{4}} = \left(6-2\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{8}}$.

Из данного равенства можно получить несколько логарифмических равенств.

$\log_{\sqrt{5}-1}\left(6-2\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{8}} = \frac{3}{4}$;

$\log_{\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{4}}}\left(6-2\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{8}} = 1$;

$\log_{6-2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{8}$;

$\log_{\left(6-2\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{8}}}\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{4}} = 1$.

Вычислите логарифм (9–15):

9. $\log_3 \frac{1}{9}$.

Пусть $\log_3 \frac{1}{9} = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} 3^x = \frac{1}{9}$;

$3^x = 3^{-2}$; $x = -2$; $\log_3 \frac{1}{9} = \boxed{-2}$.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

10. $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$.

Пусть $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2} = x$.

Тогда $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2\sqrt{2}$; $2^{-x} = 2\sqrt{2}$; $2^{-x} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$;

$2^{-x} = 2^{1+\frac{1}{2}}$; $-x = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{3}{2}$; $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$.

11. $\log_{\sqrt[4]{3}} 27$.

Пусть $\log_{\sqrt[4]{3}} 27 = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(\sqrt[4]{3}\right)^x = 27$; $3^{\frac{1}{4}x} = 3^3$; $\frac{1}{4}x = 3$;

$x = 12$; $\log_{\sqrt[4]{3}} 27 = \boxed{12}$.

12. $\log_{7\sqrt[5]{7}} \sqrt[3]{7}$.

Пусть $\log_{7\sqrt[5]{7}} \sqrt[3]{7} = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(7\sqrt[5]{7}\right)^x = \sqrt[3]{7}$; $\left(7 \cdot 7^{\frac{1}{5}}\right)^x = 7^{\frac{1}{3}}$;

$7^{\frac{6}{5}x} = 7^{\frac{1}{3}}$; $\frac{6}{5}x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{5}{18}$; $\log_{7\sqrt[5]{7}} \sqrt[3]{7} = \boxed{\frac{5}{18}}$.

13. $\log_4^2 16$.

$\log_4 16 = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} 4^x = 16$; $4^x = 4^2$; $x = 2$;

$\log_4^2 16 = 2^2 = 4$; $\log_4^2 16 = \boxed{4}$.

14. $\log_{\sqrt{\sqrt{3}+2}} \left(4\sqrt{3}+7\right)^{\frac{1}{3}}$.

Пусть $\log_{\sqrt{\sqrt{3}+2}} \left(4\sqrt{3}+7\right)^{\frac{1}{3}} = x$. Следовательно, по определению

$\left(\sqrt{\sqrt{3}+2}\right)^x = \left(4\sqrt{3}+7\right)^{\frac{1}{3}}$, т. е. $\left(\sqrt{3}+2\right)^{\frac{x}{2}} = \left(4\sqrt{3}+7\right)^{\frac{1}{3}}$.

Для решения данного уравнения необходимо равенство оснований. Так как $\left(\sqrt{3}+2\right)^2 = 3 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot 2 + 2^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, то $\left(\sqrt{3}+2\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\left(\sqrt{3}+2\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(\sqrt{3}+2\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{3}+2\right)^{\frac{2}{3}}$;

$\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$; $x = \frac{4}{3}$; $\log_{\sqrt{\sqrt{3}+2}} \left(4\sqrt{3}+7\right)^{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{4}{3}}$.

15. $\log_{\sqrt{2}+1} \left(5\sqrt{2}-7\right)$.

Пусть $\log_{\sqrt{2}+1} \left(5\sqrt{2}-7\right) = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(\sqrt{2}+1\right)^x = 5\sqrt{2}-7$.

Так как $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = 2 - 1 = 1$, то

$\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}$, тогда $\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x} = 5\sqrt{2}-7$.

Далее учтем, что

$\left(\sqrt{2}-1\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 3\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1 + 3\cdot\sqrt{2}\cdot 1 - 1 = 5\sqrt{2}-7$,

тогда $\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x} = \left(\sqrt{2}-1\right)^3$; $x = -3$;

$\log_{\sqrt{2}+1} \left(5\sqrt{2}-7\right) = \boxed{-3}$.

Решите уравнение (16–20):

16. $\log_x 4 = \dfrac{1}{3} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} x^{\frac{1}{3}} = 4$. Возведем обе части уравнения в третью степень: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 4^3; \quad x = 64.$

Ответ: $x = 64$.

17. $\log_{3x} \sqrt{8} = \dfrac{3}{2} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} (3x)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$. Возведем обе части уравнения в степень, обратную показателю степени $\dfrac{3}{2}$:

$$\left((3x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad 3x = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad 3x = 2; \quad x = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $x = \dfrac{2}{3}$.

18. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3x} = -3 \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = \sqrt{3x};$

$$3^3 = (3x)^{\frac{1}{2}}; \quad \left(3^3\right)^2 = \left((3x)^{\frac{1}{2}}\right)^2; \quad 3^6 = 3x; \quad x = 3^5; \quad x = 243.$$

Ответ: $x = 243$.

19. $\log_{14-6\sqrt{5}} \left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{x}{3}} = -\dfrac{1}{2} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(14-6\sqrt{5}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{x}{3}}.$

Так как $\left(3-\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$, то

$$\left(\left(3-\sqrt{5}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{x}{3}}; \quad \left(3-\sqrt{5}\right)^{-1} = \left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{x}{3}}; \quad x = -3.$$

Ответ: $x = -3$.

20. $\log_{\sqrt{5x}} \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{2}{3} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(\sqrt{5x}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2};$

$$\left((5x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}; \quad (5x)^{\frac{1}{3}} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}},$$

значит $5x = x^2$; $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$, но $x > 0$.

Ответ: $x = 5$.

Упражнения

Вариант 1

а) Запишите в виде логарифмического равенства.
б) Вычислите логарифм.
в) Решите логарифмическое уравнение.

	а)	б)	в)
1	$2^5 = 32$	$\log_2 4$	$\log_{36} x = -\frac{1}{2}$
2	$4^{\frac{3}{2}} = 8$	$\log_{\sqrt{3}} 3$	$\log_{125}(3x) = \frac{1}{3}$
3	$5^0 = 1$	$\log_3 27$	$\log_{\frac{1}{4}} x = -2$
4	$\left(\sqrt{5}\right)^3 = 5\sqrt{5}$	$\log_{\sqrt{5}} 1$	$\log_{2,4} 5{,}76 = x$
5	$\left(\sqrt{3}\right)^4 = 9$	$\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7}$	$\log_{0,216} 0{,}6 = x$
6	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\log_6 \sqrt{6}$	$\log_x 0{,}04 = 2$
7	$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$\log_{\frac{1}{5}} 125$	$\log_{2x} 1024 = 5$
8	$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$	$\log_2 2\sqrt{2}$	$\log_{\sqrt{2x}} 12{,}96 = -4$
9	$8^{-\frac{2}{3}} = 0{,}25$	$\log_9 \frac{1}{243}$	$\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[12]{9 - 4\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$
10	$\sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3}$	$\log_{\frac{1}{4\sqrt{2}}} 8$	$\log_{\sqrt[3]{x^2}} 3x = 3$

Вариант 2

а) Запишите в виде логарифмического равенства.
б) Вычислите логарифм.
в) Решите логарифмическое уравнение.

	а)	б)	в)
1	$3^5 = 243$	$\log_3 27$	$\log_{25} x = \frac{1}{2}$
2	$9^{\frac{3}{2}} = 27$	$\log_9 3$	$\log_{216}(2x) = -\frac{1}{3}$
3	$6^0 = 1$	$\log_9 81$	$\log_{\frac{1}{9}} x = -\frac{1}{2}$
4	$\left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{3}$	$\log_{\sqrt{6}} 1$	$\log_{2,2} 4{,}84 = x$
5	$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$	$\log_{\sqrt{10}} \sqrt{10}$	$\log_{0,343} 0{,}7 = x$
6	$\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$	$\log_7 \sqrt{7}$	$\log_x 0{,}16 = 2$
7	$\sqrt[3]{216} = 6$	$\log_3 3\sqrt{3}$	$\log_{5x} 625 = 3$
8	$\left(4\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}$	$\log_{\frac{1}{4}} 64$	$\log_{\sqrt{3x}} 7{,}29 = -4$
9	$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}$	$\log_8 \frac{1}{4}$	$\log_{\sqrt[3]{x}} \sqrt[4]{6 - 4\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}$
10	$\sqrt[4]{243} = 3\sqrt[4]{3}$	$\log_{\frac{1}{9\sqrt{3}}} 27$	$\log_{\sqrt[6]{x^4}} 8x = 6$

Ответы

	Вариант 1			Вариант 2		
	а)	б)	в)	а)	б)	в)
1	$\log_2 32 = 5$	2	$\frac{1}{6}$	$\log_3 243 = 5$	3	5
2	$\log_4 8 = \frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{3}$	$\log_9 27 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
3	$\log_5 1 = 0$	3	16	$\log_6 1 = 0$	2	3
4	$\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = 3$	0	2	$\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} = 3$	0	2
5	$\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$	1	$\frac{1}{3}$	$\log_{2\sqrt{2}} 8 = 2$	1	$\frac{1}{3}$
6	$\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0,2	$\log_{81} 3\sqrt[3]{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0,4
7	$\log_8 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$	-3	2	$\log_{216} 6 = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	5
8	$\log_{5\sqrt{2}} 50 = 2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{36}$	$\log_{4\sqrt{3}} 192 = 3$	-3	$\frac{5}{27}$
9	$\log_8 0{,}25 = -\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$2\sqrt{2}-1$	$\log_{27} \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$
10	$\log_{48} 2\sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$	$-\frac{6}{5}$	3	$\log_{243} 3\sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$	$-\frac{6}{5}$	2

Основные теоремы о логарифмах

Теорема 1.

$$\boxed{\log_a (c_1 \cdot c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Доказательство:

Пусть $\left.\begin{array}{l} \log_a c_1 = t_1;\ a^{t_1} = c_1 \\ \log_a c_2 = t_2;\ a^{t_2} = c_2 \end{array}\right| \Rightarrow c_1 \cdot c_2 = a^{t_1} \cdot a^{t_2} = a^{t_1+t_2} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_a (c_1 \cdot c_2) = t_1 + t_2 = \log_a c_1 + \log_a c_2,$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.

$$\boxed{\log_a \frac{c_1}{c_2} = \log_a c_1 - \log_a c_2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Доказательство:

Пусть $\left.\begin{array}{l} \log_a c_1 = t_1;\ a^{t_1} = c_1 \\ \log_a c_2 = t_2;\ a^{t_2} = c_2 \end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{a^{t_1}}{a^{t_2}} = a^{t_1-t_2} \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_a \dfrac{c_1}{c_2} = t_1 - t_2 = \log_a c_1 - \log_a c_2.$

Теорема 3. $\boxed{\log_{a^k} b^m = \dfrac{m}{k} \log_a b}$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0. \end{cases}$

Доказательство:

Пусть $\log_a b = t \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} a^t = b.$

Возведем обе части в степень m: $a^{tm} = b^m;$

но $a^{tm} = \left(a^k\right)^{\frac{m}{k}t} = b^m \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \log_{a^k} b^m = \dfrac{m}{k}t,$

тогда $\log_{a^k} b^m = \dfrac{m}{k} \log_a b.$

Практикум 2 (использование основных теорем о логарифмах)

Вычислите (1–6):

1. $\log_2 3\frac{1}{2} + \log_2 4\frac{4}{7} = \log_2\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{32}{7}\right) = \log_2 16 = \boxed{4}$.

2. $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2\frac{2}{3} = \log_2 27 - \log_2 3^2 + \log_2\frac{2}{3} =$

$= \log_2\frac{27\cdot\frac{2}{3}}{3^2} = \log_2 2 = \boxed{1}$. $\boxed{\log_a b^n = n\log_a b\ (b > 0)}$

3. $\log_{\frac{1}{3}} 2 + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}} 4\sqrt{18} =$

$= \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 8^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{3}}\left(2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3\right) =$

$= \log_{\frac{1}{3}}\frac{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2}{2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3} = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} = \boxed{1}$.

4. $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}\log_2 2 = \boxed{1{,}5}$.

5. $\log_{\sqrt[3]{5}}\sqrt{5} + \log_{\sqrt{27}}\sqrt[3]{9}$.

Так как $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\boxed{\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k}\log_a b\,(a \neq 1,\ a > 0,\ b > 0)}$

то $\log_{\sqrt[3]{5}}\sqrt{5} + \log_{\sqrt{27}}\sqrt[3]{9} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\log_5 5 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}\log_3 3 =$

$= \frac{3}{2} + \frac{4}{9} = \frac{35}{18} = \boxed{1\frac{17}{18}}$.

6. $\log_9\left(\log_4\sqrt[3]{4}\right) = \log_9\left(\frac{1}{3}\log_4 4\right) = \log_{3^2}\left(3^{-1}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\log_3 3 = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

Решите уравнения (7–14):

7. $\log_5 6 = \log_5 x + \log_5(x+1);$

$$\log_5 6 = \log_5\bigl(x(x+1)\bigr); \quad (x>0)$$

$$\log_5 6 = \log_5(x^2+x); \quad 6 = x^2+x;$$

$$x^2+x-6=0; \quad \left[\begin{array}{l} x=-3 \notin (0;\infty) \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x=2$.

8. $\log_3 x = \log_3 8 - 2\log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2};$

$$\boxed{\log_a b^n = n\log_a b \quad \text{при} \quad \begin{cases} b>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}}$$

$$\log_3 x = \log_3 8 - \log_3 2^2 + \log_3 \frac{3}{2}; \quad \log_3 x = \log_3\left(\frac{8}{2^2}\cdot\frac{3}{2}\right);$$

$\log_3 x = \log_3 3$, значит $x=3$.

Ответ: $x=3$.

9. $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - \log_{\frac{1}{2}} 3\sqrt{18} = \log_4 x;$

$$\log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{2}} 27^{\frac{1}{3}} - \log_{\frac{1}{2}}\left(3\cdot 3\sqrt{2}\right);$$

$$\log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{3\cdot 3}{3\cdot 3\sqrt{2}}; \quad \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \log_4 x = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2};$$

$$\log_4 x = \frac{1}{2}; \quad x = 4^{\frac{1}{2}}; \quad x=2.$$

Ответ: $x=2$.

10. $\log_{25} x = \log_9 27.$

Так как $\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \dfrac{3}{2}\log_3 3 = \dfrac{3}{2}$, то $\log_{25} x = \dfrac{3}{2}$,

значит $x = 25^{\frac{3}{2}}$; $\quad x = \left(5^2\right)^{\frac{3}{2}}$; $\quad x = 5^3$.

Ответ: $x = 125$.

11. $\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{5} + \log_{\sqrt{8}} \sqrt[3]{4} + \log_{729} \sqrt[3]{3} = \log_{\sqrt{7}} x$;

$\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{5} = \log_{5^{\frac{1}{3}}} 5^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} \log_5 5 = \dfrac{3}{2}$;

$\log_{\sqrt{8}} \sqrt[3]{4} = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} \log_2 2 = \dfrac{4}{9}$;

$\log_{729} \sqrt[3]{3} = \log_{3^6} 3^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{6} \log_3 3 = \dfrac{1}{18}$.

Тогда $\log_{\sqrt{7}} x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{18}$; $\quad \log_{\sqrt{7}} x = \dfrac{3\cdot 9 + 4\cdot 2 + 1}{18}$;

$\log_{\sqrt{7}} x = \dfrac{36}{18}$; $\quad \log_{\sqrt{7}} x = 2$; $\quad x = \left(\sqrt{7}\right)^2$; $\quad x = 7$.

Ответ: $x = 7$.

12. $\log_{\sqrt{3}} \left(\log_{49} \sqrt[3]{49}\right) = \log_x 25.$

Так как $\log_{49} \sqrt[3]{49} = \log_{49} 49^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}\log_{49} 49 = \dfrac{1}{3}$, то

$\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{3} = \log_x 25$; $\quad \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{-1} = \log_x 25$; $\quad \dfrac{-1}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = \log_x 25$;

$\log_x 25 = -2$, значит $x^{-2} = 25$; $\quad \left(\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}\right)$;

$x^2 = \dfrac{1}{25}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{5} \\ x = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$. $\quad x > 0$, значит $x = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: $x = 0{,}2$.

$$\boxed{\begin{array}{l} n = \log_a a^n \\ \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \end{array}}$$

13. $\log_2 x = 3 + \log_2 5 - \log_2 10;$

$\log_2 x = \log_2 2^3 + \log_2 5 - \log_2 10;$

$\log_2 x = \log_2 \dfrac{2^3 \cdot 5}{10}; \quad \log_2 x = \log_2 4; \quad x = 4.$

Ответ: $x = 4$.

14. Найдите x, прологарифмировав обе части уравнения по основанию 2: $x = \dfrac{\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt[3]{ab^2}}$, где $\log_2 a = 3$ и $\log_2 b = 2$.

$\log_2 x = \log_2 \dfrac{\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt[3]{ab^2}}.$

Так как $\log_2 \dfrac{\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt[3]{ab^2}} = \log_2 \sqrt[4]{a^3b} - \log_2 \sqrt[3]{ab^2} =$

$= \dfrac{1}{4}\log_2 \left(a^3b\right) - \dfrac{1}{3}\log_2 \left(ab^2\right) =$

$= \dfrac{1}{4}\left(\log_2 a^3 + \log_2 b\right) - \dfrac{1}{3}\left(\log_2 a + \log_2 b^2\right) =$

$= \dfrac{1}{4}(3\log_2 a + \log_2 b) - \dfrac{1}{3}(\log_2 a + 2\log_2 b) =$

$= \dfrac{3}{4}\log_2 a + \dfrac{1}{4}\log_2 b - \dfrac{1}{3}\log_2 a - \dfrac{2}{3}\log_2 b =$

$= \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}\right)\log_2 a + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{3}\right)\log_2 b = \dfrac{5}{12}\log_2 a - \dfrac{5}{12}\log_2 b.$

Учитывая условия, получим

$\log_2 x = \dfrac{5}{12}\cdot 3 - \dfrac{5}{12}\cdot 2; \quad \log_2 x = \dfrac{5}{12}; \quad x = \sqrt[12]{32}.$

Ответ: $x = \sqrt[12]{32}$.

Тренировочная работа 2

Вычислите (1–8):

1. $\log_{13} \sqrt[5]{169}$;

2. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$;

3. $\log_3 (\log_2 8)$;

4. $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[3]{9}$;

5. $\log_4 \sqrt{2} - \log_4 (\log_{16} 256)$;

6. $\log^2_{125} \sqrt[4]{5}$;

7. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 25\sqrt[3]{5}$;

8. $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32}$.

Решите уравнения (9–11), используя определение логарифма:

9. $\log_x 25 = \dfrac{1}{2}$; **10.** $\log_{2x} \sqrt[3]{4} = \dfrac{2}{3}$; **11.** $\log_x 2\sqrt[4]{2} = -\dfrac{3}{4}$.

Решите уравнения (12–16), используя свойства логарифмов:

12. $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$; **13.** $\lg x = \dfrac{1}{3}\lg 54 + \lg 5 - \dfrac{1}{3}\lg 16$;

14. $\lg x = \dfrac{2}{3}\lg 24 - 2 + 1\dfrac{1}{3}\lg 3$;

15. $\log_3 x = \dfrac{1}{2}\log_3 18 + \log_3 \sqrt{2} - 2\log_3 5$;

16. $\log_5 x = \log_5 \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \log_5 \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

17. Найдите x, прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10:

$$x = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ba^3}}, \quad \text{где} \quad \lg a = 2,\ \lg b = 3.$$

18. Решите уравнение, используя разложение на множители:

$$\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x)\lg\frac{5}{3}.$$

Примечания.

а) Если основание логарифма равно 10, то его можно не указывать. Записывают так: $\mathbf{\log_{10} c = \lg c}$.

б) Если основание логарифма равно e ($e \approx 2{,}7$), то записывают так: $\mathbf{\log_e c = \ln c}$.

Решение тренировочной работы 2

1. $\log_{13}\sqrt[5]{169}$.

Пусть $\log_{13}\sqrt[5]{169}=x \overset{\text{опр.}}{\iff} 13^x=\sqrt[5]{169}$;

$13^x=13^{\frac{2}{5}}$; $\quad x=\boxed{\dfrac{2}{5}}$.

2. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}$.

$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}=x \overset{\text{опр.}}{\iff} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\sqrt[4]{243}$;

$3^{-x}=3^{\frac{5}{4}}$; $\quad x=\boxed{-1{,}25}$.

3. $\log_3(\log_2 8)$.

Пусть $\log_2 8=x \overset{\text{опр.}}{\iff} 2^x=8$; $\quad 2^x=2^3$; $\quad x=3$,

тогда $\log_3(\log_2 8)=\log_3 3=\boxed{1}$.

4. $\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt[3]{9}=x \overset{\text{опр.}}{\iff} \left(\sqrt[4]{3}\right)^x=\sqrt[3]{9}$; $\quad 3^{\frac{1}{4}x}=3^{\frac{2}{3}}$; $\quad x=\boxed{2\dfrac{2}{3}}$.

5. $\log_4\sqrt{2}-\log_4(\log_{16}256)$.

Пусть $\log_4\sqrt{2}=x \overset{\text{опр.}}{\iff} 4^x=\sqrt{2}$; $\quad 2^{2x}=2^{\frac{1}{2}}$; $\quad x=\dfrac{1}{4}$.

Пусть $\log_{16}256=t \overset{\text{опр.}}{\iff} 16^t=256$; $\quad 16^t=16^2$; $\quad t=2$.

Пусть $\log_4 2=p \overset{\text{опр.}}{\iff} 4^p=2$; $\quad 2^{2p}=2$; $\quad 2p=1$; $\quad p=\dfrac{1}{2}$.

Итак, $\log_4\sqrt{2}-\log_4(\log_{16}256)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}=\boxed{-0{,}25}$.

6. $\log^2_{125}\sqrt[4]{5}$.

Положим $\log_{125}\sqrt[4]{5}=x \overset{\text{опр.}}{\iff} 125^x=\sqrt[4]{5}$; $5^{3x}=5^{\frac{1}{4}}$; $3x=\dfrac{1}{4}$;

$x=\dfrac{1}{12}$. Тогда $\log^2_{125}\sqrt[4]{5}=\left(\log_{125}\sqrt[4]{5}\right)^2=\left(\dfrac{1}{12}\right)^2=\boxed{\dfrac{1}{144}}$.

7. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 25\sqrt[3]{5}$.

Пусть $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 25\sqrt[3]{5} = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^x = 25\sqrt[3]{5}$; $\quad 5^{-\frac{1}{2}x} = 5^{2+\frac{1}{3}}$;

$-\dfrac{1}{2}x = \dfrac{7}{3}$; $\quad x = -\dfrac{14}{3}$; $\quad x = \boxed{-4\dfrac{2}{3}}$.

8. $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32}$.

Положим $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32} = x \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} (4\sqrt[3]{2})^x = \sqrt[3]{32}$;

$\left(2^{2+\frac{1}{3}}\right)^x = 2^{\frac{5}{3}}$; $\ \dfrac{7}{3}x = \dfrac{5}{3}$; $\ x = \boxed{\dfrac{5}{7}}$.

9. $\log_x 25 = \dfrac{1}{2}$; $\quad x^{\frac{1}{2}} = 25$; $\quad x = 25^2$.

Ответ: $x = 625$.

10. $\log_{2x} \sqrt[3]{4} = \dfrac{2}{3}$; $\quad (2x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$. Возведем обе части уравнения в степень, обратную показателю степени $2/3$:

$2x = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\ 2x = 2$; $\ x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

11. $\log_x 2\sqrt[4]{2} = -\dfrac{3}{4}$; $\quad x^{-\frac{3}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$. Возведем обе части уравнения в степень, обратную показателю степени $-3/4$:

$\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(2^{1+\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}}$; $\ x = 2^{\frac{5}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)}$.

Ответ: $x = 2^{-\frac{5}{3}}$.

12. $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$; $\quad \lg x = \lg 10^2 + \lg\dfrac{3}{5}$; $\quad \lg x = \lg\left(10^2 \cdot \dfrac{3}{5}\right)$.

Ответ: $x = 60$.

13. $\lg x = \dfrac{1}{3}\lg 54 + \lg 5 - \dfrac{1}{3}\lg 16;\quad \lg x = \lg 54^{\frac{1}{3}} + \lg 5 - \lg 16^{\frac{1}{3}};$

$\lg x = \lg \dfrac{54^{\frac{1}{3}}\cdot 5}{16^{\frac{1}{3}}};\quad x = \dfrac{27^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 5}{8^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}};\quad x = \dfrac{3}{2}\cdot 5.$

Ответ: $x = 7{,}5$.

14. $\lg x = \dfrac{2}{3}\lg 24 - 2 + 1\dfrac{1}{3}\lg 3;\quad \lg x = \lg 24^{\frac{2}{3}} - \lg 10^2 + \lg 3^{\frac{4}{3}};$

$\lg x = \lg \dfrac{24^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{4}{3}}}{10^2};\quad x = \dfrac{8^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{4}{3}}}{10^2};\quad x = \dfrac{2^2\cdot 3^2}{100}.$

Ответ: $x = \dfrac{9}{25}$.

15. $\log_3 x = \dfrac{1}{2}\log_3 18 + \log_3\sqrt{2} - 2\log_3 5.$

$\log_3 x = \log_3\sqrt{18} + \log_3\sqrt{2} - \log_3 5^2;$

$\log_3 x = \log_3 \dfrac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}}{5^2};\quad \log_3 x = \log_3 \dfrac{6}{25};\quad x = \dfrac{6}{25}.$

Ответ: $x = 0{,}24$.

16. $\log_5 x = \log_5 \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \log_5 \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}};$

$\log_5 x = \log_5\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}\right).$

Так как $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} =$

$= \sqrt[6]{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)} = \sqrt[6]{49-48} = 1,$

то $\log_5 x = \log_5 1$.

Ответ: $x = 1$.

17. Найти $x = \dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ba^3}}$, где $\lg a = 2$, $\lg b = 3$.

Прологарифмируем по основанию 10:

$$\lg x = \lg \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ba^3}};$$

$$\lg x = \lg \sqrt[3]{ab^2} - \lg \sqrt{ba^3}; \quad \lg x = \frac{1}{3}\lg ab^2 - \frac{1}{2}\lg ba^3;$$

$$\lg x = \frac{1}{3}\left(\lg a + \lg b^2\right) - \frac{1}{2}\left(\lg b + \lg a^3\right);$$

$$\lg x = \frac{1}{3}(\lg a + 2\lg b) - \frac{1}{2}(\lg b + 3\lg a).$$

Так как $\lg a = 2$, $\lg b = 3$, получаем

$$\lg x = \frac{1}{3}(2 + 2\cdot 3) - \frac{1}{2}(3 + 3\cdot 2);$$

$$\lg x = \frac{8}{3} - \frac{9}{2}; \quad \lg x = \frac{16-27}{6}; \quad \lg x = -\frac{11}{6}.$$

Ответ: $x = 10^{-\frac{11}{6}}$.

18. $\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x)\lg \dfrac{5}{3}$;

$$(\lg 5 + \lg 3)(\lg 5 - \lg 3) = (1 - \lg x)\lg \frac{5}{3};$$

$$\lg(5\cdot 3)\cdot \lg \frac{5}{3} - (1 - \lg x)\lg \frac{5}{3} = 0; \quad \lg \frac{5}{3}(\lg 15 - 1 + \lg x) = 0;$$

$$\lg x = 1 - \lg 15; \quad \lg x = \lg 10 - \lg 15; \quad \lg x = \lg \frac{10}{15}.$$

Ответ: $x = \dfrac{2}{3}$.

Тренировочная работа 3

Вычислите (1–10):

1. $\log_4 91 - \log_4 13 + \log_4 \dfrac{2}{7}$;

2. $\sqrt{\log_3 81}$;

3. $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{9}\right)$;

4. $\log_{\frac{1}{3}}^{2} 27$;

5. $\log_{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 4^{\frac{1}{3}} - \log_3 \sqrt[3]{256}$;

6. $\log_3 4 - 4\log_3 2 + \log_3 \dfrac{4}{9}$;

7. $\dfrac{\log_4 8}{\log_8 16}$;

8. $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 150}$;

9. $\dfrac{2\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 400 + 3\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} \sqrt[3]{45}}{4\log_{\sqrt{\frac{1}{2}}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\sqrt{\frac{1}{2}}} 27 - 2\log_{\sqrt{\frac{1}{2}}} 6}$;

10. $\dfrac{\log_2^2 20 + \log_2 20 \cdot \log_2 5 - 2\log_2^2 5}{\log_2 20 + 2\log_2 5}$.

Решение тренировочной работы 3

1. $\log_4 91 - \log_4 13 + \log_4 \dfrac{2}{7} = \log_4 \dfrac{91 \cdot \frac{2}{7}}{13} = \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} =$
$= \dfrac{1}{2}\log_4 4 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

2. $\sqrt{\log_3 81} = \sqrt{\log_3 3^4} = \sqrt{4\log_3 3} = \sqrt{4} = \boxed{2}$.

3. $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{9}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right) =$
$= \log_{\sqrt{2}}\left(2\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}\right) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2 = \boxed{2}$.

4. $\log_{\frac{1}{3}}{}^2 27 = \left(\log_{\frac{1}{3}} 3^3\right)^2 =$
$= \left(\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right)^2 = \left(-3\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}\right)^2 = (-3)^2 = \boxed{9}$.

5. $\log_{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 4^{\frac{1}{3}} - \log_3 \sqrt[3]{256} =$
$= \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{3^{\frac{1}{3}}} 2^{\frac{2}{3}} - \log_3 2^{\frac{8}{3}} =$
$= \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\log_3 2 + \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\log_3 2 - \dfrac{8}{3}\log_3 2 =$
$= \left(\dfrac{2}{3} + 2 - \dfrac{8}{3}\right)\log_3 2 = 0 \cdot \log_3 2 = \boxed{0}$.

6. $\log_3 4 - 4\log_3 2 + \log_3 \dfrac{4}{9} = \log_3 4 - \log_3 2^4 + \log_3 \dfrac{4}{9} = \log_3 \dfrac{4 \cdot \frac{4}{9}}{2^4} =$
$= \log_3 \dfrac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3 = \boxed{-2}$.

7. $\dfrac{\log_4 8}{\log_8 16} = \dfrac{\log_{2^2} 2^3}{\log_{2^3} 2^4} = \dfrac{\frac{3}{2}\log_2 2}{\frac{4}{3}\log_2 2} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{8} = \boxed{1{,}125}$.

8. $$\frac{\log_{\sqrt7}14-\frac13\log_{\sqrt7}56}{\log_{\sqrt6}30-\frac12\log_{\sqrt6}150}=\frac{\log_{\sqrt7}\frac{14}{56^{1/3}}}{\log_{\sqrt6}\frac{30}{150^{1/2}}}=\frac{\log_{\sqrt7}\left(14\cdot14^{-\frac13}\cdot4^{-\frac13}\right)}{\log_{\sqrt6}\left(30\cdot30^{-\frac12}\cdot5^{-\frac12}\right)}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt7}\left(14^{\frac23}\cdot4^{-\frac13}\right)}{\log_{\sqrt6}\left(30^{\frac12}\cdot5^{-\frac12}\right)}=\frac{\log_{\sqrt7}\left(2^{\frac23}\cdot7^{\frac23}\cdot2^{-\frac23}\right)}{\log_{\sqrt6}\left(5^{\frac12}\cdot6^{\frac12}\cdot5^{-\frac12}\right)}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt7}7^{\frac23}}{\log_{\sqrt6}6^{\frac12}}=\frac{\log_{7^{\frac12}}(7)^{\frac23}}{\log_{6^{\frac12}}6^{\frac12}}=\frac{\frac{2/3}{1/2}\log_7 7}{\frac{1/2}{1/2}\log_6 6}=\frac43\cdot\frac22=\boxed{\frac43}.$$

9. $$\frac{2\log_{\sqrt{\frac13}}6-\frac12\log_{\sqrt{\frac13}}400+3\log_{\sqrt{\frac13}}\sqrt[3]{45}}{4\log_{\sqrt{\frac12}}3-\frac23\log_{\sqrt{\frac12}}27-2\log_{\sqrt{\frac12}}6}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt{\frac13}}6^2-\log_{\sqrt{\frac13}}400^{\frac12}+\log_{\sqrt{\frac13}}\left(\sqrt[3]{45}\right)^3}{\log_{\sqrt{\frac12}}3^4-\log_{\sqrt{\frac12}}27^{\frac23}-\log_{\sqrt{\frac12}}6^2}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt{\frac13}}\left(\frac{6^2\cdot45}{20}\right)}{\log_{\sqrt{\frac12}}\left(3^4\cdot6^{-2}\cdot27^{-\frac23}\right)}=\frac{\log_{\sqrt{\frac13}}(9\cdot9)}{\log_{\sqrt{\frac12}}\left(3^4\cdot3^{-2}\cdot2^{-2}\cdot(3^3)^{-\frac23}\right)}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt{\frac13}}3^4}{\log_{\sqrt{\frac12}}(3^0\cdot2^{-2})}=\frac{\log_{3^{-\frac12}}3^4}{\log_{2^{-\frac12}}2^{-2}}=\frac{\frac{4}{-\frac12}\log_3 3}{\frac{-2}{-\frac12}\log_2 2}=\boxed{-2}.$$

10. $$\frac{\log_2^2 20+\log_2 20\cdot\log_2 5-2\log_2^2 5}{\log_2 20+2\log_2 5}=$$

$$=\frac{\left(\log_2^2 20-\log_2^2 5\right)+\left(\log_2 20\cdot\log_2 5-\log_2^2 5\right)}{\log_2 20+2\log_2 5}=$$

$$=\frac{(\log_2 20-\log_2 5)(\log_2 20+\log_2 5)+\log_2 5(\log_2 20-\log_2 5)}{\log_2 20+2\log_2 5}=$$

$$=\frac{(\log_2 20-\log_2 5)(\log_2 20+2\log_2 5)}{\log_2 20+2\log_2 5}=$$

$$=\log_2 20-\log_2 5=\log_2\frac{20}{5}=\log_2 4=2\log_2 2=\boxed{2}.$$

Теоремы о логарифмах. Основное логарифмическое тождество

Рассмотрим еще некоторые теоремы о логарифмах и основное логарифмическое тождество.

Основное логарифмическое тождество

По определению $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$.

Отсюда следует, что по определению $\boxed{a^{\log_a c} = c}$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ c > 0 \end{cases}$.

Это тождество называют **основным логарифмическим тождеством**.

Практикум 3

Вычислите:

1. $2^{\log_2 3+1} = 2^{\log_2 3} \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6.$

2. $3^{2\log_9 2+1} = 3^{2\log_9 2} \cdot 3^1 = \left(3^2\right)^{\log_9 2} \cdot 3 = 9^{\log_9 2} \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6.$

3. $9^{\log_3 5} = 3^{2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25.$

4. $4^{\log_2 3+\frac{1}{2}} = 4^{\log_2 3} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^{\log_2 3} \cdot 2 = \left(2^{\log_2 3}\right)^2 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2 = 18.$

5. $8^{\log_4 3-\log_{16} 729} = 8^{\log_4 3-\log_4 27} = 8^{\log_4 \frac{3}{27}} =$ $\boxed{\begin{array}{l} \log_{a^n} b^n = \log_a b \\ \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases} \end{array}}$

$$= 8^{\log_4 \frac{1}{9}} = 8^{\log_2 \frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\log_2 \frac{1}{3}} = \left(2^{\log_2 \frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

6. $125^{\log_{25}2-\log_{625}64+1}=125^{\log_{25}2-\log_{25}8}\cdot 125^1=125^{\log_{25}\frac{1}{4}}\cdot 125=$
$=125^{\log_5\frac{1}{2}}\cdot 125=5^{3\log_5\frac{1}{2}}\cdot 125=\left(5^{\log_5\frac{1}{2}}\right)^3\cdot 125=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 125=$
$=\dfrac{125}{8}=15{,}625.$

7. $25^{\log_{\sqrt{5}}3-\log_{125}9^3}=5^{\frac{2\log}{5^{\frac{1}{2}}}3}\cdot 5^{-2\cdot\log_{5^3}\left(3^6\right)}=$
$=5^{\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_5 3}\cdot 5^{\frac{-2\cdot 6}{3}\log_5 3}=\left(5^{\log_5 3}\right)^4\cdot\left(5^{\log_5 3}\right)^{-4}=3^4\cdot 3^{-4}=1.$

8. $9^{\log_{\sqrt{3}}2-\log_{27}64}=9^{\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3 2-\log_3 4}=9^{2\log_3 2-\log_3 4}=9^0=1.$

9. $\sqrt[4]{4^{6\log_8 5-\log_{\sqrt{2}}125}}=\sqrt[4]{4^{\frac{6}{3}\log_2 5-\frac{3}{\frac{1}{2}}\log_2 5}}=\sqrt[4]{4^{2\log_2 5-6\log_2 5}}=$
$=\left(4^{-4\log_2 5}\right)^{\frac{1}{4}}=4^{-\log_2 5}=\left(2^{-\log_2 5}\right)^2=5^{-2}=\dfrac{1}{25}=0{,}04.$

10. $\sqrt[4]{9^{6\log_{27}2-\log_{\sqrt{3}}8}}=\sqrt[4]{9^{\frac{6}{3}\log_3 2-\frac{3}{\frac{1}{2}}\log_3 2}}=\left(9^{-4\log_3 2}\right)^{\frac{1}{4}}=$
$=\left(9^{\log_3 2}\right)^{-1}=\left(3^{\log_3 2}\right)^{-2}=2^{-2}=0{,}25.$

11. $128^{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)+\log_4\left(7+4\sqrt{3}\right)}.$
$7+4\sqrt{3}=4+2\cdot 2\sqrt{3}+3=\left(2+\sqrt{3}\right)^2,$
тогда $\log_4\left(7+4\sqrt{3}\right)=\log_2\left(2+\sqrt{3}\right).$
Отсюда $128^{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)+\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)}=$
$=128^{\log_2\left(\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\right)}=128^{\log_2(4-3)}=128^{\log_2 1}=128^0=1.$

12. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\log_{3+2\sqrt{2}}4}.$
Учтем, что $3+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^2;$
$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1;\quad \sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}.$
Тогда $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\log_{3+2\sqrt{2}}4}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{\log_{\sqrt{2}+1}2}=$
$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{\log_{\sqrt{2}+1}2}=\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{\log_{\sqrt{2}+1}2}\right)^{-1}=\dfrac{1}{2}.$

Теорема 4.

Переход от одного основания логарифма к другому основанию осуществляется следующим образом:

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$$

Доказательство:
$a^{\log_a c} = c$. Прологарифмируем это равенство по основанию b:
$\log_b a^{\log_a c} = \log_b c \Rightarrow \log_a c \cdot \log_b a = \log_b c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$$

Следствие 1. Если $b = c$, то $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1. \end{cases}$

Следствие 2. По следствию 1 имеем

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$$

Практикум 4 (использование теорем при решении уравнений)

1. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x = 1{,}5$.

Приведем логарифмы к одному основанию (теорема 4):

$$\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}\log_2 2} = 2\log_2 x.$$

Итак, $2\log_2 x + \log_2 x = 1{,}5$; $\quad \log_2 x = \frac{1}{2}$; $\quad x = 2^{\frac{1}{2}}$.

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

2. Решите уравнение $\log_7 x = 2\log_7 3 + 4\log_{49} 2$.

Вследствие теоремы 3 $\left(\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b\right.$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $\left. b > 0\right)$ имеем $\log_{49} 2 = \log_{7^2} 2 = \frac{1}{2}\log_7 2$, поэтому

$\log_7 x = 2\log_7 3 + 4\cdot\frac{1}{2}\log_7 2$; $\quad \log_7 x = 2\log_7 3 + 2\log_7 2$;

$\log_7 x = 2\left(\log_7 3 + \log_7 2\right)$; $\quad \log_7 x = 2\log_7 6$;

$\log_7 x = \log_7 36$.

Ответ: $x = 36$.

3. Решите уравнение $\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \frac{11}{12}$ при $x > 0$.

$\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \frac{11}{12}$; $\quad \log_4 x + \log_{4^2} x + \log_{4^3} x = \frac{11}{12}$.

Вследствие теоремы 3 имеем

$\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{3}\log_4 x = \frac{11}{12}$;

$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\log_4 x = \frac{11}{12}$;

$\frac{11}{6}\log_4 x = \frac{11}{12}$; $\quad \log_4 x = \frac{1}{2}$; $\quad x = 4^{\frac{1}{2}}$.

Ответ: $x = 2$.

2 Зak. 1157

4. Решите уравнение $\log_{25} x^2 + \log_{\sqrt{5}} x = 3$.

$\log_{25} x^2 + \log_{\sqrt{5}} x = 3$; $\quad \log_5 |x| + \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_5 x = 3$.

$\log_{a^k} b^k = \log_{|a|} |b|$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Для $\log_{\sqrt{x}} x$ по определению $x > 0$, откуда $|x| = x$.

$\log_5 |x| + 2\log_5 x = 3$; $\quad \log_5 x + 2\log_5 x = 3$;

$\log_5 x = 1$; $\quad x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

5. Решите уравнение $\log_5 x \cdot \log_7 x = 4\log_5 7$.

Приведем логарифмы к одному основанию:

$$\log_5 x \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 7} = 4\log_5 7;$$

$$\log_5^2 x = 4\log_5^2 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2\log_5 7 \\ \log_5 x = -2\log_5 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = \log_5 7^2 \\ \log_5 x = \log_5 7^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7^2 \\ x = 7^{-2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{49; \dfrac{1}{49}\right\}$.

6. Решите уравнение $5^{\log_{25}\left(x^2-2x+1\right)} = \sqrt{3}^{\log_3 5 \cdot \log_5 4x^2}$.

Применим формулу $\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c}$, тогда

$5^{\log_5 |x-1|} = \sqrt{3}^{\log_3 4x^2}$; $\quad |x-1| = \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} |2x|}$;

$D(\text{У})$: $x \neq 1$; $x \neq 0$;

($D(\text{У})$ — область определения уравнения);

$|x-1| = 2|x|$. Так как $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$, то

$(x-1)^2 = (2x)^2$; $\quad (2x - x + 1)(2x + x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $\left\{-1; \dfrac{1}{3}\right\}$.

Тренировочная работа 4

Вычислите (1–8):

1. $2^{\frac{3}{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}}$;

2. $\log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 16)$;

3. $32^{\log_4 3 - 0{,}5 \log_2 3}$;

4. $(\log_3 64) \cdot \log_2 \dfrac{1}{27}$;

5. $\dfrac{3\log_3^2 45 - 2\log_3 45 \cdot \log_3 5 - \log_3^2 5}{3\log_3 45 + \log_3 5}$;

6. $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9}$;

7. $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$;

8. $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7$.

Решите уравнения (9–11):

9. $\log_6 x \cdot \log_8 x = 9\log_6 8$;

10. $\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x = 6$;

11. $4^{\log_{16}(4x^2-12x+9)} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 7 \cdot \log_7(x^2+2x+1)}$.

Решение тренировочной работы 4

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

1. $2^{\frac{3}{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}} = 2^{3\log_2 \sqrt[3]{6}} =$

$= \left(2^{\log_2 \sqrt[3]{6}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{6}\right)^3 = \boxed{6}$.

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b^{\log_b c}}$$

2. $\log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 16) =$

$= \log_{\frac{1}{4}} \left(\log_2 3^{\log_3 16}\right) = \log_{\frac{1}{4}} \log_2 16 = \log_{\frac{1}{4}} \log_2 2^4 =$

$= \log_{\frac{1}{4}} 4\log_2 2 = \log_{\frac{1}{4}} 4 = \boxed{-1}$.

Проще воспользоваться соотношением $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

3. $32^{\log_4 3 - 0{,}5\log_2 3} = 2^{5\log_{2^2} 3} \cdot 2^{5(-0{,}5)\log_2 3} =$

$= 2^{\frac{5}{2}\log_2 3} \cdot 2^{-\frac{5}{2}\log_2 3} = 2^{\frac{5}{2}\log_2 3 - \frac{5}{2}\log_2 3} = 2^0 = \boxed{1}$.

4. $\log_3 64 \cdot \log_2 \dfrac{1}{27} = \log_3 64^{\log_2 \frac{1}{27}} = \log_3 2^{6\log_2 3^{-3}} =$

$= \log_3 \left(2^{\log_2 3^{-3}}\right)^6 = \log_3 3^{-18} = \boxed{-18}$.

5. $\dfrac{3\log_3^2 45 - 2\log_3 45 \cdot \log_3 5 - \log_3^2 5}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$

$= \dfrac{\left(\log_3^2 45 - \log_3^2 5\right) + 2\log_3^2 45 - 2\log_3 45 \cdot \log_3 5}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$

$= \dfrac{(\log_3 45 + \log_3 5)(\log_3 45 - \log_3 5) + 2\log_3 45(\log_3 45 - \log_3 5)}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$

$= \dfrac{(\log_3 45 - \log_3 5)(\log_3 45 + \log_3 5 + 2\log_3 45)}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$

$= \dfrac{(\log_3 45 - \log_3 5)(3\log_3 45 + \log_3 5)}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$

$= \log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 \dfrac{45}{5} = \log_3 9 = \boxed{2}$.

6. $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9} =$

$\boxed{\log_{a^2} b^2 = \log_{|a|} |b| \text{ при } a \neq 0,\ \ b \neq 0,\ \ a \neq \pm 1}$

$$= 2^{2\log_2 3} \cdot \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_3 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3} =$$

$$= 3^2 \cdot 2^{\log_3 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 3 = \boxed{3}.$$

7. $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \left(3^2 \cdot 3^{\log_3 4 \cdot \log_3 4} - 9 \cdot 4^{\log_3 4} + 4 \cdot 4^{\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(3^2 \cdot 4^{\log_3 4} - 9 \cdot 4^{\log_3 4} + 4 \cdot 25\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 100^{\frac{1}{2}} = \boxed{10}.$$

8. $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7 =$

$$= (\log_2 7 + 4\log_7 2 + 4)\left(\log_2 7 - \frac{2}{\log_7 28}\right)\log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= \left(\log_2 7 + \frac{4}{\log_2 7} + 4\right)\left(\log_2 7 - \frac{2}{\log_7 7 + \log_7 4}\right)\log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= \frac{(\log_2^2 7 + 4\log_2 7 + 4)}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7\,(1 + \log_7 4) - 2}{1 + \log_7 2^2} \cdot \log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= \frac{(\log_2 7 + 2)^2}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7 + \log_2 7 \cdot \log_7 4 - 2}{1 + \frac{2}{\log_2 7}} \cdot \log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= \frac{(\log_2 7 + 2)^2}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7 + \log_2 4 - 2}{\frac{\log_2 7 + 2}{\log_2 7}} \cdot \log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= (\log_2 7 + 2) \cdot (\log_2 7) \cdot (\log_7 2) - \log_2 7 =$$

$$= \log_2 7 + 2 - \log_2 7 = \boxed{2}.$$

$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c}$

9. $\log_6 x \cdot \log_8 x = 9\log_6 8;$

$$\log_6 x \cdot \frac{\log_6 x}{\log_6 8} = 9\log_6 8; \qquad \log_6 x \cdot \log_6 x = 9 \cdot \log_6^2 8;$$

$$\log_6^2 x = (3\log_6 8)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_6 x = 3\log_6 8 \\ \log_6 x = -3\log_6 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_6 x = \log_6 8^3 \\ \log_6 x = \log_6 8^{-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8^3 \\ x = 8^{-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 512 \\ x = \dfrac{1}{512}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{512}; 512\right\}$.

10. $\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x = 6;$

$$\log_5 x + \log_{5^{\frac{1}{2}}} x + \log_{5^{-1}} x = 6;$$

$$\log_5 x + \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 x - \log_5 x = 6;$$

$$\log_5 x + 2\log_5 x - \log_5 x = 6;$$

$$2\log_5 x = 6; \quad \log_5 x = 3; \quad x = 5^3; \quad x = 125.$$

Ответ: $x = 125$.

11. $4^{\log_{16}(4x^2-12x+9)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 7 \cdot \log_7(x^2+2x+1)}.$

$$4^{\log_{16}(2x-3)^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2};$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \\ a > 0;\ b > 0;\ c > 0 \\ a \neq 1;\ b \neq 1 \end{array}}$$

$$|2x-3| = |x+1| \qquad \left(\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq 1{,}5 \end{array}\right)$$

$$(2x-3)^2 = (x+1)^2; \quad (2x-3+x+1)(2x-3-x-1) = 0;$$

$$(3x-2)(x-4) = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \in D(\text{У}). \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}; 4\right\}$.

Примеры решения показательных уравнений

1. $25^x = \dfrac{1}{125}$.

а) $5^{2x} = 5^{-3}$. Так как степени равны, основания степеней равны, то и показатели степеней равны, значит $2x = -3$; $x = -1{,}5$.

б) Можно решить данной уравнение несколько иначе. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 5.

Получим: $\log_5 5^{2x} = \log_5 5^{-3}$.

Учитывая свойства логарифмов,

$2x \log_5 5 = -3 \log_5 5$; $2x = -3$; $\boxed{x = -1{,}5}$.

2. Рассмотрим показательное уравнение

вида $a^{f_1(x)} = b^{f_2(x)}$; $\begin{cases} a > 0;\ a \neq 1 \\ b > 0;\ b \neq 1 \end{cases}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию c ($c > 0$; $c \neq 1$): $f_1(x) \log_c a = f_2(x) \log_c b$.

Пример 1. Решим уравнение $6^x = 7^{x+1}$.

$\log_7 6^x = \log_7 7^{x+1}$; $x \log_7 6 = x + 1$; $x(\log_7 6 - 1) = 1$;

$$x = \frac{1}{\log_7 6 - 1}; \quad x = \frac{1}{\log_7 6 - \log_7 7}; \quad x = \frac{1}{\log_7 \frac{6}{7}};$$

$$\boxed{x = \log_{\frac{6}{7}} 7} \quad \left(\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right).$$

3. Рассмотрим уравнение вида $(\varphi(x))^{f_1(x)} = (\varphi(x))^{f_2(x)}$.

а) Рассмотрим уравнение $\varphi(x) = -1$. Пусть x_i — корни этого уравнения. Эти корни являются корнями исходного уравнения, если $f_1(x_i)$ и $f_2(x_i)$ — целые числа одинаковой четности.

б) Рассмотрим уравнение $\varphi(x) = 1$. Пусть x_i — корни этого уравнения. Эти корни являются корнями исходного уравнения, если $x_i \in D(f_1(x)) \cap D(f_2(x))$, т. е. если x_i принадлежат области определения и $f_1(x)$, и $f_2(x)$.

в) Рассмотрим уравнение $\varphi(x) = 0$. Пусть x_i — корни этого уравнения. Они являются также корнями исходного уравнения, если $f_1(x_i) > 0$ и $f_2(x_i) > 0$.

г) Рассмотрим уравнение $f_1(x) = f_2(x)$. Пусть x_i — корни этого уравнения. Они являются также корнями исходного уравнения, если они принадлежат области определения исходного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $(x+1)^{x+2} = (x+1)^{x^2+2x}$.

а) $x + 1 = 0$; $\quad x = -1$. Проверим, что $0^{-1} = 0^{-1}$. Это выражение смысла не имеет, поэтому $x = -1$ — посторонний корень.

б) $x + 1 = -1$; $\quad x = -2$. Проверим, что $(-1)^0 = (-1)^0$ — истина, значит $x = -2$ — корень исходного уравнения.

в) $x + 1 = 1$; $\quad x = 0$. Проверим: $1^2 = 1^0$ — истина.

г) $x + 2 = x^2 + 2x$; $\quad x^2 + x - 2 = 0$;

$$\left[\begin{array}{ll} x = -2 & \text{— уже проверяли;} \\ x = 1 & 2^3 = 2^3 \text{ — истина.} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2; 0; 1\}$.

4. $8^x + 15^x = 17^x$.

Разделим обе части уравнения на 17^x:

$$\left(\frac{8}{17}\right)^x + \left(\frac{15}{17}\right)^x = 1.$$

Учитывая, что $0 < \dfrac{8}{17} < 1$, $\quad 0 < \dfrac{15}{17} < 1$,

$\left(\dfrac{8}{17}\right)^2 + \left(\dfrac{15}{17}\right)^2 = \dfrac{64 + 225}{289} = 1$, можно обозначить

$\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$; $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$, и требуется решить уравнение $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = 1$.

Очевидно, что уравнение имеет решение при $x=2$ (известное тригонометрическое тождество). Выясним, имеются ли другие решения.

а) Пусть $x > 2$, тогда, учитывая, что

$0 < \sin\alpha < 1, \quad 0 < \cos\alpha < 1, \quad \begin{matrix} (\sin\alpha)^x < \sin^2\alpha \\ (\cos\alpha)^x < \cos^2\alpha \end{matrix},$

$(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$

т. е. $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x < 1$, а это противоречит $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = 1$.

б) Пусть $x < 2$, тогда аналогично: $\begin{matrix} (\sin\alpha)^x > \sin^2\alpha \\ (\cos\alpha)^x > \cos^2\alpha \end{matrix};$

$(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x > \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$

т. е. $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x > 1$, что противоречит $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = 1$.

Ответ: $x = 2$.

5. $(x+1)^{2-x} = (x+1)^{-2x+x^2}$.

а) $x+1=0$; $x=-1$.
Проверим: $0^3 = 0^3$ — истина.

б) $x+1=1$; $x=0$.
Проверим: $1^2 = 1^0$ — истина.

в) $x+1=-1$; $x=-2$.
Проверим: $(-1)^4 = (-1)^8$ — истина.

г) $2-x=-2x+x^2$; $x^2-x-2=0$; $\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \text{ — уже было} \end{array}\right.$.

Проверим: $3^0 = 3^0$ — истина.

Ответ: $\{-2; -1; 0; 2\}$.

Практикум 5

Решите показательные уравнения:

1. $3^{2x}=\left(\sqrt{3}\right)^{x^2}$. $\quad 3^{2x}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x^2}$; $\quad 2x=\frac{1}{2}x^2$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{0;4\}$.

2. $(0{,}5)^{5x}=8^{-3}$.

$\left(2^{-1}\right)^{5x}=\left(2^3\right)^{-3}$; $\quad 2^{-5x}=2^{-9}$; $\quad -5x=-9$; $\quad \boxed{x=1{,}8}$.

3. $7^{x-7}=49\sqrt{7}$.

$7^{x-7}=7^2\cdot 7^{\frac{1}{2}}$; $\quad 7^{x-7}=7^{2{,}5}$; $\quad x-7=2{,}5$; $\quad \boxed{x=9{,}5}$.

4. $\sqrt[7]{36^{x-5}}=\dfrac{6}{\sqrt[5]{6}}$.

$\left(6^{2(x-5)}\right)^{\frac{1}{7}}=6\cdot 6^{-\frac{1}{5}}$; $\quad 6^{\frac{2(x-5)}{7}}=6^{1-\frac{1}{5}}$; $\quad \dfrac{2(x-5)}{7}=\dfrac{4}{5}$;

$10(x-5)=28$; $\quad 10x=78$; $\quad \boxed{x=7{,}8}$.

5. $4^{x-1}+11\cdot 4^{x-2}=15\cdot 2^{-4}$.

Домножим на 2^4: $\quad 16\cdot 4^{x-1}+11\cdot 16\cdot 4^{x-2}=15\cdot 2^{-4}\cdot 2^4$;

$4\cdot 4^x+11\cdot 4^x=15$; $\quad 15\cdot 4^x=15$; $\quad 4^x=1$; $\quad \boxed{x=0}$.

6. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}-5^{1-2x}=0$.

$2^{-2x+1}=5^{-2x+1}$; $\quad \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2x+1}=1$; $\quad \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2x+1}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^0$;

$-2x+1=0$; $\quad \boxed{x=0{,}5}$.

7. $2{,}5\cdot 4^x=8\cdot 5^{x-1}$.

$\dfrac{5}{2}\cdot 4^x=8\cdot 5^{x-1}$; $\quad \dfrac{1}{16}\cdot 4^x=\dfrac{1}{5}\cdot 5^{x-1}$;

$4^{x-2}=5^{x-2}$; $\quad \left(\dfrac{4}{5}\right)^{x-2}=1$; $\quad \boxed{x=2}$.

8. $\sqrt[3]{2^{2x+8}} = 152 \cdot 19^{2x-2}$.

$2^{\frac{2x+8}{3}} = 8 \cdot 19 \cdot 19^{2x-2}$; $\quad \dfrac{1}{2^3} \cdot 2^{\frac{2x+8}{3}} = 19^{2x-1}$;

$2^{\frac{2x+8}{3}-3} = 19^{2x-1}$; $\quad 2^{\frac{2x-1}{3}} = 19^{2x-1}$; $\quad \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{2x-1} = 19^{2x-1}$;

$\left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{19}\right)^{2x-1} = 1$; $\quad 2x - 1 = 0$; $\quad \boxed{x = 0{,}5}$.

9. $25^x + 175 \cdot 5^{x-2} - 60 = 0$.

$5^{2x} + 7 \cdot 25 \cdot 5^{x-2} - 60 = 0$; $\quad 5^{2x} + 7 \cdot 5^x - 60 = 0$;

Обозначим $t = 5^x$ $(t > 0)$. Тогда

$t^2 + 7t - 60 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -12 \notin (0; \infty) \end{array}\right.$; $\quad 5^x = 5$; $\quad \boxed{x = 1}$.

10. $2^{2x+8} + 5^{2x+7} + 2^{2x+10} - 5^{2x+8} = 0$.

Сгруппируем по одинаковым основаниям:
$\left(2^{2x+8} + 2^{2x+10}\right) + \left(5^{2x+7} - 5^{2x+8}\right) = 0$.

Вынесем в каждой скобке степень с **наименьшим** показателем:

$2^{2x+8}\left(1 + 2^2\right) + 5^{2x+7}(1 - 5) = 0$; $\quad 5 \cdot 2^{2x+8} = 4 \cdot 5^{2x+7}$;

$\dfrac{1}{4} \cdot 2^{2x+8} = \dfrac{1}{5} \cdot 5^{2x+7}$; $\quad 2^{2x+6} = 5^{2x+6}$; $\quad \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2x+6} = 1$;

$2x + 6 = 0$; $\quad \boxed{x = -3}$.

11. $3^{x+1} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x} - \sqrt{9^{x-2}} - \dfrac{1}{\sqrt{9^{3-x}}} = 258$.

$3 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{\frac{2(x-2)}{2}} - 3^{-\frac{2(3-x)}{2}} = 258$;

$3 \cdot 3^x + 3^{-1} \cdot 3^x - 3^{x-2} - 3^{x-3} = 258$;

$3^x\left(3 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27}\right) = 258$; $\quad 3^x \cdot \dfrac{81 + 9 - 3 - 1}{27} = 258$;

$\dfrac{86}{27} \cdot 3^x = 258$; $\quad 3^x = 3 \cdot 27$; $\quad 3^x = 3^4$; $\quad \boxed{x = 4}$.

12. $6\cdot 5^{2x+3}-5\cdot 5^{\frac{x+3}{2}}=5^{-x}$.

Домножим на 5^x: $6\cdot 5^x\cdot 5^{2x+3}-5\cdot 5^x\cdot 5^{\frac{x+3}{2}}=5^x\cdot 5^{-x}$;

$6\cdot 5^{3x+3}-5\cdot 5^{\frac{3x+3}{2}}=1$. Обозначим $t=5^{\frac{3x+3}{2}}$ $(t>0)$.

Тогда $6t^2-5t-1=0$; $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{1}{6}\notin(0;\infty)\end{array}\right.$;

$5^{\frac{3x+3}{2}}=1$; $5^{\frac{3x+3}{2}}=5^0$; $\dfrac{3x+3}{2}=0$; $\boxed{x=-1}$.

13. $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.

Разделим обе части уравнения на 16^x:

$3+2\cdot\left(\dfrac{81}{16}\right)^x=5\cdot\left(\dfrac{36}{16}\right)^x$; $3+2\cdot\left(\dfrac{9}{4}\right)^{2x}=5\cdot\left(\dfrac{9}{4}\right)^x$.

Обозначим $t=\left(\dfrac{9}{4}\right)^x>0$. Тогда $3+2t^2=5t$; $2t^2-5x+3=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{9}{4}\right)^x=1 \\ \left(\dfrac{9}{4}\right)^x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=0{,}5\end{array}\right.$.

Ответ: $\{0;0{,}5\}$.

14. $(x^2-4x+4)^{x^2-3x}=(x^2-4x+4)^{2x+6}$.

а) $x^2-4x+4=0$; $(x-2)^2=0$; $x=2$.

Проверим $0^{-2}=0^{10}$ — выражение не определено.

б) $x^2-4x+4=1$;

$\left[\begin{array}{ll} x=3. & \text{Проверим } 1^0=1^{12} \text{ — истина.} \\ x=1. & \text{Проверим } 1^{-2}=1^8 \text{ — истина.}\end{array}\right.$

в) $x^2-4x+4=-1$ $\varnothing$.

г) $x^2-3x=2x+6$; $x^2-5x-6=0$;

$\left[\begin{array}{ll} x=6. & \text{Проверим } 16^{18}=16^{18} \text{ — истина.} \\ x=-1. & \text{Проверим } 9^4=9^4 \text{ — истина.}\end{array}\right.$

Ответ: $\{-1;1;3;6\}$.

Тренировочная работа 5

Решите уравнения:

1. $5^{3x} = \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+5}$;

2. $(0{,}125)^{3x} = 4^{-6}$;

3. $6^{2x-1} = 36\sqrt{6}$;

4. $\sqrt[5]{49^{x-4}} = \dfrac{7}{\sqrt[3]{7}}$;

5. $3^{4x-2} + 11 \cdot 9^{2x-2} = 15 \cdot 3^{-4}$;

6. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-2} - 7^{2-3x} = 0$;

7. $2\dfrac{1}{3} \cdot 9^x = 147 \cdot 7^{x-2}$;

8. $\sqrt[4]{3^{3x+2}} = 51 \cdot 17^{3x-3}$;

9. $4^{x+2} + 30 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0$;

10. $4 \cdot 6^{x-1} - 5^x - 5^{x-1} + 6^{x-2} = 0$;

11. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x + 5^{-(x+1)} - \dfrac{1}{\sqrt{25^{x+2}}} - 725 = 0$;

12. $5^{4x+1} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-4x} + 25^{2x} - 5^{-(2-4x)} = 770$;

13. $2 \cdot 7^{\frac{4}{x}} - 14^{\frac{2}{x}} - 21 \cdot 2^{\frac{4}{x}} = 0$;

14. $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^x + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^x = 6$;

15. $9^{x^2+x} + 54 \cdot 3^{x^2+2x+1} - 3 \cdot 3^{2x+8} = 0$;

16. $\left(x^2 + 4x + 4\right)^{x^2+3x} = \left(x^2 + 4x + 4\right)^{6-2x}$.

Решение тренировочной работы 5

Решите уравнения:

1. $5^{3x} = \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+5}$; $\left(\sqrt{5}\right)^{2\cdot 3x} = \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+5}$; $6x = x^2 + 5$;

$x^2 - 6x + 5 = 0$; $\boxed{\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.}$.

2. $(0{,}125)^{3x} = 4^{-6}$; $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{3x} = \left(2^2\right)^{-6}$; $2^{-9x} = 2^{-12}$;

$-9x = -12$; $\boxed{x = \dfrac{4}{3}}$.

3. $6^{2x-1} = 36\sqrt{6}$; $6^{2x-1} = 6^{2+\frac{1}{2}}$; $2x - 1 = 2{,}5$;

$2x = 3{,}5$; $\boxed{x = 1{,}75}$.

4. $\sqrt[5]{49^{x-4}} = \dfrac{7}{\sqrt[3]{7}}$; $\left(7^{2x-8}\right)^{\frac{1}{5}} = 7^{1-\frac{1}{3}}$; $7^{\frac{2x-8}{5}} = 7^{\frac{2}{3}}$;

$\dfrac{2x-8}{5} = \dfrac{2}{3}$; $6x - 24 = 10$; $6x = 34$; $x = \dfrac{17}{3}$; $\boxed{x = 5\dfrac{2}{3}}$.

5. $3^{4x-2} + 11 \cdot 9^{2x-2} = 15 \cdot 3^{-4}$;

$3^{4x-2} + 11 \cdot 3^{4x-4} = 15 \cdot 3^{-4}$; $\times 3^4$

$3^{4x+2} + 11 \cdot 3^{4x} = 15$; $3^2 \cdot 3^{4x} + 11 \cdot 3^{4x} = 15$; $20 \cdot 3^{4x} = 15$;

$3^{4x} = \dfrac{3}{4}$; $\log_3 \dfrac{3}{4} = 4x$; $\boxed{x = \dfrac{1}{4}\log_3 \dfrac{3}{4}}$.

6. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-2} - 7^{2-3x} = 0$; $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-2} = 7^{2-3x}$;

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-2} : 7^{2-3x} = 1$; $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-2} \cdot 7^{3x-2} = 1$;

$\left(\dfrac{3}{4} \cdot 7\right)^{3x-2} = 1$; $3x - 2 = 0$; $\boxed{x = \dfrac{2}{3}}$.

7. $2\frac{1}{3} \cdot 9^x = 147 \cdot 7^{x-2}$; $\quad \frac{7}{3} \cdot 9^x = 3 \cdot 7^2 \cdot 7^{x-2}$;

$\frac{1}{9} \cdot 9^x = \frac{1}{7} \cdot 7^x$; $\quad 9^{x-1} = 7^{x-1}$; $\quad \frac{9^{x-1}}{7^{x-1}} = 1$;

$\left(\frac{9}{7}\right)^{x-1} = 1$; $\quad x - 1 = 0$; $\quad \boxed{x = 1}$.

8. $\sqrt[4]{3^{3x+2}} = 51 \cdot 17^{3x-3}$; $\quad 3^{\frac{3x+2}{4}} = 3 \cdot 17 \cdot 17^{3x-3}$;

$3^{\frac{3x+2}{4}-1} = 17^{3x-2}$; $\quad 3^{\frac{3x-2}{4}} = 17^{3x-2}$;

$\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}}{17}\right)^{3x-2} = 1$; $\quad 3x - 2 = 0$; $\quad \boxed{x = \frac{2}{3}}$.

9. $4^{x+2} + 30 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0$; $\quad 4^2 \cdot 4^x + 30 \cdot 2^{-1} \cdot 2^x - 1 = 0$;

$16 \cdot 4^x + 15 \cdot 2^x - 1 = 0$; $\quad 2^x = t \quad (t > 0)$; $\quad 16t^2 + 15t - 1 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} t = -1 \quad \emptyset \\ t = \frac{1}{16} \end{array}\right.$; $\quad 2^x = \frac{1}{16}$; $\quad \boxed{x = -4}$.

10. $\underline{4 \cdot 6^{x-1}} - \underline{\underline{5^x}} - \underline{\underline{5^{x-1}}} + \underline{6^{x-2}} = 0$;

$6^{x-2}(4 \cdot 6 + 1) - 5^{x-1}(5 + 1) = 0$;

$25 \cdot 6^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-1} = 0$; $\quad \Big|\, \frac{1}{5^2 \cdot 6}$

$6^{x-3} - 5^{x-3} = 0$; $\quad \left(\frac{6}{5}\right)^{x-3} = 1$; $\quad \boxed{x = 3}$.

11. $\left(\frac{1}{5}\right)^x + 5^{-(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{25^{x+2}}} - 725 = 0$;

$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 5^{-(x+2)} - 725 = 0$;

$\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 725 = 0$; $\quad \frac{29}{25} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 725$;

$\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{725 \cdot 25}{29}$; $\quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$; $\quad 5^{-x} = 5^4$; $\quad \boxed{x = -4}$.

12. $5^{4x+1}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-4x}+25^{2x}-5^{-(2-4x)}=770;$

$5\cdot 5^{4x}+\dfrac{1}{5}\cdot 5^{4x}+5^{4x}-\dfrac{1}{25}\cdot 5^{4x}=770;$

$5^{4x}\left(5+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+1\right)=770;\quad 5^{4x}=\dfrac{770\cdot 25}{154};$

$5^{4x}=5^3;\quad \boxed{x=\dfrac{3}{4}}.$

13. $2\cdot 7^{\frac{4}{x}}-14^{\frac{2}{x}}-21\cdot 2^{\frac{4}{x}}=0;\quad \big|:2^{\frac{4}{x}}$

$2\cdot\left(\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{4}{x}}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-21=0;$

$\left(\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=t\ \ (t>0);\quad 2t^2-t-21=0;\quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{7}{2} \\ t=-3\quad\emptyset \end{array}\right.;$

$\left(\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=\dfrac{7}{2};\quad \dfrac{2}{x}=1;\quad \boxed{x=2}.$

14. $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=6.$

Так как $\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)=1$, то пусть $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=t$, тогда $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\dfrac{1}{t}$, значит $t+\dfrac{1}{t}=6;\quad t^2-6t+1=0;$

$t_1=3+\sqrt{9-1}=3+2\sqrt{2};\quad t_2=3-\sqrt{9-1}=3-2\sqrt{2};$

$\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=3+2\sqrt{2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{-1};\quad x=-1;$

$\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=3-2\sqrt{2};\quad x=1.$

Ответ: $x=1,\quad x=-1.$

15. $9^{x^2+x}+54\cdot 3^{x^2+2x+1}-3\cdot 3^{2x+8}=0.$

$3^{2x^2+2x}+54\cdot 3^{x^2+2x+1}-3\cdot 3^{2x+8}=0\qquad :\left(3^{2x+8}\right)$

$3^{2x^2-8}+54\cdot 3^{x^2-7}-3=0;$

$3^{2\left(x^2-4\right)}+54\cdot 3^{-3}\cdot 3^{x^2-4}-3=0.$

Пусть $3^{x^2-4} = t \quad (t > 0)$,

тогда $t^2 + 2t - 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -3 \notin (0; n) \\ t = 1 \end{array}\right.$;

$3^{x^2-4} = 1$; $\quad 3^{x^2-4} = 3^0$; $\quad x^2 - 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Ответ: $x = 2, \quad x = -2$.

16. $\left(x^2 + 4x + 4\right)^{x^2+3x} = \left(x^2 + 4x + 4\right)^{6-2x}$;

а) $\left\{\begin{array}{l} (x+2)^2 > 0 \\ (x+2)^2 \neq 1 \\ x^2 + 3x = 6 - 2x \end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x + 2 \neq 1 \\ x + 2 \neq -1 \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -6 \end{array}\right.$.

б) $(x+2)^2 = 1$; $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

в) $x + 2 = 0$; $\left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ 0^{-2} = 0^{10} \end{array}\right.$ $\emptyset$.

Ответ: $\{-6; -3; -1; 1\}$.

Практикум 6

Вычислите:

1. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$.

Для того, чтобы решить этот пример, необходимо знать еще одно свойство:

$$\boxed{p^{\log_a c} = c^{\log_a p}} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ p > 0 \\ c > 0. \end{cases}$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим логарифмы по основанию a правой и левой части:

$$\text{L} = p^{\log_a c}; \Pi = c^{\log_a p}. \quad \left.\begin{array}{l} \log_a \text{L} = \log_a p^{\log_a c} = \log_a p \log_a c \\ \log_a \Pi = \log_a c^{\log_a p} = \log_a p \log_a c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a \text{L} = \log_a \Pi \Rightarrow \text{L} = \Pi,$$

что и требовалось доказать.

По доказанному $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2} = 2^{\log_3 5} - 2^{\log_3 5} = \boxed{0}$.

2. $$4^{\log_{0,25} 0,1} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{12 + 2\sqrt{35}} =$$

$$= 2^{2\log_{2^{-2}} 10^{-1}} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_{3^{-2}} \frac{1}{5 + 2\sqrt{5}\sqrt{7} + 7} =$$

$$= 2^{\frac{2(-1)}{-2}\log_2 10} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_{3^{-2}} \frac{1}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= 2^{\log_2 10} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{-2}\log_3 \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{-2} =$$

$$= 10 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_3 \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right) =$$

$$= 10 + \log_3 \frac{81\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = 10 + \log_3 81 = 10 + \log_3 3^4 =$$

$$= 10 + 4 = \boxed{14}.$$

3. $$\frac{\left(\left(\log_7^4 2+\log_2^4 7+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\left(\left(\log_7^2 2\right)^2+2\log_7^2 2\cdot\log_2^2 7+\left(\log_2^2 7\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\left(\left(\log_2^2 7+\log_7^2 2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\log_7^2 2+\log_2^2 7-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\log_7^2 2-2\log_7 2\cdot\log_2 7+\log_2^2 7\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\left(\log_7 2-\log_2 7\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=\frac{|\log_7 2-\log_2 7|}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\log_2 7-\log_7 2}{\log_2 7-\log_7 2}=\boxed{1}\quad (\text{поскольку } \log_2 7>\log_7 2).$$

4. $$\left(5^{\frac{2\log_4 5+1}{2\log_4 5}}+8^{\frac{1}{3}\log_2 25}+1\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(5^{1+\frac{1}{2\log_4 5}}+2^{3\cdot\frac{1}{3}\log_2 25}+1\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(5\cdot 5^{\frac{1}{2}\log_5 4}+2^{\log_2 25}+1\right)^{\frac{1}{2}}=\left(5\cdot 5^{\log_5 2}+26\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=(5\cdot 2+26)^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2}}=\boxed{6}.$$

5. $$10^{\log_2 3\cdot\log_5 3(\log_2 3+\log_5 3)^{-1}}=10^{\log_2 3\cdot\log_5 3\frac{1}{\log_2 3+\log_5 3}}=$$

$$=10^{\log_2 3\cdot\log_5 3\frac{1}{\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_3 5}}}=10^{\log_2 3\cdot\log_5 3\frac{\log_3 2\cdot\log_3 5}{\log_3 5+\log_3 2}}=$$

$$=10^{\frac{1}{\log_3 10}}=10^{\lg 3}=\boxed{3}.$$

$$\boxed{\log_a b\cdot\log_b a=1}$$

6. $\dfrac{\log_7 5\cdot\log_3 7\cdot\log_5 4+2\log_4 2}{2\left(2\log_3 2+3\log_{343}7\right)}=$ $\boxed{\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c}$

$=\dfrac{\log_3 7^{\log_7 5}\cdot\log_5 4+\log_4 2^2}{2\left(\log_3 4+3\log_{7^3}7\right)}=\dfrac{\log_3 5\cdot\log_5 4+1}{2\left(\log_3 4+\frac{3}{3}\log_7 7\right)}=$

$=\dfrac{\log_3 4+1}{2\left(\log_3 4+1\right)}=\boxed{\dfrac{1}{2}}.$

7. $\sqrt{1+6^{1+0{,}5\log_4^{-1}6}+2^{2\log_{36}^{-1}4}}=\sqrt{1+6\cdot 6^{\frac{0{,}5}{\log_4 6}}+2^{2\log_{36}^{-1}4}}=$

$=\sqrt{1+6\cdot 6^{0{,}5\log_6 4}+2^{2\log_4 36}}=\sqrt{1+6\cdot 6^{\log_6 2}+2^{2\log_2 6}}=$

$=\sqrt{1+6\cdot 2+\left(2^{\log_2 6}\right)^2}=\sqrt{1+6\cdot 2+6^2}=\sqrt{49}=\boxed{7}.$

8. $(\log_5 4+\log_4 5+2)(\log_5 4-\log_{20}4)\log_4 5-\log_5 4=$

$=\left(\log_5 4+\dfrac{1}{\log_5 4}+2\right)\left(\log_5 4-\dfrac{1}{\log_4 20}\right)\log_4 5-\log_5 4=$

$=\dfrac{\left(\log_5^2 4+2\log_5 4+1\right)}{\log_5 4}\left(\log_5 4-\dfrac{1}{\log_4 5+\log_4 4}\right)\log_4 5-\log_5 4=$

$=\dfrac{(\log_5 4+1)^2}{\log_5 4}\cdot\dfrac{\log_5 4\,(\log_4 5+1)-1}{\log_4 5+1}\log_4 5-\log_5 4=$

$=\dfrac{(\log_5 4+1)^2}{\log_5 4}\cdot\dfrac{\log_5 4\log_4 5+\log_5 4-1}{\frac{1}{\log_5 4}+1}\cdot\log_4 5-\log_5 4=$

$=\dfrac{(\log_5 4+1)^2}{\log_5 4}\cdot\dfrac{1+\log_5 4-1}{\frac{1+\log_5 4}{\log_5 4}}\cdot\log_4 5-\log_5 4=$

$=(\log_5 4+1)\cdot\log_5 4\cdot\log_4 5-\log_5 4=$ $\boxed{\log_a b\cdot\log_b a=1}$

$=\log_5 4+1-\log_5 4=\boxed{1}.$

9. $\dfrac{4\log_3 12+\log_3^2 4+2\log_3^2 12-3\log_3 4\log_3 12-2\log_3 4}{\log_3 4-2\log_3 12}.$

Так как

а) $\log_3 12=\log_3 3+\log_3 4=1+\log_3 4;$

б) $4\log_3 12+2\log_3^2 12-3\log_3 4\cdot\log_3 12=$

$=\log_3 12\,(4+2\log_3 12-3\log_3 4)=$

$=(1+\log_3 4)(4+2+2\log_3 4-3\log_3 4)=$

$=(1+\log_3 4)(6-\log_3 4),$ то

$$\frac{4\log_3 12+\log_3^2 4+2\log_3^2 12-3\log_3 4\log_3 12-2\log_3 4}{\log_3 4-2\log_3 12}=$$

$$=\frac{(1+\log_3 4)(6-\log_3 4)+\log_3^2 4-2\log_3 4}{\log_3 4-2-2\log_3 4}=$$

$$=\frac{5\log_3 4+6-2\log_3 4}{-(\log_3 4+2)}=\frac{6+3\log_3 4}{-(2+\log_3 4)}=$$

$$=\frac{3(2+\log_3 4)}{-(2+\log_3 4)}=\boxed{-3}.$$

10. $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt{ab}-\dfrac{1}{\log_{\sqrt{b^3}}\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}+3\log_b\sqrt{a}=$ (При $\log_a b=3$)

$$=\frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}(ab)-\frac{1}{\frac{2}{3}\log_b\frac{\sqrt{a}}{b}}+3\cdot\frac{1}{2}\log_b a=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}a+\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}b\right)-\frac{3}{2\left(\log_b\sqrt{a}-\log_b b\right)}+\frac{3}{2}\log_b a=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_a\frac{\sqrt{a}}{b}}+\frac{1}{\log_b\frac{\sqrt{a}}{b}}\right)-\frac{3}{\log_b a-2}+\frac{3}{2}\log_b a=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_a\sqrt{a}-\log_a b}+\frac{1}{\log_b\sqrt{a}-\log_b b}\right)-\frac{3}{\frac{1}{\log_a b}-2}+\frac{3}{2\log_a b}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\log_a a-\log_a b}+\frac{1}{\frac{1}{2\log_a b}-1}\right)-\frac{3\log_a b}{1-2\log_a b}+\frac{3}{2\log_a b}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-\log_a b}+\frac{2\log_a b}{1-2\log_a b}\right)-\frac{3\log_a b}{1-2\log_a b}+\frac{3}{2\log_a b}=$$

При условии $\log_a b=3$ получаем

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-2\cdot 3}+\frac{2\cdot 3}{1-2\cdot 3}\right)-\frac{3\cdot 3}{1-2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+6}{-5}-\frac{9}{-5}+\frac{1}{2}=-\frac{4}{5}+\frac{9}{5}+\frac{1}{2}=\frac{5}{5}+\frac{1}{2}=1+0{,}5=\boxed{1{,}5}.$$

Тренировочные карточки 1 (на свойства логарифмов)

Карточка 1

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$.

2. $\log_{\sqrt[3]{b}} \sqrt[4]{b}$.

3. $4^{\log_2 5}$.

4. $\left(\sqrt{5}\right)^{2+\log_5 9}$.

5. $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 \left(\log_3 9\right)\right)$.

6. $6^{\ln e^2}$.

7. $\left(\lg 50 + \lg 2\right)^5$.

8. $\dfrac{1}{\log_{12} 2} + \log_{\frac{1}{2}} 3$.

9. $\dfrac{\ln 8}{\ln 16} + \log_{\sqrt{5}} 1$.

10. $\dfrac{\log_{25} 16}{\log_{\frac{1}{5}} 4}$.

11. $\lg 9 \cdot \log_9 100$.

12. $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 - 3\log_3 \sqrt[3]{45}$.

13. $\log_2 17 + \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{17}{32}\right)^2$.

14. $\log_{13} \operatorname{tg} x + \log_{13} \operatorname{ctg} x$.

15. $\log_{\sqrt[3]{\cos x}} \left(1 - \sin^2 x\right)$.

Карточка 2

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[5]{2}$.

2. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a}$.

3. $9^{\log_3 \sqrt{2}}$.

4. $\left(\sqrt{7}\right)^{4+\log_7 4}$.

5. $\log_7 \left(\log_{\frac{1}{2}} (\log_{25} 5)\right)$.

6. $(\ln 5)^{3\log_8 1}$.

7. $\left(\log_{15} 3 + \dfrac{1}{\log_5 15}\right)^{-7}$.

8. $\dfrac{1}{\log_{21} 3} - \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{7}$.

9. $\dfrac{\lg 27}{\lg 9}$.

10. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_9 16}$.

11. $\ln 15 \cdot \log_{225} e$.

12. $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \dfrac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 + 2\log_2 6$.

13. $\log_5 75 + 3\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{3}$.

14. $\log_{\sin 2x} (2\cos x) + \log_{\sin 2x} \sin x$.

15. $\log_{\operatorname{tg} x} \cos x - \dfrac{1}{\log_{\sin x} \operatorname{tg} x}$.

Карточка 3

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{125}$.
2. $\log_{\sqrt[4]{a}} \sqrt[3]{a}$.
3. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3 2}$.
4. $\left(\sqrt{2}\right)^{4+\log_2 25}$.
5. $3{,}4 \cdot 7^{4\ln 1}$.
6. $(\lg 4 + \lg 25)^{-4}$.
7. $\log_4\left(\log_{25}\left(\log_2 32\right)\right)$.
8. $\dfrac{\lg 16}{\lg \sqrt{8}}$.
9. $\dfrac{\log_{16} 25}{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}}$.
10. $\lg 4 \cdot \log_2 100$.
11. $\log_{\cos\frac{\pi}{4}} 8$.
12. $\log_7\left(\cos^2 7x + \sin^2 7x\right)$.
13. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2}$.
14. $-\log_2\left(\log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}\right)$.
15. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

Карточка 4

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{16}$.
2. $\log_{\sqrt{b}} \sqrt[7]{b}$.
3. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_2 3}$.
4. $\left(\sqrt{3}\right)^{2+\log_3 49}$.
5. $e^{3\ln 2}$.
6. $\log_8\left(\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\log_{32} 2\right)\right)$.
7. $(\lg 8 + \lg 125)^{-3}$.
8. $\dfrac{\ln 27}{\ln 9}$.
9. $\ln 12 \cdot \log_{144} e^3$.
10. $\dfrac{\log_9 \sqrt{5}}{\log_{\frac{1}{27}} 125}$.
11. $\log_{\frac{3}{4}} \cos\dfrac{\pi}{6}$.
12. $\lg \dfrac{2\operatorname{tg} 22^\circ 30'}{1-\operatorname{tg}^2 22^\circ 30'}$.
13. $-\log_3\left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right)$.
14. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.
15. $\log_2\left(\log_a \sqrt[3]{a^2} + \log_a \sqrt[3]{a}\right)$.

Карточка 5

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{2}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{a}} \sqrt{a^3}$.

3. $9^{\log_3 0,5}$.

4. $\left(\sqrt{3}\right)^{2+\log_3 16}$.

5. $(\lg 0,2 + \lg 0,5)^{20}$.

6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 49}{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}}$.

7. $2^{\frac{1}{3}\ln e^3}$.

8. $2\log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{0,2} 3 - \dfrac{1}{2}\log_5 \dfrac{1}{225}$.

9. $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{15} + \log_{25} 4 - \dfrac{1}{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{5}}$.

10. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{32} \cdot \log_4 9$.

11. $\dfrac{\log_3 \sqrt{5}}{\log_9 5}$.

12. $\log_8 12 + 0,5\log_{\frac{1}{8}} 9$.

13. $\log_{\sin 2x} \left[(\sin x + \cos x)^2 - 1\right]^2$.

14. $\log_3 (3\operatorname{tg} x) + \log_9 (\operatorname{ctg} x)^2$.

15. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

Карточка 6

Вычислите (1–15):

1. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

2. $\log_{\frac{1}{49}} \sqrt[3]{7}$.

3. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[5]{a^2}$.

4. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4+\log_3 625}$.

5. $(\ln \sqrt[5]{e} + 4\ln \sqrt[5]{e})^{25}$.

6. $\dfrac{\log_{49} \sqrt[3]{3}}{\log_{\frac{1}{7}} 27}$.

7. $(0,2)^{\frac{1}{3}\lg 0,001}$.

8. $\log_3 21 - \dfrac{1}{\log_{49} 9}$.

9. $\log_{\sqrt{2}} \cos^3 \dfrac{\pi}{3}$.

10. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\cos 47^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \cdot \sin 17^\circ\right)$.

11. $\log_{\sqrt[3]{5}} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} 25$.

12. $100^{\lg 2}$.

13. $\log_3 5 \cdot \dfrac{\log_{25} 9}{\log_{5,1} 5,1}$.

14. $\dfrac{\ln 7}{\ln \sqrt[3]{49}}$.

15. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$.

Карточка 7

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{3}$.

2. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[5]{x}$.

3. $49^{\log_7 \sqrt[4]{3}}$.

4. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\log_5 27}$.

5. $7^{0,2\lg 10^5}$.

6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{5}} 36}{\log_{25} \frac{1}{\sqrt{6}}}$.

7. $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8+2\log_{\frac{1}{3}} 6-\log_3 \dfrac{1}{24}$.

8. $\lg 9 \cdot \log_3 0{,}1$.

9. $\log_4 0{,}01 - \log_{\sqrt{0,5}} \sqrt{5}$.

10. $\ln\left[(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x\right]$.

11. $\log_8 \sin^2 \dfrac{\pi}{6}$.

12. $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$.

13. $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$.

14. $\log_{16}\left(\log_{\frac{1}{9}} (\log_{27} 3)\right)$.

15. $\log_{16}\left(3-\sqrt{5}\right) + \dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

Карточка 8

Вычислите (1–15):

1. $\log_{25} \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt{x^3}$.

3. $16^{\log_2 3}$.

4. $\left(\sqrt{2}\right)^{4+\log_2 25}$.

5. $\dfrac{\log_{16} 0{,}2}{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{5}}$.

6. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\sin 71^\circ\cdot\cos 11^\circ-\sin 11^\circ\cdot\cos 71^\circ\right)$.

7. $\log_{\sqrt[7]{2}} \sin^4 \dfrac{\pi}{4}$.

8. $\lg 5 \cdot \log_{25} 0{,}1$.

9. $6^{\frac{\log_3 5}{1+\log_3 2}}$.

10. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{2}\cdot\log_4 27$.

11. $(\lg 200+\lg 0{,}5)^{-2}$.

12. $\dfrac{\ln \sqrt[3]{3}}{\ln \sqrt[4]{27}}$.

13. $\log_{27}\left(\log_{\frac{1}{8}} (\log_4 2)\right)$.

14. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409}\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25} 7}}-125^{\log_{25} 6}\right)$

15. $\log_3\left(2+\sqrt{3}\right) + \dfrac{1}{\log_{(2-\sqrt{3})} 3}$.

Зачетные карточки 1 (на свойства логарифмов)

Карточка 1

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{27}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{x^2}$.

3. $36^{\log_6 0{,}5}$.

4. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\log_5 27}$.

5. $(\lg 25-\lg 0{,}25)^{-3}$.

6. $\dfrac{\log_7 8}{\log_{\frac{1}{49}} \sqrt{2}}$.

7. $3^{\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}} 81}$.

8. $\log_{\frac{1}{4}} \sin^4 \dfrac{\pi}{4}$.

9. $\log_8 (8\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ)$.

10. $\log_3 4 \cdot \log_2 9$.

11. $\log_5 \left(\sqrt{26}+1\right) + \log_{\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt{26}-1}$.

12. $\log_{36} 84 - \log_6 \sqrt{14}$.

13. $\dfrac{\lg 27 + \lg 12}{\lg 2 + 2\lg 3}$.

14. $\log_{25} (\log_{32} (\log_6 36))$.

15. $\dfrac{1}{2}\log_{30} 36 + 2\log_{\frac{1}{30}} \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Карточка 2

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{49}$.

2. $\log_{\sqrt[5]{a}} \sqrt[3]{a^5}$.

3. $25^{\log_{\sqrt{5}} 2}$.

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{3+\log_{\frac{1}{2}} 3}$.

5. $\left(\ln \sqrt[5]{e^6} - \ln \dfrac{1}{\sqrt[5]{e^4}}\right)^{-3}$.

6. $\dfrac{\log_{\sqrt{5}} 4}{\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{2}}$.

7. $\log_8 (\sin 79^\circ \cdot \cos 49^\circ - \sin 49^\circ \cdot \cos 79^\circ)$.

8. $\log_3 8 \cdot \log_4 \sqrt{3}$.

9. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ\right)$.

10. $\log_{49} 84 - \log_7 \sqrt{12}$.

11. $\dfrac{\lg 81 + \lg 64}{2\lg 3 + 3\lg 2}$.

12. $\log_{\sqrt{3}} (\log_{27} (\log_2 8))$.

13. $\dfrac{1}{4}\log_6 16 - 3\log_{\frac{1}{6}} \sqrt[3]{3}$.

14. $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$.

15. $\dfrac{\ln \sqrt[3]{7}}{\ln 49} + \lg \sqrt[6]{10^{-1}}$.

Карточка 3

Вычислите (1–15):

1. $\log_4 \dfrac{1}{32}$.
2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[5]{a^3}$.
3. $25^{\log_{0,2} 4}$.
4. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{8+\log_2 81}$.
5. $\dfrac{\log_4 7}{\log_{0,5} \sqrt[3]{49}}$.
6. $(\lg 300 - \lg 15 - \lg 2)^{-26}$.
7. $\log_3 49 \cdot \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}$.
8. $\log_3\left(\sqrt{13}-2\right)+\dfrac{1}{\log_{\left(2+\sqrt{13}\right)} 3}$.
9. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} (\sin 60^\circ)^2$.
10. $\log_{\sqrt{5}} (5 \operatorname{tg} \alpha) + \log_5 (\operatorname{ctg} \alpha)^2$.
11. $2 \lg 5 + \dfrac{1}{2} \lg 16$.
12. $\dfrac{\log_5 21}{2\log_5 3+\frac{1}{2}\log_5 49-\frac{1}{3}\log_{\sqrt{5}}\sqrt{27}}$.
13. $\log_{27}(\log_8(\log_3 9))$.
14. $\dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$.
15. $\log_5 6 \cdot \log_9 1 \cdot \log_2 7$.

Карточка 4

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3}$.
2. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[4]{x^5}$.
3. $9^{\log_3 2}$.
4. $\left(\sqrt{3}\right)^{6-\log_3 25}$.
5. $\dfrac{\log_3 25}{\log_9 \sqrt{5}}$.
6. $3 \lg 5 + \dfrac{1}{2} \lg 64$.
7. $\dfrac{\log_7 30}{2\log_7 5 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}} 36 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}}\sqrt{125}}$.
8. $\log_6 3 \cdot \log_{\sqrt{3}} 36$.
9. $\left(\dfrac{\lg 125 - 2\lg 2}{\lg \sqrt[3]{4} + \lg 0{,}2}\right)^3$.
10. $2\log_{\sin 2x} \sin x + \log_{\sin 2x}\left(4\cos^2 x\right)$.
11. $\log_5(\sin 106^\circ \cdot \cos 16^\circ - \cos 106^\circ \cdot \sin 16^\circ)$.
12. $\log_8(\log_{16}(\log_5 25))$.
13. $\dfrac{1}{2}\log_{12} 36 - 3\log_{\frac{1}{12}} \sqrt[3]{2}$.
14. $8^{\log_7 5 \cdot \log_6 1}$.
15. $\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)-2\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

Карточка 5

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49}$.
2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[4]{a^3}$.
3. $25^{\log_5 7}$.
4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27}$.
5. $\dfrac{\log_8 7}{\log_{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{49}\right)}$.
6. $\ln 8 \cdot \log_4 e$.
7. $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$.
8. $7^{\log_{11} 2} - 2^{\log_{11} 7}$.
9. $\log_{16} \cos 16\pi$.
10. $\log_{\operatorname{tg} x} \cos x - \log_{\operatorname{tg} x} \sin x$.
11. $\log_{27} (\log_8 (\log_3 9))$.
12. $\frac{1}{2} \log_{14} 49 - 4 \log_{\frac{1}{14}} \sqrt[4]{2}$.
13. $\left(\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_9 4}\right)^{-3}$.
14. $\dfrac{\log_4 27}{\log_8 9} + \dfrac{\log_5 0{,}5}{\log_{0{,}008} 2}$.
15. $6^{\ln 3 \cdot \ln 1 \cdot \ln 5}$.

Карточка 6

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25}$.
2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{x^4}$.
3. $6^{\log_{\sqrt{6}} 5}$.
4. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{10-\log_3 32}$.
5. $\dfrac{\log_3 5}{\log_9 \frac{1}{\sqrt{5}}}$.
6. $\lg 7 \cdot \log_{49} 10$.
7. $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$.
8. $\log_{15} \sin \frac{17\pi}{2}$.
9. $\log_{\sqrt[3]{\cos x}} \left(1 - \sin^2 x\right)$.
10. $4^{\log_3 5} - 5^{\log_3 4}$.
11. $\log_9 (\log_{27} (\log_2 8))$.
12. $\frac{1}{3} \log_{15} 27 - 2 \log_{\frac{1}{15}} \sqrt{5}$.
13. $\dfrac{\log_{25} \frac{1}{3}}{\log_{\frac{1}{25}} 27} - \dfrac{\log_6 8}{\log_6 0{,}25}$.
14. $\log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{11} + \sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{\log_{(\sqrt{11}-\sqrt{2})} \sqrt{3}}$.
15. $\ln 7 \cdot \log_{49} e$.

Карточка 7

Вычислите (1–15):

1. $\log_{0,5} \sqrt[3]{4}$.

2. $\log_{\sqrt[5]{a}} \sqrt[3]{a^5}$.

3. $8^{\log_2 3}$.

4. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{8-\log_3 16}$.

5. $\dfrac{\log_8 \sqrt[3]{5}}{\log_{\frac{1}{2}} 25}$.

6. $\ln 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} e$.

7. $\log_{\sqrt{2}} 54 - \log_4 9^6$.

8. $2^{\log_3 11} - 11^{\log_3 2}$.

9. $\left(\dfrac{\log_6 27 + 2\log_6 2}{\log_6 \sqrt[3]{0{,}25} + \log_6 \frac{1}{3}}\right)^3$.

10. $\log_{\cos\frac{\pi}{4}} 8$.

11. $\log_{\frac{9}{4}} (\log_8 (\log_2 16))$.

12. $\dfrac{1}{3}\lg 8 - 2\lg\sqrt{0{,}2}$.

13. $3\log_{\operatorname{tg} x} \sin x - \log_{\operatorname{tg} x} \cos^3 x$.

14. $\log_4 19 - \dfrac{1}{2}\log_4 \left(\dfrac{19}{64}\right)^2$.

15. $5^{\lg 7 \cdot \log_6 1}$.

Карточка 8

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$.

2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[4]{a^5}$.

3. $27^{\log_3 2}$.

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27}$.

5. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{2}}{\log_9 8}$.

6. $\lg 27 \cdot \log_9 10$.

7. $\log_{\sqrt{3}} 24 - \log_9 4^6$.

8. $\log_{\cos 2\alpha} \left(1-2\sin^2\alpha\right)$.

9. $5^{\log_7 3} - 3^{\log_7 5}$.

10. $\log_7 \sin\dfrac{13\pi}{2}$.

11. $\log_9 \left(\log_{\frac{1}{8}} (\log_{49} 7)\right)$.

12. $2\log_{18} 3 - \dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{18}} 8$.

13. $\ln 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} e$.

14. $\log_8 15 - \dfrac{1}{3}\log_8 \left(\dfrac{15}{32}\right)^3$.

15. $8^{\log_5 7 \log_3 1}$.

2

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

Практикум 7

1. Решите уравнение $\log_4 2x = \frac{1}{2}$.

D(У) — область определения уравнения.

D(У): $2x > 0$, $x > 0$.

По определению $4^{\frac{1}{2}} = 2x$; $x = 1 \in D$(У).

Ответ: $x = 1$.

2. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}}(x+1) = 2$.

D(У): $(x + 1 > 0)$, $x > -1$.

$\sqrt{3}^2 = x + 1$; $x = 2 \in D$(У).

Ответ: $x = 2$.

3. Решите уравнение $\log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{2x+3} = 1$.

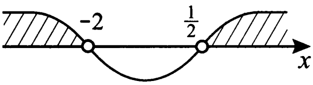
D(У): $(2x + 3 > 0)$, $x > -1{,}5$.

$\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{1}{2x+3}$; $4x + 6 = 5$; $x = -\frac{1}{4} \in D$(У).

Ответ: $x = -\frac{1}{4}$.

4. Решите уравнение $\log_{\frac{3}{4}} \dfrac{2x-1}{x+2} = 1.$

D(У): $\dfrac{2x-1}{x+2} > 0.$



$\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{3}{4};$

$8x - 4 = 3x + 6; \quad 5x = 10; \quad x = 2 \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = 2.$

5. Решите уравнение $\log_{8-x} 11 = \dfrac{1}{2}.$

D(У): $\begin{cases} 8 - x > 0 \\ 8 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ x \neq 7; \end{cases}$

$(8-x)^{\frac{1}{2}} = 11; \quad 8 - x = 121; \quad x = -113 \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = -113.$

6. Решите уравнение $\log_{x^2+4x+4} 3 = \dfrac{1}{2}.$

D(У): $\begin{cases} x^2 + 4x + 4 > 0 \\ x^2 + 4x + 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -1 \\ x \neq -3; \end{cases}$

$\left(x^2 + 4x + 4\right)^{\frac{1}{2}} = 3; \quad x^2 + 4x + 4 = 9;$

$x^2 + 4x - 5 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 1 \end{array}\right. \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = \{-5;1\}.$

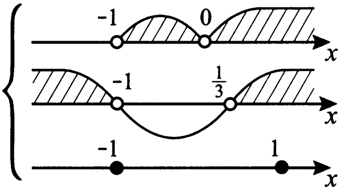
7. Решите уравнение $\log_{x+1}\left(3x^2 + 2x - 1\right) = 2.$

Решим это уравнение на уровне равносильных преобразований.

$\log_{x+1}\left(3x^2 + 2x - 1\right) = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \\ (x+1)^2 = 3x^2 + 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ (3x-1)(x+1) > 0 \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1; \\ x \neq 0 \\ (3x-1)(x+1) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$



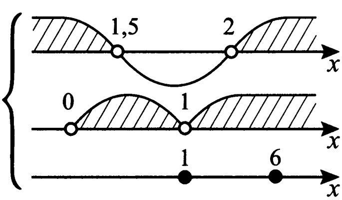
$\Leftrightarrow x = 1.$

Можно не писать, что $3x^2 + 2x - 1 > 0$,
так как из уравнения следует $(x+1)^2 = 3x^2 + 2x - 1$,
значит, $3x^2 + 2x - 1 > 0$ (учитывая, что $x \neq -1$).
Ответ: $x = 1$.

8. Решите уравнение $\log_x \left(2x^2 - 7x + 6\right) = 2$.

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 = 2x^2 - 7x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,(x-2)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow x = 6$

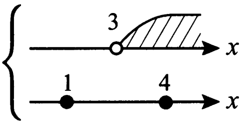
Ответ: $x = 6$.

9. Решите уравнение $\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5$.

$\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ \lg\left((x-2)(x-3)\right) = \lg \dfrac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 5x + 6 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 5x + 4 = 0. \end{cases}$$



$\Leftrightarrow x = 4.$

Ответ: $x = 4$.

10. Решите уравнение $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

Примем во внимание, что

$$\log_{a^{2k}} b^{2m} = \frac{m}{k} \log_{|a|} |b|, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ и } 64 = 2^6.$$

$$D(\text{У}): \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}, \text{ значит, } |x| = x \quad (x > 0)\,.$$

$$\log_{|x|} 4 + \frac{1}{\log_{64} 2x} = 3; \qquad \log_x 4 + \frac{1}{\frac{1}{6}\log_2 2x} = 3;$$

$$\log_x 4 + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3; \qquad \frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3.$$

Пусть $\log_2 x = t$. Тогда $\dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1+t} = 3;$

$$2\,(1+t) + 6t = 3\left(t^2 + t\right); \qquad 3t^2 - 5t - 2 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2^{-\frac{1}{3}} \end{array}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $\left\{2^{-\frac{1}{3}}; 4\right\}$.

Тренировочная работа 6

Решите уравнения:

1. $\log_{27}(2x-1)=\dfrac{1}{3}$;

2. $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+3x\right)=4$;

3. $\log_{0,6}\dfrac{3x+1}{2x}=2$;

4. $\log_{x^2-2x-3}25=2$;

5. $\log_{2x+1}\left(4x^2-2x+1\right)=3$;

6. $\log_2(2x+1)+\log_2 2x=\log_2 4-1$;

7. $\log_{0,2}\dfrac{12}{-3-x}=\log_{0,2}(1-x)$;

8. $3\log_3(x-1)-\log_3(x-4)-\log_3\left(x^2+3x+24\right)=0$;

9. $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$;

10. $\lg\left(x^3+8\right)-0{,}5\lg\left(x^2+4x+4\right)=\lg 7$;

11. $\log_2^3\left(9x^2\right)=8\log_2(3x)$;

12. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3^2 x-5\log_3 x+10\right)=-2$;

13. $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0$;

14. $2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$;

15. $3\log_{\frac{1}{2}} x+2\log_2 x+3\log_8 x=0$.

16. Найдите наибольший корень уравнения:

$$\log_{\sqrt{2}} x+\log_4\left(x^2-2x-3\right)^2=1+\log_2\left(5x^2-7x-12\right).$$

Решение тренировочной работы 6

Решите уравнения:

1. $\log_{27}(2x-1)=\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ (по определению)

$\Rightarrow 27^{\frac{1}{3}}=2x-1;\quad 3=2x-1;\quad x=2.$

Ответ: $x=2$.

2. $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+3x\right)=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^4=x^2+3x;\quad x^2+3x-4=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=1 \end{array}\right..$

Ответ: $x=-4;\quad x=1$.

3. $\log_{0,6}\dfrac{3x+1}{2x}=2;\quad 0{,}6^2=\dfrac{3x+1}{2x};\quad \dfrac{3x+1}{2x}=\dfrac{9}{25};$

$75x+25=18x;\quad 57x=-25;\quad x=-\dfrac{25}{57}.$

Ответ: $x=-\dfrac{25}{57}$.

Примечание. Примеры 1–3 не требуют проверки и нахождения D(У), так как используя определение и тот факт, что основание постоянное положительное число, всегда получаем, что число c равно степени.

4. $\log_{x^2-2x-3}25=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x^2-2x-3\right)^2=25,$ тогда

$\left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=5 \\ x^2-2x-3=-5 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-2x-8=0 \\ x^2-2x+2=0 \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \\ (x-1)^2+1=0 \quad \emptyset \end{array}\right..$

В случае, когда основание равно -5, корней нет. В случае, когда основание равно 5, корни есть. Так как основание переменное, то в общем случае необходимо проверить, будет ли оно для данных корней равно единице или нет.

а) Пусть $x = 4$. Проверим: $4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 5 \neq 1$.

б) Пусть $x = -2$. Проверим: $(-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5 \neq 1$.

В данном случае проверка не нужна, так как из хода решения следует, что основание не равно единице.

Ответ: $\{-2; 4\}$.

5. $\log_{2x+1}\left(4x^2 - 2x + 1\right) = 3$.

Можно решать на уровне равносильности[2].

$$\begin{cases} (2x+1)^3 = 4x^2 - 2x + 1 \\ 2x + 1 > 0 \\ 2x + 1 \neq 1 \\ 4x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot 2x + 1 = 4x^2 - 2x + 1 \\ x > -0{,}5 \\ x \neq 0 \text{ — любое } x \quad (a = 4;\ D < 0) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8x\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \\ x > -0{,}5 \\ x \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{array}\right. \quad \emptyset \ \left(\forall x \ \ x^2 + x + 1 \neq 0\right). \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: корней нет.

[2] В данной работе сознательно показываются различные способы оформления и решения уравнений. Применять же тот или иной подход к решению уравнения и его оформления дело вкуса, опыта, рациональности, как это понимает читатель.

6. $\log_2(2x+1)+\log_2 2x=\log_2 4-1;$

$$\begin{cases} 2x+1>0 \\ 2x>0 \\ \log_2\left((2x+1)\cdot 2x\right)=2-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x>0 \\ \log_2\left(4x^2+2x\right)=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 4x^2+2x=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x>0 \\ 2x^2+x-1=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $x=\dfrac{1}{2}$.

7. $\log_{0,2}\dfrac{12}{-3-x}=\log_{0,2}(1-x);$

$$\begin{cases} \dfrac{12}{-3-x}>0 \\ 1-x>0 \\ \dfrac{12}{-3-x}=1-x \end{cases}; \quad \begin{cases} x<-3 \\ x<1 \\ 12=(x+3)(x-1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x<-3 \\ x^2+2x-15=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x<-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}; \quad x=-5.$$

Ответ: $x=-5$.

8. $3\log_3(x-1)-\log_3(x-4)-\log_3\left(x^2+3x+24\right)=0;$

$$D(\text{У}):\begin{cases} x-1>0 \\ x-4>0 \\ x^2+3x+24>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x>4 \\ \forall x\ (a=1; D<0) \end{cases}; \quad x>4.$$

$\log_3(x-1)^3=\log_3(x-4)+\log_3\left(x^2+3x+24\right);$

$(x-1)^3=(x-4)\left(x^2+3x+24\right);$

$x^3-3x^2+3x-1=x^3-x^2+12x-24;$

$$2x^2+9x-95=0; \quad \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-9{,}5\notin D(\text{У}) \end{array}\right..$$

Ответ: $x=5$.

9. $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$;

$$\begin{cases} x+10>0 \\ 2x-1>0 \\ 21x-20>0 \\ \lg\left(5(x+10)\right) = \lg\left(10\cdot\dfrac{1}{2x-1}\cdot(21x-20)\right) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{20}{21} \\ (x+10)(2x-1) = 2(21x-20) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{20}{21} \\ 2x^2 - 23x + 30 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x > \dfrac{20}{21} \\ \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{3}{2}; 10\right\}$.

10. $\lg\left(x^3+8\right) - 0{,}5\lg\left(x^2+4x+4\right) = \lg 7$; $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$.

$\lg\left(x^3+8\right) - \lg|x+2| = \lg 7$;

$$\begin{cases} x^3+8>0 \\ \lg\dfrac{x^3+8}{|x+2|} = \lg 7 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x+2>0 \quad \forall x:\ x^2-2x+4>0 \\ |x+2| = x+2 \\ \dfrac{x^3+8}{x+2} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -2 \\ x^2-2x+4 = 7 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x > -2 \\ x^2-2x-3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > -2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

11. $\log_2^3\left(9x^2\right) = 8\log_2(3x);$ $\qquad D(\text{У}):\ x > 0$

$8\log_2^3(3x) - 8\log_2(3x) = 0;$

$8\log_2(3x)\left(\log_2^2(3x) - 1\right) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(3x) = 0\\ \log_2(3x) = 1\\ \log_2(3x) = -1\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}3x = 1\\ 3x = 2\\ 3x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1}{3}\\ x = \dfrac{2}{3}\\ x = \dfrac{1}{6}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right\}$.

12. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3^2 x - 5\log_3 x + 10\right) = -2;$

$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 10 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2};$

$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0;\qquad \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2\\ \log_3 x = 3\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x = 9\\ x = 27\end{array}\right..$

Ответ: $\{9; 27\}$.

13. $\lg^2 x^3 - 20\lg\sqrt{x} + 1 = 0;$

$\left(\lg x^3\right)^2 - 20\cdot\dfrac{1}{2}\lg x + 1 = 0;$

$9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0;\qquad \left[\begin{array}{l}\lg x = 1\\ \lg x = \dfrac{1}{9}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x = 10\\ x = \sqrt[9]{10}\end{array}\right..$

Ответ: $\left\{\sqrt[9]{10}; 10\right\}$.

14. $2\log_9^2 x = \log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right);$

$2\log_9^2 x - \log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right) = 0;$

$2(\log_9 x)^2 - \log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right) = 0;$

$2\left(\dfrac{1}{2}\log_3 x\right)^2 - \log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right) = 0;$

$\log_3 x\left(\dfrac{1}{2}\log_3 x - \log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right)\right) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 0 \\ \log_3 \sqrt{x} = \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right) \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}-1 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x}+1 = \sqrt{2x+1} \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x > 0 \\ x+2\sqrt{x}+1 = 2x+1 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x > 0 \\ 2\sqrt{x} = x \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x > 0 \\ 4x = x^2 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\{1; 4\}$.

15. $3\log_{\frac{1}{2}} x + 2\log_2 x + 3\log_8 x = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \\ a > 0;\ c > 0;\ b > 0 \\ a \neq 1;\ c \neq 1 \end{array}}.$$

$$-3\log_2 x + 2\log_2 x + \frac{3}{3}\log_2 x = 0;$$

$$-3\log_2 x + 3\log_2 x = 0;$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

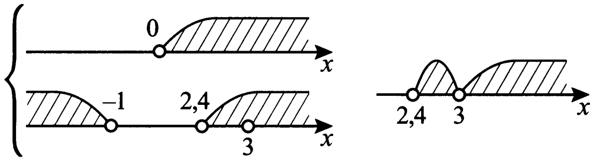
Ответ: $(0; \infty)$ (любое $x \in D(\text{У})$ есть решение уравнения).

16. Найдите наибольший корень уравнения

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_4\left(x^2-2x-3\right)^2 = 1 + \log_2\left(5x^2-7x-12\right).$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2-2x-3 \neq 0 \\ 5x^2-7x-12 > 0 \\ 2\log_2 x + \log_2\left|x^2-2x-3\right| = \log_2\left(2\left(5x^2-7x-12\right)\right) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -1 \\ (x+1)(x-2{,}4) > 0 \\ x^2\cdot\left|x^2-2x-3\right| = 10x^2-14x-24 \end{cases};$$

$D(У):$ 

а) Пусть $x > 3$, тогда $\left|x^2 - 2x - 3\right| = x^2 - 2x - 3$;

$$\begin{cases} x > 3 \\ x^2 \cdot \left(x^2 - 2x - 3\right) = 10x^2 - 14x - 24 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ x^4 - 2x^3 - 13x + 14x + 24 = 0 \end{cases};$$

$d = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12; \pm 24.$

1. Положим $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x + 14x + 24 = 0$; $f(-1) = 0$. Выполним деление[3]:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-\ x^4 + x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = \varphi(x) \\ \hline
-3x^3 - 13x^2 \qquad\quad & \\
-\ -3x^3 - 3x^2 \qquad\quad & \\ \hline
-10x^2 + 14x \qquad & \\
-\ -10x^2 - 10x \qquad & \\ \hline
24x + 24 & \\
-\ 24x + 24 & \\ \hline
\end{array}$$

2. $\varphi(2) = 0$;

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - 10x + 24 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\ x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 - x - 12 \\ \hline
-x^2 + 10x \qquad & \\
-\ -x^2 + 2x \qquad & \\ \hline
-12x + 24 & \\
-\ -12x + 24 & \\ \hline
\end{array}$$

б) на $2{,}4 < x < 3$ корень, если есть, то меньше 4.

Ответ: $x = 4$ (наибольший корень уравнения).

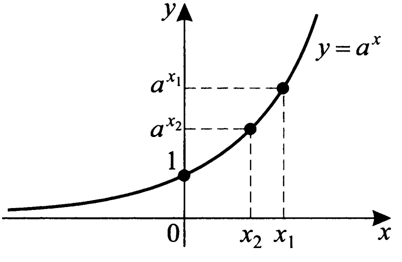
[3] См. книгу «Уравнения». Шахмейстер А. Х., 2011 г., с. 106–114.

Решение простейших показательных и логарифмических неравенств

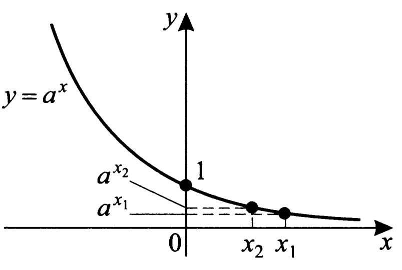
Прежде чем решать неравенства, рассмотрим ряд дополнительных соображений, связанных с монотонностью.

Свойства показательных неравенств

1. $\boxed{a > 1}$



$\boxed{0 < a < 1}$



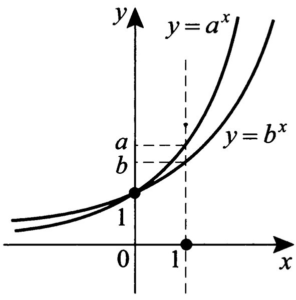
При $\boxed{a > 1}$ из $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

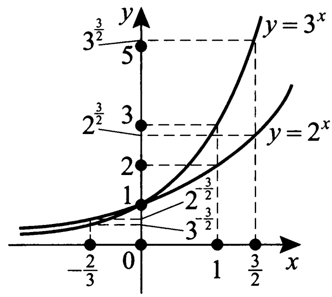
При $\boxed{0 < a < 1}$ из $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.

Так как для постоянного значения a функция $y = a^x$ строго монотонна, то каждое свое значение она принимает только один раз, где $D(a^x) = (-\infty; \infty)$.

Область изменения $E(a^x) = (0; \infty)$.

2. а) $a > b > 1$;





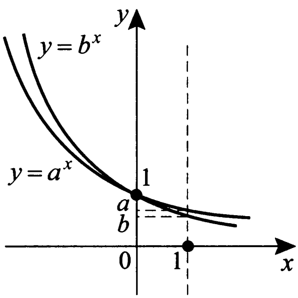
$a^x > b^x$ на $(0; \infty)$;

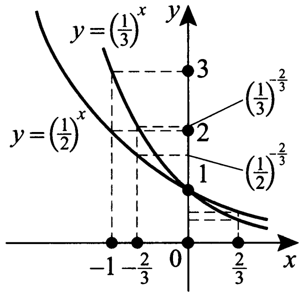
$a^x < b^x$ на $(-\infty; 0)$.

$3^{\frac{3}{2}} > 2^{\frac{3}{2}}$ на $(0; \infty)$;

$2^{-\frac{2}{3}} > 3^{-\frac{2}{3}}$ на $(-\infty; 0)$.

б) $1 > a > b > 0$;





$a^x > b^x$ на $(0; \infty)$;

$a^x < b^x$ на $(-\infty; 0)$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ на $(0; \infty)$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$ на $(-\infty; 0)$.

3.

а) $$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f_1(x) > f_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f_1(x) < f_2(x) \end{cases} \end{array}\right.;$$

б) $$a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f_1(x) < f_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f_1(x) > f_2(x) \end{cases} \end{array}\right..$$

Практикум 8

Решите неравенство:

1. $2^{-\frac{x}{2}} < 8.$

$2^{-\frac{x}{2}} < 2^3$ $(y = 2^x$ — возрастающая$)$;

$-\frac{x}{2} < 3; \quad x > -6.$

Ответ: $(-6; \infty)$.

2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[6]{6}.$

$6^{-\frac{2x}{15}} < 6^{\frac{1}{6}}$ $(y = 6^x \uparrow)$; $\quad -\frac{2x}{15} < \frac{1}{6}; \quad -2x < \frac{15}{6}; \quad x > -\frac{5}{4}.$

Ответ: $(-1{,}25; \infty)$.

3. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{5}} > \frac{1}{3}.$

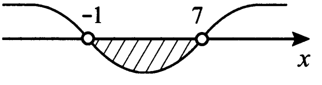
$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x}{5}} > \frac{1}{3}$ $\left(y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \downarrow\right)$; $\quad \frac{2x}{5} < 1; \quad x < 2{,}5.$

Ответ: $(-\infty; 2{,}5)$.

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}.$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\left(y = \left(\frac{3}{4}\right)^x \downarrow\right)$; $\quad 6x + 10 - x^2 > 3;$

$x^2 - 6x - 7 < 0;$



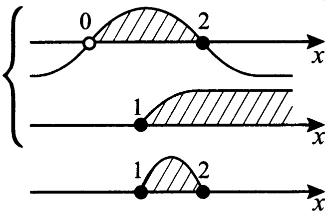
$-1 < x < 7.$

Ответ: $(-1; 7)$.

5. $\dfrac{2^{\sqrt{x-1}}}{4x} \geqslant 2^{\sqrt{x-1}-3}$;

$\dfrac{2^{\sqrt{x-1}} - 4x \cdot 2^{\sqrt{x-1}-3}}{4x} \geqslant 0$; $\quad \dfrac{2^{\sqrt{x-1}-3}(8-4x)}{4x} \geqslant 0$;

$\dfrac{2^{\sqrt{x-1}-1}(2-x)}{4x} \geqslant 0$; $\quad \begin{cases} \dfrac{2-x}{4x} \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases}$; $\quad \boxed{2^{f(x)} > 0 \ \forall x \in D(\text{Н})}$



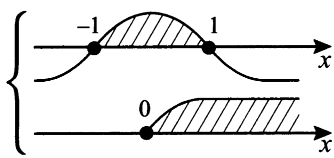
$1 \leqslant x \leqslant 2.$

Ответ: $[1; 2]$.

6. $(0{,}125)^{\sqrt{x}} \geqslant \dfrac{x^2}{2^{3\sqrt{x}}}$. $\quad \boxed{a^{f(x)} > 0 \ (a = 0{,}5) \ \forall x \in D(\text{Н})}$

$(0{,}5)^{3\sqrt{x}} \geqslant x^2 \cdot (0{,}5)^{3\sqrt{x}}$; $\quad (0{,}5)^{3\sqrt{x}}(1 - x^2) \geqslant 0$;

$\begin{cases} 1 - x^2 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$



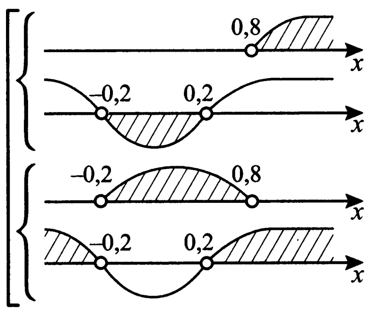
$0 \leqslant x \leqslant 1.$

Ответ: $[0; 1]$.

7. $(x + 0{,}2)^{x^2 - 0{,}04} < 1$.

$(x + 0{,}2)^{x^2 - 0{,}04} < (x + 0{,}2)^0$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 0{,}2 > 1 \\ x^2 - 0{,}04 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 0{,}2 < 1 \\ x + 0{,}2 > 0 \\ x^2 - 0{,}04 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$;



$\emptyset$

$0{,}2 < x < 0{,}8.$

Ответ: $(0{,}2; 0{,}8)$.

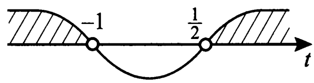
8. $4^x - 2\cdot 5^{2x} < 10^x$.

Разделим обе части неравенства на 4^x $(4^x > 0)$:

$$1 - 2\cdot\frac{5^{2x}}{4^x} < \frac{10^x}{4^x};\quad 1 - 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{5}{2}\right)^x.$$

Обозначим $t = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 0$. Тогда

$1 - 2t^2 < t$; $\quad 2t^2 + t - 1 > 0$;



$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{2}\right)^x > \frac{1}{2}\\ \left(\frac{5}{2}\right)^x < -1\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^x > \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\\ \varnothing\end{array}\right.\ \left(y = \log_{\frac{5}{2}} x\uparrow\right);$$

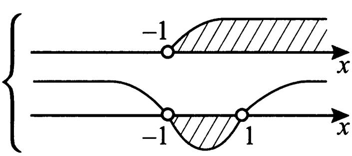
$x > \log_{2,5} 0{,}5$.

Ответ: $\left(\log_{2,5} 0{,}5; \infty\right)$.

9. $(x+2)^{x^2-1} < 1$.

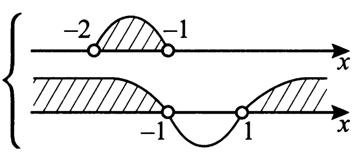
$(x+2)^{x^2-1} < (x+2)^0$.

а) $\begin{cases} x+2 > 1\\ x^2 - 1 < 0\end{cases};\quad \begin{cases} x > -1\\ (x-1)(x+1) < 0\end{cases};$



$(-1; 1)$.

б) $\begin{cases} 0 < x+2 < 1\\ x^2 - 1 > 0\end{cases};\quad \begin{cases} -2 < x < -1\\ (x-1)(x+1) > 0\end{cases};$



$(-2; -1)$.

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 1)$.

Тренировочная работа 7

Решите неравенства:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$;

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2x}{3}} < \frac{1}{2}$;

3. $9^{-\frac{2x}{7}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$;

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$;

5. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{125}$;

6. $(0{,}1)^{2x+1} + 1 - 11 \cdot (0{,}1)^{x+1} < 0$;

7. $\frac{3^{\sqrt{x-3}}}{3x+3} > 3^{\sqrt{x-3}-3}$;

8. $(x-4)^{x^2-9} < 1$;

9. $x^2 \cdot 9^{\sqrt{x}} < 3^{2\left(\sqrt{x}+2\right)}$;

10. $2^{2\sqrt{x+0{,}5}} + 2^{3-2\sqrt{x+0{,}5}} < 6$.

Решение тренировочной работы 7

Решите неравенства:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$. $\quad 3^{-\left(-\frac{x}{2}\right)} > 3^{\frac{1}{2}}$; $\quad 3^{\frac{x}{2}} > 3^{\frac{1}{2}}$; $\quad \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$; $\quad x > 1$.

Ответ: $(1; \infty)$.

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2x}{3}} < \frac{1}{2}$. $\quad -\frac{2x}{3} > 1$; $\quad -2x > 3$; $\quad x < -1{,}5$.

Ответ: $(-\infty; -1{,}5)$.

3. $9^{-\frac{2x}{7}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

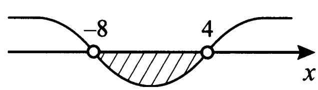
$3^{-\frac{4x}{7}} > 3^{-\frac{1}{2}}$; $\quad -\frac{4x}{7} > -\frac{1}{2}$; $\quad -4x > -\frac{7}{2}$; $\quad x < \frac{7}{8}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{7}{8}\right)$.

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2(16-x)}$; $\quad x^2 + 2x < 2(16 - x)$;

$x^2 + 4x - 32 < 0$;

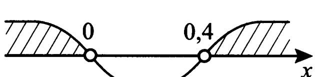


$-8 < x < 4$.

Ответ: $(-8; 4)$.

5. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{125}$.

$5^{-\frac{x-1}{x}} < 5^{\frac{3}{2}}$; $\quad -\frac{x-1}{x} < \frac{3}{2}$; $\quad \frac{2x-2+3x}{x} > 0$; $\quad \frac{5x-2}{x} > 0$;



$x < 0$; $\quad x > 0{,}4$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0{,}4; \infty)$.

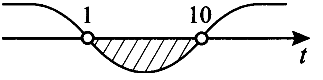
6. $(0{,}1)^{2x+1}+1-11\cdot(0{,}1)^{x+1}<0.$

$0{,}1^1\cdot(0{,}1)^{2x}+1-11\cdot0{,}1^1\cdot(0{,}1)^x<0; \qquad \mid\cdot10$

$(0{,}1)^{2x}-11\cdot(0{,}1)^x+10<0.$

Обозначим $t=(0{,}1)^x>0$. Тогда

$t^2-11t+10<0;$



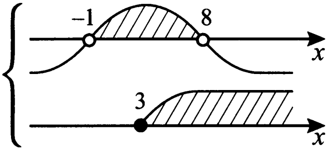
$\begin{cases}(0{,}1)^x<10\\(0{,}1)^x>1\end{cases}; \quad \begin{cases}(0{,}1)^x<0{,}1^{-1}\\(0{,}1)^x>0{,}1^0\end{cases}; \quad \begin{cases}x>-1\\x<0\end{cases}; \quad -1<x<0.$

Ответ: $(-1;0)$.

7. $\dfrac{3^{\sqrt{x-3}}}{3x+3}>3^{\sqrt{x-3}-3}.$

$\dfrac{3^{\sqrt{x-3}}-3(x+1)3^{\sqrt{x-3}-3}}{3(x+1)}>0; \qquad \dfrac{3^{\sqrt{x-3}-2}\big(9-(x+1)\big)}{3(x+1)}>0;$

$\dfrac{3^{\sqrt{x-3}-2}(8-x)}{3(x+1)}>0; \qquad \begin{cases}\dfrac{8-x}{x+1}>0\\x\geqslant3\end{cases};$



$3\leqslant x<8.$

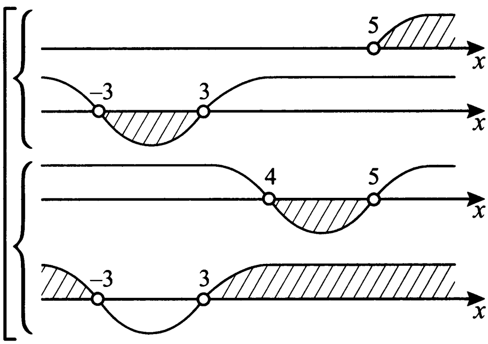
Ответ: $[3;8)$.

8. $(x-4)^{x^2-9}<1.$

При $x=4$ $\;0^7<1$ — истина, значит $x=4$ — решение.

$(x-4)^{x^2-9}<(x-4)^0;$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-4>1\\x^2-9<0\end{cases}\\ \begin{cases}x-4<1\\x-4>0\\x^2-9>0\end{cases}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>5\\(x+3)(x-3)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<5\\x>4\\(x-3)(x+3)>0\end{cases}\end{array}\right.;$



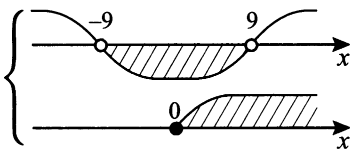
$\emptyset$

$4 < x < 5.$

Ответ: $[4; 5)$.

9. $x^2 \cdot 9^{\sqrt{x}} < 3^{2\left(\sqrt{x}+2\right)}$.

$x^2 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 9^{\sqrt{x}+2} < 0;\quad 9^{\sqrt{x}}\left(x^2 - 9^2\right) < 0;\quad \begin{cases} x^2 - 9^2 < 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases};$

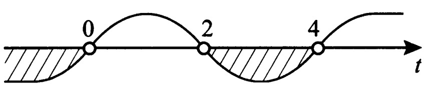


$0 \leqslant x < 9.$

Ответ: $[0; 9)$.

10. $2^{2\sqrt{x+0,5}} + 2^{3-2\sqrt{x+0,5}} < 6$.

Обозначим $t = 2^{2\sqrt{x+0,5}} > 0$. Тогда $t + \dfrac{8}{t} < 6;\quad \dfrac{t^2 - 6t + 8}{t} < 0.$



Так как $t > 0$, то

$\begin{cases} 2^{2\sqrt{x+0,5}} < 4 \\ 2^{2\sqrt{x+0,5}} > 2 \end{cases};\quad \begin{cases} 2^{2\sqrt{x+0,5}} < 2^2 \\ 2^{2\sqrt{x+0,5}} > 2 \end{cases};$

$\begin{cases} \sqrt{x+0,5} < 1 \\ \sqrt{x+0,5} > \dfrac{1}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} x+0,5 < 1 \\ x+0,5 > \dfrac{1}{4} \end{cases};$

$\begin{cases} x < 0,5 \\ x > -0,25 \end{cases};\quad -0,25 < x < 0,5.$

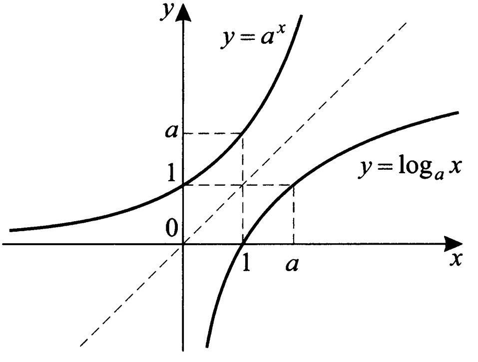
Ответ: $(-0,25; 0,5)$.

Свойства логарифмических неравенств

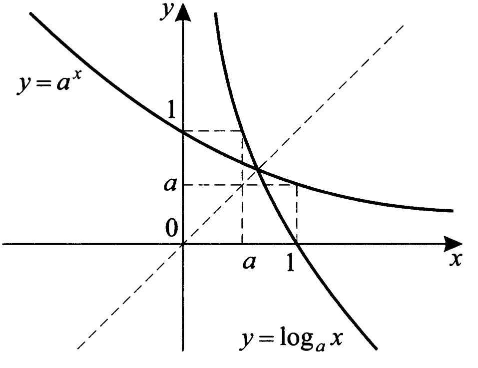
1. Известно, что для любой строго монотонной функции существует функция, обратная данной, график которой симметричен относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов.

Действительно, поменяем местами x на y и наоборот. Тогда для показательной функции $y = a^x$ получим $x = a^y$, т. е. по определению логарифма $y = \log_a x$. Значит логарифмическая функция есть функция, обратная показательной.

$\boxed{a > 1}$



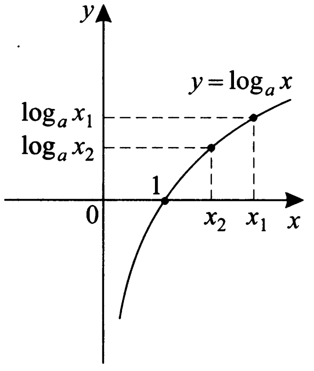
$\boxed{0 < a < 1}$

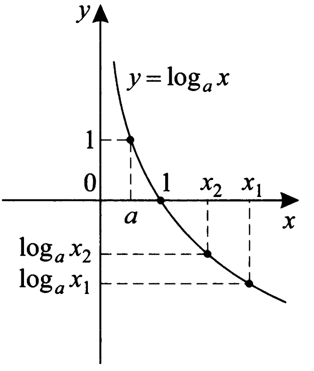


Причем $D(\log_a x) = (0; \infty)$; $E(\log_a x) = (-\infty; \infty)$, т. е. они поменялись местами.

Примечание. Вид монотонностей для взаимообратных функций сохраняется.

2. $\boxed{a > 1}$ $\boxed{0 < a < 1}$

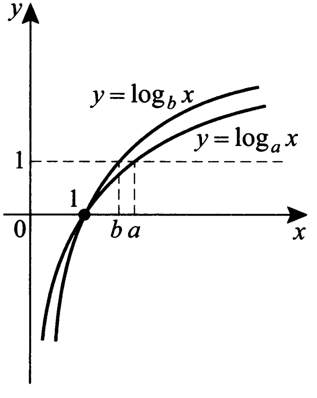


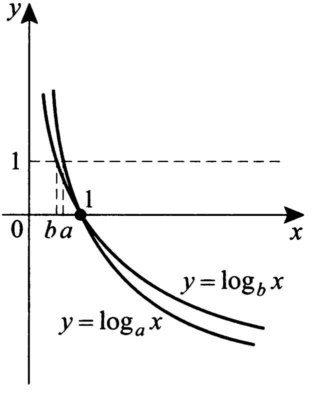


При $\boxed{a > 1}$ из $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

При $\boxed{0 < a < 1}$ из $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

3. $\boxed{a > b > 1}$ $\boxed{0 < b < a < 1}$



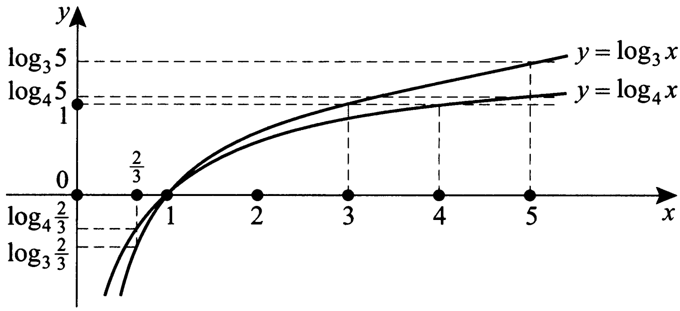


$\log_b x > \log_a x$ на $(1;\infty)$; $\log_a x < \log_b x$ на $(1;\infty)$;

$\log_b x < \log_a x$ на $(0;1)$. $\log_a x > \log_b x$ на $(0;1)$.

Примеры

1.



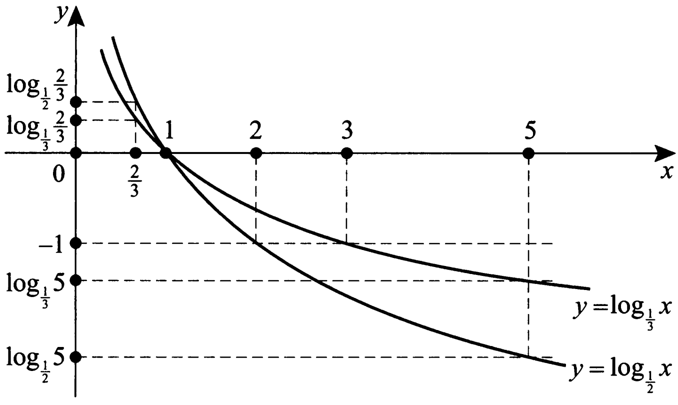
При $a > b > 1$: $\log_b x > \log_a x$ при $x \in (1; \infty)$;
$\log_a x > \log_b x$ при $x \in (0; 1)$.

Поэтому при $a = 4$, $b = 3$:

$\log_3 5 > \log_4 5$ (при $x = 5 \in (1; \infty)$);

$\log_4 \left(\dfrac{2}{3}\right) > \log_3 \left(\dfrac{2}{3}\right)$ (при $x = \dfrac{2}{3} \in (0; 1)$).

2.



При $0 < b < a < 1$: $\log_b x > \log_a x$ при $x \in (1; \infty)$;
$\log_a x > \log_b x$ при $x \in (0; 1)$.

Поэтому при $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{3}$:

$\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 5$ (при $x = 5 \in (1; \infty)$);

$\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{2}{3}\right) > \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{2}{3}\right)$ (при $x = \dfrac{2}{3} \in (0; 1)$).

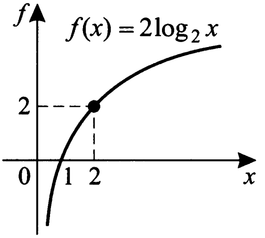
4.

а) $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

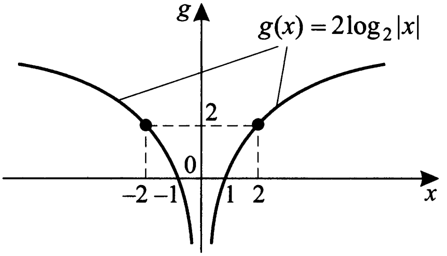
б) $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

5. а) На каком множестве $f(x) = g(x) = t(x)$, где

1. $f(x) = 2\log_2 x$;
2. $g(x) = \log_2 x^2$;
3. $t(x) = \log_{\sqrt{2}} x$?

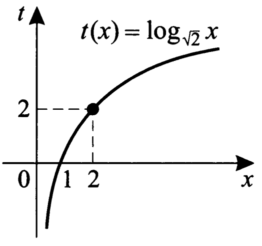
1. 

2. Так как $\log_{a^2} x^2 = \log_{|a|} |x|$, то $\log_2 x^2 = 2\log_2 |x|$, тогда $g(x) = 2\log_2 |x|$ — функция четная. Значит, график симметричен относительно оси Oy.



3. Учтем, что $\boxed{\begin{array}{l} \log_{a^p} b^k = \dfrac{k}{p}\log_a b \\ a > 0;\ b > 0;\ a \neq 1 \end{array}}$;

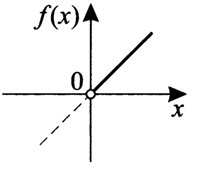
$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{2^{\frac{1}{2}}} x = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 x = 2\log_2 x;$$



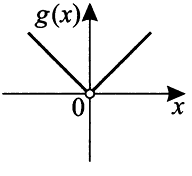
Ответ: $f(x) = g(x) = t(x)$ на $(0; \infty)$.

б) На каком множестве $f(x) = g(x) = t(x)$, где
1. $f(x) = 3^{\log_3 x}$;
2. $g(x) = 3^{\log_9 x^2}$;
3. $t(x) = 3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}}$?

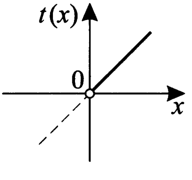
1. $f(x) = 3^{\log_3 x} = x \quad (x > 0)$.



2. $g(x) = 3^{\log_9 x^2} = 3^{\log_3 |x|} = |x| \quad (x \neq 0)$.



3. $t(x) = 3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}} = 3^{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\log_3 x} = 3^{\log_3 x} = x \quad (x > 0)$.



Ответ: $f(x) = g(x) = t(x)$ на $(0; \infty)$.

Упражнения

1. Что больше?

1.	$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \ldots \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$	13.	$\log_{\frac{1}{2}} 2 \ldots \log_{\frac{1}{3}} 2$
2.	$3^{-\frac{3}{4}} \ldots 4^{-\frac{2}{3}}$	14.	$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \ldots \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}$
3.	$\log_7 6 \ldots \log_8 6$	15.	$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} \ldots \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6}$
4.	$\log_5 \frac{7}{8} \ldots \log_6 \frac{7}{8}$	16.	$\log_2 \frac{1}{5} \ldots \log_3 \frac{1}{5}$
5.	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,7} \ldots \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,7}$	17.	$\log_3 6 \ldots \log_5 6$
6.	$\log_{0,3} 3 \ldots \log_{0,4} 3$	18.	$\log_{\frac{1}{3}} 2 \ldots \log_{\frac{1}{7}} 2$
7.	$\log_{0,6} 0{,}5 \ldots \log_{0,4} 0{,}5$	19.	$\log_{\frac{1}{3}} 4^{-1} \ldots \log_{\frac{1}{5}} 4^{-1}$
8.	$5^{\frac{3}{4}} \ldots 6^{\frac{3}{4}}$	20.	$3^{\log_4 5} \ldots 3^{\log_5 4}$
9.	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	21.	$a^{\frac{1}{3}} \ldots b^{\frac{1}{3}}$ $(a > b > 1)$
10.	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	22.	$a^3 \ldots b^3$ $(a > b > 1)$
11.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \ldots \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$	23.	$a^{\frac{1}{4}} \ldots b^{\frac{1}{4}}$ $(b < a < 1)$
12.	$\pi^{-\sqrt{3}} \ldots \pi^{-1,7}$	24.	$a^k \ldots b^k$ $(b > a > 0,\ k < 0)$

2. На каком промежутке относительно a справедливо неравенство?

1.	$\log_{\frac{1}{a}} 7 > \log_{\frac{1}{2a-1}} 7$
2.	$(2a+1)^{0,3} < (a+3)^{0,3}$
3.	$\left(\frac{1}{3a-1}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{a+1}\right)^{0,2}$
4.	$\log_{4a+2} 0,7 > \log_{2a+3} 0,7$
5.	$\left(\frac{1}{3a+2}\right)^{-0,3} < \left(\frac{1}{2a+3}\right)^{-0,3}$
6.	$\log_{(2a+1)} 5 < \log_{a+3} 5$
7.	$(3a-1)^{-0,1} > (2a+1)^{-0,1}$
8.	$\log_{(2a+1)} 0,8 < \log_{(4a-1)} 0,8$

Ответы

1. Что больше?

1.	$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$	13.	$\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} 2$
2.	$3^{-\frac{3}{4}} > 4^{-\frac{2}{3}}$	14.	$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}$
3.	$\log_7 6 > \log_8 6$	15.	$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6}$
4.	$\log_5 \frac{7}{8} < \log_6 \frac{7}{8}$	16.	$\log_2 \frac{1}{5} < \log_3 \frac{1}{5}$
5.	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,7} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,7}$	17.	$\log_3 6 > \log_5 6$
6.	$\log_{0,3} 3 > \log_{0,4} 3$	18.	$\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{7}} 2$
7.	$\log_{0,6} 0{,}5 > \log_{0,4} 0{,}5$	19.	$\log_{\frac{1}{3}} 4^{-1} > \log_{\frac{1}{5}} 4^{-1}$
8.	$5^{\frac{3}{4}} < 6^{\frac{3}{4}}$	20.	$3^{\log_4 5} > 3^{\log_5 4}$
9.	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	21.	$a^{\frac{1}{3}} > b^{\frac{1}{3}}$ $(a > b > 1)$
10.	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	22.	$a^3 > b^3$ $(a > b > 1)$
11.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$	23.	$a^{\frac{1}{4}} > b^{\frac{1}{4}}$ $(b < a < 1)$
12.	$\pi^{-\sqrt{3}} < \pi^{-1,7}$	24.	$a^k > b^k$ $(b > a > 0,\ k < 0)$

2. На каком промежутке относительно a справедливо неравенство?

1.	$\log_{\frac{1}{a}} 7 > \log_{\frac{1}{2a-1}} 7$	$a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$
2.	$(2a+1)^{0,3} < (a+3)^{0,3}$	$a \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$
3.	$\left(\frac{1}{3a-1}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{a+1}\right)^{0,2}$	$a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$
4.	$\log_{4a+2} 0{,}7 > \log_{2a+3} 0{,}7$	$a \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
5.	$\left(\frac{1}{3a+2}\right)^{-0,3} < \left(\frac{1}{2a+3}\right)^{-0,3}$	$a \in \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$
6.	$\log_{(2a+1)} 5 < \log_{a+3} 5$	$a \in (2; \infty)$
7.	$(3a-1)^{-0,1} > (2a+1)^{-0,1}$	$a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$
8.	$\log_{(2a+1)} 0{,}8 < \log_{(4a-1)} 0{,}8$	$a \in (1; \infty)$

Практикум 9

1. Решите неравенство $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$.

$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2>6-5x \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x>8 \\ 6>5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<1{,}2. \end{cases}$$

Ответ: $(1;1{,}2)$.

2. Решите неравенство $\log_3(1-2x)<2$.

$$\log_3(1-2x)<\log_3 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x<9 \\ 1-2x>0 \\ 3>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-8 \\ 2x<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

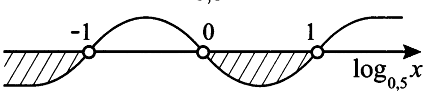
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x<\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-4;\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Решите неравенство $\dfrac{1+\log^2_{0,5}x}{1+\log_{0,5}x}<1$.

$$\frac{1+\log^2_{0,5}x}{1+\log_{0,5}x}<1 \Leftrightarrow \frac{1+\log^2_{0,5}x-1-\log_{0,5}x}{1+\log_{0,5}x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{0,5}x\left(\log_{0,5}x-1\right)}{1+\log_{0,5}x}<0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{0,5}x<1 \\ \log_{0,5}x>0 \end{cases} \\ \log_{0,5}x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{0,5}x<\log_{0,5}0{,}5 \\ \log_{0,5}x>\log_{0,5}1 \end{cases} \\ \log_{0,5}x<\log_{0,5}0{,}5^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x>0{,}5 \\ x<1 \end{cases} & (0{,}5;1) \\ \begin{cases} x>2 \\ x>0 \end{cases} & (2;\infty). \end{array}\right.$$

Ответ: $(0{,}5;1)\cup(2;\infty)$.

4. Решите неравенство $\log_{2x-3} x > 1$.

$\log_{2x-3} x > 1 \Leftrightarrow \log_{2x-3} x > \log_{2x-3}(2x-3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3>1\\ x>2x-3\end{cases}\\ \begin{cases}2x-3<1\\ 2x-3>0\\ x<2x-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\ x<3\end{cases} \quad 3>x>2\\ \begin{cases}x<2\\ x>1{,}5\\ x>3.\end{cases} \quad \emptyset\end{array}\right.$$

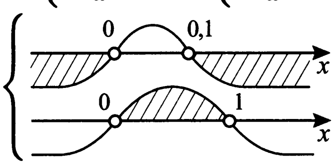
Ответ: $(2;3)$.

5. Решите неравенство $0{,}5^{\log_{\sqrt{3}}\left(\lg\frac{1}{x}\right)} > 1$.

$0{,}5^{\log_{\sqrt{3}}\left(\lg\frac{1}{x}\right)} > 1 \Leftrightarrow 0{,}5^{\log_{\sqrt{3}}\left(\lg\frac{1}{x}\right)} > 0{,}5^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(\lg\frac{1}{x}\right) < 0 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(\lg\frac{1}{x}\right) < \log_{\sqrt{3}} 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lg\frac{1}{x} < 1\\ \lg\frac{1}{x} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lg\frac{1}{x} < \lg 10\\ \lg\frac{1}{x} > \lg 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x} < 10\\ \frac{1}{x} > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1-10x}{x} < 0\\ \dfrac{1-x}{x} > 0.\end{cases}$$



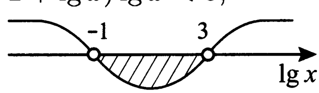
Ответ: $(0{,}1;1)$.

6. Решите неравенство $x^{-2+\lg x} < 1000$.

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 10. Поскольку $y=\lg x$ монотонно возрастает, смысл неравенства при логарифмировании не меняется.

$\lg x^{-2+\lg x} < \lg 1000$; $\quad (-2+\lg x)\lg x < 3$;

$\lg^2 x - 2\lg x - 3 < 0$;



$$\begin{cases}\lg x < 3\\ \lg x > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lg x < \lg 1000\\ \lg x > \lg 10^{-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x < 1000\\ x > 10^{-1}.\end{cases}$$

Ответ: $(0{,}1;1000)$.

7. Решите неравенство

$\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right)\leqslant 4.$

$-4x^2+8x+5=-\left(2x+1\right)\left(2x-5\right),$

так как корни уравнения $4x^2-8x-5=0$

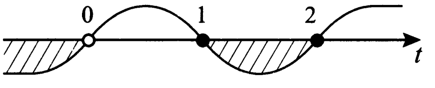
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{4}=\frac{4\pm 6}{4};\qquad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

$$\log_{2x+1}\bigl((5-2x)(2x+1)\bigr)+\log_{5-2x}(2x+1)^2\leqslant 4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 5-2x>0\\ 2x+1>0\\ 2x+1\neq 1\\ 5-2x\neq 1\\ \log_{2x+1}(2x+1)+\log_{2x+1}(5-2x)+2\log_{5-2x}(2x+1)\leqslant 4.\end{cases}$$

Пусть $\log_{2x+1}(5-2x)=t$. Тогда $1+t+\dfrac{2}{t}\leqslant 4;$

$$\frac{t^2-3t+2}{t}\leqslant 0;\qquad \frac{(t-1)(t-2)}{t}\leqslant 0;$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_{2x+1}(5-2x)\leqslant 2\\ \log_{2x+1}(5-2x)\geqslant 1\end{cases}\\ \log_{2x+1}(5-2x)<0.\end{array}\right.$$

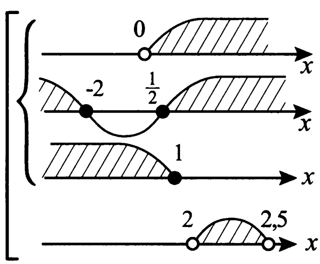
$$\text{а)}\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1>1\\ \log_{2x+1}(5-2x)\leqslant\log_{2x+1}(2x+1)^2\\ \log_{2x+1}(5-2x)\geqslant\log_{2x+1}(2x+1)\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{2x+1}(5-2x)<\log_{2x+1}1\\ 2x+1>1\\ 5-2x>0\end{cases}\end{array}\right.\qquad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 5-2x \leqslant (2x+1)^2 \\ 5-2x \geqslant 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ 5-2x<1 \\ 5-2x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 4x^2+4x+1 \geqslant 5-2x \\ 4x \leqslant 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ 2x>4 \\ 5>2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 4x^2+6x-4 \geqslant 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ x<2{,}5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x^2+3x-2=0 \\ x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{-3\pm 5}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 2(x+2)(2x-1) \geqslant 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ x<2{,}5 \end{cases} \end{array}\right.$$



$$\left[\frac{1}{2};1\right] \cup (2;2{,}5).$$

$$\text{б)} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<2x+1<1 \\ 5-2x \geqslant (2x+1)^2 \\ 5-2x \leqslant 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<2x+1<1 \\ 5-2x>1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x>-0{,}5 \\ 4x^2+6x-4 \leqslant 0 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \quad \emptyset \\ \begin{cases} x<0 \\ x>-0{,}5 \\ x<2. \end{cases} \quad (-0{,}5;0) \end{array}\right.$$

Ответ: $(-0{,}5;0) \cup [0{,}5;1] \cup (2;2{,}5)$.

8. Решите неравенство

$$\frac{1}{4}\log_5^2(2x+3)^2+8\log_5^2\sqrt{x}\leqslant\log_5(2x+3)^3\cdot\log_5 x.$$

$$\frac{1}{4}\left(2\log_5(2x+3)\right)^2+8\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2\leqslant 3\log_5(2x+3)\cdot\log_5 x;$$

$$\log_5^2(2x+3)+2\log_5^2 x\leqslant 3\log_5(2x+3)\log_5 x.$$

Пусть $\log_5(2x+3)=a, \quad \log_5 x=b.$

Тогда $a^2+2b^2\leqslant 3ab;\quad a^2-3ab+2b^2\leqslant 0;\quad (a-2b)(a-b)\leqslant 0;$

$$a_{1,2}=\frac{3b\pm\sqrt{9b^2-8b^2}}{2}=\frac{3b\pm b}{2};\qquad \left[\begin{array}{l}a=2b\\ a=b.\end{array}\right.$$

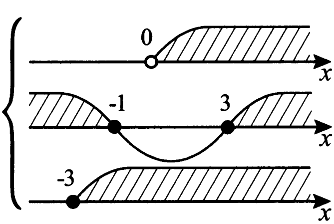
Поскольку $m\cdot n\leqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\geqslant 0\\ n\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}m\leqslant 0\\ n\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$,

имеем

$$(\log_5(2x+3)-2\log_5 x)(\log_5(2x+3)-\log_5 x)\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_5(2x+3)\geqslant 2\log_5 x\\ \log_5(2x+3)\leqslant\log_5 x\end{cases}\\ \begin{cases}\log_5(2x+3)\leqslant 2\log_5 x\\ \log_5(2x+3)\geqslant\log_5 x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ 2x+3\geqslant x^2\\ 2x+3\leqslant x\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ 2x+3\leqslant x^2\\ 2x+3\geqslant x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x^2-2x-3\leqslant 0\\ x\leqslant -3\end{cases}\quad\emptyset\\ \begin{cases}x>0\\ x^2-2x-3\geqslant 0\\ x\geqslant -3\end{cases}\end{array}\right.$$



$\Leftrightarrow x\geqslant 3.$

Ответ: $[3;\infty)$.

9. Решите неравенство $x^{\frac{3}{2}-\log_{\frac{1}{3}} x^2} \geqslant x^{\log^2_{\frac{1}{3}} x-\frac{3}{2}}$.

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию $\frac{1}{3}$. Поскольку $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ монотонно убывающая, смысл неравенства меняется на противоположный.

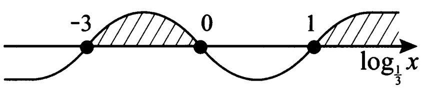
$$\log_{\frac{1}{3}} x^{\frac{3}{2}-\log_{\frac{1}{3}} x^2} \leqslant \log_{\frac{1}{3}} x^{\log^2_{\frac{1}{3}} x-\frac{3}{2}};$$

$$\left(\frac{3}{2}-2\log_{\frac{1}{3}} x\right)\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \left(\log^2_{\frac{1}{3}} x-\frac{3}{2}\right)\log_{\frac{1}{3}} x;$$

$$\left(\log^2_{\frac{1}{3}} x-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+2\log_{\frac{1}{3}} x\right)\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 0;$$

$$\left(\log^2_{\frac{1}{3}} x+2\log_{\frac{1}{3}} x-3\right)\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 0;$$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x+3\right)\left(\log_{\frac{1}{3}} x-1\right)\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 0;$$



$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 1 \\ \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant \frac{1}{3} \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 27. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [1;27]$.

10. Решите неравенство $\dfrac{\log^2_{2,5-x}(2,5+x)}{(x+3,5)(x-1)} \geqslant 0.$

Поскольку

$$\frac{a^2}{b\cdot c} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 \geqslant 0 \\ b\cdot c > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 \leqslant 0 \\ b\cdot c < 0 \end{cases} \end{array}\right., \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 \geqslant 0 \\ b\cdot c > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

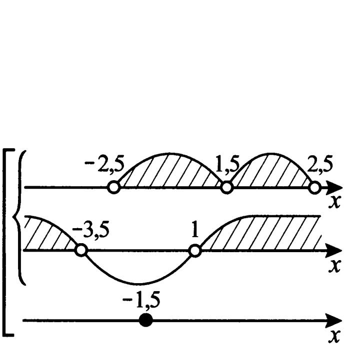
Если числитель равен нулю, то не важно, какой знак имеет знаменатель.

Имеем

$$\frac{\log^2_{2,5-x}(2,5+x)}{(x+3,5)(x-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log^2_{2,5-x}(2,5+x) \geqslant 0 \\ (x+3,5)(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log^2_{2,5-x}(2,5+x) \leqslant 0 \\ (x+3,5)(x-1) \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2,5+x > 0 \\ 2,5-x > 0 \\ 2,5-x \neq 1 \\ (x+3,5)(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log^2_{2,5-x}(2,5+x) = 0 \\ x+3,5 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2,5+x > 0 \\ 2,5-x > 0 \\ 2,5-x \neq 1 \\ (x+3,5)(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1,5 \\ x \neq -3,5 \\ x \neq 1. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(1; 1,5) \cup (1,5; 2,5) \cup \{-1,5\}$.

Тренировочная работа 8

Решите уравнения (1–13):

1. $\log_{x-1}(3x-1)=3;$

2. $\lg 5x+\lg(x-1)=1;$

3. $\log_2 x+\log_8 x=8;$

4. $\sqrt{2^{x^2-2x-3}}=\sqrt{33+\sqrt{128}}-1;$

5. $\log_5 x\cdot\log_3 x=9\log_5 3;$

6. $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right);$

7. $\lg(x+3)+\lg(2x+1)=\lg(3-2x);$

8. $\log_x\sqrt{3x+4}=1;$

9. $(8x)^{\log_2 x-3}=32\sqrt{x};$

10. $5^x+12^x=13^x;$

11. $2^{3x}-\dfrac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=1;$

12. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10;$

13. $|x-1|^{x^2-9}=1.$

Решение тренировочной работы 8

1. $\log_{x-1}(3x-1) = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 = 3x-1 \\ 3x-1>0 \\ x-1>0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2+3x-1 = 3x-1 \\ x > \dfrac{1}{3} \\ x>1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-3) = 0 \\ x>1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \\ x>1 \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Ответ: $x = 3$.

2. $\lg 5x + \lg(x-1) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x>0 \\ x-1>0 \\ \lg 5x(x-1) = \lg 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 5x^2-5x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$.

3. $\log_2 x + \log_8 x = 8;$

$\log_2 x + \dfrac{1}{3}\log_2 x = 8;$

$\dfrac{4}{3}\log_2 x = 8;$

$\log_2 x = 6; \quad x = 2^6; \quad x = 64.$

Ответ: $x = 64$.

4. $\sqrt{2^{x^2-2x-3}}=\sqrt{33+\sqrt{128}}-1;$

$2^{\frac{x^2-2x-3}{2}}=\sqrt{32+2\sqrt{32}+1}-1;\quad 2^{\frac{x^2-2x-3}{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{32}+1\right)^2}-1;$

$2^{\frac{x^2-2x-3}{2}}=\sqrt{32}+1-1;\quad 2^{\frac{x^2-2x-3}{2}}=2^{\frac{5}{2}};$

$x^2-2x-3=5;\quad x^2-2x-8=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=4\\ x=-2. \end{array}\right.$

Ответ: $\{4;-2\}$.

5. $\log_5 x\cdot\log_3 x=9\log_5 3;$

$\log_5 x\cdot\dfrac{\log_5 x}{\log_5 3}=9\log_5 3;\quad \log_5^2 x=9\log_5^2 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x=3\log_5 3\\ \log_5 x=-3\log_5 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x=\log_5 3^3\\ \log_5 x=\log_5 3^{-3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=27\\ x=\dfrac{1}{27}.\end{array}\right.$

Ответ: $\left\{27;\dfrac{1}{27}\right\}$.

6. $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right);$

$\log_5 2^3+\log_5 5^{2-x}=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right);$

$\log_5\left(2^3\cdot 5^{2-x}\right)=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right);\quad 8\cdot 5^{2-x}=3^x-5^{2-x};$

$9\cdot 5^{2-x}=3^x;\quad 5^{2-x}=3^{x-2};\quad 15^{x-2}=1;\quad x=2.$

Ответ: $x=2$.

7. $\lg(x+3)+\lg(2x+1)=\lg(3-2x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3>0\\ 2x+1>0\\ 3-2x>0\\ \lg\left((x+3)(2x+1)\right)=\lg(3-2x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ x<1\dfrac{1}{2}\\ 2x^2+7x+3=3-2x\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ x<1\dfrac{1}{2}\\ 2x^2+9x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}<x<1\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-4{,}5.\end{array}\right.\end{cases}$

Ответ: $x=0$.

8. $\log_x \sqrt{3x+4} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4>0 \\ x>0 \\ x \neq 1 \\ \log_x \sqrt{3x+4} = \log_x x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \\ \sqrt{3x+4} = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \\ 3x+4 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: $x = 4$.

9. $(8x)^{\log_2 x - 3} = 32\sqrt{x}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$\log_2 (8x)^{\log_2 x - 3} = \log_2 (32\sqrt{x})$;

$(\log_2 x - 3)(\log_2 8 + \log_2 x) = \log_2 32 + \log_2 \sqrt{x}$;

$(\log_2 x - 3)(3 + \log_2 x) = 5 + \dfrac{1}{2}\log_2 x$;

$\log_2^2 x - 9 - 5 - \dfrac{1}{2}\log_2 x = 0$; $\quad 2\log_2^2 x - \log_2 x - 28 = 0$;

$(\log_2 x)_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+224}}{4} = \dfrac{1 \pm 15}{4}$;

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 4 \\ \log_2 x = -3{,}5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^4 \\ x = 2^{-3{,}5} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{16}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{ 16; \dfrac{\sqrt{2}}{16} \right\}$.

10. $5^x + 12^x = 13^x$.

Разделим обе части на 13^x: $\left(\dfrac{5}{13}\right)^x + \left(\dfrac{12}{13}\right)^x = 1$.

Так как $\begin{cases} 0<\dfrac{5}{13}<1 \\ 0<\dfrac{12}{13}<1 \end{cases}$ и $\left(\dfrac{5}{13}\right)^2+\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=\dfrac{25+144}{169}=\dfrac{169}{169}=1,$

то положим $\dfrac{5}{13}=\sin\alpha,\quad \dfrac{12}{13}=\cos\alpha.$

Тогда уравнение перепишется так: $(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x=1.$

Очевидно, что при $x=2$ оно превращается в очевидное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

а) При $x>2$ $\quad\begin{cases}(\sin\alpha)^x<\sin^2\alpha \\ (\cos\alpha)^x<\cos^2\alpha\end{cases}$, значит

$(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x<\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$

что противоречит условию.

б) При $x<2$ $\quad\begin{cases}(\sin\alpha)^x>\sin^2\alpha \\ (\cos\alpha)^x>\cos^2\alpha\end{cases}$, значит

$(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x>\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$

что также не подходит.

Ответ: $x=2$.

11. $2^{3x}-\dfrac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=1.$

Обозначим $t=2^x-\dfrac{1}{2^{x-1}}=2^x-\dfrac{2}{2^x}$. Возведем в куб:

$$t^3=2^{3x}-3\cdot(2^x)^2\cdot\frac{2}{2^x}+3\cdot 2^x\cdot\left(\frac{2}{2^x}\right)^2+\left(\frac{2}{2^x}\right)^3=$$

$$=2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-3\cdot 2\cdot 2^x\left(2^x-\frac{2}{2^x}\right).$$

Тогда уравнение примет вид

$\left(2^x-\dfrac{2}{2^x}\right)^3=1\Leftrightarrow 2^x-\dfrac{2}{2^x}=1.$ Получим

$2^{2x}-2^x-2=0;\qquad \left[\begin{array}{l}2^x=2;\quad x=1\\ 2^x=-1\notin(0;\infty)\end{array}\right..$

Ответ: $x=1$.

12. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10.$

Так как

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{25-24}=1,$

то $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}.$

Обозначим $t=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x>0$, тогда $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=\dfrac{1}{t}$, и уравнение примет вид

$$t+\frac{1}{t}=10;\qquad t^2-10t+1=0;\qquad t_{1,2}=5\pm\sqrt{24}=5\pm2\sqrt{6}.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5+2\sqrt{6}\\ \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5-2\sqrt{6}\end{array}\right.\qquad\left(5+2\sqrt{6}=\frac{1}{5-2\sqrt{6}}\right);$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=5+2\sqrt{6}\\ \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^{-1}\end{array}\right.;\qquad\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=1\\ \dfrac{x}{2}=-1\end{array}\right.;\qquad\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\end{array}\right..$$

Ответ: $\{-2;2\}$.

13. $|x-1|^{x^2-9}=1.$

а) $|x-1|=1;$

$$\left[\begin{array}{l}x-1=1\\ x-1=-1\end{array}\right.;\qquad\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0\end{array}\right.;\qquad\left[\begin{array}{l}1^{-5}=1 \text{ — истина;}\\ 1^{-9}=1 \text{ — истина.}\end{array}\right.$$

б) $|x-1|=0;\quad x=1;\quad 0^{-9}=1$ — ложь.

в) $x^2-9=0;$

$$\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-3\end{array}\right.;\qquad\begin{array}{ll}|3-1|>0 & |2|^0=1 \text{ — истина;}\\ |-3-1|>0 & |-4|^0=1 \text{ — истина.}\end{array}$$

Ответ: $\{-3;0;2;3\}$.

Тренировочная работа 9

Решите неравенства (1–14):

1. $\log_{0,4}\left(x^2-7x\right) \geqslant \log_{0,4}(3x+11)$;

2. $x^{\lg x} \leqslant 100x$;

3. $\lg(x-2)+\lg(27-x)<2$;

4. $\log_{x^2}(3x+4)>1$;

5. $\log_{x-3}(2x-5)>\log_{x-3}(30-6x)$;

6. $\log_{\frac{1}{9}}(x-8)^2+\log_{\frac{1}{3}}(2-x) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 27$;

7. $5^{2\log_5^2 x}-4x^{\log_5 x} \leqslant 5$;

8. $\dfrac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1}3} \geqslant \log_3(2x-3)$;

9. $\dfrac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3-\log_3(5x-6)^3\log_3 x^6 \leqslant -6\log_3^2\dfrac{1}{x}$;

10. $\log_{4x+1}7+\log_{9x}7 \geqslant 0$;

11. $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} \geqslant \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{5\sqrt[4]{x}-6}$;

12. $x^{-3x-8}>x^7$;

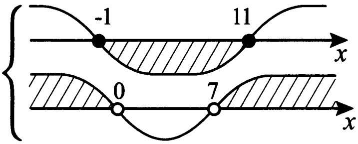
13. $4^x+(x-13)2^x<2x-22$;

14. $\left(9^x-10\cdot 3^{x-1}+1\right)\log_5^2(4x-1)<0$.

Решение тренировочной работы 9

1. $\log_{0,4}\left(x^2-7x\right) \geqslant \log_{0,4}(3x+11) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x \leqslant 3x+11 \\ x^2-7x>0 \\ 0,4<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x-11 \leqslant 0 \\ x(x-7)>0. \end{cases}$$



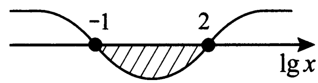
Ответ: $[-1;0) \cup (7;11]$.

2. $x^{\lg x} \leqslant 100x$.

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 10:

$\lg x^{\lg x} \leqslant \lg(100x)$; $\lg^2 x \leqslant \lg 100+\lg x$; $\lg^2 x-\lg x-2 \leqslant 0$.

Решая неравенство, имеем



$$\begin{cases} \lg x \leqslant 2 \\ \lg x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \leqslant \lg 10^2 \\ \lg x \geqslant \lg 10^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 10^2 \\ x \geqslant 10^{-1}. \end{cases}$$

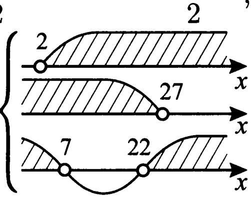
Ответ: $[0,1;100]$.

3. $\lg(x-2)+\lg(27-x)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ 27-x>0 \\ \lg((x-2)(27-x))<\lg 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<27 \\ -x^2+29x-54<100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<27 \\ x^2-29x+154>0. \end{cases}$$

$x^2-29x+154=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{29 \pm \sqrt{841-616}}{2}=\dfrac{29 \pm 15}{2}$;

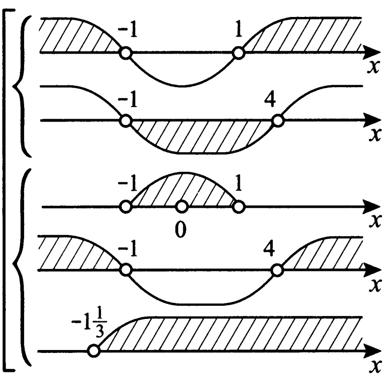
$$\left[\begin{array}{l} x=22 \\ x=7 \end{array}\right. \qquad \begin{cases} x>2 \\ x<27 \\ (x-22)(x-7)>0. \end{cases}$$



Ответ: $(2;7) \cup (22;27)$.

4. $\log_{x^2}(3x+4) > 1 \Leftrightarrow \log_{x^2}(3x+4) > \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 > 1 \\ 3x+4 > x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ 3x+4 < x^2 \\ 3x+4 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-1)(x+1) > 0 \\ (x-4)(x+1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)(x+1) < 0 \\ x \neq 0 \\ (x-4)(x+1) > 0 \\ x > -1\frac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$



$(1;4)$

$\varnothing$

Ответ: $(1;4)$.

5. $\log_{x-3}(2x-5) > \log_{x-3}(30-6x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 > 1 \\ 2x-5 > 30-6x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x-3 < 1 \\ 0 < 2x-5 < 30-6x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x > 4 \\ x > 4\frac{3}{8} \\ x < 5 \end{cases} & \left(4\frac{3}{8};5\right) \\ \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x > 2{,}5 \\ x < 4\frac{3}{8}. \end{cases} & (3;4) \end{array}\right.$$

Ответ: $(3;4) \cup (4\frac{3}{8};5)$.

6. $\log_{\frac{1}{9}}(x-8)^2+\log_{\frac{1}{3}}(2-x)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27\Leftrightarrow$ $\boxed{\log_{a^2}b^2=\log_{|a|}|b|}$

$\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}|x-8|+\log_{\frac{1}{3}}(2-x)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}|x-8|(2-x)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27\\ 2-x>0\\ (x-8)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

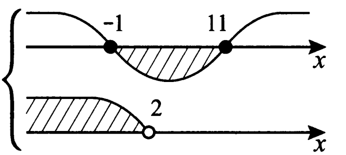
$\boxed{\begin{matrix}\text{при } x<2\\ |x-8|=8-x\end{matrix}}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}((8-x)(2-x))\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27\\ x<2\\ x\neq 8.\end{cases}$$

Смысл неравенства меняется на противоположный, так как основание логарифма $\frac{1}{3}$ меньше 1, т. е. функция убывающая:

$$\begin{cases}(8-x)(2-x)\leqslant 27\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x+16-27\leqslant 0\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x-11\leqslant 0\\ x<2.\end{cases}$$

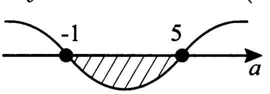


Ответ: $[-1;2)$.

7. $5^{2\log_5^2 x}-4x^{\log_5 x}\leqslant 5.$

$\left(5^{\log_5 x}\right)^{2\log_5 x}-4\cdot x^{\log_5 x}-5\leqslant 0;\quad x^{2\log_5 x}-4\cdot x^{\log_5 x}-5\leqslant 0;$

Пусть $x^{\log_5 x}=a$ $(a>0$, так как $x>0)$. Тогда



$a^2-4a-5\leqslant 0\Leftrightarrow(a-5)(a+1)\leqslant 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^{\log_5 x}\leqslant 5\\ x^{\log_5 x}\geqslant -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5 x^{\log_5 x}\leqslant\log_5 5\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\log_5^2 x\leqslant 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5 x\leqslant 1\\ \log_5 x\geqslant -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5 x\leqslant\log_5 5\\ \log_5 x\geqslant\log_5 5^{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 5\\ x\geqslant 5^{-1}.\end{cases}$$

Ответ: $[0{,}2;5]$.

8. $\dfrac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{(x+1)}3} \geqslant \log_3(2x-3)$.

а) $\log_{x+1}(x-3) = \dfrac{\log_3(x-3)}{\log_3(x+1)}$ при $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1, \\ x-3>0 \end{cases}$

то есть при $x>3$.

б) $\log_{x+1}3 = \dfrac{1}{\log_3(x+1)}$ при $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1. \end{cases}$

в) $\dfrac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{(x+1)}3} = \dfrac{1+\frac{\log_3(x-3)}{\log_3(x+1)}}{\frac{1}{\log_3(x+1)}} =$

$= \log_3(x+1) + \log_3(x-3) = \log_3\big((x+1)(x-3)\big)$

при $x>3$, поэтому

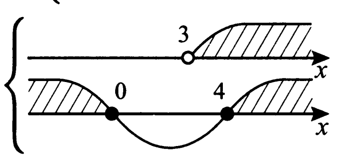
$$\frac{1+\log_{(x+1)}(x-3)}{\log_{(x+1)}3} \geqslant \log_3(2x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3((x+1)(x-3)) \geqslant \log_3(2x-3) \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3) \geqslant (2x-3) \\ 2x-3>0 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-2x-3 \geqslant 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x(x-4) \geqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $[4;\infty)$.

9. $\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3 - \log_3(5x-6)^3\log_3 x^6 \leqslant -6\log_3^2\frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\left(3\log_3(5x-6)\right)^2 - 3\log_3(5x-6)\cdot 6\log_3 x \leqslant -6\left(\log_3 x\right)^2 \\ 5x-6>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12\log_3^2(5x-6) - 18\log_3(5x-6)\cdot\log_3 x + 6\log_3^2 x \leqslant 0 \\ x>1{,}2. \end{cases}$$

Положим $\log_3 x = a$; $\log_3(5x-6) = b$. Тогда

$$\begin{cases} 2b^2 - 3ab + a^2 \leqslant 0 \\ x > 1{,}2 \end{cases}; \quad b_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2-8a^2}}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} b = a \\ b = \frac{1}{2}a \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} (b-a)(2b-a) \leqslant 0 \\ x > 1{,}2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1{,}2 \\ \left(\log_3(5x-6) - \log_3 x\right)\left(2\log_3(5x-6) - \log_3 x\right) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1{,}2 \\ \log_3(5x-6) \geqslant \log_3 x \\ 2\log_3(5x-6) \leqslant \log_3 x \end{cases} \\ \begin{cases} x>1{,}2 \\ \log_3(5x-6) \leqslant \log_3 x \\ 2\log_3(5x-6) \geqslant \log_3 x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1{,}2 \\ 5x-6 \geqslant x \\ (5x-6)^2 \leqslant x \end{cases} \\ \begin{cases} x>1{,}2 \\ 5x-6 \leqslant x \\ (5x-6)^2 \geqslant x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2} \\ 25x^2 - 61x + 36 \leqslant 0 \\ x > 1{,}2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant \frac{3}{2} \\ 25x^2 - 61x + 36 \geqslant 0 \\ x > 1{,}2. \end{cases} \end{array}\right.$$

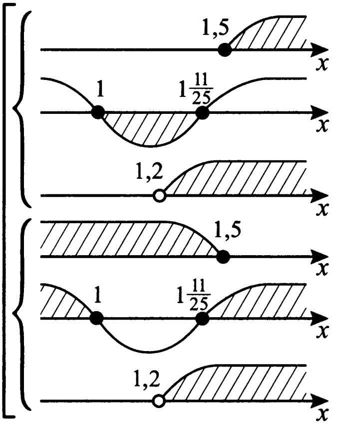
$25x^2 - 61x + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{61 \pm \sqrt{61^2 - 100 \cdot 36}}{50} =$

$= \dfrac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{50} =$

$= \dfrac{61 \pm 11}{50} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{36}{25}. \end{array}\right.$

Ответ: $[1\frac{11}{25}; 1{,}5]$.



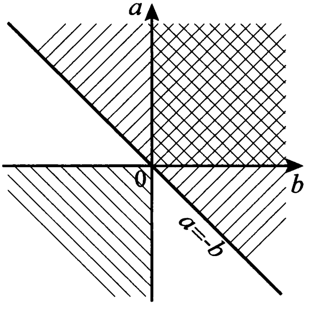
10. $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_7(4x+1)} + \dfrac{1}{\log_7 9x} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

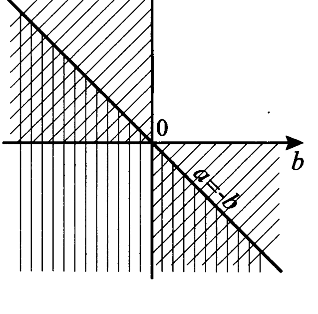
$\Leftrightarrow \dfrac{\log_7 9x + \log_7(4x+1)}{\log_7(4x+1)\log_7 9x} \geqslant 0.$

Пусть $\log_7 9x = a$; $\log_7(4x+1) = b$; $\dfrac{a+b}{a \cdot b} \geqslant 0.$

а) $\begin{cases} a + b \geqslant 0 \\ ab > 0 \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0. \end{cases}$



б) $\begin{cases} a + b \leqslant 0 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leqslant -b \\ a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant -b \\ a < 0 \\ b > 0. \end{cases} \end{array}\right.$



Итак, $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_7 9x > 0\\ \log_7(4x+1) > 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_7 9x \leqslant \log_7 \dfrac{1}{4x+1}\\ \log_7 9x > 0\\ \log_7(4x+1) < 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_7 9x \leqslant \log_7 \dfrac{1}{4x+1}\\ \log_7 9x < 0\\ \log_7(4x+1) > 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

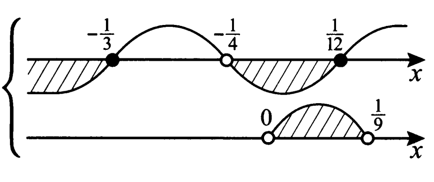
а) $\begin{cases}9x > 1\\ 4x+1 > 1\end{cases}$; $\quad\begin{cases}x > \dfrac{1}{9}\\ x > 0\end{cases}$; $\quad x > \dfrac{1}{9}$.

б) $\begin{cases}\dfrac{36x^2+9x-1}{4x+1} \leqslant 0\\ 9x > 1\\ 4x+1 < 1\end{cases}\qquad \emptyset$

$36x^2+9x-1=0$; $\quad x_{1,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81+144}}{72}$;

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{12}\\ x = -\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

в) $\begin{cases}\dfrac{36x^2+9x-1}{4x+1} \leqslant 0\\ 9x < 1\\ 4x+1 > 1.\end{cases}$



Возможно и другое решение.

$\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 \geqslant 0$; $\qquad D(\text{Н}): \left(0; \dfrac{1}{9}\right) \cup \left(\dfrac{1}{9}; \infty\right)$.

а) Пусть $x > \dfrac{1}{9}$ $(9x > 1)$. Значит $4x > \dfrac{4}{9}$,

тогда $4x + 1 > 1$ $\left(4 \cdot \dfrac{1}{9} + 1 > 1\right)$, $\begin{cases} b = 7 \\ \log_a b \geqslant 0 \\ a > 1 \end{cases}$.

Поэтому $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 \geqslant 0$ на $\left(\dfrac{1}{9}; \infty\right)$.

б) Рассмотрим $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 \geqslant 0$ на $\left(0; \dfrac{1}{9}\right)$.

Очевидно, что из неравенства $0 < x < \dfrac{1}{9}$ следует

$4x + 1 < 1$ и $x < 0$, чего не может быть по $D(\text{Н})$.

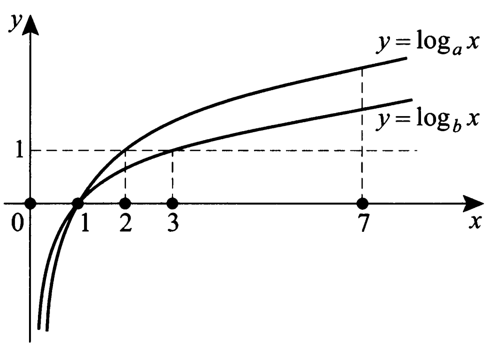
Значит $1 < 4x + 1 < \dfrac{13}{9}$.

Кроме того, из $0 < 9x < 1$ следует, что $\dfrac{1}{9x} > 1$.

Тогда так как $\log_{4x+1} 7 \geqslant -\log_{9x} 7$,

то $\log_{4x+1} 7 \geqslant \log_{\frac{1}{9x}} 7$.

Рассмотрим графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$ (здесь $\log_a x = \log_2 x$, $\log_b x = \log_3 x$, $1 < a < b$)



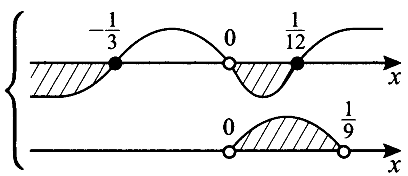
Из графика очевидно, что при $a < b$ $\log_2 7 \geqslant \log_3 7$.

Аналогично при $a < b$ из $\log_{4x+1} 7 \geqslant \log_{\frac{1}{9x}} 7$

при $4x+1>1$ $(x>0)$ и $\dfrac{1}{9x}>1$ $\left(0<x<\dfrac{1}{9}\right)$ следует,

что $\begin{cases} 4x+1 \leqslant \dfrac{1}{9x} \\ 0<x<\dfrac{1}{9} \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{36x^2+9x-1}{9x} \leqslant 0 \\ 0<x<\dfrac{1}{9} \end{cases}$;

$$\begin{cases} \dfrac{(12x-1)(3x+1)}{9x} \leqslant 0 \\ 0<x<\dfrac{1}{9} \end{cases};$$



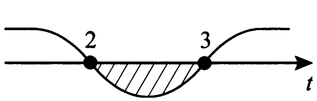
$\left(0; \dfrac{1}{12}\right]$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{12}\right] \cup \left(\dfrac{1}{9}; \infty\right)$.

Примечание. Очевидно, что логический анализ D(Н) в данном случае более эффективен, чем простой перебор вариантов.

11. $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} \geqslant \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{5\sqrt[4]{x}-6}$. Так как $\dfrac{3}{\pi}<1$, то $\sqrt{x} \leqslant 5\sqrt[4]{x}-6$.

Полагая $t=\sqrt[4]{x} \geqslant 0$, получим уравнение $t^2-5t+6 \leqslant 0$;



$\begin{cases} \sqrt[4]{x} \leqslant 3 \\ \sqrt[4]{x} \geqslant 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leqslant 81 \\ x \geqslant 16 \end{cases}$.

Ответ: $[16; 81]$.

12. $x^{-3x-8} > x^7$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>1\\ -3x-8>7\end{cases}\\ \begin{cases} 0<x<1\\ -3x-8<7\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>1\\ x<-5\end{cases}\quad \emptyset\\ \begin{cases} 0<x<1\\ x>-5\end{cases}\quad 0<x<1\end{array}\right..$$

Ответ: $(0;1)$.

13. $4^x+(x-13)2^x<2x-22$.

$4^x+(x-13)2^x-2x+22<0$. Обозначим $t=2^x>0$.

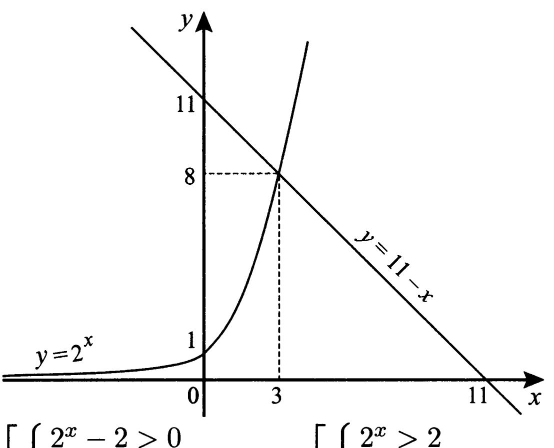
Тогда $t^2+(x-13)t-2(x-11)<0$.

Рассмотрим уравнение $t^2+(x-13)t-2(x-11)=0$.

$$t_{1,2}=\frac{13-x\pm\sqrt{(13-x)^2+8(x-11)}}{2}=$$

$$=\frac{13-x\pm\sqrt{x^2-18x+81}}{2}=\frac{13-x\pm(x-9)}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} t=2\\ t=11-x\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 2^x=2\\ 2^x=11-x\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=3\end{array}\right..$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2^x-2>0\\ 2^x-11+x<0\end{cases}\\ \begin{cases} 2^x-2<0\\ 2^x-11+x>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2^x>2\\ 2^x<11-x\end{cases}\\ \begin{cases} 2^x<2\\ 2^x>11-x\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>1\\ x<3\end{cases}\\ \begin{cases} x<1\\ x>3\end{cases}\quad \emptyset\end{array}\right..$$

Ответ: $(1;3)$.

14. $\left(9^x - 10\cdot 3^{x-1} + 1\right)\log_5^2(4x-1) < 0.$

$\left(3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3\right)\log_5^2(4x-1) < 0;$

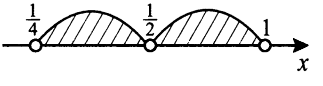
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 > 0 \\ \log_5^2(4x-1) < 0 \end{cases} \quad \emptyset \\ \begin{cases} 3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 < 0 \\ \log_5^2(4x-1) > 0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

Рассмотрим $3(3^x-3)\left(3^x - \dfrac{1}{3}\right) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 3^x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

Вернемся к системе: $\begin{cases} 3(3^x-3)\left(3^x - \dfrac{1}{3}\right) < 0 \\ \log_5^2(4x-1) \neq 0 \end{cases};$

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 4x - 1 > 0 \\ 4x - 1 \neq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > \dfrac{1}{4} \\ x \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$



Ответ: $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; 1\right).$

Практикум 10

1. $\log_7(6+7^{-x}) = 1 + x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^{1+x} = 6 + 7^{-x}$ по определению логарифма, то есть

$7 \cdot 7^x - 6 - 7^{-x} = 0$. Пусть $7^x = t \ (t > 0)$.

Тогда $7t - 6 - \dfrac{1}{t} = 0; \quad 7t^2 - 6t - 1 = 0;$

$t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+7}}{7}; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = -\dfrac{1}{7} \notin (0;\infty);$

$7^x = 1; \quad x = 0.$

Ответ: $x = 0$.

2. $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} = -\log_x 3.$

$\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_x 3x} = -\log_x 3; \quad \sqrt{\dfrac{1}{2}(\log_x x + \log_x 3)} = -\log_x 3;$

$\sqrt{\dfrac{1}{2}(1 + \log_x 3)} = -\log_x 3.$

Пусть $\log_x 3 = t$, тогда $\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+t)} = -t.$

Поскольку $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a = b^2, \end{cases}$ имеем

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1+t)} = -t \Leftrightarrow \begin{cases} -t \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}(1+t) = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant 0 \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \end{cases}$$

$t = -\dfrac{1}{2}$, т. е. $\log_x 3 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 3 = x^{-\frac{1}{2}}; \quad x = 3^{-2}; \quad x = \dfrac{1}{9}.$

Ответ: $x = \dfrac{1}{9}$.

3. $4^{\log_{16} x} - 3^{\log_{16} x - 0{,}5} = 3^{\log_{16} x + 0{,}5} - 2^{2\log_{16} x - 1}$.

$4^{\log_{16} x} + 4^{\log_{16} x - \frac{1}{2}} = 3^{\log_{16} x + 0{,}5} + 3^{\log_{16} x - 0{,}5}$;

$4^{\log_{16} x} + 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{\log_{16} x} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\log_{16} x} + 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\log_{16} x}$;

$4^{\log_{16} x}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = 3^{\log_{16} x}\left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\log_{16} x} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2}{3}$.

Поскольку $\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, имеем $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\log_{16} x} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

$\log_{16} x = \dfrac{3}{2}$; $\quad x = 16^{\frac{3}{2}}$; $\quad x = 64$.

Ответ: $x = 64$.

4. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

$$D(\text{У}):\ \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{4} \\ x \neq \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Поскольку $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, имеем

$$\frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 4x} + \frac{3}{\log_4 16x} = 0;$$

$$\frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 4 + \log_4 x} + \frac{3}{\log_4 16 + \log_4 x} = 0.$$

Пусть $\log_4 x = t$. Тогда $\dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{1+t} + \dfrac{3}{2+t} = 0$;

$3(1+t)(2+t) + 2t(2+t) + 3t(1+t) = 0$;

$8t^2 + 16t + 6 = 0$; $\quad 4t^2 + 8t + 3 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4} = \frac{-4 \pm 2}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{3}{2} \\ t=-0{,}5 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \log_4 x=-\dfrac{3}{2} \\ \log_4 x=-0{,}5 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4^{-\frac{3}{2}} \\ x=4^{-0{,}5} \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{8} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

5. $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}=4$.

$2^{\log_2^2 x}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}=x^{\log_2 x}$, поэтому $x^{\log_2 x}+x^{\log_2 x}=4$, т. е. $x^{\log_2 x}=2$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 2; \quad \log_2^2 x=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-1 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{2; \dfrac{1}{2}\right\}$.

6. $\log_{0,4}\left(x^3-7x^2+13x-2\right)=(x-2)^{\log_{(x-2)} 3}\log_{0,4}(x-2)$.

$(x-2)^{\log_{x-2} 3}=3$ при $\begin{cases} x-2>0 \\ x-2\neq 1 \end{cases}$, поэтому

$\log_{0,4}\left(x^3-7x^2+13x-2\right)=\log_{0,4}(x-2)^3$.

Тогда $x^3-7x^2+13x-2=x^3-3\cdot 2\cdot x^2+3\cdot 4\cdot x-8$.

Поскольку $x^3-7x^2+13x-2=(x-2)^3>0$, посторонних корней нет.

$$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

С другой стороны, $x>2$ и $x\neq 3$, поэтому $x\in\emptyset$.

Ответ: корней нет.

7. $\log_{x+1}\left(x^3+8-9x\right)\log_{x-1}(x+1)=3.$

$\log_{x-1}(x+1)=\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-1)}$, поэтому

$$\log_{x+1}\left(x^3+8-9x\right)\cdot\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=3,$$

т. е. $\log_{x+1}\left(x^3-9x+8\right)=\log_{x+1}(x-1)^3$.

Тогда $x^3-9x+8=x^3-3x^2+3x-1$;

$3x^2-12x+9=0;\quad x^2-4x+3=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3. \end{array}\right.$

Проверка показывает, что $x=3$ — корень уравнения.

Ответ: $x=3$.

8. $\sqrt[3]{\log_5 x}+\sqrt[4]{\log_5 x}=2.$

Пусть $\sqrt[12]{\log_5 x}=t\ \ (t\geqslant 0)$.

Тогда $\sqrt[4]{\log_5 x}=t^3$; $\sqrt[3]{\log_5 x}=t^4$, и уравнение примет вид: $t^4+t^3-2=0$.

Очевидно, что если $A(t)=t^4+t^3-2$, то $A(1)=0$, следовательно, (t^4+t^3-2) делится без остатка на $(t-1)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\,t^4 & +\,t^3 & & -2 & t-1 \\
\underline{t^4} & \underline{-\,t^3} & & & \overline{t^3+2t^2+2t+2} \\
 & -\,2t^3 & & -2 & \\
 & \underline{2t^3} & \underline{-\,2t^2} & & \\
 & & -\,2t^2 & -2 & \\
 & & \underline{2t^2} & \underline{-\,2t} & \\
 & & & -\,2t-2 & \\
 & & & \underline{2t-2} & \\
\end{array}$$

$t\geqslant 0$, поэтому $t^3+2t^2+2t+2>0$, т. е. новых корней нет.

Итак, $t=1$; $\quad\sqrt[12]{\log_5 x}=1$; $\quad\log_5 x=1$; $\quad x=5$.

Ответ: $x=5$.

9. $3\log_{27}^2 x - 13\log_{27} x + 16 = 39\log_x 3 - 27\log_x^2 3.$

Поскольку $\log_{27} x = \dfrac{1}{3}\log_3 x$, имеем

$$\frac{1}{3}\log_3^2 x - \frac{13}{3}\log_3 x + 16 = 39\log_x 3 - 27\log_x^2 3.$$

Сгруппируем:

$$\frac{1}{3}\left(\log_3^2 x + 81\log_x^2 3\right) - \frac{13}{3}\left(\log_3 x + 9\log_x 3\right) + 16 = 0.$$

Пусть $\log_3 x + 9\log_x 3 = t$,

тогда $t^2 = \log_3^2 x + 2\cdot 9\log_3 x\cdot\log_x 3 + 81\log_x^2 3.$

Принимая во внимание, что $\log_a b\cdot\log_b a = 1$, получаем отсюда $t^2 = \log_3^2 x + 81\log_x^2 3 + 18$, или

$\log_3^2 x + 81\log_x^2 3 = t^2 - 18$ (поскольку $\log_x 3\cdot\log_3 x = 1$).

Тогда из исходного уравнения получаем:

$$\frac{1}{3}\left(t^2 - 18\right) - \frac{13}{3}t + 16 = 0; \qquad t^2 - 13t + 30 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = 3; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \log_3 x + 9\log_x 3 = 10 \\ \log_3 x + 9\log_x 3 = 3. \end{array}\right.$$

Пусть $\log_3 x = a$.

Поскольку $\log_x 3 = \dfrac{1}{\log_3 x}$, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} a + \dfrac{9}{a} = 10 \\ a + \dfrac{9}{a} = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 10a + 9 = 0 \\ a^2 - 3a + 9 = 0 \quad (\mathcal{D} < 0)\,. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 9 \\ a = 1, \end{array}\right. \text{т. е.} \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 9 \\ \log_3 x = 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3^9 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

$$D(\text{У}):\ \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{3; 3^9\right\}$.

10. $x\log_3\left(1+5a^2\right)=\log_3\left(\left(2a\sqrt{5}\right)^x+\left(1-5a^2\right)^x\right).$

$a^{\frac{p}{q}}$ определена только если $a>0$, поэтому

$$\begin{cases}2a\sqrt{5}>0\\ 1-5a^2>0,\end{cases}\quad \text{т. е.}\quad a\in\left(0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

$$\log_3\left((1+5a^2)^x\right)=\log_3\left[\left(2a\sqrt{5}\right)^x+\left(1-5a^2\right)^x\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1+5a^2\right)^x=\left(2a\sqrt{5}\right)^x+\left(1-5a^2\right)^x.$$

Разделив обе части уравнения на $\left(1+5a^2\right)^x$, получаем:

$$1=\left(\frac{2a\sqrt{5}}{1+5a^2}\right)^x+\left(\frac{1-5a^2}{1+5a^2}\right)^x$$

Последнее соотношение похоже на тригонометрическое тождество.

Проверим: пусть $a\sqrt{5}=\operatorname{tg}\beta$, тогда

$$\frac{2a\sqrt{5}}{1+5a^2}=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta};\qquad \frac{1-5a^2}{1+5a^2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Это формулы, выражающие $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через тангенс половинного угла, т. е.

$$\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\sin 2\beta;\qquad \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\cos 2\beta.$$

Следовательно, уравнение имеет следующий вид:

$$1=(\cos 2\beta)^x+(\sin 2\beta)^x,$$

но это возможно для любых β, только если $x=2$ (тогда это тригонометрическое тождество).

Ответ: $x=2$.

Тренировочная работа 10

Решите логарифмические неравенства (1–10):

1. $\log_{\frac{3}{\pi}}(x+1)+\log_{\frac{3}{\pi}}(x-1)>\log_{\frac{3}{\pi}}3$;

2. $\sqrt{16^x-4^{x+1}}\geqslant 4-4^x$;

3. $\log_x\left(x^3+1\right)\log_{x+1}x>2$;

4. $x^{\log_{0,5}x+4}<0{,}5^4x$;

5. $\log_{x^2}\dfrac{2x}{|x-3|}\leqslant 0{,}5$;

6. $2\log_3\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}}\log_3\left(9\sqrt[3]{x}\right)\geqslant 1$;

7. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant\left(x^2+x+1\right)^3$;

8. $\sqrt{\log_{0,5}\left(x^2-4x+\dfrac{19}{4}\right)}<1$;

9. $\log_3\left[\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\right]\geqslant\log_3\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+1\right)+1$;

10. $\sqrt[5]{|\lg x|}+\sqrt[6]{\lg|x|}\leqslant 2$.

Решение тренировочной работы 10

1. $\log_{\frac{3}{\pi}}(x+1)+\log_{\frac{3}{\pi}}(x-1)>\log_{\frac{3}{\pi}}3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \\ \log_{\frac{3}{\pi}}\left((x+1)(x-1)\right)>\log_{\frac{3}{\pi}}3 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \boxed{\frac{3}{\pi}<1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>1 \\ (x+1)(x-1)<3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-1<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2<4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2.$$

Ответ: $(1;2)$.

2. $\sqrt{16^x-4^{x+1}}\geqslant 4-4^x$.

$\sqrt{4^{2x}-4\cdot 4^x}\geqslant 4-4^x$.

Пусть $4^x=t$ $(t>0)$, тогда $\sqrt{t^2-4t}\geqslant 4-t$.

Поскольку $\sqrt{a}\geqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\geqslant 0 \\ a\geqslant b^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b<0 \\ a\geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right.$

исходное неравенство равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-t\geqslant 0 \\ t^2-4t\geqslant 16-8t+t^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-t<0 \\ t^2-4t\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\leqslant 4 \\ t\geqslant 4 \end{cases} \\ \begin{cases} t>4 \\ t(t-4)\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} t=4 \\ \\ t>4 \end{array}$$

$4^x\geqslant 4;\quad x\geqslant 1.$

Ответ: $[1;+\infty)$.

3. $\log_x\left(x^3+1\right)\log_{x+1}x > 2.$

$\log_a b\cdot\log_c a = \log_c a^{\log_a b}$, поэтому

$\log_{(x+1)} x^{\log_x\left(x^3+1\right)} > 2 \Leftrightarrow$ $\boxed{a^{\log_a b} = b}$

$$\begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ \log_{x+1}\left(x^3+1\right)>2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(можно сразу по свойству $\log_a b\cdot\log_c a = \log_c b$)

$\boxed{x>0\Rightarrow x+1>1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ \log_{x+1}\left(x^3+1\right)>\log_{x+1}(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x^3+1>(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x^3+1>x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x\left(x^2-x-2\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x(x-2)(x+1)>0 \end{cases} \quad x>2.$$

Ответ: $(2;\infty)$.

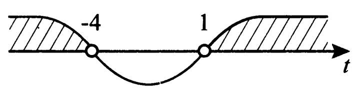
4. $x^{\log_{0,5}x+4} < 0{,}5^4x.$

Прологарифмируем обе части по основанию 0,5. Тогда неравенство принимает вид $\log_{0,5}x^{\left(\log_{0,5}x+4\right)} > \log_{0,5}0{,}5^4x$;

$\left(\log_{0,5}x+4\right)\log_{0,5}x > \log_{0,5}0,5^4+\log_{0,5}x.$

Пусть $\log_{0,5}x=t$, тогда $(t+4)\,t>4+t$;

$t^2+3t-4>0.$



$$\left[\begin{array}{l} \log_{0,5}x>1\\ \log_{0,5}x<-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0\\ x<0{,}5 \end{cases}\\ \begin{cases} x>0\\ x>0,5^{-4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0\\ x<0{,}5 \end{cases}\\ \begin{cases} x>0\\ x>16. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;0{,}5)\cup(16;\infty)$.

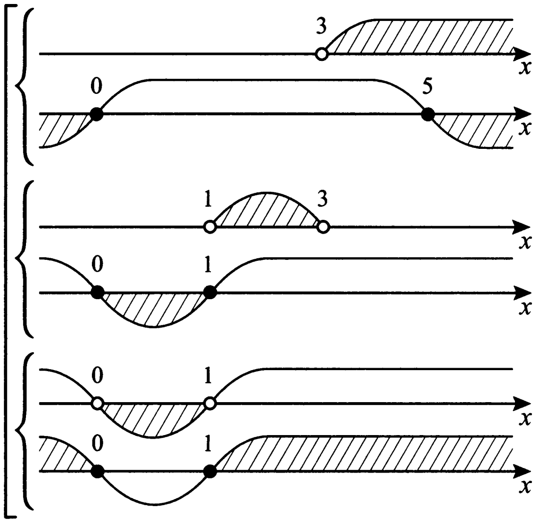
5. $\log_{x^2} \dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant 0{,}5.$

$$\log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leqslant \log_{x^2} \left(x^2\right)^{0,5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 > 1 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} > 0 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant |x| \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} > 0 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} \geqslant |x| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant x \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x > 0 \\ x \neq 3 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} \geqslant x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \\ x\left(\dfrac{2-|x-3|}{|x-3|}\right) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{x\,(2-|x-3|)}{|x-3|} \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \\ x\,(2-|x-3|) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x\,(2-|x-3|) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3 \\ x\,(5-x) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x\,(x-1) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x\,(x-1) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $x \geqslant 5$.

6. $2\log_3 \log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} \log_3 (9\sqrt[3]{x}) \geqslant 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 9\sqrt[3]{x} > 0 \\ \log_3 (\log_3 x)^2 - \log_3 \log_3 9\sqrt[3]{x} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 9\sqrt[3]{x} > 0 \\ \log_3 \dfrac{\log_3^2 x}{\log_3 9\sqrt[3]{x}} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ 2 + \dfrac{1}{3}\log_3 x > 0 \\ \dfrac{\log_3^2 x}{2 + \frac{1}{3}\log_3 x} \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 x > -6 \\ \log_3^2 x \geqslant 3\left(2 + \dfrac{1}{3}\log_3 x\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3^2 x - \log_3 x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant 27.$$

Ответ: $[27; \infty)$.

7. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \left(x^2+x+1\right)^3.$

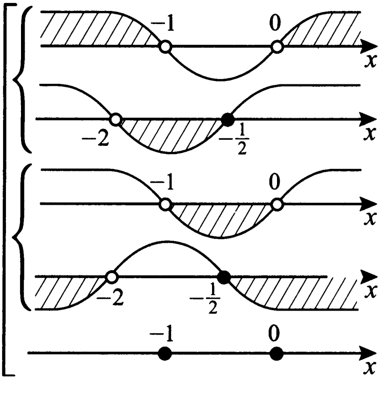
Поскольку $a^{f_1(x)} \geqslant a^{f_2(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f_1(x) \geqslant f_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f_1(x) \leqslant f_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ \forall x \in D(f_1) \cap D(f_2), \end{cases} \end{array}\right.$

имеем

$$\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \left(x^2+x+1\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x+1>1 \\ \dfrac{x+5}{x+2} \geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x^2+x+1<1 \\ \dfrac{x+5}{x+2} \leqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x+1=1 \\ x \neq -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \qquad \boxed{x^2+x+1>0 \ \ \forall x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x+1)>0 \\ \dfrac{-2x-1}{x+2} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x(x+1)<0 \\ \dfrac{-2x-1}{x+2} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right. \\ x \neq -2. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-2;-1] \cup \left[-\dfrac{1}{2};0\right]$.

8. $\sqrt{\log_{0,5}\left(x^2-4x+\dfrac{19}{4}\right)}<1.$

Поскольку $\sqrt{a}<b \Leftrightarrow \begin{cases} b>0\\ a\geqslant 0\\ a<b^2,\end{cases}$ имеем

$$\begin{cases}\log_{0,5}\left(x^2-4x+\dfrac{19}{4}\right)\geqslant 0\\ \log_{0,5}\left(x^2-4x+\dfrac{19}{4}\right)<1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+\dfrac{19}{4}\leqslant 1\\ x^2-4x+\dfrac{19}{4}>0\\ x^2-4x+\dfrac{19}{4}>0,5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-16x+15\leqslant 0\\ 4x^2-16x+19>0\\ 4x^2-16x+17>0.\end{cases}$$

$4x^2-16x+15=0;\quad x_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-60}}{4}=\dfrac{8\pm 2}{4};\ \left[\begin{array}{l}x=2,5\\ x=1,5;\end{array}\right.$

$4x^2-16x+19>0\quad \forall x,$ так как $4>0$ и $D<0;$

$4x^2-16x+17>0\quad \forall x,$ так как $a=4>0$ и $D=-16<0.$

Следовательно, система равносильна неравенству

$4\,(x-1,5)\,(x-2,5)\leqslant 0.$

Ответ: $[1,5;2,5]$.

9. $\log_3\left(\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\right)\geqslant\log_3\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+1\right)+1.$

$\log_3\left(\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\right)\geqslant\log_3\left(3\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+3\right);$

$\left(\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\geqslant 3\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+3.$

Пусть $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t \ (t > 0)$; $2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, тогда

$t^2 + \dfrac{1}{t} = 3t + 3$; $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$.

Разделим последнее выражение на $t+1$:

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 3t^2 - 3t + 1 & t+1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{t^3 + t^2} \qquad\qquad & t^2 - 4t + 1 \\ -4t^2 - 3t + 1 & \\ -\ \underline{-4t^2 - 4t} \quad & \\ t + 1 & \\ -\ \underline{t + 1} & \end{array}$$

$t = -1$ — корень. Но $t = -1 \notin (0;\infty)$.

Остается $t^2 - 4t + 1 = 0$;

$t_1 = 2 + \sqrt{3}$;

$t_2 = 2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$,

следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} t \geqslant 2+\sqrt{3} \\ t \leqslant 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \geqslant 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \leqslant 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

10. $\sqrt[5]{|\lg x|} + \sqrt[6]{\lg |x|} \leqslant 2$.

Найдем область определения неравенства $D(\text{Н})$:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \lg |x| \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 1 \qquad D(\text{Н}):\ x \geqslant 1$$

Следовательно, неравенство имеет вид $\sqrt[5]{\lg x} + \sqrt[6]{\lg x} \leqslant 2$. Пусть $\sqrt[30]{\lg x} = t \ (t \geqslant 0)$, тогда $\sqrt[5]{\lg x} = t^6$, $\sqrt[6]{\lg x} = t^5$, т.е. $t^6 + t^5 \leqslant 2$. Очевидно, $t = 1$ — корень уравнения $t^6 + t^5 - 2 = 0$.

Выполним деление:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} t^6+t^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2 \\ \underline{t^6-t^5} \end{array} & t-1 \\ \cline{2-2}
\qquad -\begin{array}{l} 2t^5 \qquad\qquad\qquad\qquad -2 \\ \underline{2t^5-2t^4} \end{array} & t^5+2t^4+2t^3+2t^2+2t+2 \\
\qquad\qquad -\begin{array}{l} 2t^4 \qquad\qquad\quad -2 \\ \underline{2t^4-2t^3} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{l} 2t^3 \qquad\quad -2 \\ \underline{2t^3-2t^2} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{l} 2t^2 \quad -2 \\ \underline{2t^2-2t} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{l} 2t-2 \\ \underline{2t-2} \end{array} &
\end{array}
$$

Поскольку $t \geqslant 0$, $t^5+2t^4+2t^3+2t^2+2t+2>0$, поэтому неравенство имеет вид $0 \leqslant t \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant \sqrt[30]{\log_5 x} \leqslant 1$; $0 \leqslant \log_5 x \leqslant 1$; $1 \leqslant x \leqslant 5$.

Ответ: $[1;5]$.

Тренировочная работа 11

Рассмотрим решение примеров с несколько иными идеями.

1. Решите уравнение $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0$.
2. Решите уравнение $2 \cdot 2^{2x} + 18 \cdot 2^{-2x} - 11 \cdot 2^x - 33 \cdot 2^{-x} + 26 = 0$.
3. Решите неравенство $(0{,}4)^x - (2{,}5)^{x+1} > 1{,}5$.
4. Решите уравнение
$$\log_2 \log_3 (2x+3) + \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x+1}{2x+3}\right) = 1.$$
5. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3} < 0$.
6. Решите неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$.
7. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_5 6$.
8. $\log_{12} 2 = a$; $\log_6 32 = ?$
9. Решите неравенство $9 \cdot x^{\lg x} + 91 \cdot x^{-\lg x} \leqslant 60$.
10. Сравните числа $\log_{70} 71$ и $\log_{71} 72$.
11. Сравните числа $\log_4 6$ и $\log_6 8$.
12. Сравните числа $\log_5 7$ и $\log_{13} 17$.
13. Решите уравнение $\dfrac{x}{18} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$.
14. Решите неравенство
$$\frac{\log_5 \left(x^2-4x+11\right)^2 - \log_{11} \left(x^2-4x-11\right)^3}{\sqrt{2-5x-3x^2}} \geqslant 0.$$
15. Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} \left(x^2-4x+5\right)}{x^3-5x^2+4x} \leqslant 0$.

Решение тренировочной работы 11

1. Решите уравнение $2\cdot 4^x - 3\cdot 10^x - 5\cdot 25^x = 0$.

Разделим обе части уравнения на 25^x:

$$2\left(\frac{4}{25}\right)^x - 3\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^x - 5 = 0;\quad 2\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x - 5 = 0;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = t\quad (t>0);\quad 2t^2 - 3t - 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+40}}{4} = \frac{3\pm 7}{4};\qquad \left[\begin{aligned} &t = \frac{5}{2}\\ &t = -1 \notin (0;\infty).\end{aligned}\right.$$

Итак, $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5}{2}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; $x = -1$.

Можно поступить иначе. Поскольку нам задано однородное уравнение, т. е. уравнение, каждое слагаемое которого содержит неизвестное одной и той же степени, то обозначим $2^x = a$, $5^x = b$. Тогда

$$2\cdot a^2 - 3\cdot ab - 5b^2 = 0;\quad a_{1,2} = \frac{3b\pm\sqrt{9b^2+40b^2}}{4} = \frac{3b\pm 7b}{4};$$

$$\left[\begin{aligned} &a = \frac{5}{2}b\\ &a = -b,\end{aligned}\right.\ \text{т. е.}\ \left[\begin{aligned} &2^x = \frac{5}{2}\cdot 5^x\\ &2^x = -5^x;\quad x\in\emptyset;\end{aligned}\right.\qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5}{2};\quad x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.

2. Решите уравнение $2\cdot 2^{2x} + 18\cdot 2^{-2x} - 11\cdot 2^x - 33\cdot 2^{-x} + 26 = 0$.

Положим $2^x + 3\cdot 2^{-x} = t \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 = \left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right)^2 = 2^{2x} + 2\cdot 3\cdot 2^x\cdot 2^{-x} + 9\cdot 2^{-2x} =$
$= 2^{2x} + 9\cdot 2^{-2x} + 6$ (так как $2^x\cdot 2^{-x} = 1$),

тогда $2^{2x} + 9\cdot 2^{-2x} = t^2 - 6$.

Уравнение приведем группировкой к виду

$2\left(2^{2x} + 9\cdot 2^{-2x}\right) - 11\left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right) + 26 = 0$,

т. е. $2\left(t^2 - 6\right) - 11t + 26 = 0$; $2t^2 - 11t + 14 = 0$;

$$t_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{4}=\frac{11\pm3}{4};\quad \left[\begin{array}{l} t=3{,}5\\ t=2;\end{array}\right.$$

а) $2^x+3\cdot2^{-x}=2;\ \ 2^{2x}-2\cdot2^x+3=0\quad(\mathcal{D}<0)$;

б) $2^x+3\cdot2^{-x}=3{,}5;\ \ 2\cdot2^{2x}-7\cdot2^x+6=0;$

$$(2^x)_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}=\frac{7\pm1}{4};\quad \left[\begin{array}{l} 2^x=2\\ 2^x=\dfrac{3}{2};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=\log_2 1{,}5.\end{array}\right.$$

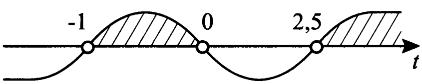
Ответ: $\{1;\log_2 1{,}5\}$.

3. Решите неравенство $(0{,}4)^x-(2{,}5)^{x+1}>1{,}5$.

$(0{,}4)^x-2{,}5\cdot2{,}5^x>1{,}5$. Пусть $(0{,}4)^x=t\ \ (t>0)$.

Поскольку $2{,}5=\dfrac{1}{0,4}$, $\quad t-\dfrac{5}{2t}-1{,}5>0;\quad \dfrac{2t^2-3t-5}{2t}>0;$

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{3\pm7}{4};\quad \left[\begin{array}{l} t=-1\\ t=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.;\quad \frac{2\left(t-\frac{5}{2}\right)(t+1)}{t}>0.$$



$t>0\Rightarrow t>2{,}5;$

$0{,}4^x>2{,}5;\ \ 0{,}4^x>0{,}4^{-1}\ \Rightarrow x<-1.$

Ответ: $(-\infty;-1)$.

4. Решите уравнение

$$\log_2\log_3(2x+3)+\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)=1.$$

$$\log_2\log_3(2x+3)-\log_2\log_3\frac{2x+3}{x+1}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(2x+3)>0\\ \log_3\dfrac{2x+3}{x+1}>0\\ \log_2\dfrac{\log_3(2x+3)}{\log_3\frac{2x+3}{x+1}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>1\\ \dfrac{2x+3}{x+1}>1\\ \log_3(2x+3)=2\log_3\dfrac{2x+3}{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \dfrac{x+2}{x+1} > 0 \\ \log_3(2x+3) = 2\log_3(2x+3) - 2\log_3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \dfrac{x+2}{x+1} > 0 \\ 2\log_3(x+1) = \log_3(2x+3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x+1)^2 = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

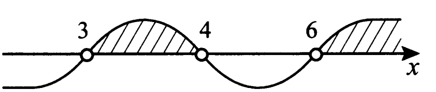
5. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3} < 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} < \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3} > 1 \\ \log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} > 1 \Leftrightarrow \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} > \log_8 8;$$

$$\frac{x^2-2x}{x-3} > 8; \quad \frac{x^2-2x-8x+24}{x-3} > 0; \quad \frac{x^2-10x+24}{x-3} > 0;$$

$$\frac{(x-4)(x-6)}{x-3} > 0.$$



Ответ: $(3; 4) \cup (6; \infty)$.

6. Решите неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$.

Полезно иметь в виду свойство

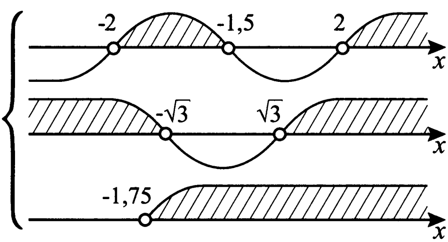
$$\log_a b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) > 0 \\ a > 0 \\ b > 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\log_a b>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ b>1\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ 0<b<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-1)>0\\ (b-1)>0\end{cases}\\ \begin{cases}(a-1)<0\\ (b-1)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)(b-1)>0\\ a>0\\ b>0\end{cases}}$$

Тогда

$$\begin{cases}\left(x^2-3-1\right)(4x+7-1)>0\\ x^2-3>0\\ 4x+7>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x+2)\cdot 2(2x+3)>0\\ x^2>3\\ 4x>-7.\end{cases}$$



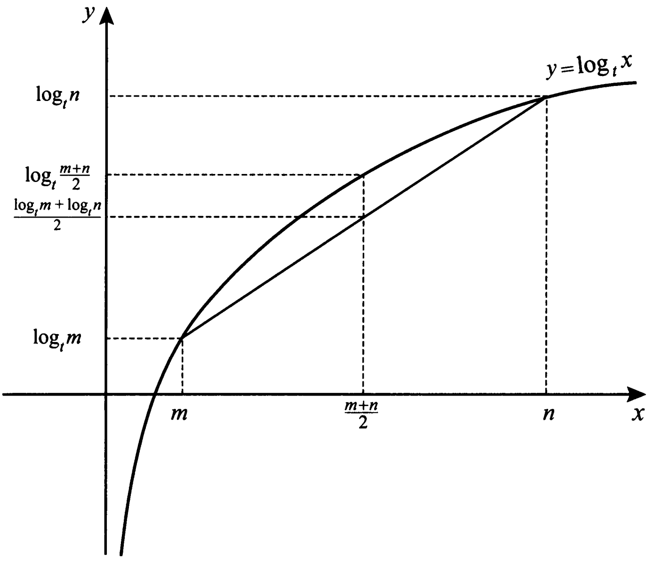
Ответ: $\left(-1{,}75;-\sqrt{3}\right)\cup(2;\infty)$.

7. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_5 6$.

Известно, что $y=\log_a x$ — выпуклая вверх при $a>1$, т. е.

$\log_t \dfrac{m+n}{2}>\dfrac{\log_t m+\log_t n}{2}$ или $\boxed{f\left(\dfrac{m+n}{2}\right)>\dfrac{f(m)+f(n)}{2}}$

(определение выпуклости).



Тогда $\log_2 3 = \log_2 \dfrac{6}{2} = \log_2 \dfrac{4+2}{2} > \dfrac{1}{2}\left(\log_2 4 + \log_2 2\right)$, т. е. $\log_2 3 > \dfrac{1}{2}(2+1) = 1{,}5$, значит,

$\log_2 3 - \log_5 6 > 1{,}5 - \log_5 6 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 6 = \log_5 \dfrac{5^{\frac{3}{2}}}{6} =$

$= \log_5 \dfrac{5\sqrt{5}}{6} > 0$ (так как $\dfrac{5\sqrt{5}}{6} > 1$).

Итак, $\log_2 3 > \log_5 6$.

8. $\log_{12} 2 = a$; $\log_6 32 = ?$

$\log_6 32 = 5\log_6 2$;

$\log_{12} 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 12} = \dfrac{1}{\log_2 2 + \log_2 6} = a$;

$\dfrac{1}{a} = 1 + \log_2 6$; $\log_2 6 = \dfrac{1-a}{a}$; $\log_6 2 = \dfrac{a}{1-a}$;

$\log_6 32 = 5\log_6 2 = \dfrac{5a}{1-a}$.

9. Решите неравенство $9\cdot x^{\lg x}+91\cdot x^{-\lg x}\leqslant 60$.

Пусть $x^{\lg x}=t \quad (t>0)$;

$9t+91\cdot t^{-1}\leqslant 60; \quad \dfrac{9t^2-60t+91}{t}\leqslant 0;$

$$t_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{900-819}}{9}=\frac{30\pm 9}{9}; \quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{13}{3} \\ t=\dfrac{7}{3}; \end{array}\right.$$

$\dfrac{7}{3}<x^{\lg x}<\dfrac{13}{3}; \quad \lg\dfrac{7}{3}<\lg x^{\lg x}<\lg\dfrac{13}{3};$

$\lg\dfrac{7}{3}<\lg^2 x<\lg\dfrac{13}{3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt{\lg\dfrac{7}{3}}<\lg x<\sqrt{\lg\dfrac{13}{3}} \\ -\sqrt{\lg\dfrac{13}{3}}<\lg x<-\sqrt{\lg\dfrac{7}{3}} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 10^{\sqrt{\lg 2\frac{1}{3}}}<x<10^{\sqrt{\lg 4\frac{1}{3}}} \\ 10^{-\sqrt{\lg 4\frac{1}{3}}}<x<10^{-\sqrt{\lg 2\frac{1}{3}}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(10^{\sqrt{\lg 2\frac{1}{3}}};10^{\sqrt{\lg 4\frac{1}{3}}}\right)\cup\left(10^{-\sqrt{\lg 4\frac{1}{3}}};10^{-\sqrt{\lg 2\frac{1}{3}}}\right)$.

10. Сравните числа $\log_{70}71$ и $\log_{71}72$.

Рассмотрим $y=\log_{x-1}x$ и попытаемся доказать, что функция убывает при $x>2$, где $x\in\mathbb{N}$, т. е.

$\log_{x-1}x>\log_x(x+1)$.

Итак, $\dfrac{1}{\log_x(x-1)}>\log_x(x+1)\Leftrightarrow$

(так как $x>2\Rightarrow\log_x(x-1)>0$)

$\Leftrightarrow\log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)<1$.

Это нужно доказать. Поскольку

$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ при $\begin{cases} a\geqslant 0 \\ b\geqslant 0, \end{cases}$ имеем

$$\frac{\log_x(x+1)+\log_x(x-1)}{2}\geqslant\sqrt{\log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)},$$

т. е. $\sqrt{\log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)} \leqslant \dfrac{\log_x(x+1)+\log_x(x-1)}{2} =$
$= \dfrac{\log_x(x^2-1)}{2} < \dfrac{\log_x x^2}{2} = 1 \quad (x>2).$

Следовательно, $\sqrt{\log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)} < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1) < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_x(x+1)}{\log_{x-1}x} < 1 \Leftrightarrow$

(так как $\log_{x-1}x > 0$ при $x>2$)

$\Leftrightarrow \boxed{\log_x(x+1) < \log_{x-1}x,}$

что и требовалось доказать.

Тогда, помня о том, что $x=71$, имеем $\log_{71}72 < \log_{70}71$.

11. Сравните числа $\log_4 6$ и $\log_6 8$.

По аналогии докажем, что $y=\log_{x-2}x$ убывает при $x>3$.

$\sqrt{\log_x(x-2)\log_x(x+2)} \leqslant \dfrac{\log_x(x-2)+\log_x(x+2)}{2} =$
$= \dfrac{\log_x(x^2-4)}{2} < \dfrac{\log_x x^2}{2} = 1,$

поэтому $\log_x(x-2)\cdot\log_x(x+2) < 1$ ($\log_{x-2}x > 0$ при $x>3$), значит, $\dfrac{\log_x(x+2)}{\log_{x-2}x} < 1$, откуда
$\log_x(x+2) < \log_{x-2}x$, т. е. $y=\log_{x-2}x$ — убывающая.

Тогда $\log_4 6 > \log_6 8$, что и требовалось выяснить.

12. Сравните числа $\log_5 7$ и $\log_{13}17$.

Очевидно, что $1<\log_5 7<2$, $1<\log_{13}17<2$. Разделим интервал пополам и выясним, где находится данное число: $\dfrac{1+2}{2}=1{,}5$, т. е. $(1;1{,}5)\,(1{,}5;2)$. Определим, что больше: $\log_5 7$ или $1{,}5$; $\log_{13}17$ или $1{,}5$:

а) $1{,}5=\log_5 5^{\frac{3}{2}}=\log_5 5\sqrt{5}>\log_5 7$, так как $5\sqrt{5}>7$.

$1{,}5=\log_{13}13^{\frac{3}{2}}=\log_{13}13\sqrt{13}>\log_{13}17$, так как $13\sqrt{13}>17$ ($\sqrt{13}\approx 3{,}6$). Значит, $1<\log_5 7<1{,}5$; $1<\log_{13}17<1{,}5$.

Опять попытаемся выяснить, что больше: $\log_5 7$ или $\frac{5}{4}$; $\log_{13} 17$ или $\frac{5}{4}$ $\left(\frac{1+1{,}5}{2}=\frac{5}{4}\right)$:

б) $\frac{5}{4}=\log_5 5^{\frac{5}{4}}=\log_5 5\sqrt[4]{5}>\log_5 7$, так как $5\sqrt[4]{5}>7$

$(25\sqrt{5}>49$, поскольку $\sqrt{5}>2$, значит $5\sqrt[4]{5}>7)$.

$\frac{5}{4}=\log_{13} 13^{\frac{5}{4}}=\log_{13} 13\sqrt[4]{13}>\log_{13} 17$, так как $13\sqrt[4]{13}>17$

$(169\sqrt{13}>289;\ \sqrt{13}\approx 3{,}6;\ 169\cdot 3=507>289)$.

Итак, $1<\log_5 7<\frac{5}{4}$, $1<\log_{13} 17<\frac{5}{4}$.

Опять попытаемся выяснить, что больше: $\log_5 7$ или $\frac{9}{8}$; $\log_{13} 17$ или $\frac{9}{8}$ $\left(\frac{1+\frac{5}{4}}{2}=\frac{9}{8}\right)$:

в) $\frac{9}{8}=\log_5 5^{\frac{9}{8}}=\log_5 5\sqrt[8]{5}<\log_5 7$, так как $5\sqrt[8]{5}<7$

$(25\sqrt[4]{5}<49$, поскольку $625\sqrt{5}<2{,}3\cdot 625<2401)$.

$\frac{9}{8}=\log_{13} 13^{\frac{9}{8}}=\log_{13} 13\sqrt[8]{13}>\log_{13} 17$, так как $13\sqrt[8]{13}>17$

$(169\sqrt[4]{13}>289$, поскольку $28561\sqrt{13}>83521$: $\sqrt{13}\approx 3{,}6$; $28561\cdot 3=85683>83521)$.

Итак, $\log_5 7>\frac{9}{8}$; $\log_{13} 17<\frac{9}{8}$, следовательно,

$\log_5 7>\log_{13} 17$, что и требовалось выяснить.

13. Решите уравнение $\frac{x}{18}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$\log_2 \frac{x}{18}=\log_2\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$;

$\log_2 x-\log_2 18=\log_x 12\,(\log_2 2-\log_2 3)$;

$$\log_2 x - \log_2 2 - \log_2 9 = \frac{(1-\log_2 3)\log_2 12}{\log_2 x};$$

$$\log_2 x - 1 - 2\log_2 3 = \frac{(1-\log_2 3)(\log_2 4 + \log_2 3)}{\log_2 x}.$$

Пусть $\log_2 x = a$; $\log_2 3 = b$;

$(a-2b-1)\,a = (1-b)(2+b)$; $a^2 - 2ab - a = 2 - b - b^2$;

$a^2 - 2ab + b^2 - (a-b) - 2 = 0$; $(a-b)^2 - (a-b) - 2 = 0$.

Решая квадратное уравнение относительно $a-b$, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} a-b=2 \\ a-b=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b+2 \\ a=b-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_2 3 + 2 \\ \log_2 x = \log_2 3 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

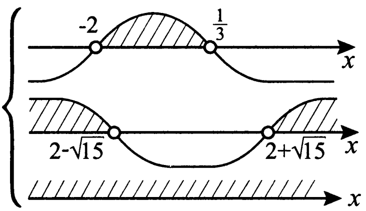
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_2 12 \\ \log_2 x = \log_2 1{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = 1{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1{,}5; 12\}$.

14. Решите неравенство

$$\frac{\log_5\left(x^2-4x+11\right)^2 - \log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3}{\sqrt{2-5x-3x^2}} \geqslant 0.$$

$$\begin{cases} 2-5x-3x^2 > 0 \\ x^2-4x-11 > 0 \\ x^2-4x+11 \neq 0 \end{cases}$$



$D(\text{Н})$: $\left(-2; 2-\sqrt{15}\right)$.

Выясним, будет ли на $D(\text{Н})$ $\log_{11}\left(x^2-4x-11\right) < 0$.

Это так, если $x^2-4x-12<0$, т. е. $(x-6)(x+2)<0$.

$D(\text{Н}) = \left(-2;2-\sqrt{15}\right) \subset (-2;6)$,

т. е. $\log_{11}\left(x^2-4x-11\right) < 0 \ \ \forall x \in D(\text{Н}) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3 < 0.$

Аналогично выясним, верно ли, что $\log_5\left(x^2-4x+11\right) > 0$ на $D(\text{Н})$.

$$\log_5\left(x^2-4x+11\right) > \log_5 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+10>0 \quad \forall x \quad \begin{cases} a=1>0 \\ \mathcal{D}<0, \end{cases}$$

т. е. $\log_5\left(x^2-4x+11\right)^2 > 0 \quad \forall x \in D(\text{H})$.

Итак,

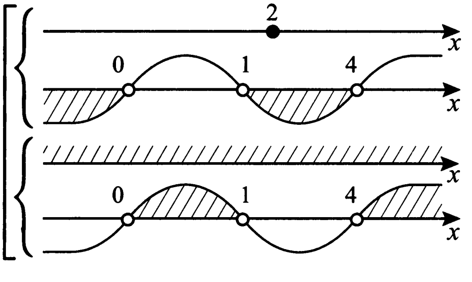
$\log_5\left(x^2-4x+11\right)^2 - \log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3 > 0 \;\; \forall x \in D(\text{H})$.

Это значит, что решением является $\left(-2;\ 2-\sqrt{15}\right)$.

15. Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right)}{x^3-5x^2+4x} \leqslant 0$.

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right)}{x^3-5x^2+4x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right) \geqslant 0 \\ x\left(x^2-5x+4\right)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right) \leqslant 0 \\ x\left(x^2-5x+4\right)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-4x+5 \leqslant 1 \\ x^2-4x+5>0 \\ x(x-4)(x-1)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4x+5 \geqslant 1 \\ x(x-4)(x-1)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-2)^2 \leqslant 0 \\ x(x-4)(x-1)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)^2 \geqslant 0 \\ x(x-4)(x-1)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(0;1)\cup(4;\infty)\cup\{2\}$.

Тренировочная работа 12

1. Решите уравнение $4^{2+\sqrt{x}} - 4^{\sqrt{x}} \cdot x^4 = 0$.

2. Найдите произведение всех целых отрицательных чисел, которые являются решениями неравенства
$4^{x+1} + 4^{x+2} > 2\left(3^x + 3^{x+1}\right)$.

3. Укажите наибольшее целое значение a, при котором множество решений неравенства $2^x > 3^a$ относительно x содержит число 10.

4. Найдите число целых чисел, для которых $3 \cdot x^{3\log_x 4} > 5^x$.

5. Решите уравнение $x + \log_5(x + 225) = 404$.

6. Найдите сумму всех целых решений неравенства
$\log_{19}(8 - x) > \log_{0,91}(x - 2) - 5$.

7. Решите уравнение
$3x^2 \log_3(2 + 3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2 + 3x} = 3x^2 + 2x$.

8. $y = \log_{0,5} \dfrac{32}{13 + \log_5\left(125 + x^4\right)}$. $E(y) = ?$

9. $y = x^{\sqrt{2}}$; $y \in [6; 8]$.
При каких целых значениях x это возможно?

10. Решите неравенство $15^{\log_5 x} + 20^{\log_5 x} \geqslant 25^{\log_5 x}$.

Решение тренировочной работы 12

1. Решите уравнение $4^{2+\sqrt{x}} - 4^{\sqrt{x}} \cdot x^4 = 0.$

$D(\text{У}):\ x \geqslant 0;\quad 4^{\sqrt{x}}\left(4^2 - x^4\right) = 0;$

$$\begin{cases} 4^2 - x^4 = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases};\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = -4 \end{array}\right. ; \\ x \geqslant 0 \end{cases}\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right. ; \\ x \geqslant 0 \end{cases}\quad \boxed{x = 2}.$$

2. Найдите произведение всех целых отрицательных чисел, которые являются решениями неравенства
$4^{x+1} + 4^{x+2} > 2\left(3^x + 3^{x+1}\right).$

$4^x \cdot \left(4 + 4^2\right) > 3^x \cdot 2 \cdot (1+3);\quad 4^x > \dfrac{8}{20} \cdot 3^x;\quad 4^x > 0{,}4 \cdot 3^x.$

Пусть $x_1 = -1$, тогда $\dfrac{1}{4} > \dfrac{2}{15}$ — истина.

Пусть $x_2 = -2$, тогда $\dfrac{1}{16} > \dfrac{2}{45}$ — истина.

Пусть $x_3 = -3$, тогда $\dfrac{1}{64} > \dfrac{2}{135}$ — истина.

Пусть $x_4 = -4$, тогда $\dfrac{1}{256} > \dfrac{2}{405}$ — ложь.

Таким образом, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \boxed{-6}$.

3. Укажите наибольшее целое значение a, при котором множество решений неравенства $2^x > 3^a$ относительно x содержит число 10.

$2^x > 2^{10} > 3^a$. Так как $2^{10} = 1024$, то $3^a < 1024$.

В силу того, что $3^7 = 2187 > 1024$ и $3^6 = 729 < 1024$,

$a = 6$ — наибольшее целое число, при котором

$2^x > 2^{10} > 3^a$.

4. Найдите число целых чисел, для которых $3 \cdot x^{3\log_x 4} > 5^x$.

Из неравенства следует, что

$$3 \cdot \left(x^{\log_x 4}\right)^3 > 5^x; \quad \begin{cases} 3 \cdot 4^3 > 5^x \\ x \neq 1; \ x > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 192 > 5^x \\ x \neq 1; \ x > 0 \end{cases}.$$

Пусть $x = 2$, тогда $192 > 25$ — истина.

Пусть $x = 3$, тогда $192 > 125$ — истина.

Пусть $x = 4$, тогда $192 > 625$ — ложь.

Ответ: два целых числа ($x = 2$, $x = 3$).

5. Решите уравнение $x + \log_5(x + 225) = 404$.

$\log_5(x + 225) = 404 - x; \quad x + 225 = 5^{404-x}$.

Так как $y = x + 225$ — возрастающая функция,

а $t = 5^{404-x}$ — убывающая функция, то уравнение

$x + 225 = 5^{404-x}$ имеет единственное решение.

Проверим, нет ли здесь целого корня. Очевидно, что левая часть в этом случае есть значение степени числа 5.

Так как $x > 0$ (иначе правая часть очень велика), то при любых x $\ x + 225 > 5^3$. Если $x + 225 \geqslant 5^4$, то $x \geqslant 400$.

В случае равенства $\begin{cases} 404 - x = 4 \\ x + 225 = 625 \end{cases}$.

Равенства выполняются одновременно, значит $\boxed{x = 400}$.

6. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$\log_{19}(8 - x) > \log_{0,91}(x - 2) - 5$.

$D(\text{Н}): \ 2 < x < 8$.

При $x \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$ $\ \log_{0,91}(x - 2) \leqslant 0$,

значит $\log_{0,91}(x - 2) - 5 \leqslant 0$.

Учтем, что при $x \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$ $\ \log_{19}(8 - x) \geqslant 0$, поэтому неравенство $\log_{19}(8 - x) > \log_{0,91}(x - 2) - 5$ справедливо.

Остается найти сумму всех целых решений неравенства:

$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \boxed{25}$.

7. Решите уравнение

$$3x^2\log_3(2+3x)-6x\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2+3x}=3x^2+2x.$$

$$3x^2\log_3(2+3x)-6\cdot(-1)\cdot\frac{1}{3}x\log_3(2+3x)=3x^2+2x;$$

$$3x^2\log_3(2+3x)+2x\log_3(2+3x)=3x^2+2x;$$

$$\left(3x^2+2x\right)\cdot\log_3(2+3x)=0;$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}3x^2+2x=0\\ 2+3x=1\end{array}\right.\\ 2+3x>0\end{array}\right.;\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\dfrac{2}{3}\\ x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3};0\right\}$.

8. $y=\log_{0,5}\dfrac{32}{13+\log_5\left(125+x^4\right)}$. $E(y)=?$

Так как $125+x^4>0$, то $\log_5\left(125+x^4\right)\geqslant\log_5 125=3$.

Тогда $13+\log_5\left(125+x^4\right)\geqslant 13+3=16$,

значит $\dfrac{32}{13+\log_5\left(125+x^4\right)}\leqslant\dfrac{32}{16}=2$.

Отсюда следует, что

$$\log_{0,5}\frac{8}{13+\log_5\left(125+x^4\right)}\geqslant\log_{0,5}2=-1.$$

Таким образом, $E(y)=[-1;\infty)$.

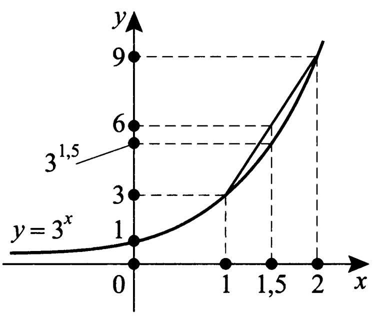
9. $y = x^{\sqrt{2}}$; $y \in [6; 8]$.

При каких целых значениях x это возможно?

Рассмотрим подходящие целые x.

а) Пусть $x = 2$, тогда $2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$, но $(2; 4) \not\subset [6; 8]$.

б) Пусть $x = 3$, тогда $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$.



По свойству выпуклой вниз функции $y = 3^x$:

$\dfrac{3^2 + 3^1}{2} > 3^{\frac{1+2}{2}} > 3^{1,5}$, значит

$3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5} < 6$, то есть $3^{\sqrt{2}} \notin [6; 8]$.

в) Пусть $x = 4$, тогда $4^1 < 4^{\sqrt{2}} < 4^2$.

Аналогично предыдущему случаю, по свойству выпуклости вниз $y = 4^x$ $\dfrac{4^1 + 4^2}{2} > 4^{\frac{1+2}{2}} = 4^{1,5} = 8$,

значит $8 = 4^{1,5} > 4^{\sqrt{2}}$.

Теперь необходимо доказать, что $4^{\sqrt{2}} > 6$.

$4^{\sqrt{2}} > 4^{1,4} = 4 \cdot 4^{\frac{2}{5}} > 4 \cdot 4^{\frac{3}{8}} = 4 \cdot \sqrt[8]{4^3} = 4 \cdot \sqrt[4]{8} =$

$= 4\sqrt{2\sqrt{2}} > 4 \cdot \sqrt{2 \cdot 1,4} = 4\sqrt{2,8} > 4 \cdot 1,6 = 6,4$,

значит $4^{\sqrt{2}} \in [6; 8]$.

г) Пусть $x = 5$, тогда $5^1 < 5^{\sqrt{2}} < 5^2$.

По свойству выпуклости $y = 5^x$

$$\frac{5^1 + 5^2}{2} > 5^{\frac{1+2}{2}} = 5^{1,5} > 5^{\sqrt{2}} > 5^{1,4}.$$

$5^{1,5} = 5\sqrt{5} > 5 \cdot 2,2 = 11;$

$5^{1,4} = 5 \cdot 5^{\frac{2}{5}} > 5 \cdot 5^{\frac{3}{8}} = 5\sqrt[8]{125} > 5\sqrt[4]{11} > 5\sqrt{3,25} > 5 \cdot 1,8 = 9,$

значит $5^{\sqrt{2}} \notin [6; 8]$.

Ответ: $x = 4$.

10. Решите неравенство $15^{\log_5 x} + 20^{\log_5 x} \geqslant 25^{\log_5 x}$.

Пусть $\log_5 x = t$, тогда $15^t + 20^t \geqslant 25^t$.

Основания 15, 20 и 25 напоминают известную пифагорову тройку чисел. Действительно, $15^2 + 20^2 = 25^2$.

Разделим обе части неравенства на 25^t: $\left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t \geqslant 1$.

Так как $\frac{3}{5} < 1$ и $\frac{4}{5} < 1$, а $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то можно положить $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ($\alpha \in$ I четверти).

Известно, что если $(\sin\alpha)^t \geqslant (\sin\alpha)^k$, то $t \leqslant k$, аналогично из $(\cos\alpha)^t \geqslant (\cos\alpha)^k$ следует, что $t \leqslant k$.

Значит

$$\begin{array}{c} (\sin\alpha)^t \geqslant (\sin\alpha)^2 \\ (\cos\alpha)^t \geqslant (\cos\alpha)^2 \\ \hline (\sin\alpha)^t + (\cos\alpha)^t \geqslant (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1. \end{array}$$

Итак, мы доказали, что $(\sin\alpha)^t + (\cos\alpha)^t \geqslant 1$, что возможно при $t \leqslant 2$. Значит, $\log_5 x \leqslant 2$, то есть $0 < x \leqslant 25$.

Ответ: $0 < x \leqslant 25$.

Примечание. Неравенство $15^{\log_5 x} + 20^{\log_5 x} \geqslant 25^{\log_5 x}$ равносильно неравенству $15^{\log_5 x} + 20^{\log_5 x} \geqslant x^2$. В таком виде заметить идею решения неравенства значительно труднее.

Решение систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств

Практикум 11

Решите систему уравнений (1–10):

1. $\begin{cases} 8 \cdot 2^y = 4^{1,5x+0,5} \\ 5^{2x} = 0{,}04 \cdot 5^y \end{cases};$

2. $\begin{cases} 2^{x-y} \cdot 2^{xy} = 8 \\ 9^y = 3^{4-x} \end{cases};$

3. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25 \end{cases};$

4. $\begin{cases} (y-x)2^{y+2x} = \dfrac{25}{4} \\ (y-x)^{\frac{1}{2x+y}} = 0{,}2 \end{cases};$

5. $\begin{cases} (2x)^{4x^2-y^2-16} = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases};$

6. $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0 \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0 \end{cases};$

7. $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 + \log_5 19{,}2 \\ \log_2(x+y) = \log_2 5 + 2 \end{cases};$

8. $\begin{cases} 10^{1+\lg(2x+y)} = 50 \\ \lg(2x-y) + \lg(2x+y) = 2 - \lg 5 \end{cases};$

9. $\begin{cases} 25^{x+y} = 5^{y-x} \\ 9^{\log_{\sqrt{3}} x} = y^4 - 5 \end{cases};$

10. $\begin{cases} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = 6 \\ \log_2(3x-y) + \log_2(x+y) = 2\log_2 4 \end{cases}.$

Решите систему неравенств (11–15):

11. $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64} \\ 2^{x^2-6x-3{,}5} < 8\sqrt{2} \end{cases}$;

12. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4x+1} > 243 \\ \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-6x+9} \leqslant 0 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} \dfrac{5^{4x+2}}{25^{x+1}} > 1 \\ 1 + \log_3(x-4) \leqslant \log_3(x+21) \end{cases}$;

14. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}(12+x) + \log_5(3-x) < \log_{25}\dfrac{1}{4} \\ 0{,}3^{-x} \leqslant 0{,}3^{\sqrt{x+2}} \end{cases}$;

15. $\begin{cases} 3^{\sqrt{2x^2+x-6}} > \sqrt{3}^{2x} \\ \log_{3x-1} 27 < 2 \end{cases}$.

Решение практикума 11

Решите систему уравнений (1–10):

1. $\begin{cases} 8\cdot 2^y = 4^{1{,}5x+0{,}5} \\ 5^{2x} = 0{,}04\cdot 5^y. \end{cases}$

Приведем в каждом уравнении к одному основанию степени в правой и левой части.

$\begin{cases} 2^3\cdot 2^y = 2^{3x+1} \\ 5^{2x} = 5^{-2}\cdot 5^y \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{3+y} = 2^{3x+1} \\ 5^{2x} = 5^{-2+y} \end{cases}$, тогда

$\begin{cases} 3+y = 3x+1 \\ 2x = -2+y \end{cases}$; $\begin{cases} y = 3x-2 \\ 2x = -2+3x-2 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 3x-2 \\ x = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases}$; $\boxed{(4;10)}$.

2. $\begin{cases} 2^{x-y}\cdot 2^{xy} = 8 \\ 9^y = 3^{4-x} \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x-y+xy} = 2^3 \\ 3^{2y} = 3^{4-x} \end{cases}$; $\begin{cases} x-y+xy = 3 \\ 2y = 4-x \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 4-2y \\ 4-2y-y+y(4-2y) = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2y^2-y-1 = 0 \\ x = 4-2y \end{cases}$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ x = 4-2y \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ x = 5 \end{cases} \end{array}\right.$; $\boxed{(2;1);\ (5;-0{,}5)}$.

3. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25 \end{cases}$.

Обозначим $3^x = t$ $(t>0)$, $2^{\frac{y}{2}} = z$ $(z>0)$, тогда

$\begin{cases} t^2 - z^2 = 725 \\ t-z = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} (t-z)(t+z) = 725 \\ (t-z) = 25 \end{cases}$;

$\begin{cases} 25(t+z) = 725 \\ t-z = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} t+z = 29 \\ t-z = 25 \end{cases}$ $\pm$

$\begin{cases} t = 27 \\ z = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^x = 27 \\ 2^{\frac{y}{2}} = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$; $\boxed{(3;2)}$.

4. $\begin{cases} (y-x)2^{y+2x} = \dfrac{25}{4} \\ (y-x)^{\frac{1}{2x+y}} = 0{,}2 \end{cases}$. $\quad D(\mathrm{C}): \begin{cases} y-x>0 \\ 2x+y\neq 0 \end{cases}$

Из второго уравнения $(y-x)^{\frac{1}{2x+y}} = 0{,}2$ следует, что $y-x=(0{,}2)^{2x+y}$, тогда первое уравнение примет вид $(0{,}2)^{2x+y}\cdot(2)^{y+2x} = \dfrac{25}{4}$.

Следовательно $(0{,}2\cdot 2)^{2x+y} = \dfrac{25}{4}$, т. е. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2x+y} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$.

Система примет вид

$\begin{cases} 2x+y=-2 \\ y-x=0{,}2^{2x+y} \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2x+y=-2 \\ y-x=(0{,}2)^{-2} \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2x+y=-2 \\ y-x=25 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=-9 \\ y=16 \end{cases} \in D(\mathrm{C})$; $\quad \boxed{(-9;16)}$.

5. $\begin{cases} (2x)^{4x^2-y^2-16}=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$; $\quad D(\mathrm{C}): \begin{cases} x>0 \\ x<0;\ 4x^2-y^2-16 \text{ — четное} \end{cases}$

а) $\begin{cases} (2x)^{4x^2-y^2-16}=(2x)^0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 4x^2-y^2-16=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$;

$\begin{cases} (2x-y)(2x+y)=16 \\ 2x-y=2 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x-y=2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=2{,}5 \\ y=3 \end{cases} \in D(\mathrm{C})$.

б) Пусть $2x=1$, тогда $1^{1-y^2-16}=1$ верно при любом значении y, значит $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$.

в) Пусть $2x=-1$, тогда

$\begin{cases} (-1)^{1-y^2-16}=1 \\ -1-y=2 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} (-1)^{1-9-16}=1 \text{ — истина} \\ y=-3 \end{cases}$.

$\boxed{(2{,}5;3);\ (0{,}5;-1);\ (-0{,}5;-3)}$.

6. $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0 \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0 \end{cases}$; $\quad D(\text{C}): \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_3 x = \log_3 y \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \log_3 x = 2\log_3 y \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y^2 \\ y^4 - 2y^2 - 8 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ \left[\begin{array}{l} y^2 = 4 \\ y^2 = -2 \quad \emptyset \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y^2 \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -2 \notin D(\text{C}) \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y^2 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \boxed{(4;2)}.$$

7. $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 + \log_5 19{,}2 \\ \log_2 (x + y) = \log_2 5 + 2 \end{cases}$; $\quad D(\text{C}): \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_5 xy = \log_5(5 \cdot 19{,}2) \\ \log_2(x + y) = \log_2(5 \cdot 4) \end{cases}; \quad \begin{cases} xy = 96 \\ x + y = 20 \end{cases}.$$

Система порождает по теореме, обратной теореме Виета, квадратное уравнение вида $m^2 - 20m + 96 = 0$, $\left[\begin{array}{l} m = 12 \\ m = 8 \end{array}\right.$, корни которого, в силу симметричности системы, составляют пары решения системы. $\boxed{(12;8);\ (8;12)}$.

8. $\begin{cases} 10^{1+\lg(2x+y)} = 50 \\ \lg(2x - y) + \lg(2x + y) = 2 - \lg 5 \end{cases}$; $\quad D(\text{C}): \begin{cases} 2x + y > 0 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 10^1 \cdot 10^{\lg(2x+y)} = 50 \\ \lg(2x - y)(2x + y) = \lg \dfrac{10^2}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2{,}25 \\ y = 0{,}5 \end{cases} \in D(\text{C}) \qquad \boxed{(2{,}25;0{,}5)}.$$

9. $\begin{cases} 25^{x+y} = 5^{y-x} \\ 9^{\log_{\sqrt{3}} x} = y^4 - 5 \end{cases}$; $\qquad D(\text{C}):\ x > 0$

$\begin{cases} 5^{2(x+y)} = 5^{y-x} \\ (\sqrt{3})^{4\log_{\sqrt{3}} x} = y^4 - 5 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2(x+y) = y - x \\ x^4 = y^4 - 5 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = -3x \\ x^4 = 81x^4 - 5 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} y = -3x \\ x^4 = \dfrac{1}{16} \end{cases}$; $\quad \begin{cases} y = -3x \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{4} \\ x^2 = -\dfrac{1}{4} \quad \emptyset \end{array}\right. \end{cases}$;

$\begin{cases} y = -3x \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \notin D(\text{C}) \end{array}\right. \end{cases}$; $\quad \begin{cases} y = -3x \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; $\quad \boxed{(0{,}5; -1{,}5)}$.

10. $\begin{cases} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = 6 \\ \log_2(3x - y) + \log_2(x + y) = 2\log_2 4 \end{cases}$;

$D(\text{C}):\ \begin{cases} 3x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$.

Пусть $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = t \quad (t > 0)$, тогда первое уравнение примет вид: $3t^2 + 7t - 6 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3} \\ t = -3 \notin (0; \infty) \end{array}\right.$.

Так как $t = \dfrac{2}{3}$, то $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = \dfrac{2}{3}$, значит $\dfrac{2x - y}{2} = 1$.

Тогда система примет вид:

$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ \log_2(3x - y) + \log_2(x + y) = 2 \cdot 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ \log_2\big((3x - y)(x + y)\big) = 4 \end{cases}$;

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ \big(3x - (2x - 2)\big)(2x - 2 + x) = 2^4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ (x + 2)(3x - 2) = 16 \end{cases}.$$

Второе уравнение примет вид:

$$3x^2 + 4x - 20 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{10}{3} \end{array}\right. .$$

Получим $(2; 2)$ и $\left(-\dfrac{10}{3}; -\dfrac{26}{3}\right)$.

Пара $\left(-\dfrac{10}{3}; -\dfrac{26}{3}\right) \notin D(\text{C})$, так как $-\dfrac{10}{3} + \left(-\dfrac{26}{5}\right) < 0$, но по $D(\text{C})$ $\quad x + y > 0$.

Следовательно, $\boxed{(2; 2)}$.

Решите систему неравенств (11–15):

11. $$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64} \\ 2^{x^2 - 6x - 3,5} < 8\sqrt{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{2^x}{3^x} \cdot \dfrac{2^{-3x}}{3^{-2x}} > \dfrac{3^3}{2^6} \\ 2^{x^2 - 6x - 3,5} < 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{2^{-2x}}{3^{-x}} > \dfrac{3^3}{4^3} \\ 2^{x^2 - 6x - 3,5} < 2^{3,5} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x > \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \\ x^2 - 6x - 7 < 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x < 3 \\ -1 < x < 7 \end{cases}; \qquad \boxed{(-1; 3)}.$$

12. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4x+1} > 243 \\ \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-6x+9} \leqslant 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3^{4x-1} > 3^5 \\ \log_{\sqrt{2}} |x-3| \leqslant \log_{\sqrt{2}} 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x-1 > 5 \\ |x-3| \leqslant 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} 4x > 6 \\ x-3 \leqslant 1 \\ x-3 \geqslant -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 1,5 \\ x \leqslant 4 \\ x \geqslant 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$; $\boxed{[2;3) \cup (3;4]}$.

13. $\begin{cases} \dfrac{5^{4x+2}}{25^{x+1}} > 1 \\ 1 + \log_3(x-4) \leqslant \log_3(x+21) \end{cases}$;

$\begin{cases} 5^{4x+2} > 5^{2x+2} \\ x-4 > 0 \\ x+21 > 0 \\ \log_3 3(x-4) \leqslant \log_3(x+21) \end{cases}$; $\begin{cases} 4x+2 > 2x+2 \\ x > 4 \\ 3(x-4) \leqslant x+21 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 4 \\ 2x \leqslant 33 \end{cases}$; $\boxed{(4; 16{,}5]}$.

14. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}(12+x) + \log_5(3-x) < \log_{25}\dfrac{1}{4} \\ 0{,}3^{-x} \leqslant 0{,}3^{\sqrt{x+2}} \end{cases}$;

$\begin{cases} -\log_5(12+x) + \log_5(3-x) < \log_5\dfrac{1}{2} \\ -x \geqslant \sqrt{x+2} \end{cases}$;

$\begin{cases} \log_5(3-x) < \log_5\dfrac{1}{2} + \log_5(12+x) \\ x+2 \geqslant 0 \\ -x \geqslant 0 \\ x^2 \geqslant x+2 \end{cases}$;

$$\begin{cases} \log_5(3-x) < \log_5 \dfrac{12+x}{2} \\ -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ (x-2)(x+1) \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3-x>0 \\ 3-x < \dfrac{12+x}{2} \\ -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ (x-2)(x+1) \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 6-2x < 12+x \\ -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1 \\ x \geqslant 2 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x > -6 \\ -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x \leqslant -1 \end{cases}; \quad \boxed{(-2;-1]}.$$

15. $\begin{cases} 3^{\sqrt{2x^2+x-6}} > \sqrt{3}^{2x} \\ \log_{3x-1} 27 < 2 \end{cases};$

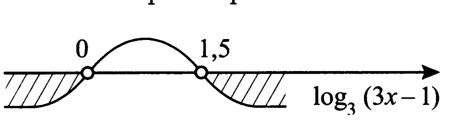
Так как $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, то $\begin{cases} 3^{\sqrt{2x^2+x-6}} > 3^x \\ \dfrac{1}{\log_{27}(3x-1)} < 2 \end{cases}.$

Систему можно решать, предварительно решив каждое из неравенств. А затем найти пересечение решений этих неравенств. Но можно решать постепенно, учитывая ограничения, связанные или с областью определения неравенств, или с областью изменения входящих в них выражений, или с решениями одного из неравенств.

$\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \log_a b;$

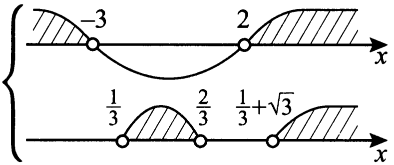
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+x-6} > x \\ \dfrac{1}{\frac{1}{3}\log_3(3x-1)} < 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2+x-6} > x \\ \dfrac{3-2\log_3(3x-1)}{\log_3(3x-1)} < 0 \end{cases}.$$

Решим второе неравенство относительно $\log_3(3x-1)$:



$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+x-6}>x\\ \left[\begin{array}{l}\log_3(3x-1)>1{,}5\\ \log_3(3x-1)<0\end{array}\right.\end{array}\right. ;\qquad \left\{\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+x-6}>x\\ \left[\begin{array}{l}3x-1>3^{1{,}5}\\ 0<3x-1<1\end{array}\right.\end{array}\right. ;$$

$$\left\{\begin{array}{l}2x^2+x-6>x^2\\ \left[\begin{array}{l}3x>1+3\sqrt{3}\\ 1<3x<2\end{array}\right.\end{array}\right. ;\qquad \left\{\begin{array}{l}x^2+x-6>0\\ \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1}{3}+\sqrt{3}\\ \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\end{array}\right. .$$



$$\left(\frac{1}{3}+\sqrt{3};\infty\right).$$

Тренировочная работа 13

Решите систему уравнений (1–10):

1. $\begin{cases} \dfrac{3^y}{27} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{0,5-x} \\ \left(\sqrt{2}\right)^{2x} = 2^{y-3,5x} \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \dfrac{3^{x-y}}{3^{xy}} = \dfrac{1}{3} \\ (2^x)^y = 32 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} (3x)^{y^2-7y+10} = 1 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{2x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200 \\ 25^{\sqrt[3]{2x}} + 4^{\sqrt{y}} = 689 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} (3x)^{2y} = 3^{12} \\ 2y - \log_3 3x = 1 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} (2x+3y) \cdot 3^{3y-2x} = \dfrac{5}{27} \\ 3\log_5(2x+3y) = 2x - 3y \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 4 \\ x^{y^2+2} = 64 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} \log_3^2 y + \log_3 x \cdot \log_3 y = 2\log_3^2 x \\ 9x^2y - xy^2 = 1 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} \log_3\left(3 - 6xy + 8x^2\right) = \log_3\left(3 - y^2\right) \\ \log_x y - \log_y(2x) + 1 = 0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^{\log_2 y} + 3y^{\log_2 x} = 16 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases}$.

Решите систему неравенств (11–15):

11. $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x} \cdot \left(\dfrac{27}{25}\right)^{-2x} < \dfrac{125}{729} \\ 3^{4x^2-12x-3,5} < 27\sqrt{3} \end{cases};$

12. $\begin{cases} 9^{x^2-3} < \dfrac{1}{27} \\ \log_9 \left(1-x^2\right)^2 \leqslant 4 \end{cases};$

13. $\begin{cases} \dfrac{2^{x+7}}{8^x} > 4 \\ \log_{0,5}(16-x) \leqslant \log_{0,5}(2-x) - 1 \end{cases};$

14. $\begin{cases} \log_5(21-x) + \log_{0,2}(x-1) \geqslant \log_{\sqrt{5}} 3 \\ 0{,}2^{\sqrt{2x+3}} < 5^{-x} \end{cases};$

15. $\begin{cases} 0{,}5^{\sqrt{2x^2+5x-3}} \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^{-2x-2} \\ \log_{3x-2} 28 \geqslant 2 \end{cases}.$

Примечание. Проверяя свое решение и рассматривая предложенные решения тренировочной работы 13, обратите внимание на равносильность переходов от одной системы к другой (особенно в системах неравенств 11–15). Важно очень хорошо разобраться, в чем причина равносильности того или иного перехода, так как в приведенных решениях специальных поясняющих комментариев нет.

Решение тренировочной работы 13

Решите систему уравнений (1–10):

1. $\begin{cases} \dfrac{3^y}{27} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{0,5-x} \\ \left(\sqrt{2}\right)^{2x} = 2^{y-3,5x} \end{cases};$

$\begin{cases} 3^y \cdot 3^{-3} = 3^{-2(0,5-x)} \\ \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2x} = 2^{y-3,5x} \end{cases};\quad \begin{cases} 3^{y-3} = 3^{-1+2x} \\ 2^x = 2^{y-3,5x} \end{cases};$

$\begin{cases} y-3 = -1+2x \\ x = y-3,5x \end{cases};\quad \begin{cases} y-2x = 2 \\ y = 4,5x \end{cases};$

$\begin{cases} 4,5x-2x = 2 \\ y = 4,5x \end{cases};\quad \begin{cases} 2,5x = 2 \\ y = 4,5x \end{cases};$

$\begin{cases} x = 0,8 \\ y = 4,5 \cdot 0,8 \end{cases};\quad \begin{cases} x = 0,8 \\ y = 3,6 \end{cases};\quad \boxed{(0,8; 3,6)}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{3^{x-y}}{3^{xy}} = \dfrac{1}{3} \\ (2^x)^y = 32 \end{cases};$

$\begin{cases} 3 \cdot 3^{x-y} = 3^{xy} \\ 2^{xy} = 2^5 \end{cases};\quad \begin{cases} 3^{x-y+1} = 3^{xy} \\ xy = 5 \end{cases};$

$\begin{cases} x-y+1 = xy \\ xy = 5 \end{cases};\quad \begin{cases} x-y+1 = 5 \\ xy = 5 \end{cases};$

$\begin{cases} x = 4+y \\ y(4+y) = 5 \end{cases};\quad \begin{cases} x = 4+y \\ y^2+4y-5 = 0 \end{cases};$

$\begin{cases} x = 4+y \\ \left[\begin{array}{l} y = -5 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{cases};\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -5 \\ x = -1 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \boxed{(5; 1); (-1; -5)}.$

3. $\begin{cases} (3x)^{y^2-7y+10}=1 \\ 3x+y=8 \end{cases}$;

а) $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ (-1)^{81-63+10}=1 \\ y=9 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ (-1)^{28}=1 \\ y=9 \end{cases}$; $\left(-\dfrac{1}{3};9\right)$.

б) $\begin{cases} (3x)^{y^2-7y+10}=(3x)^0 \\ 3x+y=8 \end{cases}$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2-7y+10=0 \\ 3x>0 \\ 3x+y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x=1 \\ 3x+y=8 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=5 \end{array}\right. \\ x>0 \\ 3x+y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=7 \end{cases} \end{array}\right. . \quad \begin{array}{l} 1.\ \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}; \\ 2.\ \begin{cases} y=5 \\ x=1 \end{cases}; \\ 3.\ \begin{cases} y=7 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{cases}. \end{array}$$

$$\boxed{\left\{(2;2);(1;5);\left(\frac{1}{3};7\right);\left(-\frac{1}{3};9\right)\right\}}.$$

4. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{2x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200 \\ 25^{\sqrt[3]{2x}}+4^{\sqrt{y}}=689 \end{cases}$.

Пусть $5^{\sqrt[3]{2x}}=t \quad (t>0)$, $\ 2^{\sqrt{y}}=z \quad (z>0)$.

Тогда $\begin{cases} tz=200 \\ t^2+z^2=689 \end{cases} \Big| 2$; $\begin{cases} 2tz=400 \\ t^2+z^2=689 \end{cases}$ $\pm$

$$\begin{cases} (t+z)^2=1089 \\ (t-z)^2=289 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t+z=33 \\ t+z=-33 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t-z=17 \\ t-z=-17 \end{array}\right. \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} t+z=33 \\ t-z=17 \end{cases}$ $\pm$ $\begin{cases} t=25 \\ z=8 \end{cases}$; $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{2x}}=5^2 \\ 2^{\sqrt{y}}=2^3 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt[3]{2x}=2 \\ \sqrt{y}=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x=8 \\ y=9 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} t+z=33 \\ t-z=-17 \end{cases} \pm \quad \begin{cases} t=8 \\ z=25 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5^{\sqrt[3]{2x}}=8 \\ 2^{\sqrt{y}}=25 \end{cases};$

$\begin{cases} \sqrt[3]{2x}=\log_5 8 \\ \sqrt{y}=\log_2 25 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x=(3\log_5 2)^3 \\ y=(2\log_2 5)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=13{,}5\log_5^3 2 \\ y=4\log_2^2 5 \end{cases}.$

в) $\begin{cases} t+z=-33 \\ t-z=17 \end{cases}; \quad \begin{cases} t=-8 \\ z=-25 \end{cases} \quad \varnothing.$

г) $\begin{cases} t+z=-33 \\ t-z=-17 \end{cases}; \quad \begin{cases} t=-25 \\ z=-8 \end{cases} \quad \varnothing.$

$\boxed{(4;9);\ \left(13{,}5\log_5^3 2; 4\log_2^2 5\right)}.$

5. $\begin{cases} (3x)^{2y}=3^{12} \\ 2y-\log_3 3x=1 \end{cases};$

$\begin{cases} \log_3(3x)^{2y}=\log_3 3^{12} \\ 2y=1+\log_3(3x) \end{cases}; \quad \begin{cases} 2y\cdot\log_3(3x)=12 \\ 2y=1+\log_3 3x \end{cases};$

$(1+\log_3 3x)\log_3(3x)=12;$

$\log_3^2(3x)+\log_3(3x)-12=0;$

$\left[\begin{array}{l} \log_3(3x)=-4 \\ \log_3(3x)=3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 3x=3^{-4} \\ 3x=3^3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=3^{-5} \\ x=3^2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{243} \\ x=9 \end{array}\right..$

а) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(1-4) \\ x=\dfrac{1}{243} \end{cases}; \quad \left(\dfrac{1}{243}; -\dfrac{3}{2}\right).$

б) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(1+3) \\ x=9 \end{cases}; \quad (9;2).$

$\boxed{\left(\dfrac{1}{243}; -\dfrac{3}{2}\right); (9;2)}.$

6. $\begin{cases} (2x+3y)\cdot 3^{3y-2x} = \dfrac{5}{27} \\ 3\log_5(2x+3y) = 2x-3y \end{cases}$;

$$\begin{cases} (2x+3y)\cdot 3^{3y-2x} = \dfrac{5}{27} \\ \log_5(2x+3y) = \dfrac{1}{3}(2x-3y) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5^{\frac{2x-3y}{3}}\cdot 3^{3y-2x} = \dfrac{5}{27} \quad \Big| \cdot\dfrac{27}{5} \\ 2x+3y = 5^{\frac{2x-3y}{3}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5^{\frac{2x-3y}{3}-1}\cdot 3^{3y-2x+3} = 1 \\ 2x+3y = 5^{\frac{2x-3y}{3}} \end{cases}; \quad \begin{cases} \left(\sqrt[3]{5}\right)^{2x-3y-3}\cdot 3^{3y-2x+3} = 1 \\ 2x+3y = 5^{\frac{2x-3y}{3}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}\right)^{3y-2x+3} = 1 \\ 2x+3y = 5^{\frac{2x-3y}{3}} \end{cases}; \quad \begin{cases} 3y-2x+3 = 0 \\ 2x+3y = 5^{\frac{2x-3y}{3}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x-3y = 3 \\ 2x+3y = 5^{\frac{3}{3}} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x-3y = 3 \\ 2x+3y = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}; \quad \boxed{\left(2;\dfrac{1}{3}\right)}.$$

7. $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 4 \\ x^{y^2+2} = 64 \end{cases}$; $\qquad x \neq 1$

$$\begin{cases} \log_4 x^{2y^2-1} = \log_4 4 \\ \log_4 x^{y^2+2} = \log_4 64 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left(2y^2-1\right)\log_4 x = 1 \\ \left(y^2+2\right)\log_4 x = 3 \end{cases}; \quad \begin{matrix} \log_4 x \neq 0 \\ (x \neq 1) \end{matrix};$$

$$\begin{cases} 2y^2-1 = \dfrac{1}{\log_4 x} \\ \dfrac{1}{3}\left(y^2+2\right) = \dfrac{1}{\log_4 x} \end{cases}.$$

Значит $2y^2-1 = \dfrac{1}{3}\left(y^2+2\right)$; $\quad 6y^2-3 = y^2+2$; $\quad y^2 = 1$.

а) $\begin{cases} y=1 \\ (2\cdot 1^2-1)\cdot\log_4 x=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=1 \\ \log_4 x=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} y=-1 \\ \left(2\cdot(-1)^2-1\right)\cdot\log_4 x=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-1 \\ \log_4 x=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=-1 \\ x=4 \end{cases}$.

$\boxed{(4;1);(4;-1)}$.

8. $\begin{cases} \log_3^2 y+\log_3 x\cdot\log_3 y=2\log_3^2 x \\ 9x^2y-xy^2=1 \end{cases}$.

Пусть $\log_3 x=t$; $\log_3 y=z$.

Первое уравнение примет вид

$z^2+zt=2t^2$; $z^2+zt-2t^2=0$;

$z_{1,2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2+8t^2}}{2}=\dfrac{-t\pm 3t}{2}$; $\left[\begin{array}{l} z=t \\ z=-2t \end{array}\right.$.

а) $\begin{cases} \log_3 y=\log_3 x \\ 9x^2y-xy^2=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x \\ 9x^3-x^3=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=x \\ 8x^3=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x \\ 2x=1 \end{cases}$; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

б) $\begin{cases} \log_3=-2\log_3 x \\ 9x^2y-xy^2=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=x^{-2} \\ 9x^2\cdot x^{-2}-x\cdot x^{-4}=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} y=x^{-2} \\ x^{-3}=8 \end{cases}$; $\begin{cases} y=4 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$\boxed{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};4\right)}$.

9. $\begin{cases} \log_3\left(3-6xy+8x^2\right)=\log_3\left(3-y^2\right) \\ \log_x y-\log_y(2x)+1=0 \end{cases}$; $D(\mathrm{C}):\begin{cases} y^2<3 \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3-6xy+8x^2=3-y^2 \\ \log_x y-\log_y(2x)+1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2-6xy+8x^2=0 \\ \log_x y-\log_y(2x)+1=0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 4x \end{array}\right. \\ \log_x y - \log_y(2x) + 1 = 0 \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} y = 2x \\ \log_x y - \log_y(2x) + 1 = 0 \end{cases};$

$$\begin{cases} y = 2x \\ \log_x 2x - \log_{2x}(2x) + 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ \log_x 2x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2x \\ 2x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 1 \notin D(\mathrm{C}) \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

б) $\begin{cases} y = 4x \\ \log_x(4x) - \log_{4x}(2x) + 1 = 0 \end{cases};$

$$\begin{cases} y = 4x \\ \dfrac{\log_2(4x)}{\log_2 x} - \dfrac{\log_2(2x)}{\log_2(4x)} + 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = 4x \\ \dfrac{2 + \log_2 x}{\log_2 x} - \dfrac{1 + \log_2 x}{2 + \log_2 x} + 1 = 0 \end{cases}.$$

Пусть $\log_2 x = t;$ $\quad \dfrac{2+t}{t} - \dfrac{1+t}{2+t} + 1 = 0;$

$(2+t)^2 - t(1+t) + t(2+t) = 0;$

$t^2+5t+4=0;$ $\quad \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -4 \end{array}\right.;$ $\quad \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = -4 \end{array}\right.;$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{16} \end{array}\right..$

При $x = \dfrac{1}{2}$ $\quad y = 2 \notin D(\mathrm{C})$ $\quad (2^2 < 3)$.

При $x = \dfrac{1}{16}$ $\quad y = \dfrac{1}{4}$.

$\boxed{\left(\dfrac{1}{16}; \dfrac{1}{4}\right)}$.

10. $\begin{cases} x^{\log_2 y} + 3y^{\log_2 x} = 16 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases};$ $\qquad a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$$\begin{cases} y^{\log_2 x} + 3 \cdot y^{\log_2 x} = 16 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y^{\log_2 x} = 16 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y^{\log_2 x} = 4 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \log_2 y^{\log_2 x} = \log_2 4 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 y = 2 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases}.$$

Пусть $\log_2 y = t$; $\log_2 x = z$; $\begin{cases} t \cdot z = 2 \\ z - t = 1 \end{cases};$

$$\begin{cases} t(1+z) = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}; \quad \begin{cases} t^2 + t - 2 = 0 \\ z = 1 + z \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right. \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} t = 1 \\ z = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \log_2 y = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$

б) $\begin{cases} t = -2 \\ z = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \log_2 y = -2 \\ \log_2 x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

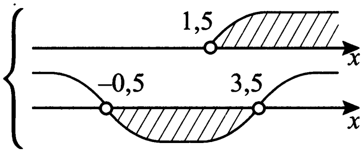
$\boxed{(4; 2); \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)}.$

Решите систему неравенств (11–15):

11. $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x} \cdot \left(\dfrac{27}{25}\right)^{-2x} < \dfrac{125}{729} \\ 3^{4x^2-12x-3,5} < 27\sqrt{3} \end{cases};$

$$\begin{cases} \dfrac{3^{2x}}{5^{2x}} \cdot \dfrac{3^{-6x}}{5^{-4x}} < \dfrac{5^3}{3^6} \quad \Big| \cdot \dfrac{3^6}{5^3} \\ 3^{4x^2-12x-3,5} < 3^{3+0,5} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{3^{-4x+6}}{5^{-2x+3}} < 1 \\ 4x^2 - 12x - 3,5 < 3,5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{9}{5}\right)^{-2x+3} < 1 \\ 4x^2 - 12x - 7 < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2x+3<0 \\ (2x+1)(2x-7)<0 \end{cases};$$

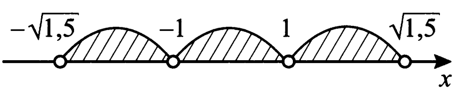


$\boxed{(1{,}5; 3{,}5)}$.

12. $$\begin{cases} 9^{x^2-3} < \dfrac{1}{27} \\ \log_9 \left(1-x^2\right)^2 \leqslant 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3^{2x^2-6} < 3^{-3} \\ \log_3 \left|1-x^2\right| \leqslant 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2-6<-3 \\ \left|1-x^2\right| \leqslant 3^4 \\ 1-x^2 \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x^2 < 3 \\ x^2 - 1 \leqslant 3^4 \\ x^2 - 1 \geqslant -3^4 \\ x^2 \neq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 < 1{,}5 \\ x^2 \leqslant 82 \\ x^2 \geqslant -80 \\ x^2 \neq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 < 1{,}5 \\ x^2 \neq 1 \end{cases};$$



$\boxed{\left(-\sqrt{1{,}5}; -1\right) \cup (-1; 1) \cup \left(1; \sqrt{1{,}5}\right)}$.

13. $$\begin{cases} \dfrac{2^{x+7}}{8^x} > 4 \\ \log_{0,5}(16-x) \leqslant \log_{0,5}(2-x) - 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{2^{x+7}}{2^{3x}} > 4 \\ \log_{0,5}(16-x) \leqslant \log_{0,5}(2-x) - \log_{0,5} 0{,}5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2^{x+7-3x} > 2^2 \\ \log_{0,5}(16-x) \leqslant \log_{0,5} 2(2-x) \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2x+7>2 \\ 16-x \geqslant 4-2x \\ 2-x>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x<2{,}5 \\ x \geqslant -12 \\ x<2 \end{cases}; \quad \boxed{[-12; 2)}.$$

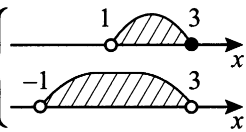
14. $\begin{cases} \log_5(21-x)+\log_{0,2}(x-1)\geqslant \log_{\sqrt{5}} 3 \\ 0{,}2^{\sqrt{2x+3}} < 5^{-x} \end{cases}$;

$\begin{cases} \log_5(21-x)-\log_5(x-1)\geqslant 2\log_5 3 \\ 5^{-\sqrt{2x+3}} < 5^{-x} \end{cases}$;

$\begin{cases} \log_5(21-x)\geqslant \log_5(x-1)+\log_5 9 \\ -\sqrt{2x+3} < -x \end{cases}$;

$\begin{cases} \log_5(21-x)\geqslant \log_5 9(x-1) \\ \sqrt{2x+3} > x \end{cases}$; $\begin{cases} 21-x\geqslant 9(x-1) \\ x-1>0 \\ \sqrt{2x+3} > x \end{cases}$;

$\begin{cases} 10x\leqslant 30 \\ x>1 \\ 2x+3>x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x\leqslant 3 \\ x>1 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases}$;



$\boxed{(1;3)}$.

15. $\begin{cases} 0{,}5^{\sqrt{2x^2+5x-3}}\leqslant \left(\sqrt{2}\right)^{-2x-2} \\ \log_{3x-2} 28\geqslant 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{-\sqrt{2x^2+5x-3}}\leqslant 2^{-x-1} \\ \log_{3x-2} 28\geqslant \log_{3x-2}(3x-2)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt{2x^2+5x-3}\geqslant x+1 \\ 3x-2>0 \\ \log_{3x-2} 28\geqslant \log_{3x-2}(3x-2)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x^2+5x-3\geqslant x^2+2x+1 \\ x>\dfrac{2}{3} \\ \log_{3x-2} 28\geqslant \log_{3x-2}(3x-2)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2+3x-4\geqslant 0 \\ x>\dfrac{2}{3} \\ \log_{3x-2} 28\geqslant \log_{3x-2}(3x-2)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>1 \\ \log_{3x-2} 28\geqslant \log_{3x-2}(3x-2)^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x>1 \\ 28\geqslant (3x-2)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>1 \\ 3x-2\leqslant 2\sqrt{7} \\ 3x-2\geqslant -2\sqrt{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x>1 \\ x\leqslant\frac{2+2\sqrt{7}}{3} \\ x\geqslant\frac{2-2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$; $\boxed{\left(1;\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\right]}$.

Тренировочные карточки 2 (на уравнения и неравенства)

Карточка 1

1. Решите уравнение $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$.

2. Решите неравенство $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x \leqslant 5 \cdot 36^x$.

3. Решите уравнение $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0$.

4. Решите уравнение $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$.

5. Решите неравенство

$$2\log_{25}\big((1+x)(3-x)\big) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1+x) > \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}\right).$$

6. Решите неравенство $\log_{x-1}\dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \geqslant 1$.

7. Сравните числа $\log_5 7$ и $\log_3 6$.

8. $\left\|\begin{matrix}\log_6 15 = a\\ \log_{12} 18 = b\end{matrix}\right| \log_{25} 24 = ?$

Карточка 2

1. Решите уравнение $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right)$.

2. Решите уравнение $3 \cdot 4^{-x} + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{2-x} = 6 \cdot 4^{1-x} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{1-x}$.

3. Решите уравнение $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$.

4. Решите уравнение $\log_{x^2} 81 + \log_{3x} 729 = 3$.

5. Решите уравнение $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

6. Решите неравенство $\left(x^2 - 4x + 4\right)^{x^2-x-6} \geqslant 1$.

7. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_5 11$.

8. $\left\|\begin{matrix}\log_3 20 = a\\ \lg 3 = b\end{matrix}\right| \log_5 30 = ?$

Карточка 3

1. Решите уравнение $9^{x-1} - 3^{x+1} + 3^{x-3} = 1$.

2. Решите уравнение $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$.

3. Решите неравенство $\dfrac{8 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

4. Решите уравнение $\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) \lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - \sqrt[x]{3}\right)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{x-1}{\log_3(9 - 3^x) - 3} \leqslant 1$.

6. Решите неравенство $\log_{\frac{3x}{x^2+1}}\left(x^2 - 2{,}5x + 1\right) \geqslant 0$.

7. Сравните числа $(3\log_{16} 1862 + \log_{16} 1866)$ и $\log_2 1863$.

8. $\left\| \begin{matrix} \log_5 15 = a \\ \log_{12} 24 = b \end{matrix} \right| \log_{125} 48 =?$

Карточка 4

1. Решите уравнение $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

2. Решите неравенство $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leqslant 0$.

3. Решите неравенство $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geqslant 9 - 3x$.

4. Решите уравнение $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 1250$.

5. Решите уравнение $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6$.

6. Решите неравенство $\log_{\frac{x+6}{3}}\left(\log_2 \dfrac{x-1}{x+2}\right) > 0$.

7. Вычислите $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

8. Вычислите $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$.

Карточка 5

1. Решите уравнение $3 \cdot 4^x + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \dfrac{1}{4} \cdot 9^{x+1}$.

2. Решите уравнение $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$.

3. Решите уравнение $x^x + 139 \cdot x^{-x} - 108 \cdot x^{-2x} = 32$.

4. Решите уравнение $\log_{2x} \dfrac{2}{x} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$.

5. Решите неравенство $5^{\log_5^2 x} < 10 - x^{\log_5 x}$.

6. Решите неравенство $\log_x \sqrt{3x+4} > 1$.

7. $\left\| \begin{matrix} \lg 5 = a \\ \lg 3 = b \end{matrix} \right| \log_{30} 8 = ?$

8. Вычислите, что больше: $\log_{189} 1323$ или $\log_{63} 147$.

Карточка 6

1. Решите уравнение $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

2. Решите уравнение $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

3. Решите неравенство $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1$.

4. Решите уравнение $\log_{3x} \dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$.

5. Решите уравнение

$\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \log_5 x + \log_3 x \log_5 x$.

6. Решите неравенство $x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \dfrac{1}{x}$.

7. $\left\| \begin{matrix} \log_7 12 = a \\ \log_{12} 24 = b \end{matrix} \right| \log_{54} 168 = ?$

8. Решите систему $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 40. \end{cases}$

Карточка 7

1. Решите уравнение $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

2. Решите уравнение $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$.

3. Решите уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

4. Решите уравнение $\sqrt{2\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$.

5. Решите уравнение $1 + \dfrac{\log_7(9-x)}{\log_7(4+x)} = \dfrac{2-\log_5 4}{\log_5(x+4)}$.

6. Решите неравенство $\dfrac{\log_2\big((x+1)(x-3)\big)}{\log_2(x-3)} < 1$.

7. $\lg 64 = a$; $\quad \log_{20}\sqrt[5]{125} = ?$

8. Решите систему $\begin{cases} \lg y^x = 2x\lg(2x-y) \\ \sqrt{x} - x = \sqrt{y} - y. \end{cases}$

Карточка 8

1. Решите уравнение $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8$.

2. Решите уравнение $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992$; $\quad x \in \mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство $\left(x^2 - 8x + 16\right)^{x-6} < 1$.

4. Решите уравнение $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - 2\log_3\sqrt{x} + \log_3^2 x = 3$.

5. Решите неравенство $\log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right) < 1$.

6. Решите уравнение
$(x+4) \cdot 3^{1-|x-1|} - x = (x+1)\left|3^x - 1\right| + 3^{x+1} + 1$.

7. $\left\| \begin{matrix} \log_{14} 7 = a \\ \log_{14} 5 = b \end{matrix} \right| \log_{35} 28 = ?$

8. Решите неравенство
$\log_{\frac{1}{3}}\log_5\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < \log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

Зачетные карточки 2
(на уравнения и неравенства)

Карточка 1

1. Решите уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$.

2. Решите неравенство $\log_{9x^2}\left(6 + 2x - x^2\right) \leqslant \frac{1}{2}$.

3. Решите уравнение $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

4. Решите уравнение $x^{\lg 81} - 9^{\lg x} = 6$.

5. Решите неравенство $\log_{0,5} \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} < 0$.

6. Решите неравенство $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \left(x^2+x+1\right)^3$.

7. Решите уравнение $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$.

8. $\log_{36} 8 = a$. $\log_{36} 9 = ?$

Карточка 2

1. Решите неравенство $\log_x \left(\log_2 \left(4^x - 6\right)\right) \leqslant 1$.

2. Решите уравнение $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$.

3. Решите неравенство $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} < 17$.

4. Решите уравнение
$3 \cdot 7^{\log_x 2 - 1} + 3^{\log_x 2} = 3^{\log_x 2 + 1} + 3^{\log_x 2 - 1}$.

5. Решите неравенство $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x} > 1$.

6. $\log_{14} 2 = a$. $\log_{49} 16 = ?$

7. $\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

8. Решите уравнение
$16^x + 625^x - 3 \cdot 100^x - 2 \cdot 4^x \left(4^x - 5^{2x}\right) + 2 \cdot 40^x = 0$.

Карточка 3

1. Вычислите $\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)$.
2. Решите неравенство $(2^x - 2\cdot 2^{-x})^{\log_9(2x+3)-\log_3 x} \geqslant 1$.
3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} - \log_x 9} + 4 = 0$.
4. Сравните числа: $\log_2 3$ и $\log_3 5$.
5. Решите неравенство $|x-2|^{x^2-2x-3} < 1$.
6. Решите уравнение $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \dfrac{10}{3}$.
7. Решите уравнение $2^{3x} - 8\cdot 2^{-3x} - 6\cdot 2^x + 12\cdot 2^{-x} = 1$.
8. $\left.\begin{array}{l}\log_5 4 = a\\ \log_5 3 = b\end{array}\right|\quad \log_{25} 12 = ?$

Карточка 4

1. $\left.\begin{array}{l}\lg 3 = a\\ \lg 2 = b\end{array}\right|\quad \log_5 6 = ?$
2. Решите неравенство $2x^{\log_{\frac{1}{2}} x} - x^{-\log_{\frac{1}{2}} x} < -1$.
3. Решите уравнение $4^{-x} - 3^{-x-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-x} - 2^{-2x-1}$.
4. Решите уравнение $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^x$.
5. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_3(x^2-7x+12)} < \dfrac{1}{\log_3 20}$.
6. Решите неравенство $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right) > -2$.
7. Решите уравнение $\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = x + \lg 25$.
8. Решите систему $\begin{cases}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[9]{x^{15}}\\ \left(\sqrt[5]{x}\right)^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt[6]{x^{-2}}.\end{cases}$

Карточка 5

1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1$.
3. Решите уравнение $81^x - 16^x - 2 \cdot 9^x (9^x - 4^x) + 36^x = 0$.
4. Решите систему $\begin{cases} \log_3 (x+2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x-2y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 + \frac{1}{2}y \end{cases}$.
5. Решите неравенство $\left(5 - x^2\right)^{4x+7} \leqslant 1$.
6. Решите неравенство $\log_2 \left(\log_3 \frac{x-1}{x+1}\right) < \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}\right)$.
7. Решите уравнение $\sqrt[x]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} - \sqrt[x]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} - \sqrt[x]{\frac{2}{3}} + \sqrt[x]{\frac{3}{2}} = 3$.
8. Сравните числа: $\log_3 5$ и $\log_{11} 15$.

Карточка 6

1. Решите неравенство $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x \leqslant 2$.
2. Решите уравнение $4^{\lg x + 1} - 6^{\lg x} - 3 \cdot 3^{\lg x^2} = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{(x-1)} (x+1) > 2$.
4. Решите неравенство
$$x^2 \cdot 2^{2x} + 9(x+2) \cdot 2^x + 8x^2 \leqslant (x+2) \cdot 2^{2x} + 9x^2 \cdot 2^x + 8x + 16.$$
5. Решите неравенство $|x-4|^{(2x-9)(2x-7)} \leqslant 1$.
6. Решите уравнение $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} + \sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x +$
$$+ \left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} - \sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x = 2^{x+1}.$$
7. Решите систему $\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0 \\ \lg (3x - y) + \lg (y + x) - 4 \lg 2 = 0. \end{cases}$
8. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} + 9 \log_4 \frac{x}{8} \geqslant 2x + \sqrt{14x - 20 - 2x^2} - 13.$$

Карточка 7

1. Решите неравенство $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \geqslant 1$.

2. Сравните числа: $\log_{20} 80$ и $\log_{80} 640$.

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{7}} \log_7\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < \log_7 \log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$$

4. Решите систему $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y}=12 \\ 64^{x+y}=4\sqrt{2}. \end{cases}$

5. Вычислите $\dfrac{\log_5 30}{\log_{30} 5}-\dfrac{\log_5 150}{\log_6 5}$.

6. Решите уравнение

$$\log_{1-2x}\left(6x^2-5x+1\right)=\log_{1-3x}\left(4x^2-4x+1\right)+2.$$

7. Решите неравенство

$$\log_{2-5x} 3+\frac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6\left(6x^2-6x+1\right)}.$$

8. Решите уравнение $\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^{\log_{x^2-4}\left(\log_3^3(5x-9)\right)}=2$.

Итоговые самостоятельные работы

Итоговая самостоятельная работа 1

Вычислите (1–2):

1. $3^{\frac{4}{\log_{\sqrt[4]{5}} 3}}$;

2. $243^{\log_9(\sqrt{3}-1)} \cdot 243^{\log_{81}(4+2\sqrt{3})} : 9^{5\log_{27}\sqrt[4]{8}}$.

Решите уравнения (3–6):

3. $\log_3 x \cdot \log_4 x = 9\log_4 3$;

4. $6 \cdot 3^{2x+3} - 5 \cdot 3^{\frac{x+3}{2}} = 3^{-x}$;

5. $\lg 5(x+2) + \lg(x+1) = 1$;

6. $\log_{2x}\left(4x^2 - 7x - 3\right) = 2 - \dfrac{1}{1+\log_2 x}$.

Решите неравенства (7— 9):

7. $\log_{0,25}\left(x^2 + 3x\right) \geqslant -1$;

8. $\left(4^{-x} - 10 \cdot 2^{-x-1} + 4\right)\log_2(3x+4) \geqslant 0$;

9. $0{,}5^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} \leqslant 0{,}125$.

Решите систему уравнений:

10. $\begin{cases} \log_{0,7}\left(7 - x^2 - y^2\right) = 0 \\ \lg(x-y) - \log_{0,1}(x+y) = \lg 8 + \log_{0,1} 4 \end{cases}$.

Итоговая самостоятельная работа 2

Вычислите (1–2):

1. $\log_2 \sqrt[3]{5} \cdot \log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 8$;

2. $\dfrac{\log_3 54}{\log_{18} 3} - \dfrac{\log_3 486}{\log_2 3}$.

Решите уравнения (3–5):

3. $\log_x (4 - 3^x) = 0$;

4. $\log_{12} \left(x + 1 + \dfrac{6}{x - 4}\right) = \log_{12} \sqrt{\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x-2}} + 1{,}5$;

5. $\log_6^2 x + \log_6 x + 14 = \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 + x^2$.

Решите неравенства (6–9):

6. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - x)} > -1$;

7. $\log_{\frac{\pi}{3}} \left(x^2 - 7x + 6\right) - \log_{\frac{\pi}{3}} \left(2x^2 - 7x + 5\right) \leqslant \log_{\frac{\pi}{3}} (x + 2)$;

8. $|1 - \log_3(x + 1)| + \log_{\frac{1}{9}} (x - 1) \leqslant 0$;

9. $5^{\log_2 x} + 12^{\log_2 x} \leqslant 13^{\log_2 x}$.

Решите систему уравнений:

10. $\begin{cases} \log_{0,9}(2y - 3x + 1) = 0 \\ 0{,}5 \log_2(3y - x - 1{,}5) + \log_4(8x) = 0 \end{cases}$.

Итоговая самостоятельная работа 3

Вычислите (1–2):

1. $\dfrac{\log_2 3}{\log_{24} 2} - \dfrac{\log_2 12}{\log_6 2}$;

2. $5^{\sqrt{\log_5 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 5}}$.

Решите уравнения (3–5):

3. $\log_{3x+1} 3 = \log_{x+1} \sqrt{3}$;

4. $\log_{x+5} \sin 2x = \log_{9+16x-4x^2} \sin 2x$;

5. $(x-1)^{\lg 4} + 8 = 6 \cdot 2^{\lg(x-1)}$.

Решите неравенства (6–9):

6. $\log_{x+2}\left(5x^2 + 9x + 4\right) \geqslant 2$;

7. $\log_5(4-2x)\log_{0,2}(2x+2) > \log_{0,2}\left(2x + 4 - 2x^2\right)$;

8. $\log_{x^2}(x+2) \leqslant \log_{\frac{8}{x^2}}(x+2)^2$;

9. $\log_{x^2+2x-2}\left(x^2 + 8x + 7\right) < \log_{x+1}(x+3)$.

Решите уравнение с двумя переменными:

10. $2^{x^2+1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-|x-y+1|} = 3$.

Итоговая самостоятельная работа 4

Вычислите (1–2):

1. Выразите $\log_{12} 54$ через $a = \log_6 8$.

2. Расположите в порядке возрастания
$\log_2 5$, $\log_3 8$ и $\log_5 32$.

Решите уравнения (3–5):

3. $4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} - 3 \cdot 3^{\lg x^2} = 0$;

4. $\left(1+\sqrt{3}\right)^x + 2^x \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 2$;

5. $\log_{3-2x}\left(12 - 17x + 6x^2\right) - \log_{4-3x}\left(9 - 12x + 4x^2\right) = 2$.

Решите неравенства (6–9):

6. $\left(2x^2 - 1\right)^{5x+4} \leqslant 1$;

7. $\log_{4x^2}\left(5 + 2x - x^2\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$;

8. $\log_{30-3\cdot 2^x}\left(2^x - 3\right)^2 \leqslant \log_{2^x-2}\left(2^x - 3\right)^2$;

9. $\dfrac{\log_2(2x+5)}{2x+1} < \dfrac{1,5}{x+1}$.

Решите систему уравнений:

10. $\begin{cases} x = 1 + 3\log_5 y \\ y^2 = y \cdot 5^x + 20 \cdot 5^{2x} \end{cases}$.

Итоговая самостоятельная работа 5

1. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{3^{\sqrt{x}}} = 3^{4-\sqrt{x}}$.

2. Найдите целое число, которое наиболее удалено от множества решений неравенства $\left((0{,}25)^{1-x} - 8\right)(2^x - 32) \geqslant 0$.

3. Укажите наибольшее целое значение x, при котором число 2^{x+1} составляет более 200% от числа $3^{x-2} + 1$.

4. Найдите число целых чисел, для которых
$\left(35 + 34x - x^2\right) \cdot \log_2(x - 5) > 0$.

5. Решите уравнение $5^{x^2-6x+11} = 16 + 6x - x^2$.

6. Найдите сумму всех целых решений неравенства
$\log_{22}(7 - x) > \log_{0,78}(x - 1) - 2$.

7. Решите уравнение $\log_{3-4x^2}\left(9 - 4x^4\right) = 2 + \dfrac{1}{\log_2\left(3 - 4x^2\right)}$.

8. $y = \log_{0,25} \dfrac{30 + \sqrt{4 + \log_4^2 x}}{2}$. $E(y) = ?$

9. $y = x^{\sqrt{3}}$; $x^{\sqrt{3}} \in [6; 10]$. При каких целых x это возможно?

10. Решите неравенство $12^{\log_2 x} + 5^{\log_2 x} \leqslant 13^{\log_2 x}$.

Итоговая самостоятельная работа 6

1. $\left(4-\sqrt{15}\right)^{2x^2-3x+1}+\left(4+\sqrt{15}\right)^{2x^2-3x-1}=\dfrac{8}{4+\sqrt{15}}.$

2. $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_7 x-2}=7.$

3. $4^{2x^2+0{,}5}+9^{x^6}\leqslant 3-\sin^2 x.$

4. $3^{\log_x 2}+4^{\log_x 3}\leqslant 20.$

5. $\left(4^{-x}+3\cdot 2^{x+1}\right)^{\log_7 x-\log_x 7-2}\leqslant 1.$

6. $\log_{2-2x^2}\left(2-x^2-x^4\right)\leqslant 2-\dfrac{1}{\log_{\frac{4}{3}}\left(2-2x^2\right)}.$

7. $\left(\sqrt{\log_2 x-2}+\sqrt{\log_2 x+1}\right)\left(\log_2 x-3\sqrt{\log_2 x-2}+2\right)\leqslant 9.$

8. Найдите отношение $\dfrac{x_0}{y_0}$, где $(x_0;y_0)$ — решение системы

$$\begin{cases} 1+\log_3(x+y)\log_2 3=2\log_4 7-\log_2 x\\ \log_2(xy+1)=2\log_4 y+\log_{\frac{1}{8}}(x-2y)^3\end{cases}.$$

9. $\begin{cases} 4^{\sqrt{9-x^2}}+2<9\cdot 3^{\sqrt{9-x^2}}\\ 3^{|x+2|}+3^{|x-1|}\geqslant 28\end{cases}.$

10. $\log_6\left(\log_{\sqrt[3]{3}}\left(18+6x-x^2\right)\right)=x^2-6x+10.$

3

Решения

Решение тренировочных карточек 1 (на свойства логарифмов)

Решение тренировочной карточки 1

1. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} = -\frac{1}{3}\log_3 9 = \boxed{-\frac{2}{3}}.$

2. $\log_{\sqrt[3]{b}} \sqrt[4]{b} = 3\log_b \sqrt[4]{b} = \frac{3}{4}\log_b b = \boxed{\frac{3}{4}}.$

3. $4^{\log_2 5} = 2^{\log_2 5} \cdot 2^{\log_2 5} = 5 \cdot 5 = \boxed{25}.$

4. $\left(\sqrt{5}\right)^{2+\log_5 9} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5 9} = 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}\log_5 9} =$

$= 5 \cdot 5^{\log_5 3} = \boxed{15}.$

5. $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 \left(\log_3 9\right)\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 2\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \boxed{1}.$

6. $6^{\ln e^2} = 6^2 = \boxed{36}.$

7. $(\lg 50 + \lg 2)^5 = (\lg (50 \cdot 2))^5 = (\lg 100)^5 = 2^5 = \boxed{32}.$

8. $\dfrac{1}{\log_{12} 2}+\log_{\frac{1}{2}} 3=\dfrac{1}{\frac{\log_2 2}{\log_2 12}}+\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_2 12-\log_2 3=\log_2 \dfrac{12}{3}=$

$=\log_2 4=\boxed{2}.$

9. $\dfrac{\ln 8}{\ln 16}+\log_{\sqrt{5}} 1=$

$\boxed{\log_{\sqrt{5}} 1=0}$

$=\dfrac{\ln 8}{\ln 16}=\dfrac{\ln 2^3}{\ln 2^4}=\dfrac{3\ln 2}{4\ln 2}=\boxed{\dfrac{3}{4}}.$

10. $\dfrac{\log_{25} 16}{\log_{\frac{1}{5}} 4}=\dfrac{\frac{2}{2}\log_5 4}{-\log_5 4}=\boxed{-1}.$

11. $\lg 9\cdot\log_9 100=\lg 9\cdot\dfrac{\log_{10} 100}{\log_{10} 9}=\dfrac{\lg 9}{\lg 9}\lg 100=\boxed{2}.$

12. $2\log_{\frac{1}{3}} 6-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400-3\log_3 \sqrt[3]{45}=$

$=\log_{\frac{1}{3}} 6^2-\log_{\frac{1}{3}} 400^{\frac{1}{2}}-\log_3\left(\sqrt[3]{45}\right)^3=$

$=\log_{\frac{1}{3}} 36-\log_{\frac{1}{3}} 20-\log_3 45=\log_{\frac{1}{3}} 36-\log_{\frac{1}{3}} 20+\log_{\frac{1}{3}} 45=$

$=\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{36\cdot 45}{20}=\log_{\frac{1}{3}} 81=\log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}=\boxed{-4}.$

13. $\log_2 17+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{17}{32}\right)^2=\log_2 17+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{17}{32}=$

$=\log_2 17-\log_2\dfrac{17}{32}=\log_2\dfrac{17\cdot 32}{17}=\log_2 32=\boxed{5}.$

14. $\log_{13}\operatorname{tg} x+\log_{13}\operatorname{ctg} x=$

$\boxed{\operatorname{tg} x>0}$

$=\log_{13}(\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x)=\log_{13} 1=\boxed{0}.$

15. $\log_{\sqrt[3]{\cos x}}\left(1-\sin^2 x\right)=\log_{\sqrt[3]{\cos x}}\cos^2 x=\dfrac{2}{\frac{1}{3}}\log_{\cos x}\cos x=\boxed{6}.$

Решение тренировочной карточки 2

1. $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[5]{2} = \dfrac{\frac{1}{5}}{-2} \log_2 2 = \boxed{-0{,}1}$.

2. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \log_a a = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

3. $9^{\log_3 \sqrt{2}} = 3^{2\log_3 \sqrt{2}} = 3^{\log_3 2} = \boxed{2}$.

4. $\left(\sqrt{7}\right)^{4+\log_7 4} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{4+\log_7 2^2} = 7^2 \cdot 7^{\log_7 2} = 49 \cdot 2 = \boxed{98}$.

5. $\log_7 \left(\log_{\frac{1}{2}} (\log_{25} 5)\right) = \log_7 \left(\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2} \log_5 5\right)\right) =$

$= \log_7 \left(\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2}\right) = \log_7 1 = \boxed{0}$.

6. $(\ln 5)^{3\log_8 1} = (\ln 5)^{3\cdot 0} = (\ln 5)^0 = \boxed{1}$.

7. $\left(\log_{15} 3 + \dfrac{1}{\log_5 15}\right)^{-7} = (\log_{15} 3 + \log_{15} 5)^{-7} = (\log_{15} 15)^{-7} =$

$= 1^{-7} = \boxed{1}$.

8. $\dfrac{1}{\log_{21} 3} - \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{7} = \log_3 21 - \dfrac{-1}{-1} \log_3 7 = \log_3 \dfrac{21}{7} = \log_3 3 = \boxed{1}$.

9. $\dfrac{\lg 27}{\lg 9} = \dfrac{3\lg 3}{2\lg 3} = \dfrac{3}{2} = \boxed{1{,}5}$.

10. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_9 16} = \dfrac{\frac{3}{-1}\log_3 2}{\log_3 4} = -3 \cdot \dfrac{\log_3 2}{2\log_3 2} = -\dfrac{3}{2} = \boxed{-1{,}5}$.

11. $\ln 15 \cdot \log_{225} e = \dfrac{\ln 15}{\ln 225} = \dfrac{\ln 15}{\ln 15^2} = \dfrac{\ln 15}{2\ln 15} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

12. $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 + 2\log_2 6 = -\log_2 3^4 + \frac{2}{3}\log_2 3^3 + \log_2 6^2 =$

$= \log_2 \dfrac{\left(3^{2/3}\right)^3 \cdot 6^2}{3^4} = \log_2 \dfrac{3^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{3^4} = \log_2 2^2 = \boxed{2}$.

13. $\log_5 75 + 3\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{3} = \log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \dfrac{75}{3} = \log_5 25 = \boxed{2}$.

14. $\log_{\sin 2x}(2\cos x) + \log_{\sin 2x}\sin x = \log_{\sin 2x}(2\cos x \cdot \sin x) =$

$= \log_{\sin 2x}\sin 2x = \boxed{1}$.

15. $\log_{\operatorname{tg} x}\cos x - \dfrac{1}{\log_{\sin x}\operatorname{tg} x} =$

$= \log_{\operatorname{tg} x}\cos x - \log_{\operatorname{tg} x}\sin x = \log_{\operatorname{tg} x}\operatorname{ctg} x = \boxed{-1}$.

Решение тренировочной карточки 3

1. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{125} = \dfrac{\frac{3}{4}\log_5 5}{-1} = \boxed{-\dfrac{3}{4}}$.

$$\boxed{\log_{p^n} k^m = \frac{m}{n}\log_p k \text{ при } \begin{cases} p > 0 \\ p \neq 1 \\ k > 0 \end{cases}}$$

2. $\log_{\sqrt[4]{a}} \sqrt[3]{a} = \log_{a^{\frac{1}{4}}} a^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} \log_a a = \boxed{\dfrac{4}{3}}$.

3. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3 2} = \left(3^{-2}\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{-2} = 2^{-2} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

4. $\left(\sqrt{2}\right)^{4+\log_2 25} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{4+2\log_2 5} = 2^2 \cdot 2^{\log_2 5} = 4 \cdot 5 = \boxed{20}$.

5. $3{,}4 \cdot 7^{4\ln 1} = 3{,}4 \cdot 7^0 = \boxed{3{,}4}$.

6. $(\lg 4 + \lg 25)^{-4} = (\lg(4 \cdot 25))^{-4} = 2^{-4} = \boxed{\dfrac{1}{16}}$.

7. $\log_4(\log_{25}(\log_2 32)) = \log_4(\log_{25} 5) = \log_4 \dfrac{1}{2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$.

8. $\dfrac{\lg 16}{\lg\sqrt{8}} = \dfrac{\lg 2^4}{\lg 2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{4\lg 2}{\frac{3}{2}\lg 2} = \dfrac{8}{3} = \boxed{2\dfrac{2}{3}}$.

9. $\dfrac{\log_{16} 25}{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{2}{2}\log_4 5}{\frac{\frac{1}{2}}{-1}\log_2 5} = -2\dfrac{\log_4 5}{\log_2 5} = -2\dfrac{\frac{1}{2}\log_2 5}{\log_2 5} = \boxed{-1}$.

10. $\lg 4 \cdot \log_2 100 = \lg 4 \dfrac{\lg 10^2}{\lg 2} = 2 \cdot \lg 2 \cdot \dfrac{2\lg 10}{\lg 2} = \boxed{4}$.

11. $\log_{\cos\frac{\pi}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8 = \log_{2^{-\frac{1}{2}}} 2^3 = \dfrac{3}{-\frac{1}{2}}\log_2 2 = \boxed{-6}$.

12. $\log_7\left(\cos^2 7x + \sin^2 7x\right) = \log_7 1 = \boxed{0}$.

13. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} = 6^{2\log_6 5} + 10^1 10^{-\lg 2} =$

$= \left(6^{\log_6 5}\right)^2 + 10\left(10^{\lg 2}\right)^{-1} = 25 + \dfrac{10}{2} = \boxed{30}.$

14. $-\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}\right) = -\log_2\left(\log_2 2^{\frac{1}{8}}\right) = -\log_2\dfrac{1}{8} = \boxed{3}.$

15. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2} =$

$= \left(\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_3 2} + 5^{2\log_5 2}\right)\cdot 7^{2\log_7 2} =$

$= \left(3^{1-2\log_3 2} + 5^{2\log_5 2}\right)\left(7^{\log_7 2}\right)^2 =$

$= \left(3\cdot\left(3^{\log_3 2}\right)^{-2} + \left(5^{\log_5 2}\right)^2\right)\cdot 2^2 = \left(\dfrac{3}{4} + 4\right)\cdot 4 = 3+16 = \boxed{19}.$

Решение тренировочной карточки 4

1. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{16} = \log_{2^{-1}} 2^{\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{-1} \log_2 2 = \boxed{-\dfrac{4}{3}}.$

2. $\log_{\sqrt{b}} \sqrt[7]{b} = \log_{b^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{1}{7}} = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}} \log_b b = \boxed{\dfrac{2}{7}}.$

3. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{-2}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{-2} = 3^{-2} = \boxed{\dfrac{1}{9}}.$

4. $(\sqrt{3})^{2+\log_3 49} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2+2\log_3 7} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 7} = 3 \cdot 7 = \boxed{21}.$

5. $e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}.$

6. $\log_8 \left(\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (\log_{32} 2)\right) = \log_{2^3} \left(\log_{5^{-\frac{1}{2}}} \left(\dfrac{1}{5} \log_2 2\right)\right) =$

$= \dfrac{1}{3} \log_2 \left(-\dfrac{1}{0{,}5} \log_5 \dfrac{1}{5}\right) =$ $\boxed{-\dfrac{1}{0{,}5} \log_5 \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{0{,}5} \log_5 5 = 2}$

$= \dfrac{1}{3} \log_2 2 = \boxed{\dfrac{1}{3}}.$

7. $(\lg 8 + \lg 125)^{-3} = (\lg (8 \cdot 125))^{-3} = \left(\lg 10^3\right)^{-3} = 3^{-3} = \boxed{\dfrac{1}{27}}.$

8. $\dfrac{\ln 27}{\ln 9} = \dfrac{\ln 3^3}{\ln 3^2} = \dfrac{3 \ln 3}{2 \ln 3} = \boxed{\dfrac{3}{2}}.$

9. $\ln 12 \cdot \log_{144} e^3 = \ln 12 \dfrac{\ln e^3}{\ln 144} = \ln 12 \cdot \dfrac{3 \ln e}{2 \ln 12} = \boxed{\dfrac{3}{2}}.$

10. $\dfrac{\log_9 \sqrt{5}}{\log_{\frac{1}{27}} 125} = \dfrac{\frac{\frac{1}{2}}{2} \log_3 5}{\frac{3}{-3} \log_3 5} = \boxed{-\dfrac{1}{4}}.$

11. $\log_{\frac{3}{4}} \cos \dfrac{\pi}{6} = \log_{\frac{3}{4}} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \log_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}.$

12. $\lg \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,22^\circ 30'}{1-\mathrm{tg}^2\,22^\circ 30'} = \lg \mathrm{tg}\,45^\circ = \lg 1 = \boxed{0}$

(так как $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$).

13. $-\log_3\left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right) = -\log_3\left(\log_3 \sqrt[9]{3}\right) = -\log_3 \dfrac{1}{9} = \boxed{2}$.

14. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} = 81^{\log_3 5} + 27^{\log_3 6} + 3^{4\log_9 7} =$
$= \left(3^4\right)^{\log_3 5} + 3^{3\log_3 6} + 3^{\frac{4}{2}\log_3 7} = 5^4 + 6^3 + 7^2 =$
$= 625 + 216 + 49 = \boxed{890}$.

15. $\log_2\left(\log_a \sqrt[3]{a^2} + \log_a \sqrt[3]{a}\right) = \log_2\left(\log_a a^{\frac{2}{3}} + \log_a a^{\frac{1}{3}}\right) =$
$= \log_2\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \log_2 1 = \boxed{0}$.

Решение тренировочной карточки 5

1. $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{2} = \log_{2^{-3}} 2^{\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{-3} \log_2 2 = \boxed{-\dfrac{1}{15}}.$

2. $\log_{\sqrt[4]{a}} \sqrt{a^3} = \log_{a^{\frac{1}{4}}} a^{\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} \log_a a = \boxed{6}.$

3. $9^{\log_3 0{,}5} = 3^{2\log_3 \frac{1}{2}} = \left(3^{\log_3 \frac{1}{2}}\right)^2 = \boxed{\dfrac{1}{4}}.$

4. $\left(\sqrt{3}\right)^{2+\log_3 16} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2+2\log_3 4} =$

$= 3^{1+\log_3 4} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 4} = \boxed{3 \cdot 4 = 12}.$

5. $(\lg 0{,}2 + \lg 0{,}5)^{20} = (\lg(0{,}2 \cdot 0{,}5))^{20} = (\lg 0{,}1)^{20} = (-1)^{20} = \boxed{1}.$

6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 49}{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}} = \dfrac{\frac{2}{-1} \log_3 7}{\frac{-1}{\frac{1}{2}} \log_3 7} = \boxed{1}.$

7. $2^{\frac{1}{3}\ln e^3} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{3\ln e} = \left(2^1\right)^1 = \boxed{2}.$

8. $2\log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{0{,}2} 3 - \dfrac{1}{2} \log_5 \dfrac{1}{225} = -2\log_5 5 - \log_5 3 - \log_5 \dfrac{1}{15} =$

$= -2 - \log_5 3 + \log_5 15 = -2 + \log_5 \dfrac{15}{3} = -2 + \log_5 5 =$

$= -2 + 1 = \boxed{-1}.$

9. $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{15} + \log_{25} 4 - \dfrac{1}{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{5}} = \log_5 15 + \log_5 2 - \log_{\sqrt{5}} \sqrt{6} =$

$= \log_5 15 + \log_5 2 - \log_5 6 = \log_5 \dfrac{15 \cdot 2}{6} = \log_5 5 = \boxed{1}.$

10. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{32} \cdot \log_4 9 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \log_3 32 \cdot \log_2 3 = \dfrac{5\log_3 2}{\log_3 2} = \boxed{5}.$

11. $\dfrac{\log_3 \sqrt{5}}{\log_9 5} = \dfrac{\frac{1}{2}\log_3 5}{\frac{1}{2}\log_3 5} = \boxed{1}.$

12. $\log_8 12 + 0{,}5\log_{\frac{1}{8}} 9 = \dfrac{1}{3}\log_2 12 + 0{,}5 \cdot \dfrac{2}{-3}\log_2 3 =$

$= \dfrac{1}{3}\left(\log_2 12 - \log_2 3\right) = \boxed{\dfrac{2}{3}}.$

13. $\log_{\sin 2x}\left[(\sin x + \cos x)^2 - 1\right]^2 = \log_{\sin 2x}(\sin 2x)^2 =$

$= 2\log_{\sin 2x}\sin 2x = \boxed{2}.$

14. $\log_3(3\operatorname{tg} x) + \log_9(\operatorname{ctg} x)^2 =$

$= \log_3(3\operatorname{tg} x) + \log_3 \operatorname{ctg} x = \log_3(3\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x) = \log_3 3 = \boxed{1}.$

15. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}} = \sqrt{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}} =$

$= \sqrt{5^{2\log_5 6} + 7^{2\log_7 8}} = \sqrt{\left(5^{\log_5 6}\right)^2 + \left(7^{\log_7 8}\right)^2} =$

$= \sqrt{6^2 + 8^2} = \boxed{10}.$

Решение тренировочной карточки 6

1. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8.$

$\log_6 7 \cdot \log_7 8 = \log_6 7^{\log_7 8} = \log_6 8;$

$\log_5 6 \cdot \log_6 8 = \log_5 6^{\log_6 8} = \log_5 8;$

$\log_4 5 \cdot \log_5 8 = \log_4 5^{\log_5 8} = \log_4 8 = \dfrac{3}{2}\log_2 2 = \boxed{\dfrac{3}{2}}.$

Найти решение проще, если знать, что

$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c p \cdot \log_p k = \log_a k.$

2. $\log_{\frac{1}{49}} \sqrt[3]{7} = \dfrac{\frac{1}{3}}{-2}\log_7 7 = \boxed{-\dfrac{1}{6}}.$

3. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[5]{a^2} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}\log_a a = \boxed{\dfrac{4}{5}}.$

4. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4+\log_3 625} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{4+4\log_3 5} =$

$= 3^{1+\log_3 5} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 5} = 3 \cdot 5 = \boxed{15}.$

5. $(\ln \sqrt[5]{e} + 4\ln \sqrt[5]{e})^{25} = \left(\dfrac{1}{5}\ln e + \dfrac{4}{5}\ln e\right)^{25} = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}\right)^{25} =$

$= 1^{25} = \boxed{1}.$

6. $\dfrac{\log_{49} \sqrt[3]{3}}{\log_{\frac{1}{7}} 27} = \dfrac{\frac{\frac{1}{3}}{2}\log_7 3}{\frac{3}{-1}\log_7 3} = \boxed{-\dfrac{1}{18}}.$

7. $(0{,}2)^{\frac{1}{3}\lg 0{,}001} = \left(5^{-1}\right)^{\frac{-3}{3}\lg 10} = \left(5^{-1}\right)^{-1} = \boxed{5}.$

8. $\log_3 21 - \dfrac{1}{\log_{49} 9} = \log_3 21 - \log_3 7 = \log_3 \dfrac{21}{7} = \log_3 3 = \boxed{1}.$

9. $\log_{\sqrt{2}} \cos^3 \dfrac{\pi}{3} = \log_{\sqrt{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{-3}{\frac{1}{2}}\log_2 2 = \boxed{-6}.$

10. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\cos 47^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \cdot \sin 17^\circ) =$

$$= \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\cos(47^\circ - 17^\circ)) = \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \cos 30^\circ = \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1}.$$

11. $\log_{\sqrt[3]{5}} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} 25 = \dfrac{3}{\frac{1}{3}} \log_5 3 \cdot \dfrac{2}{\frac{1}{2}} \log_3 5 = 36 \dfrac{\log_5 3}{\log_5 3} = \boxed{36}.$

12. $100^{\lg 2} = \left(10^2\right)^{\lg 2} = \left(10^{\lg 2}\right)^2 = \boxed{4}.$

13. $\log_3 5 \cdot \dfrac{\log_{25} 9}{\log_{5,1} 5{,}1} = \log_3 5 \cdot \dfrac{\log_5 3}{1} = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 5} = \boxed{1}.$

14. $\dfrac{\ln 7}{\ln \sqrt[3]{49}} = \dfrac{\ln 7}{\frac{2}{3} \ln 7} = \boxed{\dfrac{3}{2}}.$

15. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}.$

$$27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49} = \left(3^3\right)^{\log_3 2} + 5^{\log_5 7} = 2^3 + 7 = 15;$$

$$81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9} = 9^{2\log_9 4} - 2^{3\log_2 3} = 16 - 27 = -11;$$

$$3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3} = 3 + 5^{\log_5 4} \cdot 3 = 3 + 4 \cdot 3 = 15;$$

$$\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{15} = \frac{15 \cdot (-11)}{15} = \boxed{-11}.$$

Решение тренировочной карточки 7

1. $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{3} = \dfrac{\frac{1}{4}}{-2} \log_3 3 = \boxed{-\dfrac{1}{8}}$.

2. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[5]{x} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} \log_x x = \boxed{\dfrac{2}{5}}$.

3. $49^{\log_7 \sqrt[4]{3}} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{4}\log_7 3} = \left(7^{\log_7 3}\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{3}}$.

4. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\log_5 27} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{3+3\log_5 3} = 5^{1+\log_5 3} = 5 \cdot 5^{\log_5 3} =$

$= 5 \cdot 3 = \boxed{15}$.

5. $7^{0{,}2 \lg 10^5} = 7^{0{,}2 \cdot 5 \cdot \lg 10} = \left(7^1\right)^1 = \boxed{7}$.

6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{5}} 36}{\log_{25} \frac{1}{\sqrt{6}}} = \dfrac{\frac{2}{-1}\log_5 6}{\frac{-\frac{1}{2}}{2}\log_5 6} = \boxed{8}$.

7. $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8 + 2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \log_3 \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{-1} \log_3 2 - 2\log_3 6 + \log_3 24 =$

$= -\log_3 2 - \log_3 6^2 + \log_3 24 = \log_3 \dfrac{24}{2 \cdot 36} = \log_3 \dfrac{1}{3} = \boxed{-1}$.

8. $\lg 9 \cdot \log_3 0{,}1 = 2\lg 3\,(-\log_3 10) = -2 \cdot \dfrac{\lg 3}{\lg 3} = \boxed{-2}$.

9. $\log_4 0{,}01 - \log_{\sqrt{0{,}5}} \sqrt{5} = \log_4 0{,}01 - \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \log_2 5 =$

$= \dfrac{-2}{2}\log_2 10 + \log_2 5 = \log_2 \dfrac{5}{10} = \boxed{-1}$.

10. $\ln\left[(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x\right] =$

$= \ln\left(\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin 2x\right) =$

$= \ln\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \boxed{0}$.

11. $\log_8 \sin^2 \dfrac{\pi}{6} = \log_8 \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{-2}{3}\log_2 2 = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$.

12. $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27 =$

$$= 2\log_3 7 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_7 5 \cdot \frac{3}{2}\log_5 3 = 6\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 3 =$$

$$= 6\log_3 7^{\log_7 5} \cdot \log_5 3 = 6\log_3 5 \cdot \log_5 3 = 6 \cdot \log_3 5^{\log_5 3} = \boxed{6}.$$

13. $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2} = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 9}{\frac{1}{\log_2 4 + \log_2 9}} - \dfrac{2\log_2 3}{\frac{1}{\log_2 8 + \log_2 9}} =$

$$\frac{1 + 2\log_2 3}{\frac{1}{2+2\log_2 3}} - \frac{2\log_2 3}{\frac{1}{3+2\log_2 3}} = \qquad \boxed{\log_2 3 = t}$$

$$= (1+2t)\cdot 2(1+t) - 2t(3+2t) = 2 + 4t^2 + 6t - 6t - 4t^2 = \boxed{2}.$$

14. $\log_{16}\left(\log_{\frac{1}{9}}(\log_{27} 3)\right) = \dfrac{1}{4}\log_2\left(\dfrac{1}{-2}\log_3\left(\dfrac{1}{3}\log_3 3\right)\right) =$

$$= \frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}}.$$

15. $\log_{16}(3-\sqrt{5}) + \dfrac{1}{2}\log_2\sqrt{3+\sqrt{5}} =$

$$= \frac{1}{4}\log_2(3-\sqrt{5}) + \frac{1}{4}\log_2(3+\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log_2(3-\sqrt{5}) + \log_2(3+\sqrt{5})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\log_2\left((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\right) = \frac{1}{4}\log_2(9-5) = \frac{1}{4}\log_2 4 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Решение тренировочной карточки 8

1. $\log_{25}\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2}\log_5 5 = \boxed{-\dfrac{1}{4}}.$

2. $\log_{\sqrt[4]{x}}\sqrt{x^3} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}\log_x x = \boxed{6}.$

3. $16^{\log_2 3} = 2^{4\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = \boxed{81}.$

4. $\left(\sqrt{2}\right)^{4+\log_2 25} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{4+2\log_2 5} = 2^{2+\log_2 5} = 4\cdot 5 = \boxed{20}.$

5. $\dfrac{\log_{16} 0{,}2}{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\frac{-1}{4}\log_2 5}{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\log_2 5} = \boxed{-\dfrac{3}{8}}.$

6. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\sin 71^\circ\cdot\cos 11^\circ - \sin 11^\circ\cdot\cos 71^\circ) = \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sin 60^\circ =$

$= \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1}.$

7. $\log_{\sqrt[7]{2}}\sin^4\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\frac{1}{7}}\log_2\sin^4\dfrac{\pi}{4} = 7\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 =$

$= 7\log_2\dfrac{1}{4} = \boxed{-14}.$

8. $\lg 5\cdot\log_{25} 0{,}1 = \lg 5\cdot\dfrac{-1}{2}\log_5 10 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\lg 5}{\lg 5} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}.$

9. $6^{\frac{\log_3 5}{1+\log_3 2}} = 6^{\frac{\log_3 5}{\log_3 6}} = 6^{\log_3 5\cdot\log_6 3} = \left(6^{\log_6 3}\right)^{\log_3 5} = 3^{\log_3 5} = \boxed{5}.$

10. $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[3]{2}\cdot\log_4 27 = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}(\log_3 2)\cdot\dfrac{3}{2}\log_2 3 = \dfrac{\log_3 2}{\log_3 2} = \boxed{1}.$

11. $(\lg 200 + \lg 0{,}5)^{-2} = (\lg(200\cdot 0{,}5))^{-2} =$

$= \left(\lg 10^2\right)^{-2} = 2^{-2} = \boxed{\dfrac{1}{4}}.$

12. $\dfrac{\ln\sqrt[3]{3}}{\ln\sqrt[4]{27}} = \dfrac{\frac{1}{3}\ln 3}{\frac{3}{4}\ln 3} = \boxed{\dfrac{4}{9}}.$

13. $\log_{27}\left(\log_{\frac{1}{8}}(\log_4 2)\right) = \log_{27}\left(\dfrac{1}{-3}\log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 2\right)\right) =$

$= \dfrac{1}{3}\log_3\dfrac{1}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{3}}.$

14. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409}\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6}\right) =$

$= \dfrac{\left(9^2\right)^{\log_9 5} + 3^{3\log_3\sqrt{6}}}{409}\cdot\left(\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_7 25} - 5^{3\cdot\frac{1}{2}\log_5 6}\right) =$

$= \dfrac{5^2 + \left(\sqrt{6}\right)^3}{409}\cdot\left(25 - \left(\sqrt{6}\right)^3\right) = \dfrac{5^4 - 6^3}{409} = \dfrac{625 - 216}{409} = \boxed{1}.$

15. $\log_3\left(2+\sqrt{3}\right) + \dfrac{1}{\log_{(2-\sqrt{3})} 3} =$

$= \log_3\left(2+\sqrt{3}\right) + \log_3\left(2-\sqrt{3}\right) = \log_3\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right) =$

$= \log_3(4-3) = \log_3 1 = \boxed{0}.$

Решение тренировочных карточек 2 (на уравнения и неравенства)

Решение тренировочной карточки 1

1. $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$

$3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$ Пусть $3^x = t$ $(t > 0)$.

Тогда $3t^2 - 10t + 3 = 0;$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 3^x = \dfrac{1}{3}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1$; $x = -1$.

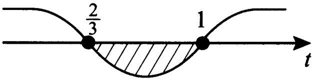
2. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x \leqslant 5 \cdot 36^x.$

Поделим обе части неравенства на 36^x:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \leqslant 5.$$

Пусть $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x = t$ $(t > 0)$. Тогда $3t^2 - 5t + 2 \leqslant 0;$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{4}{9}\right)^x \leqslant 1 \\ \left(\dfrac{4}{9}\right)^x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

3. $\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0.$

$2^{\frac{6}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0.$ Пусть $2^{\frac{3}{x}}=t\ \ (t>0)$.

Тогда $t^2-8t+12=0;\quad \left[\begin{array}{l} t=6\\ t=2;\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{3}{x}}=2\\ 2^{\frac{3}{x}}=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ \dfrac{3}{x}=\log_2 6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x=\log_6 8.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=3;\ \ x=\log_6 8$.

4. $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4.$

Воспользуемся тем, что $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Имеем: $\dfrac{\log_3 9+\log_3 x^2}{\log_3 x}\cdot\log_3^2 x=4;\qquad D(\text{У})\colon\ \begin{cases} x>0\\ x\neq 1.\end{cases}$

Следовательно, $2\,(1+\log_3 x)\log_3 x=4$. Пусть $\log_3 x=t$,

тогда $\begin{cases} t^2+t-2=0\\ t\neq 0;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l} \log_3 x=-2\\ \log_3 x=1;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{9}\\ x=3\end{array}\right. \in D(\text{У}).$

Ответ: $x=\dfrac{1}{9};\ \ x=3.$

5. $2\log_{25}\big((1+x)\,(3-x)\big)-\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1+x)>\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{2}\right).$

$$\frac{2}{2}\log_5\big((1+x)\,(3-x)\big)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\log_5(1+x)>\log_5 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \log_5(1+x)+\log_5(3-x)-\log_5(1+x)>\log_5 2\\ (1+x)\,(3-x)>0\\ 1+x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

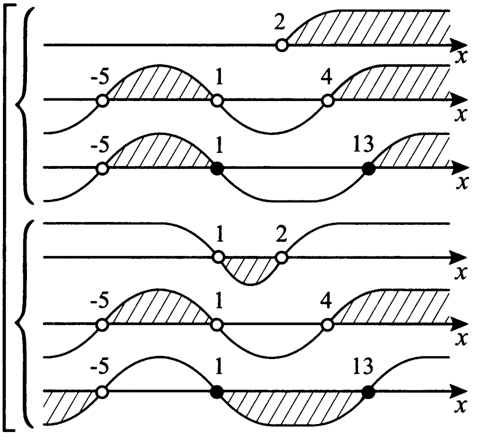
$$\Leftrightarrow\begin{cases} \log_5(3-x)>\log_5 2\\ 3-x>0\\ 1+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3-x>2\\ 3-x>0\\ 1+x>0.\end{cases}$$

Ответ: $(-1;1)$.

6. $\log_{x-1} \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \geqslant 1.$

$$\log_{(x-1)} \frac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \geqslant \log_{(x-1)}(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1 \\ \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5}>0 \\ \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \geqslant x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<1 \\ x-1>0 \\ \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5}>0 \\ \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \leqslant x-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ \dfrac{(x-1)(x-4)}{x+5}>0 \\ \dfrac{(x-1)(x-13)}{x+5} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ x>1 \\ \dfrac{(x-1)(x-4)}{x+5}>0 \\ \dfrac{(x-1)(x-13)}{x+5} \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $[13; \infty)$.

7. Сравнить числа $\log_5 7$ и $\log_3 6$.

$\log_3 6 - \log_5 7 = \log_3 2 + 1 - \log_5 7.$

Поскольку $\log_t \dfrac{m+n}{2} > \dfrac{1}{2}(\log_t m + \log_t n)$,

имеем $\log_3 2 = \log_3 \dfrac{3+1}{2} > \dfrac{1}{2}(\log_3 3 + \log_3 1)$, и $\log_3 2 + 1 - \log_5 7 > \dfrac{1}{2}(\log_3 3 + \log_3 1) + 1 - \log_5 7 =$

$= 1{,}5 - \log_5 7 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 7 = \log_5 \dfrac{\sqrt{125}}{7} > \log_5 \dfrac{11}{7} > 0,$

т. е. $\log_3 6 > \log_5 7$, что и требовалось доказать.

8. $\left\|\begin{matrix}\log_6 15 = a\\ \log_{12} 18 = b\end{matrix}\right| \log_{25} 24 = ?$

$$a = \log_6 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 6} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = a;$$

таким образом, $\log_2 5 = a + (a-1)\cdot\log_2 3$.

С другой стороны, $b = \log_{12} 18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 12} = \dfrac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3} = b,$

откуда $\log_2 3 = \dfrac{2b-1}{2-b}$.

Следовательно,

$$\log_{25} 24 = \frac{1}{2}\frac{(\log_2 3 + 3)}{\log_2 5} = \frac{\frac{2b-1}{2-b} + 3}{2\left(a + (a-1)\,\frac{2b-1}{2-b}\right)} =$$

$$= \frac{2b - 1 + 6 - 3b}{2\,(2a - ab + 2ab - 2b - a + 1)} = \frac{5-b}{2\,(a - 2b + ab + 1)}.$$

Итак, $\log_{25} 24 = \dfrac{5-b}{2\,(a - 2b + 1 + ab)}$,

где $a = \log_6 15$, $b = \log_{12} 18$.

Решение тренировочной карточки 2

1. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right)$.

$\log_5 2^3 + \log_5 5^{2-x} = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right)$;

$\log_5 8 \cdot 5^{2-x} = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right)$;

$8 \cdot 5^{2-x} = 3^x - 5^{2-x}$;

$9 \cdot 5^{2-x} = 3^x$; $\quad \dfrac{9 \cdot 5^{2-x}}{3^x} = 1$;

$9 \cdot 5^{2-x} \cdot 3^{-x} = 1$; $\quad 5^{2-x} \cdot 3^{-x+2} = 1$;

$15^{2-x} = 1$; $\quad x = 2$.

Ответ: 2.

2. $3 \cdot 4^{-x} + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{2-x} = 6 \cdot 4^{1-x} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{1-x}$.

$3\dfrac{1}{2} \cdot 9^{1-x} = 21 \cdot 4^{-x}$;

$\dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{4}{9}\right)^{-x}$; $\quad x = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

3. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$.

$3^{\frac{x}{5}} + \dfrac{1}{3} \cdot 3^{\frac{x}{10}} = 84$.

Пусть $3^{\frac{x}{10}} = t$ $(t > 0)$, тогда $t^2 + \dfrac{1}{3}t = 84$;

$3t^2 + t - 252 = 0$;

$t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 3024}}{6} = \dfrac{-1 \pm 55}{6}$;

$\left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = -\dfrac{28}{3} \notin (0;\infty); \end{array}\right. \quad 3^{\frac{x}{10}} = 9; \quad x = 20$.

Ответ: 20.

4. $\log_{x^2} 81 + \log_{3x} 729 = 3.$

$$D(\text{У}):\ \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

$\dfrac{4}{2\log_3 x} + \dfrac{6}{1+\log_3 x} = 3.$ Пусть $\log_3 x = t.$

Тогда $\dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1+t} = 3;\quad 3t^2 - 5t - 2 = 0;$

$t_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \dfrac{5 \pm 7}{6};$

$$\left[\begin{aligned} & t = 2 \\ & t = -\frac{1}{3}; \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} & \log_2 x = 2 \\ & \log_2 x = -\frac{1}{3}; \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} & x = 9 \\ & x = 3^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $x = 9;\ x = 3^{-\frac{1}{3}}.$

5. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

$3^{\log_3^2 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x};$

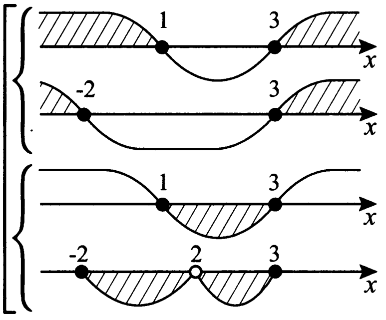
$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162;\quad x^{\log_3 x} = 81;\quad \log_3^2 x = 4;$

$$\left[\begin{aligned} & \log_3 x = 2 \\ & \log_3 x = -2; \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} & x = 9 \\ & x = \frac{1}{9}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x = 9;\ x = \dfrac{1}{9}.$

6. $\left(x^2 - 4x + 4\right)^{x^2 - x - 6} \geqslant 1.$

$$\left[\begin{aligned} & \begin{cases} (x-2)^2 \geqslant 1 \\ x^2 - x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} (x-2)^2 \leqslant 1 \\ (x-2)^2 > 0 \\ x^2 - x - 6 \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & \begin{cases} (x-3)(x-1) \geqslant 0 \\ (x-3)(x+2) \geqslant 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} (x-3)(x-1) \leqslant 0 \\ x \neq 2 \\ (x-3)(x+2) \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; \infty)$.

7. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_5 11$.

При $t > 1$ $\quad \log_t \dfrac{a+b}{2} > \dfrac{1}{2}(\log_t a + \log_t b)$.

Поскольку $\log_2 3 = \log_2 \dfrac{6}{2} = \log_2 \left(\dfrac{4+2}{2}\right) > \dfrac{1}{2}(\log_2 4 + \log_2 2)$,

имеем $\log_2 3 - \log_5 11 > \dfrac{1}{2}(\log_2 4 + \log_2 2) - \log_5 11 =$

$= 1{,}5 - \log_5 11 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 11 = \log_5 \sqrt{125} - \log_5 11 > 0$.

Так как $\sqrt{125} > 11$, значит, $\log_2 3 > \log_5 11$, что и требовалось выяснить.

8. $\log_5 30 = \dfrac{\lg 30}{\lg 5} = \dfrac{1 + \lg 3}{1 - \lg 2}$.

$a \cdot b = \log_3 20 \cdot \lg 3 = \lg 3^{\log_3 20} = \lg 20 = 1 + \lg 2; \qquad \lg 2 = ab - 1;$

$\log_5 30 = \dfrac{1 + \lg 3}{1 - \lg 2} = \dfrac{1 + b}{1 - (ab - 1)} = \dfrac{1 + b}{2 - ab}$.

Итак, $\log_5 30 = \dfrac{1+b}{2 - ab}$, где $a = \log_3 20$, $b = \lg 3$.

Решение тренировочной карточки 3

1. $9^{x-1} - 3^{x+1} + 3^{x-3} = 1.$

$9^{x-1} - 9 \cdot 3^{x-1} + \frac{1}{9} \cdot 3^{x-1} = 1.$ Пусть $3^{x-1} = t \ (t > 0).$

Тогда $t^2 - 9t + \frac{t}{9} = 1; \quad 9t^2 - 80t - 9 = 0;$

$$t_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 81}}{9} = \frac{40 \pm 41}{9}; \qquad \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = -\frac{1}{9} \notin (0;\infty); \end{array}\right.$$

$3^{x-1} = 9; \quad x - 1 = 2; \quad x = 3.$

Ответ: 3.

2. $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}.$

Разделим обе части уравнения на $9^{-\frac{1}{x}}$:

$\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{x}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = 1.$ Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = t \ (t > 0).$

Тогда $t^2 + t - 1 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \notin E(t),$

где $E(t)$ — область изменения функции $t(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}.$

$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}; \quad \frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \quad x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}.$

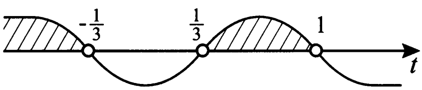
Ответ: $\log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}.$

3. $\frac{8 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$

$\frac{8}{9} \cdot \frac{3^x}{3^x \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$ Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t \ (t > 0).$

Тогда $\dfrac{8}{9(1-t)} > 1 + t;\quad \dfrac{8-9+9t^2}{9(1-t)} > 0;$

$\dfrac{(3t-1)(3t+1)}{9(1-t)} > 0;\quad \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \not\subset E(t).$



$$\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x < 1\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > \log_{\frac{2}{3}} 1\\ x < \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{1}{3}\right).$

4. Решите уравнение $\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)\lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - \sqrt[x]{3}\right).$

D(У): $27 - \sqrt[x]{3} > 0$, то есть $3^{\frac{1}{x}} < 27.$

$\lg\left(3^{1+\frac{1}{2x}} \cdot 2\right) = \lg\left(27 - \sqrt[x]{3}\right);\quad 6 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 27 - 3^{\frac{1}{x}}.$

Пусть $3^{\frac{1}{2x}} = t\ \ (t > 0)$. Тогда

$t^2 + 6t - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -9 \notin E(t)\\ t = 3\end{array}\right.;\quad 3^{\frac{1}{2x}} = 3;\quad x = \dfrac{1}{2}.$

Проверим, принадлежит ли корень D(У).

При $x = \dfrac{1}{2}$ имеем $3^2 < 27$, т. е. $\dfrac{1}{2} \in D$(У).

Ответ: $\dfrac{1}{2}.$

5. $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leqslant 1.$

$\dfrac{(x-1)-\log_3(9-3^x)+3}{\log_3(9-3^x)-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2 \leqslant \log_3(9-3^x)\\ \log_3(9-3^x) > 3\end{cases}\\ \begin{cases}x+2 \geqslant \log_3(9-3^x)\\ \log_3(9-3^x) < 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{x+2} \leqslant 9-3^x\\ 9-3^x > 27\end{cases}\\ \begin{cases}3^{x+2} \geqslant 9-3^x\\ 9-3^x < 27\\ 9-3^x > 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9\cdot 3^x + 3^x - 9 \leqslant 0 \\ 3^x < -18 \end{cases} \quad \emptyset \\ \begin{cases} 9\cdot 3^x + 3^x - 9 \geqslant 0 \\ 3^x > -18 \quad\quad \forall x \\ 3^x < 3^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geqslant \dfrac{9}{10} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \log_3 \dfrac{9}{10} \\ x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\log_3 \dfrac{9}{10}; 2\right)$.

6. $\log_{\frac{3x}{x^2+1}}\left(x^2 - 2{,}5x + 1\right) \geqslant 0.$

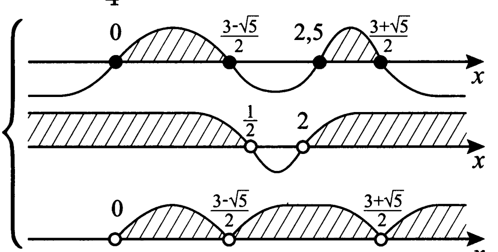
Поскольку $\log_a b \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) \geqslant 0 \\ a > 0 \\ b > 0 \\ a \neq 1, \end{cases}$ имеем

$$\begin{cases} \left(x^2-2{,}5x+1-1\right)\left(\frac{3x}{x^2+1}-1\right) \geqslant 0 \\ x^2 - 2{,}5x + 1 > 0 \\ \dfrac{3x}{x^2+1} > 0 \\ \dfrac{3x}{x^2+1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,(x-2{,}5)\left(-x^2+3x-1\right) \geqslant 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 \neq 0; \end{cases}$$

$x^2 - 3x + 1 = 0; \quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0;$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4};$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$



Ответ: $\left(0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[2{,}5; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

7. Сравните числа $(3\log_{16}1862+\log_{16}1866)$ и $\log_2 1863$.

Очевидно, что $\log_2 1863=\log_{16}1863^4$.

С другой стороны,

$3\log_{16}1862+\log_{16}1866=\log_{16}(1862^3\cdot 1866)$;

$\underline{1862^3\cdot 1866=1862^4+4\cdot 1862^3}$ (так как $1866=1862+4$).

$\underline{\underline{1863^4=(1862+1)^4}}=1862^4+4\cdot 1862^3+6\cdot 1862^2+4\cdot 1862+1$

(так как $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$).

Значит, $1863^4>1862^4+4\cdot 1862^3=1862^3\cdot 1866$, т. е.

$\log_2 1863>\log_{16}\left(1862^3\cdot 1866\right)=3\log_{16}1862+\log_{16}1866$.

Итак, $\log_2 1863>3\log_{16}1862+\log_{16}1866$.

8. $\left\|\begin{matrix}\log_5 15=a\\ \log_{12}24=b\end{matrix}\right|\ \log_{125}48=?$

$a=\log_5 15=1+\log_5 3;\quad \log_5 3=a-1;$

$$b=\log_{12}24=\frac{\log_5 24}{\log_5 12}=\frac{\log_5 3+3\log_5 2}{\log_5 3+2\log_5 2}=\frac{a-1+3\log_5 2}{a-1+2\log_5 2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 2=\frac{ab-a+1-b}{3-2b};$$

$$\log_{125}48=\frac{1}{3}\left(\log_5 3+4\log_5 2\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(a-1+\frac{4\,(ab-a+1-b)}{3-2b}\right)=$$

$$=\frac{3a-2ba-3+2b+4ab-4a+4-4b}{3\,(3-2b)}=$$

$$=\frac{2ab-2b-a+1}{3\,(3-2b)}.$$

Итак, $\log_{125}48=\dfrac{2ab-2b-a+1}{3\,(3-2b)}$,

где $a=\log_5 15$, $b=\log_{12}24$.

Решение тренировочной карточки 4

1. $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24.$

Пусть $2^x = t\ \ (t > 0)$.

Тогда $4^x = t^2$; $\quad t^2 - 5t - 24 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = -3 \notin E(t); \end{array}\right.$

$2^x = 8; \qquad x = 3.$

Ответ: 3.

2. $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leqslant 0.$

Разделим обе части неравенства на $4^{\frac{1}{x}}$:

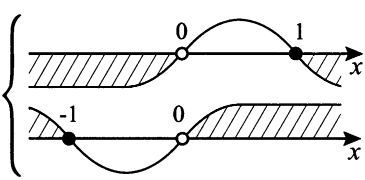
$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 \leqslant 0;$$

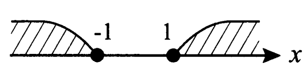
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t \quad (t > 0) \Rightarrow 6t^2 - 13t + 6 \leqslant 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \quad \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}; \quad x = 1; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3};$$

$$x = -1; \quad \frac{2}{3} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} \geqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1-x}{x} \leqslant 0 \\ \dfrac{1+x}{x} \geqslant 0. \end{array}\right.$$





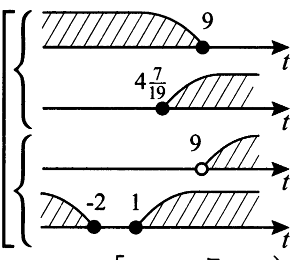
Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

3. $\sqrt{9^x+3^x-2} \geqslant 9-3^x$.

Пусть $3^x = t$ $(t>0)$. Тогда $\sqrt{t^2+t-2} \geqslant 9-t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9-t \geqslant 0 \\ t^2+t-2 \geqslant (9-t)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 9-t<0 \\ t^2+t-2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \leqslant 9 \\ t \geqslant \dfrac{83}{19} \end{cases} \\ \begin{cases} t>9 \\ (t+2)(t-1) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ t \in \left[4\frac{7}{19}; \infty\right); \quad 3^x \geqslant 4\frac{7}{19}; \quad ; \ x \geqslant \log_3 4\frac{7}{19}.$$



Ответ: $\left[\log_3 4\frac{7}{19}; \infty\right)$.

4. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 1250$.

$5^{\log_5^2 x} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x} = x^{\log_5 x}$, поэтому исходное уравнение преобразуется к виду $x^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} = 1250$;

$2 \cdot x^{\log_5 x} = 1250$; $\quad x^{\log_5 x} = 625$; $\quad \log_5^2 x = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2 \\ \log_5 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25 \\ x = \dfrac{1}{25}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 25$; $x = \dfrac{1}{25}$.

5. $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6$.

$(2+\lg x)^2 - (1+\lg x)^2 + \lg^2 x = 6$. Пусть $\lg x = t$. Тогда

$4+4t+t^2-1-2t-t^2+t^2=6$; $\quad t^2+2t-3=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1; \end{array}\right.$

$\lg x = -3$; $\quad \lg x = 1$.

Ответ: $\{0{,}001; 10\}$.

6. $\log_{\frac{x+6}{3}}\left(\log_2\dfrac{x-1}{x+2}\right) > 0.$

Поскольку $\log_a b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) > 0 \\ a > 0 \\ b > 0, \end{cases}$

имеем

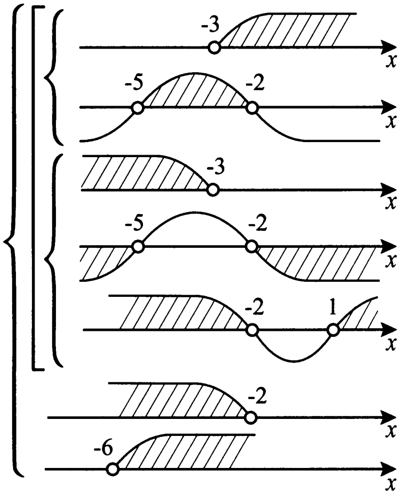
$$\begin{cases} \left(\log_2\dfrac{x-1}{x+2} - 1\right)\left(\dfrac{x+6}{3} - 1\right) > 0 \\ \log_2\dfrac{x-1}{x+2} > 0 \\ \dfrac{x+6}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

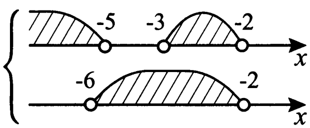
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\log_2\dfrac{x-1}{2(x+2)}\right)\cdot\dfrac{x+3}{3} > 0 \\ \dfrac{x-1}{x+2} > 1 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)\log_2\dfrac{x-1}{2(x+2)} > 0 \\ \dfrac{-3}{x+2} > 0 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -3 \\ \log_2\dfrac{x-1}{2(x+2)} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ \log_2\dfrac{x-1}{2(x+2)} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x < -2 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -3 \\ \dfrac{x-1}{2(x+2)} > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{x-1}{2(x+2)} < 1 \\ \dfrac{x-1}{2(x+2)} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x < -2 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > -3 \\ -\dfrac{x+5}{2(x+2)} > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ -\dfrac{x+5}{2(x+2)} < 0 \\ \dfrac{x-1}{2(x+2)} > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ x < -2 \\ x > -6. \end{array} \right.$$





Ответ: $(-6;-5) \cup (-3;-2)$.

7. $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

$$\sqrt{\log_2 3} = \sqrt{\frac{\log_2^2 3}{\log_2 3}} = \sqrt{\left(\log_2^2 3\right)\log_3 2} = (\log_2 3)\sqrt{\log_3 2},$$

следовательно, $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 2^{(\log_2 3)\sqrt{\log_3 2}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

Тогда $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}} = 0$.

Ответ: 0.

8. $$\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3} = \frac{\log_3 27 + \log_3 5}{\frac{1}{\log_3 3 + \log_3 5}} - \frac{\log_3 5}{\frac{1}{\log_3 81 + \log_3 5}} =$$

$$= (3 + \log_3 5)(1 + \log_3 5) - \log_3 5\,(4 + \log_3 5) =$$

$$= \underline{\log_3^2 5} + \underline{\underline{4\log_3 5}} + 3 - \underline{\log_3^2 5} - \underline{\underline{4\log_3 5}} = 3.$$

Ответ: 3.

Решение тренировочной карточки 5

1. $\underline{3\cdot 4^x}+\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=\underline{6\cdot 4^{x+1}}-\dfrac{1}{4}\cdot 9^{x+1}.$

$21\cdot 4^x=\dfrac{13}{4}\cdot 9^{x+1};\quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^{x+1}=\dfrac{13}{21};\quad x+1=\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{13}{21};$

$x=\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{13}{21}-1;\quad x=\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{39}{28}.$

Ответ: $\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{39}{28}.$

2. $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10.\qquad 5+\sqrt{24}=\dfrac{1}{5-\sqrt{24}},$

поэтому, обозначив $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=t\quad (t>0)$, имеем

$t+\dfrac{1}{t}=10;\quad t^2-10t+1=0;\quad t_{1,2}=5\pm\sqrt{24}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=5+\sqrt{24}\\ \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=5-\sqrt{24}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=1\\ \dfrac{x}{2}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=2;\ x=-2.$

3. $x^x+139\cdot x^{-x}-108\cdot x^{-2x}=32.$

Пусть $x^x=t\ \ (t>0)$, тогда $t+\dfrac{139}{t}-\dfrac{108}{t^2}=32;$

$t^3-32t^2+139t-108=0;\quad f(1)=0$, значит, $f(t)$ без остатка делится на $t-1$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
t^3-32t^2+139t-108 & t-1\\ \hline
-\ \ t^3-\ \ \ t^2\qquad\qquad\qquad & t^2-31t+108\\
-31t^2+139t\qquad\ \ & \\
-\ \ -31t^2+\ \ 31t\qquad\ \ & \\
108t-108 & \\
-\ \ 108t-108 & \\
\end{array}$$

Таким образом, $t_1 = 1$. Найдем остальные корни:

$t^2 - 31t + 108 = 0; \quad t_2 = 27; \quad t_3 = 4;$

$$\left[\begin{array}{l} x^x = 1 \\ x^x = 27 \\ x^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1; 3; 2\}$.

4. $\log_{2x} \dfrac{2}{x} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1.$

$$\frac{\log_2 2 - \log_2 x}{\log_2 2 + \log_2 x} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $\dfrac{1-t}{1+t} \cdot t^2 + t^4 = 1; \quad t \neq -1.$

а) $t = 1; \quad \log_2 x = 1; \quad x = 2;$

$(1-t)\,t^2 - (1-t)\,(1+t)^2\left(t^2+1\right) = 0;$

$(1-t)\left(t^2 - (1+t)^2\left(t^2+1\right)\right) = 0;$

$t^2 - (1+t)^2\left(t^2+1\right) = 0;$

$\underline{t^2} - t^4 - 2t^3 - \underline{t^2} - t^2 - 2t - 1 = 0.$

б) $t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 1 = 0.$

Разделим обе части уравнения на t^2 (при $t > 0$ решений нет). Здесь мы имеем возвратное уравнение, т. е. коэффициенты при степени, равноудаленные от начала и конца, равны.

$\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right) + 2\left(t + \dfrac{1}{t}\right) + 1 = 0; \quad t + \dfrac{1}{t} = a; \quad a^2 = t^2 + 2 + \dfrac{1}{t^2};$

$t^2 + \dfrac{1}{t^2} = a^2 - 2; \quad \left(a^2 - 2\right) + 2a + 1 = 0; \quad a^2 + 2a - 1 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} a = -1 + \sqrt{2} \\ a = -1 - \sqrt{2}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} t + \dfrac{1}{t} = -1 + \sqrt{2} \\ t + \dfrac{1}{t} = -1 - \sqrt{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} t^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)t + 1 = 0; & \mathcal{D} < 0 \\ t^2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)t + 1 = 0; & t_{1,2} < 0 \end{array}\right.$$

$$t_{1,2}=\frac{-(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2};\quad \log_2 x=\frac{-(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=2^{-\frac{(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}} \\ x=2. \end{array}\right.$

5. $5^{\log_5^2 x}<10-x^{\log_5 x}$.

$\left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x}+x^{\log_5 x}<10;\quad x^{\log_5 x}<5;\quad \log_5 x^{\log_5 x}<\log_5 5$ (так как $y=\log_5 x$ — функция возрастающая);

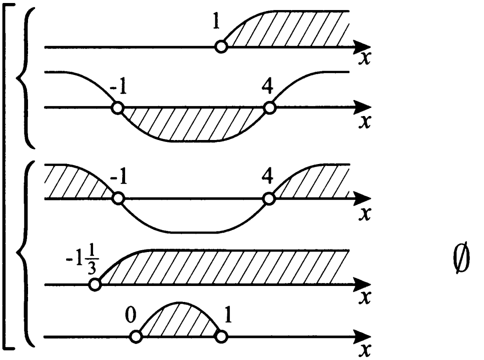
$\log_5^2 x<1;\quad \begin{cases}\log_5 x<1\\ \log_5 x>-1.\end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{5};5\right)$.

6. $\log_x\sqrt{3x+4}>1 \Leftrightarrow \log_x(3x+4)>2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_x(3x+4)>\log_x x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ 3x+4>x^2\end{cases}\\ \begin{cases}3x+4<x^2\\ 3x+4>0\\ 0<x<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ x^2-3x-4<0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3x-4>0\\ x>-1\frac{1}{3}\\ 0<x<1.\end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $(1;4)$.

7. $\left\|\begin{matrix} \lg 5 = a \\ \lg 3 = b \end{matrix}\right| \log_{30} 8 = ?$

$1-a = 1-\lg 5 = \lg 2; \quad a+b = \lg 15; \quad \dfrac{\lg 15}{\lg 2} = \log_2 15 = \dfrac{a+b}{1-a};$

$$\log_{30} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 30} = \frac{3}{\log_2 2 + \log_2 15} = \frac{3}{1+\log_2 15} = \frac{3}{1+\frac{a+b}{1-a}} =$$
$$= \frac{3\,(1-a)}{1+b}.$$

Итак, $\log_{30} 8 = \dfrac{3\,(1-a)}{1+b}$.

8. Вычислить, что больше: $\log_{189} 1323$ или $\log_{63} 147$.

$\log_{189} 1323 = 1 + \log_{189} 7 \quad (1323 = 189 \cdot 7)\,;$

$\log_{189} 7 = \dfrac{\log_{63} 7}{\log_{63} 189} = \dfrac{\log_{63} 7}{1+\log_{63} 3} \quad (189 = 3 \cdot 63)\,;$

$\log_{63} 147 = 1 + \log_{63} \dfrac{7}{3};$

$\log_{63} \dfrac{7}{3} = \log_{63} 7 - \log_{63} 3;$

$\log_{63} 7 = \log_{63} \left(\dfrac{63}{9}\right)^1 = 1 - 2\log_{63} 3; \quad \log_{63} \dfrac{7}{3} = 1 - 3\log_{63} 3;$

$$\log_{189} 1323 - \log_{63} 147 = \log_{189} 7 - \log_{63} \frac{7}{3} =$$
$$= \frac{\log_{63} 7}{1+\log_{63} 3} - (1 - 3\log_{63} 3) = \frac{1-2\log_{63} 3}{1+\log_{63} 3} - (1-3\log_{63} 3) =$$
$$= \frac{1 - 2\log_{63} 3 - 1 - \log_{63} 3 + 3\log_{63} 3 + 3\log_{63}^2 3}{1+\log_{63} 3} =$$
$$= \frac{3\log_{63}^2 3}{1+\log_{63} 3} > 0, \text{ так как } \log_{63} 3 > 0.$$

Итак, $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$.

Решение тренировочной карточки 6

1. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

Разделим обе части уравнения на 27^x:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Введем обозначение $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ $(t > 0)$. Тогда $t^3 + t - 2 = 0$;

$f(t) = t^3 + t - 2$; $\quad f(t) = 0$; $\quad f(1) = 0$.

Разделим $t^3 + t - 2$ на $t - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
t^3 \qquad + \; t - 2 & t - 1 \\
\cline{2-2}
-\;\underline{t^3 - t^2} \qquad\quad & t^2 + t + 2 \\
t^2 + \; t - 2 & \\
-\;\underline{t^2 - \; t} \quad\; & \\
2t - 2 & \\
-\;\underline{2t - 2} & \\
\end{array}$$

$t^2 + t + 2 = 0$ $(\mathcal{D} < 0;\ t \in \emptyset)$; $\quad t = 1$; $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$; $\quad x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

2. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$;

$2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3 + 1)$;

$\frac{3}{2} \cdot 2^{2x} = 4 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}}$;

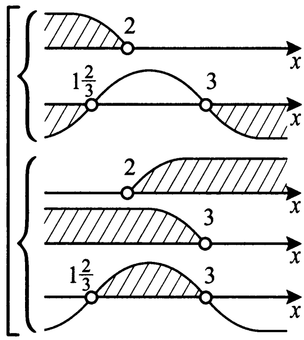
$\frac{4^x}{8} = \frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{3}$; $\quad 4^{x-1,5} = 3^{x-1,5}$;

$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1,5} = 1$; $\quad x - 1,5 = 0$; $\quad x = 1,5$.

Ответ: $x = 1,5$.

3. $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1;$

а) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-x>1\\ \dfrac{3x-5}{3-x}<0\end{cases}\\ \begin{cases}3-x<1\\ 3-x>0\\ \dfrac{3x-5}{3-x}>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2\\ \dfrac{3x-5}{3-x}<0\end{cases}\\ \begin{cases}x>2\\ x<3\\ \dfrac{3x-5}{3-x}>0.\end{cases}\end{array}\right.$



б) $3-x=-1;\quad x=4.$

$(-1)^{-7} < 1$ — истина.

Ответ: $\left(-\infty; 1\dfrac{2}{3}\right) \cup (2;3) \cup \{4\}.$

4. $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1.$

$\dfrac{\log_3\frac{3}{x}}{\log_3 3x} + \log_3^2 x = 1;\quad \dfrac{\log_3 3 - \log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} + \log_3^2 x = 1.$

Пусть $\log_3 x = t$. Тогда $\dfrac{1-t}{1+t} + t^2 = 1;$

$\dfrac{1-t}{1+t}\left(1-(1+t)^2\right) = 0;$

$\dfrac{-(1-t)(2+t)\,t}{1+t} = 0;$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\\ t=-2\end{array}\right.\\ t\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 0\\ \log_3 x = 1\\ \log_3 x = -2.\end{array}\right.$

Ответ: $\left\{1; 3; \dfrac{1}{9}\right\}.$

5. $\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \log_5 x + \log_3 x \log_5 x.$

Пусть $x = 1$. Тогда $0 = 0$, т. е. $x = 1$ — решение.

Пусть $x \neq 1$, тогда $\log_2 x \neq 0$.

Разделим обе части уравнения на $\log_2 x$:

$$\log_3 x \cdot \log_5 x = \log_3 x + \log_5 x + \frac{\log_3 x \cdot \log_5 x}{\log_2 x} \quad (\log_2 x \neq 0).$$

а) $\dfrac{\log_3 x}{\log_2 x} = \dfrac{\frac{\log_2 x}{\log_2 3}}{\log_2 x} = \dfrac{1}{\log_2 3} \quad (\log_2 x \neq 0),$

поэтому $\log_3 x \cdot \log_5 x = \log_3 x + \log_5 x + \dfrac{\log_5 x}{\log_2 3}.$

Разделим обе части уравнения на $\log_5 x \neq 0$.

б) $\log_3 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_5 x} + 1 + \dfrac{1}{\log_2 3}.$

Поскольку $\dfrac{\log_3 x}{\log_5 x} = \dfrac{\log_3 x}{\frac{\log_3 x}{\log_3 5}} = \log_3 5$, имеем

$\log_3 x = \log_3 5 + 1 + \log_3 2$; $\log_3 x = \log_3 (5 \cdot 3 \cdot 2)$; $x = 30$.

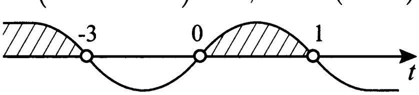
Ответ: $\{1; 30\}$.

6. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2. Поскольку $y = \log_2 x$ — возрастающая функция, имеем

$$\left(2 - \log_2^2 x - 2\log_2 x\right) \log_2 x > \log_2 \frac{1}{x}.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $\left(2 - t^2 - 2t\right) t + t > 0$;

$-t\left(t^2 + 2t - 3\right) > 0$; $\quad -t(t+3)(t-1) > 0$.



$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x < -3 \\ \begin{cases} \log_2 x < 1 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{8} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{8}\right) \cup (1; 2)$.

7. $\left\| \begin{matrix} \log_7 12 = a \\ \log_{12} 24 = b \end{matrix} \right| \log_{54} 168 = ?$

$a \cdot b = \log_7 12 \cdot \log_{12} 24 = \log_7 24$, так как $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

$$\log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{1 + \log_7 24}{\log_7 54} = \frac{1 + ab}{\log_7 54};$$

$$\underline{\log_7 54} = \frac{\log_3 54}{\log_3 7} = \frac{3 + \log_3 2}{\log_3 7};$$

$$\log_{12} 24 = 1 + \log_{12} 2 = 1 + \frac{1}{2 + \log_2 3} = b;$$

$$\log_2 3 = \frac{1}{b-1} - 2 = \frac{3-2b}{b-1}; \qquad \underline{\log_3 2} = \frac{b-1}{3-2b};$$

$$a = \log_7 12 = \frac{\log_3 12}{\log_3 7} = \frac{1 + 2\log_3 2}{\log_3 7};$$

$$\log_3 7 = \frac{1 + 2\log_3 2}{a} = \frac{1 + \frac{2(b-1)}{3-2b}}{a} = \frac{1}{a\,(3-2b)};$$

$$\log_7 54 = \frac{3 + \log_3 2}{\log_3 7} = \frac{3 + \frac{b-1}{3-2b}}{\frac{1}{a(3-2b)}} = a\,(8-5b)\,.$$

Итак, $\log_{54} 168 = \dfrac{1+ab}{\log_7 54} = \dfrac{1+ab}{a\,(8-5b)}$.

Ответ: $\log_{54} 168 = \dfrac{1+ab}{a\,(8-5b)}$.

8. $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{40}{y} \\ \left(\dfrac{40}{y}\right)^{\lg y} = 40 \end{cases}$

$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{40}{y}\right) = \lg 40; \qquad \lg y\,(\lg 40 - \lg y) = \lg 40;$$

$$\lg^2 y - \lg 40 \cdot \lg y + \lg 40 = 0;$$

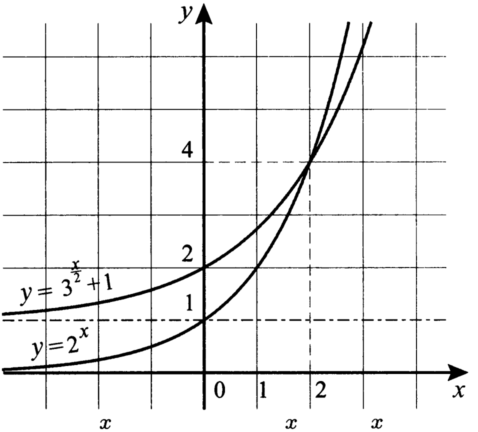
$$\mathcal{D} = \lg^2 40 - 4\lg 40 = \lg 40\,(\lg 40 - 4) < 0,$$

так как $\lg 40 < 4$. Следовательно, $(x, y) \in \emptyset$, т. е. система не имеет решения.

Решение тренировочной карточки 7

1. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

Решим уравнение графически:



$2^x = 4^{\frac{x}{2}}$, поэтому $4^{\frac{x}{2}} > 3^{\frac{x}{2}}$ на $(2;\infty)$. Это значит, что других точек пересечения нет.

Ответ: $x = 2$.

2. $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$.

$2^{2x} \cdot 3^{2x} - \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot 3^{3x} + \frac{1}{4} \cdot 2^{4x} \cdot \frac{1}{9} \cdot 3^{4x} = 0$.

Разделим обе части уравнения на $2^{2x} \cdot 3^{2x}$:

$1 - \frac{1}{3} \cdot 2^x \cdot 3^x + \frac{1}{36} \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 0$.

Пусть $6^x = t$ $(t > 0)$, тогда $t^2 - 12t + 36 = 0$; $(t-6)^2 = 0$; $t = 6$; $6^x = 6$.

Ответ: $x = 1$.

3. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

$\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$, поэтому $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Обозначим $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t$ $(t > 0)$.

Тогда $t+\dfrac{1}{t}=4;\quad t^2-4t+1=0;\quad t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}\in E(t);$

$$\left[\begin{aligned}&\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}\\&\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=2\\&x=-2.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{aligned}&x=2\\&x=-2.\end{aligned}\right.$

4. $\sqrt{2\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}.$

$\sqrt{2\lg(-x)}=\lg|x|;\qquad \sqrt{2\lg(-x)}=\lg(-x);$

$-x>0\Rightarrow|x|=-x.$ Пусть $\lg(-x)=t$, тогда $\sqrt{2t}=t;$

$$\begin{cases}t^2=2t\\t\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}&t=0\\&t=2\end{aligned}\right.\\t\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\lg(-x)=0\\&\lg(-x)=2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-1\\&x=-100.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{aligned}&x=-1\\&x=-100.\end{aligned}\right.$

5. $1+\dfrac{\log_7(9-x)}{\log_7(4+x)}=\dfrac{2-\log_5 4}{\log_5(x+4)}.$

Область определения уравнения $D(\text{У})$:

$$\begin{cases}9-x>0\\x+4>0\\x+4\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<9\\x>-4\\x\neq -3;\end{cases}$$

$$\frac{\log_7\big((4+x)(9-x)\big)}{\log_7(x+4)}=\frac{\log_5\frac{25}{4}}{\log_5(x+4)}.$$

Поскольку $\dfrac{\log_a b}{\log_a c}=\log_c b$, имеем

$\log_{x+4}\big((x+4)(9-x)\big)=\log_{x+4}\dfrac{25}{4};$

$(x+4)(9-x)=\dfrac{25}{4};\qquad -x^2+5x+36=6\dfrac{1}{4};$

$$x^2 - 5x - 29\frac{3}{4} = 0; \quad 4x^2 - 20x - 119 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 476}}{4} = \frac{10 \pm 24}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 8{,}5 \\ x = -3{,}5 \end{array}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $\{8{,}5; -3{,}5\}$.

6. $\dfrac{\log_2\big((x+1)(x-3)\big)}{\log_2(x-3)} < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{x-3}\big((x+1)(x-3)\big) < 1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

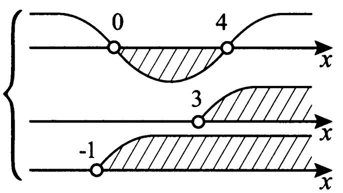
$\Leftrightarrow \log_{x-3}\big((x+1)(x-3)\big) < \log_{(x-3)}(x-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{x-3}(x+1) < 0.$

Поскольку $\log_a b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) < 0 \\ a > 0 \\ b > 0, \end{cases}$

последнее соотношение равносильно

$$\begin{cases} (x+1-1)(x-3-1) < 0 \\ x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) < 0 \\ x > -1 \\ x > 3. \end{cases}$$



Ответ: $(3; 4)$.

7. $\lg 64 = a; \quad \log_{20}\sqrt[5]{125} = ?$

а) $\log_{20}\sqrt[5]{125} = \dfrac{3}{5}\log_{20} 5 = \dfrac{3}{5\log_5 20} = \dfrac{3}{5(\log_5 5 + \log_5 4)} =$

$$= \frac{3}{5(1 + 2\log_5 2)}.$$

б) $\lg 64 = 6\lg 2 = \dfrac{6}{\log_2 10} = \dfrac{6}{1+\log_2 5} = a;$

$$\log_2 5 = \frac{6}{a} - 1 = \frac{6-a}{a}; \qquad \log_5 2 = \frac{a}{6-a}.$$

в) $\log_{20}\sqrt[5]{125} = \dfrac{3}{5\,(1+2\log_5 2)} = \dfrac{3}{5\left(1+\frac{2a}{6-a}\right)} =$

$$= \frac{3\,(6-a)}{5\,(6-a+2a)} = \frac{3\,(6-a)}{5\,(6+a)}.$$

Ответ: $\log_{20}\sqrt[5]{125} = \dfrac{3\,(6-a)}{5\,(6+a)}.$

8. $\begin{cases} \lg y^x = 2x\lg(2x-y) \\ \sqrt{x} - x = \sqrt{y} - y. \end{cases}$

Область определения системы $D(\text{C})$:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2x - y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y > 0 \\ y < 2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y^x = 2x\lg(2x-y) \\ \sqrt{x} - x = \sqrt{y} - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\lg y = 2x\lg(2x-y) \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = x - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg y = \lg(2x-y)^2 \\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{y} = y \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = (2x-y)^2 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \quad \notin D(\text{C}) \\ y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ y = (2x-y)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = (2x-y)^2 \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ y = y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \left(2\left(1-\sqrt{y}\right)^2 - y\right)^2 \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y & (1;1) \in D(\mathrm{C}) \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right. & (0;0) \notin D(\mathrm{C}) \end{cases} \\ \begin{cases} y = \left(2\left(1-2\sqrt{y}+y\right) - y\right)^2 \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y = \left(y - 4\sqrt{y} + 2\right)^2 \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{y}. \end{cases}$$

$y = y^2 + 16y + 4 + 4y - 8y\sqrt{y} - 16\sqrt{y};$

$y^2 - 8y\sqrt{y} + 19y - 16\sqrt{y} + 4 = 0.$

Пусть $\sqrt{y} = t \ (t > 0)$, тогда

$t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 16t + 4 = 0.$

Пусть $f(t) = t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 16t + 4$. $f(1) = 0$, значит, $\sqrt{y} = 1$ и $\sqrt{x} = 0$, но найденная пара чисел не принадлежит $D(\mathrm{C})$.

$f(t)$ делится без остатка на $(t-1)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} t^4 & -8t^3 & +19t^2 & -16t & +4 & t-1 \\ \cline{6-6} -(t^4 & -t^3) & & & & t^3 - 7t^2 + 12t - 4 \\ \cline{1-2} & -7t^3 & +19t^2 & & & \\ & -(-7t^3 & +7t^2) & & & \\ \cline{2-3} & & 12t^2 & -16t & & \\ & & -(12t^2 & -12t) & & \\ \cline{3-4} & & & -4t & +4 & \\ & & & -(-4t & +4) & \\ \cline{4-5} & & & & 0 & \end{array}$$

$t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 16t + 4 = (t-1)\left(t^3 - 7t^2 + 12t - 4\right).$

Пусть $g(t)=t^3-7t^2+12t-4$. Тогда $g(2)=0$, следовательно, $g(t)$ делится на $(t-2)$:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} t^3-7t^2+12t-4 \\ \underline{t^3-2t^2} \end{array} & \begin{array}{l} t-2 \\ \hline t^2-5t+2 \end{array} \\ -\begin{array}{r} -5t^2+12t \\ \underline{-5t^2+10t} \end{array} & \\ -\begin{array}{r} 2t-4 \\ \underline{2t-4} \end{array} & \end{array}$$

$$t^3-7t^2+12t-4=(t-2)\left(t^2-5t+2\right).$$

Если $t=2$, то $\sqrt{x}=-1$ и $x\in\emptyset$. Найдем остальные корни:

$$t^2-5t+2=0; \quad t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}\in E(t).$$

а) $\sqrt{y}=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\Rightarrow\sqrt{x}=1-\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}<0;$
$x\in\emptyset$.

б) $\sqrt{y}=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\Rightarrow\sqrt{x}=1-\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}>0.$

Проверим выполнимость условия $y<2x$, т. е. принадлежность найденной пары чисел $D(\mathrm{C})$. С учетом того, что $x>0$ и $y>0$, данное условие переходит в $\sqrt{y}<\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}$, т. е. $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{17}-3)\Leftrightarrow(5-\sqrt{17})^2<2(\sqrt{17}-3)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25+17-10\sqrt{17}<2(17+9-6\sqrt{17})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{17}<10$ — истинно.

Таким образом, условие выполнено.

$$\sqrt{y}=\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \text{ т. е. } y=\frac{25+17-10\sqrt{17}}{4}=\frac{21-5\sqrt{17}}{2}.$$

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{17}-3}{2}, \text{ т. е. } x=\frac{17+9-6\sqrt{17}}{4}=\frac{13-3\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $(1;1)$; $\left(\dfrac{13-3\sqrt{17}}{2};\dfrac{21-5\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение тренировочной карточки 8

1. $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8.$

Пусть $2^x - 3 \cdot 2^{-x} = t.$

Тогда, поскольку $(a-3b)^3 = a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$, имеем

$$t^3 = 2^{3x} - 9 \cdot 2^x + 27 \cdot 2^{-x} - 27 \cdot 2^{-3x} =$$

$$= -\left(27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x}\right) = -8;$$

$$t^3 = -8; \quad t = -2;$$

$$2^x - 3 \cdot 2^{-x} = -2; \qquad 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 3 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = -3 \notin E\,(y = 2^x) \\ 2^x = 1; \end{array}\right. \qquad x = 0.$$

Ответ: $x = 0.$

2. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992; \quad x \in \mathbb{Z}.$

$$992 = 31 \cdot 32; \qquad 2^{x^2-4}\left(2^{x+2} - 1\right) = 992.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{x^2-4} = 32 \\ 2^{x+2} = 32 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{x^2-4} = 31 \\ 2^{x+2} = 33 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 4 = 5 \\ x + 2 = 5 \end{cases} \\ \emptyset \end{array}\right. \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3; \end{array}\right. \\ x = 3. \end{cases} \quad x = 3$$

Ответ: $x = 3.$

3. $\left(x^2 - 8x + 16\right)^{x-6} < 1.$

$$|x-4|^{2(x-6)} < |x-4|^0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-4| > 1 \\ 2\,(x-6) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < 3 \end{array}\right. \\ x < 6; \end{cases} \quad (-\infty; 3) \cup (5; 6) \\ \begin{cases} |x-4| < 1 \\ |x-4| > 0 \\ 2(x-6) > 0. \end{cases} \qquad \emptyset \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (5; 6).$

4. $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - 2\log_3 \sqrt{x} + \log_3^2 x = 3.$

$\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - \log_3 x + \log_3^2 x = 3;$

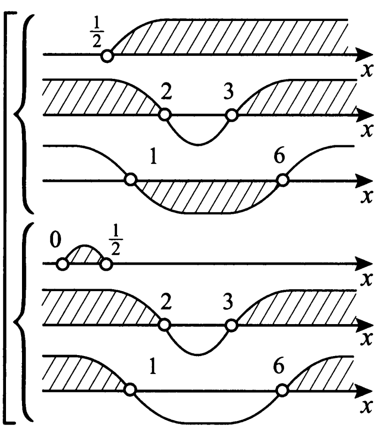
$\log_3 x \neq 1; \quad x \neq 3; \quad \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2\\ \log_3 x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 9\\ x = \dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{9; \dfrac{1}{3}\right\}$.

5. $\log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right) < 1 \Leftrightarrow \log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right) < \log_{2x} 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x > 1\\ x^2 - 5x + 6 > 0\\ x^2 - 5x + 6 < 2x\end{cases}\\ \begin{cases}2x < 1\\ 2x > 0\\ x^2 - 5x + 6 > 0\\ x^2 - 5x + 6 > 2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > \dfrac{1}{2}\\ (x-2)(x-3) > 0\\ (x-6)(x-1) < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < \dfrac{1}{2}\\ x > 0\\ (x-2)(x-3) > 0\\ (x-6)(x-1) > 0.\end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$.

6. $(x+4)\cdot 3^{1-|x-1|}-x=(x+1)\,|3^x-1|+3^{x+1}+1.$

$$|3^x-1|=\begin{cases}3^x-1; & x\geqslant 0\\ 1-3^x; & x<0;\end{cases}\quad |x-1|=\begin{cases}x-1; & x\geqslant 1\\ 1-x; & x<1.\end{cases}$$

а) $x<0$:

$$(x+4)\cdot 3^{1+x-1}-x=(x+1)\,(1-3^x)+3^{x+1}+1;$$

$$x\cdot 3^x+4\cdot 3^x-x=-x\cdot 3^x-3^x+x+1+3\cdot 3^x+1;$$

$$(x+1)\,(3^x-1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right.\\ x<0\end{cases};\qquad x=-1.$$

б) $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x<1\end{cases}$:

$$(x+4)\cdot 3^{1+x-1}-x=(x+1)\,(3^x-1)+3^{x+1}+1;$$

$$0=0\Rightarrow[0;1)\,.$$

в) $x\geqslant 1$:

$$(x+4)\cdot 3^{1-x+1}-x=(x+1)\,(3^x-1)+3\cdot 3^x+1;$$

$$(x+4)\left(3^{2-x}-3^x\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=1\end{array}\right.\\ x\geqslant 1\end{cases};\qquad x=1.$$

Ответ: $[0;1]\cup\{-1\}$.

7. $\left\|\begin{array}{l}\log_{14}7=a\\ \log_{14}5=b\end{array}\right|\ \log_{35}28=?$

а) $\log_{35}28=\dfrac{\log_7 28}{\log_7 35}=\dfrac{2\log_7 2+1}{\log_7 5+1}.$

б) $a=\log_{14}7=\dfrac{1}{\log_7 14}=\dfrac{1}{1+\log_7 2};\quad \log_7 2=\dfrac{1}{a}-1.$

в) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\log_{14}5}{\log_{14}7}=\log_7 5.$

г) $\log_{35} 28 = \dfrac{2\log_7 2 + 1}{\log_7 5 + 1} = \dfrac{2\left(\frac{1}{a} - 1\right) + 1}{\frac{b}{a} + 1} =$

$$= \frac{2 - 2a + a}{b + a} = \frac{2 - a}{a + b}.$$

Итак, $\log_{35} 28 = \dfrac{2 - a}{a + b}$.

8. $\log_{\frac{1}{3}} \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \sqrt{x^2+1} + x$, имеем

$$-\log_3 \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < \log_3 \log_5 \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 0 \\ \log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + x > 5 \\ \sqrt{x^2+1} + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 5 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5 - x \geqslant 0 \\ x^2 + 1 > (5 - x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5 - x < 0 \\ x^2 + 1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 5 \\ x > 2{,}4 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5 \\ \forall x. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(2{,}4; \infty)$.

Решение зачетных карточек 1 (на свойства логарифмов)

Решение зачетной карточки 1

1. $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{27} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-2} \log_3 3 = \boxed{-\dfrac{3}{8}}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} \log_x x = \dfrac{8}{3} = \boxed{2\dfrac{2}{3}}$.

3. $36^{\log_6 0{,}5} = 6^{2\log_6 0{,}5} = (0{,}5)^2 = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

4. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\log_5 27} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{3+3\log_5 3} = 5^{1+\log_5 3} = 5^1 \cdot 5^{\log_5 3} =$
$= 5 \cdot 3 = \boxed{15}$.

5. $(\lg 25 - \lg 0{,}25)^{-3} = \left(\lg \dfrac{25}{0{,}25}\right)^{-3} = (\lg 100)^{-3} = 2^{-3} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$.

6. $\dfrac{\log_7 8}{\log_{\frac{1}{49}} \sqrt{2}} = \dfrac{3\log_7 2}{\frac{\frac{1}{2}}{-2}\log_7 2} = \boxed{-12}$.

7. $3^{\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}} 81} = 3^{\frac{\frac{1}{4}\cdot 4}{\frac{1}{2}}\log_3 3} = 3^2 = \boxed{9}$.

8. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\sin^4 \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{-2}\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -\dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{1}{4} =$
$= -\dfrac{1}{2}(-2)\log_2 2 = \boxed{1}$.

9. $\log_8(8\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ) = \log_8(4\sin 30^\circ) = \dfrac{1}{3}\log_2 2 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

10. $\log_3 4 \cdot \log_2 9 = \log_3 4 \cdot 2\log_2 3 = 4 \cdot \log_3 2 \cdot \dfrac{1}{\log_3 2} = \boxed{4}$.

11. $\log_5\left(\sqrt{26}+1\right)+\log_{\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{26}-1}=$

$=\log_5\left(\sqrt{26}+1\right)+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\log_5\left(\sqrt{26}-1\right)=$

$=\log_5\left(\sqrt{26}+1\right)+\log_5\left(\sqrt{26}-1\right)=$

$=\log_5\left(\sqrt{26}+1\right)\left(\sqrt{26}-1\right)=\log_5(26-1)=\boxed{2}.$

12. $\log_{36}84-\log_6\sqrt{14}=\log_6\sqrt{84}-\log_6\sqrt{14}=\log_6\sqrt{\frac{84}{14}}=$

$=\log_6\sqrt{6}=\boxed{\frac{1}{2}}.$

13. $\dfrac{\lg 27+\lg 12}{\lg 2+2\lg 3}=\dfrac{\lg(27\cdot 12)}{\lg(2\cdot 3^2)}=\dfrac{\lg(3^4\cdot 2^2)}{\lg(2\cdot 3^2)}=\dfrac{2\lg(3^2\cdot 2)}{\lg(2\cdot 3^2)}=\boxed{2}.$

14. $\log_{25}\left(\log_{32}(\log_6 36)\right)=\log_{25}(\log_{32}2)=\log_{25}\frac{1}{5}=\boxed{-\frac{1}{2}}.$

15. $\frac{1}{2}\log_{30}36+2\log_{\frac{1}{30}}\frac{1}{\sqrt{5}}=\log_{30}6-\log_{30}\frac{1}{5}=\log_{30}30=\boxed{1}.$

Решение зачетной карточки 2

1. $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{49} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-1} \log_7 7 = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$.

2. $\log_{\sqrt[5]{a}} \sqrt[3]{a^5} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{5}} \log_a a = \dfrac{25}{3} = \boxed{8\dfrac{1}{3}}$.

3. $25^{\log_{\sqrt{5}} 2} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}} \log_5 2} = 5^{4\log_5 2} = 2^4 = \boxed{16}$.

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{3+\log_{\frac{1}{2}} 3} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{3-\log_2 3} = 2^{1-\frac{1}{3}\log_2 3} = 2 \cdot \left(2^{\log_2 3}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

$= 2 \cdot 3^{-\frac{1}{3}} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}}$.

5. $\left(\ln \sqrt[5]{e^6} - \ln \dfrac{1}{\sqrt[5]{e^4}}\right)^{-3} = \left(\dfrac{6}{5} + \dfrac{4}{5}\right)^{-3} = 2^{-3} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$.

6. $\dfrac{\log_{\sqrt{5}} 4}{\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{2}} = \dfrac{\frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 2}{\frac{\frac{1}{3}}{-2} \log_5 2} = \boxed{-24}$.

7. $\log_8 (\sin 79° \cdot \cos 49° - \sin 49° \cdot \cos 79°) = \log_8 \sin 30° =$

$= \dfrac{1}{3} \log_2 \dfrac{1}{2} = \boxed{-\dfrac{1}{3}}$.

8. $\log_3 8 \cdot \log_4 \sqrt{3} = 3 \log_3 2 \cdot \dfrac{\frac{1}{2}}{2} \log_2 3 = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.

9. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\cos^2 15° - \sin^2 15°\right) = \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \cos 30° =$

$= \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1}$.

10. $\log_{49} 84 - \log_7 \sqrt{12} = \log_7 \sqrt{84} - \log_7 \sqrt{12} = \log_7 \sqrt{\dfrac{84}{12}} =$

$= \log_7 \sqrt{7} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

11. $\dfrac{\lg 81+\lg 64}{2\lg 3+3\lg 2}=\dfrac{\lg(81\cdot 64)}{\lg(3^2\cdot 2^3)}=\dfrac{\lg(3^4\cdot 2^6)}{\lg(3^2\cdot 2^3)}=\dfrac{2\lg(3^2\cdot 2^3)}{\lg(3^2\cdot 2^3)}=\boxed{2}$.

12. $\log_{\sqrt{3}}\big(\log_{27}(\log_2 8)\big)=\log_{\sqrt{3}}(\log_{27}3)=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3}=\boxed{-2}$.

13. $\dfrac{1}{4}\log_6 16-3\log_{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{3}=\log_6 2+\log_6 3=\log_6 6=\boxed{1}$.

14. $5^{\log_3 7}-7^{\log_3 5}=\boxed{0}$, так как $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$.

15. $\dfrac{\ln\sqrt[3]{7}}{\ln 49}+\lg\sqrt[6]{10^{-1}}=\dfrac{\frac{1}{3}\ln 7}{2\ln 7}+\left(-\dfrac{1}{6}\right)\lg 10=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}=\boxed{0}$.

Решение зачетной карточки 3

1. $\log_4 \dfrac{1}{32} = \dfrac{-5}{2}\log_2 2 = \boxed{-2{,}5}$.

2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[5]{a^3} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}\log_a a = \boxed{\dfrac{9}{5}}$.

3. $25^{\log_{0,2} 4} = 25^{\frac{2}{-1}\log_5 2} = 5^{-4\log_5 2} = 2^{-4} = \boxed{\dfrac{1}{16}}$.

4. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{8+\log_2 81} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{8+4\log_2 3} = 2^{2+\log_2 3} = 2^2\cdot 2^{\log_2 3} =$

$= 4\cdot 3 = \boxed{12}$.

5. $\dfrac{\log_4 7}{\log_{0,5}\sqrt[3]{49}} = \dfrac{\frac{1}{2}\log_2 7}{\frac{\frac{2}{3}}{-1}\log_2 7} = \boxed{-\dfrac{3}{4}}$.

6. $(\lg 300 - \lg 15 - \lg 2)^{-26} = \left(\lg\dfrac{300}{15\cdot 2}\right)^{-26} = (\lg 10)^{-26} =$

$= 1^{-26} = \boxed{1}$.

7. $\log_3 49\cdot\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{3} = 2\cdot\log_3 7\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{-1}\log_7 3 = -\dfrac{\log_3 7}{\log_3 7} = \boxed{-1}$.

8. $\log_3\left(\sqrt{13}-2\right) + \dfrac{1}{\log_{2+\sqrt{13}} 3} =$

$= \log_3\left(\sqrt{13}-2\right) + \log_3\left(2+\sqrt{13}\right) = \log_3(13-4) = \boxed{2}$.

9. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\sin 60^\circ)^2 = \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \boxed{-2}$.

10. $\log_{\sqrt{5}}(5\operatorname{tg}\alpha) + \log_5(\operatorname{ctg}\alpha)^2 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_5(5\operatorname{tg}\alpha) + 2\log_5(\operatorname{ctg}\alpha) =$

$= 2\log_5(5\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha) = 2\log_5 5 = \boxed{2}$.

11. $2\lg 5 + \dfrac{1}{2}\lg 16 = \lg 5^2 + \lg 4 = \lg 25\cdot 4 = \lg 100 = \boxed{2}$.

12. $$\frac{\log_5 21}{2\log_5 3+\frac{1}{2}\log_5 49-\frac{1}{3}\log_{\sqrt{5}}\sqrt{27}}=\frac{\log_5 21}{\log_5 9+\log_5 7-\log_5 3}=$$
$$=\frac{\log_5 21}{\log_5 21}=\boxed{1}.$$

13. $\log_{27}\left(\log_8\left(\log_3 9\right)\right)=\log_{27}\dfrac{1}{3}=\boxed{-\dfrac{1}{3}}.$

14. $\dfrac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}=\dfrac{\log_5 \frac{36}{12}}{2\log_5 3}=\dfrac{\log_5 3}{2\log_5 3}=\boxed{\dfrac{1}{2}}.$

15. $\log_5 6\cdot\log_9 1\cdot\log_2 7=0,$ так как $\log_9 1=\boxed{0}.$

Решение зачетной карточки 4

1. $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3} = \dfrac{\frac{1}{4}}{-3} \log_3 3 = \boxed{-\dfrac{1}{12}}.$

2. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[4]{x^5} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} \log_x x = \dfrac{5}{2} = \boxed{2{,}5}.$

3. $9^{\log_3 2} = 3^{2\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = 2^2 = \boxed{4}.$

4. $\left(\sqrt{3}\right)^{6-\log_3 25} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{6-2\log_3 5} = 3^{3-\log_3 5} = \boxed{\dfrac{27}{5}}.$

5. $\dfrac{\log_3 25}{\log_9 \sqrt{5}} = \dfrac{2\log_3 5}{\frac{\frac{1}{2}}{2}\log_3 5} = \boxed{8}.$

6. $3\lg 5 + \dfrac{1}{2}\lg 64 = \lg 5^3 + \lg 8 = \lg(125\cdot 8) = \lg 1000 = \boxed{3}.$

7. $\dfrac{\log_7 30}{2\log_7 5 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}} 36 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}}\sqrt{125}} =$

$= \dfrac{\log_7 30}{\log_7 25 + \log_7 6 - \log_7 5} = \dfrac{\log_7 30}{\log_7 30} = \boxed{1}.$

8. $\log_6 3 \cdot \log_{\sqrt{3}} 36 = \log_6 3 \cdot \dfrac{2}{\frac{1}{2}}\log_3 6 = 4\cdot\dfrac{\log_6 3}{\log_6 3} = \boxed{4}.$

9. $\left(\dfrac{\lg 125 - 2\lg 2}{\lg\sqrt[3]{4} + \lg 0{,}2}\right)^3 = \left(\dfrac{\lg\frac{125}{4}}{\lg\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{-1}\right)}\right)^3 = \left(\dfrac{3\lg\frac{5}{2^{\frac{2}{3}}}}{-\lg\frac{5}{2^{\frac{2}{3}}}}\right)^3 =$

$= (-3)^3 = \boxed{-27}.$

10. $2\log_{\sin 2x}\sin x + \log_{\sin 2x}(4\cos^2 x) = \log_{\sin 2x}(\sin^2 x\cdot 4\cos^2 x) =$

$= \log_{\sin 2x}\sin^2 2x = \boxed{2}.$

11. $\log_5(\sin 106^\circ\cdot\cos 16^\circ - \cos 106^\circ\cdot\sin 16^\circ) =$

$= \log_5\sin 90^\circ = \log_5 1 = \boxed{0}.$

12. $\log_8\left(\log_{16}\left(\log_5 25\right)\right) = \log_8\left(\log_{16} 2\right) = \log_8 \dfrac{1}{4} =$

$= \dfrac{-2}{3}\log_2 2 = \boxed{-\dfrac{2}{3}}.$

13. $\dfrac{1}{2}\log_{12} 36 - 3\log_{\frac{1}{12}} \sqrt[3]{2} = \log_{12} 6 + \log_{12} 2 = \log_{12} 12 = \boxed{1}.$

14. $8^{\log_7 5 \cdot \log_6 1} = 8^{\log_7 5 \cdot 0} = 8^0 = \boxed{1}.$

15. $\log_7\left(3-\sqrt{2}\right) - 2\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{3+\sqrt{2}} =$

$= \log_7\left(3-\sqrt{2}\right) + \log_7\left(3+\sqrt{2}\right) = \log_7\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right) =$

$= \log_7 (9-2) = \log_7 7 = \boxed{1}.$

Решение зачетной карточки 5

1. $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} \log_7 7 = \boxed{-4}$.

2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[4]{a^3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} \log_a a = \boxed{\frac{9}{4}}$.

3. $25^{\log_5 7} = 5^{2\log_5 7} = 7^2 = \boxed{49}$.

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6-3\log_2 3} = 2^{2-\log_2 3} = 2^2 \cdot 3^{-1} = \boxed{\frac{4}{3}}$.

5. $\dfrac{\log_8 7}{\log_{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{49}\right)} = \dfrac{\frac{1}{3}\log_2 7}{\frac{-2}{\frac{1}{3}}\log_2 7} = \boxed{-\frac{1}{18}}$.

6. $\ln 8 \cdot \log_4 e = 3\ln 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 e = \frac{3}{2}\frac{\ln 2}{\ln 2} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

7. $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9 = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 12 - \log_2 9 = \log_2 \frac{12^2}{9} = \log_2 16 = \boxed{4}$.

8. $7^{\log_{11} 2} - 2^{\log_{11} 7} = \boxed{0}$, так как $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

9. $\log_{16} \cos 16\pi = \log_{16} 1 = \boxed{0}$.

10. $\log_{\operatorname{tg} x} \cos x - \log_{\operatorname{tg} x} \sin x = \log_{\operatorname{tg} x} \frac{\cos x}{\sin x} = \log_{\operatorname{tg} x} \operatorname{ctg} x = \boxed{-1}$.

11. $\log_{27}(\log_8(\log_3 9)) = \log_{27}(\log_8 2) = \log_{27}\frac{1}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$.

12. $\frac{1}{2}\log_{14} 49 - 4\log_{\frac{1}{14}} \sqrt[4]{2} = \log_{14} 7 + 4\cdot\frac{1}{4}\log_{14} 2 = \log_{14} 7\cdot 2 = \boxed{1}$.

13. $\left(\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_9 4}\right)^{-3} = \left(\dfrac{-3\log_3 2}{\log_3 2}\right)^{-3} = \boxed{-\frac{1}{27}}$.

14. $\dfrac{\log_4 27}{\log_8 9} + \dfrac{\log_5 0{,}5}{\log_{0{,}008} 2} = \dfrac{\frac{3}{2}\log_2 3}{\frac{2}{3}\log_2 3} - \dfrac{\log_5 2}{-3\log_5 2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{31}{12}}$.

15. $6^{\ln 3\cdot\ln 1\cdot\ln 5} = 6^{\ln 3\cdot 0\cdot\ln 5} = 6^0 = \boxed{1}$.

Решение зачетной карточки 6

1. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-1} \log_5 5 = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{x^4} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{4}} \log_x x = \boxed{\dfrac{16}{3}}$.

3. $6^{\log_{\sqrt{6}} 5} = 6^{\frac{1}{\frac{1}{2}} \log_6 5} = \left(6^{\log_6 5}\right)^2 = 5^2 = \boxed{25}$.

4. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{10-\log_3 32} = \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{10-5\log_3 2} = 3^{2-\log_3 2} = 9 \cdot 3^{-\log_3 2} =$
$= \dfrac{9}{2} = \boxed{4{,}5}$.

5. $\dfrac{\log_3 5}{\log_9 \frac{1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\log_3 5}{\frac{-\frac{1}{2}}{2} \log_3 5} = \boxed{-4}$.

6. $\lg 7 \cdot \log_{49} 10 = \lg 7 \cdot \dfrac{1}{2} \log_7 10 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\lg 7}{\lg 7} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

7. $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 18 - \log_3 4 = \log_3 \dfrac{18^2}{4} = \log_3 81 = \boxed{4}$.

8. $\log_{15} \sin \dfrac{17\pi}{2} = \log_{15} 1 = \boxed{0}$.

9. $\log_{\sqrt[3]{\cos x}} \left(1 - \sin^2 x\right) = \log_{\sqrt[3]{\cos x}} \cos^2 x = \dfrac{2}{\frac{1}{3}} \log_{\cos x} \cos x = \boxed{6}$.

10. $4^{\log_3 5} - 5^{\log_3 4} = \boxed{0}$, так как $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

11. $\log_9 (\log_{27} (\log_2 8)) = \log_9 (\log_{27} 3) = \log_9 \dfrac{1}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$.

12. $\dfrac{1}{3} \log_{15} 27 - 2 \cdot \log_{\frac{1}{15}} \sqrt{5} = \log_{15} 3 + \log_{15} 5 = \log_{15} 15 = \boxed{1}$.

13. $\dfrac{\log_{25}\frac{1}{3}}{\log_{\frac{1}{25}} 27} - \dfrac{\log_6 8}{\log_6 0{,}25} = \dfrac{-\frac{1}{2}\log_5 3}{\frac{3}{-2}\log_5 3} - \dfrac{3\log_6 2}{-2\log_6 2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{11}{6}}.$

14. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{\log_{(\sqrt{11}-\sqrt{2})}\sqrt{3}} = \log_{\sqrt{3}}(11-2) =$

$= \log_{\sqrt{3}} 9 = \boxed{4}.$

15. $\ln 7 \cdot \log_{49} e = \ln 7 \cdot \dfrac{1}{2}\log_7 e = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln 7}{\ln 7} = \boxed{\dfrac{1}{2}}.$

Решение зачетной карточки 7

1. $\log_{0,5}\sqrt[3]{4}=\dfrac{\frac{2}{3}}{-1}\log_2 2=\boxed{-\dfrac{2}{3}}.$

2. $\log_{\sqrt[5]{a}}\sqrt[3]{a^5}=\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{5}}\log_a a=\dfrac{25}{3}=\boxed{8\dfrac{1}{3}}.$

3. $8^{\log_2 3}=2^{3\log_2 3}=3^3=\boxed{27}.$

4. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{8-\log_3 16}=\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{8-4\log_3 2}=3^{2-\log_3 2}=9\cdot 2^{-1}=\boxed{4{,}5}.$

5. $\dfrac{\log_8\sqrt[3]{5}}{\log_{\frac{1}{2}}25}=\dfrac{\frac{\frac{1}{3}}{3}}{\frac{2}{-1}}\log_2 5:\log_2 5=\boxed{-\dfrac{1}{18}}.$

6. $\ln 9\cdot\log_{\sqrt{3}}e=2\ln 3\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_3 e=4\dfrac{\ln 3}{\ln 3}=\boxed{4}.$

7. $\log_{\sqrt{2}}54-\log_4 9^6=\log_{\sqrt{2}}54-\log_{\sqrt{2}}9^{\frac{6}{4}}=$

$=\log_{\sqrt{2}}\dfrac{54}{9^{\frac{3}{2}}}=\log_{\sqrt{2}}\dfrac{54}{27}=\log_{\sqrt{2}}2=\boxed{2}.$

8. $2^{\log_3 11}-11^{\log_3 2}=\boxed{0}$, так как $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$.

9. $\left(\dfrac{\log_6 27+2\log_6 2}{\log_6\sqrt[3]{0{,}25}+\log_6\frac{1}{3}}\right)^3=\left(\dfrac{\log_6(27\cdot 4)}{\log_6\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}{3}}\right)^3=\left(\dfrac{\log_6 108}{\log_6\frac{1}{\sqrt[3]{108}}}\right)^3=\boxed{-27}.$

10. $\log_{\cos\frac{\pi}{4}}8=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}8=\log_{2^{-\frac{1}{2}}}2^3=\dfrac{3}{-\frac{1}{2}}\log_2 2=\boxed{-6}.$

11. $\log_{\frac{9}{4}}\left(\log_8\left(\log_2 16\right)\right)=\log_{\frac{9}{4}}\left(\log_8 4\right)=\log_{\frac{9}{4}}\dfrac{2}{3}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}.$

12. $\dfrac{1}{3}\lg 8-2\lg\sqrt{0{,}2}=\lg 2-\lg 0{,}2=\lg\dfrac{2}{0{,}2}=\lg 10=\boxed{1}.$

13. $3\log_{\operatorname{tg}x}\sin x-\log_{\operatorname{tg}x}\cos^3 x=\log_{\operatorname{tg}x}\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}=\log_{\operatorname{tg}x}\operatorname{tg}^3 x=\boxed{3}.$

14. $\log_4 19-\dfrac{1}{2}\log_4\left(\dfrac{19}{64}\right)^2=\log_4 19-\log_4\dfrac{19}{64}=\log_4 64=\boxed{3}.$

15. $5^{\lg 7\cdot\log_6 1}=5^{\lg 7\cdot 0}=5^0=\boxed{1}.$

Решение зачетной карточки 8

1. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-1} \log_3 3 = \boxed{-\dfrac{2}{3}}.$

2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[4]{a^5} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{3}} \log_a a = \boxed{\dfrac{15}{4}}.$

3. $27^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}.$

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6-3\log_2 3} = 2^{2-\log_2 3} = 2^2 \cdot \left(2^{\log_2 3}\right)^{-1} = \boxed{\dfrac{4}{3}}.$

5. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{2}}{\log_9 8} = \dfrac{\frac{\frac{1}{4}}{-1} \log_3 2}{\frac{3}{2} \log_3 2} = \boxed{-\dfrac{1}{6}}.$

6. $\lg 27 \cdot \log_9 10 = 3 \lg 3 \cdot \dfrac{1}{2} \log_3 10 = \dfrac{3 \lg 3}{2 \lg 3} = \boxed{\dfrac{3}{2}}.$

7. $\log_{\sqrt{3}} 24 - \log_9 4^6 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 24 - \dfrac{4}{2} \log_3 2^3 = 2\left(\log_3 24 - \log_3 8\right) =$
$= 2 \log_3 3 = \boxed{2}.$

8. $\log_{\cos 2\alpha}\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) = \log_{\cos 2\alpha} \cos 2\alpha = \boxed{1}.$

9. $5^{\log_7 3} - 3^{\log_7 5} = \boxed{0}$, так как $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

10. $\log_7 \sin \dfrac{13\pi}{2} = \log_7 \sin \dfrac{\pi}{2} = \log_7 1 = \boxed{0}.$

11. $\log_9\left(\log_{\frac{1}{8}} (\log_{49} 7)\right) = \log_9 \left(\log_{\frac{1}{8}} \left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \log_9 \dfrac{1}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}.$

12. $2 \log_{18} 3 - \dfrac{1}{3} \log_{\frac{1}{18}} 8 = \log_{18} 9 + \log_{18} 2 = \log_{18} 18 = \boxed{1}.$

13. $\ln 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} e = 3 \ln 2 \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 e = 6 \cdot \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = \boxed{6}.$

14. $\log_8 15 - \dfrac{1}{3} \log_8 \left(\dfrac{15}{32}\right)^3 = \log_8 15 + \log_8 \dfrac{32}{15} = \dfrac{1}{3} \log_2 2^5 = \boxed{\dfrac{5}{3}}.$

15. $8^{\log_5 7 \log_3 1} = 8^{\log_5 7 \cdot 0} = 8^0 = \boxed{1}.$

Решение зачетных карточек 2 (на уравнения и неравенства)

Решение зачетной карточки 1

1. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$

$\sqrt{\frac{1}{2}(1+\log_x 5)} = -\log_x 5;\quad \begin{cases} \log_x 5 \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}(1+\log_x 5) = \log_x^2 5. \end{cases}$

Пусть $\log_x 5 = t$, тогда $\begin{cases} t \leqslant 0 \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_x 5 = -\frac{1}{2};\quad x^{-\frac{1}{2}} = 5;\quad x = 5^{-2};\quad x = 0{,}04.$

Ответ: $x = 0{,}04$.

2. $\log_{9x^2}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant \frac{1}{2}.$

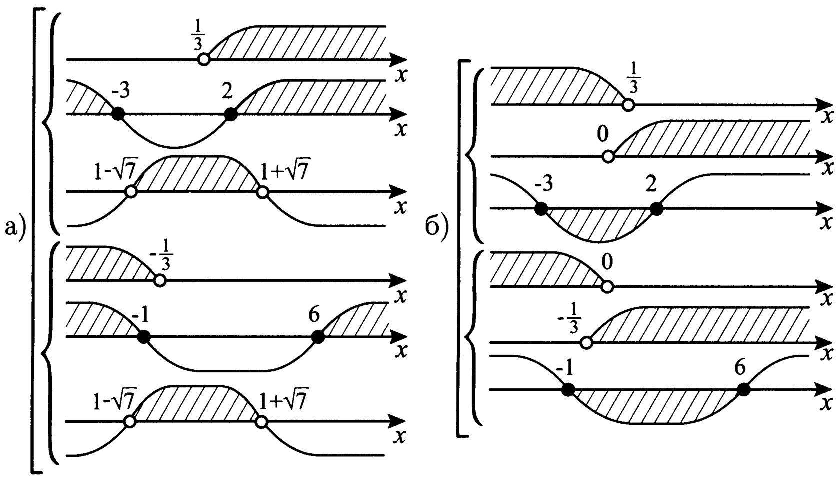
$\frac{1}{2}\log_{|3x|}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant \frac{1}{2};\quad \log_{|3x|}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant 1;$

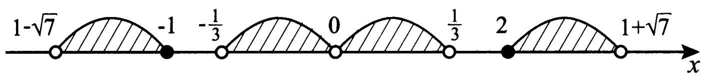
$\log_{|3x|}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant \log_{|3x|}|3x| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |3x| > 1 \\ 6+2x-x^2 \leqslant |3x| \\ 6+2x-x^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} |3x| < 1 \\ |3x| > 0 \\ 6+2x-x^2 \geqslant |3x| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

а) $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x > 1 \\ x^2+x-6 \geqslant 0 \\ 6+2x-x^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x < -1 \\ x^2-5x-6 \geqslant 0 \\ 6+2x-x^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

б) $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x < 1 \\ x > 0 \\ x^2+x-6 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x > -\frac{1}{3} \\ x^2-5x-6 \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$





Ответ: $\left(1-\sqrt{7};-1\right]\cup\left(-\dfrac{1}{3};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[2;1+\sqrt{7}\right)$.

3. $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=8.$

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}};\qquad \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=t;\qquad (t>0);$$

$$t+\frac{1}{t}=8;\qquad t^2-8t+1=0;\qquad t_{1,2}=4\pm\sqrt{15};$$

$$\left[\begin{array}{l}4+\sqrt{15}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}}\\ 4-\sqrt{15}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{2;-2\}$.

4. $x^{\lg 81}-9^{\lg x}=6.$

Заметим, что $x^{2\lg 9}=9^{2\lg x}$. Пусть $9^{\lg x}=t$ $(t>0)$. Тогда

$$t^2-t-6=0;\qquad \left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-2\notin E(t);\end{array}\right.\qquad 9^{\lg x}=3;\qquad 2\lg x=1;$$

$x=\sqrt{10}.$

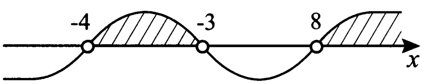
Ответ: $\sqrt{10}$.

5. $\log_{0,5}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \dfrac{x^2+x}{x+4} > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x}{x+4} > 6;$$

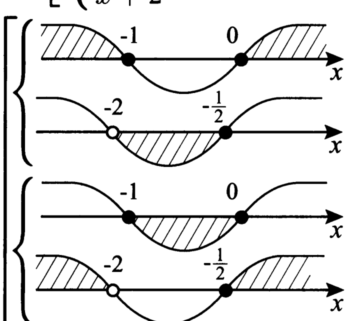
$$\frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0; \qquad \frac{(x-8)(x+3)}{x+4} > 0.$$



Ответ: $(-4;-3) \cup (8;\infty)$.

6. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \left(x^2+x+1\right)^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 1 \\ \dfrac{x+5}{x+2} \geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x+1 \leqslant 1 \\ x^2+x+1 > 0 \\ \dfrac{x+5}{x+2} \leqslant 3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x \geqslant 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$$



Ответ: $(-2;-1] \cup \left[-\dfrac{1}{2};0\right]$.

7. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0.$

$81 \cdot 3^{2x} + 45 \cdot 2^x \cdot 3^x - 36 \cdot 2^{2x} = 0.$

Разделим обе части уравнения на 2^{2x}:

$$81 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 45 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 36 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = t$ $(t > 0)$. Тогда

$9t^2 + 5t - 4 = 0;$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{18} = \frac{-5 \pm 13}{18}; \qquad \left[\begin{array}{l} t = -1 \notin E(t) \\ t = \frac{4}{9}; \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = \frac{4}{9}; \qquad x = -2.$$

Ответ: -2.

8. $\log_{36} 8 = a. \quad \log_{36} 9 = ?$

а) $\log_{36} 8 = \dfrac{3}{2}\log_6 2 = \dfrac{3}{2\,(1+\log_2 3)} = a;$

$$\frac{3}{2a} = 1 + \log_2 3;$$

$$\log_2 3 = \frac{3}{2a} - 1 = \frac{3-2a}{2a};$$

$$\log_3 2 = \frac{2a}{3-2a}.$$

б) $\log_{36} 9 = \log_6 3 = \dfrac{1}{\log_3 6} = \dfrac{1}{\log_3 2 + 1} = \dfrac{1}{\frac{2a}{3-2a}+1} = \dfrac{3-2a}{3}.$

Итак, $\log_{36} 9 = \dfrac{3-2a}{3}.$

Решение зачетной карточки 2

1. $\log_x(\log_2(4^x-6)) \leqslant 1 \Leftrightarrow \log_x(\log_2(4^x-6)) \leqslant \log_x x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \log_2(4^x-6)\leqslant x \\ \log_2(4^x-6)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ \log_2(4^x-6)>0 \\ \log_2(4^x-6)\geqslant x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ 4^x>6 \\ 4^x-2^x-6\leqslant 0 \\ 4^x-6>1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 4^x-6>1 \\ 4^x-2^x-6\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x>\log_4 7 \\ (2^x-3)(2^x+2)\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ x>\log_4 7 \\ (2^x-3)(2^x+2)\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ \varnothing \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\log_4 7 \\ x\leqslant \log_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\log_4 7 \\ x\leqslant \log_4 9. \end{cases}$$

Ответ: $(\log_4 7; \log_4 9]$.

2. $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x = x+4.$

$D(\text{У})$: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$. Учитывая, что $\log_x 27 = 3\log_x 3$

и $\log_9 x = \dfrac{1}{2}\log_3 x$, получаем $\dfrac{3}{2}x^2\log_x 3^{\log_3 x} = x+4;$

$\dfrac{3}{2}x^2 = x+4; \quad 3x^2-2x-8=0;$

$x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{3} = \dfrac{1\pm 5}{3}; \quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{4}{3}\notin D(\text{У}); \end{array}\right. \quad x=2.$

Ответ: 2.

3. $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} < 17.$

Пусть $x^{\log_2 x} = t \ \ (t > 0)$, тогда $t + \dfrac{16}{t} < 17;$

$\dfrac{t^2 - 17t + 16}{t} < 0; \qquad \dfrac{(t-1)(t-16)}{t} < 0; \qquad 1 < x^{\log_2 x} < 16$

(так как $y = \log_2 x$ — возрастающая функция);

$\log_2 1 < \log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 16; \qquad 0 < \log_2^2 x < 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 2 \\ \log_2 x > -2 \\ \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > \dfrac{1}{4} \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 4)$.

4. $3 \cdot 7^{\log_x 2 - 1} + 3^{\log_x 2} = 3^{\log_x 2 + 1} + 3^{\log_x 2 - 1}.$

$\dfrac{3}{7} \cdot 7^{\log_x 2} = 3 \cdot 3^{\log_x 2} - 3^{\log_x 2} + \dfrac{1}{3} 3^{\log_x 2}; \qquad \dfrac{3}{7} \cdot 7^{\log_x 2} = \dfrac{7}{3} \cdot 3^{\log_x 2};$

$7^{\log_x 2 - 2} = 3^{\log_x 2 - 2}; \qquad \left(\dfrac{7}{3}\right)^{\log_x 2 - 2} = 1;$

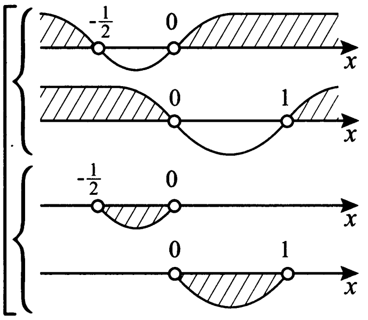
$$\log_x 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}; \qquad x = \sqrt{2}.$$

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

5. $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > \left(4x^2 + 2x + 1\right)^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 > 1 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 < 1 \\ 4x^2 + 2x + 1 > 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x(2x+1) > 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x(2x+1) < 0 \\ x(x-1) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$



Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$.

6. $\log_{14} 2 = a$. $\quad \log_{49} 16 = ?$

$$\log_{14} 2 = \frac{1}{\log_2 14} = \frac{1}{1 + \log_2 7} = a; \qquad \log_2 7 = \frac{1}{a} - 1;$$

$$\log_{49} 16 = \log_7 4 = 2\log_7 2 = \frac{2}{\log_2 7} = \frac{2}{\frac{1}{a} - 1} = \frac{2a}{1-a}.$$

Итак, $\log_{49} 16 = \dfrac{2a}{1-a}$.

7. $\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Пусть $\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x = t$ $(t > 0)$, тогда

$$7 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}}; \qquad t + \frac{1}{t} = 4; \qquad t^2 - 4t + 1 = 0;$$

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}; \qquad 7 + 4\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2;$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{2; -2\}$.

8. $16^x + 625^x - 3\cdot 100^x - 2\cdot 4^x\left(4^x - 25^x\right) + 2\cdot 40^x = 0.$

$2^{4x} + 5^{4x} - 3\cdot 2^{2x}\cdot 5^{2x} - 2\cdot 2^{2x}\left(2^{2x} - 5^{2x}\right) + 2\cdot 2^{3x}\cdot 5^x = 0;$

$2^{4x} + 5^{4x} - 3\cdot 2^{2x}\cdot 5^{2x} - 2\cdot 2^{4x} + 2\cdot 2^{2x}\cdot 5^{2x} + 2\cdot 2^{3x}\cdot 5^x = 0;$

$-2^{2x}\cdot 5^{2x} - 2^{4x} + 5^{4x} + 2\cdot 2^{3x}\cdot 5^x = 0;$

$5^{4x} - \left(2^{4x} - 2\cdot 2^{2x}\cdot 2^x\cdot 5^x + 2^{2x}\cdot 5^{2x}\right) = 0;$

$5^{4x} - \left(2^{2x} - 2^x\cdot 5^x\right)^2 = 0;$

$\left(5^{2x} + 2^{2x} - 2^x\cdot 5^x\right)\left(5^{2x} - 2^{2x} + 2^x\cdot 5^x\right) = 0.$

Разделим выражение в каждой скобке на 2^{2x}:

$$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{2}\right)^{x} + 1\right]\cdot\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 1\right] = 0;$$

$\mathcal{D} < 0$ для $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{2}\right)^{x} + 1 = 0;$

$\left(\frac{5}{2}\right)^{x}_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ для $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 1 = 0;$

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin E\left(y = \left(\frac{5}{2}\right)^{x}\right);$

$\left(\frac{5}{2}\right)^{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$

$x = \log_{\frac{5}{2}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Ответ: $x = \log_{\frac{5}{2}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Решение зачетной карточки 3

1. $$\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right) =$$

$$= \left[\left(3^3\right)^{\log_3 2} + 5^{\log_5 7}\right] \cdot \left[9^{2\log_9 4} - 2^{3\log_2 3}\right] =$$

$$= (8+7)(16-27) = 15 \cdot (-11) = -165.$$

Ответ: -165.

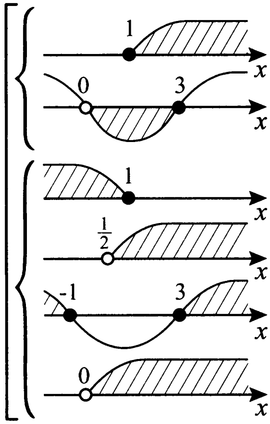
2. $$\left(2^x - 2 \cdot 2^{-x}\right)^{\log_9 (2x+3) - \log_3 x} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x - 2 \cdot 2^{-x}\right)^{\log_9 (2x+3) - \log_3 x} \geqslant \left(2^x - 2 \cdot 2^{-x}\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 2\cdot 2^{-x} \geqslant 1 \\ \log_9 (2x+3) - \log_3 x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 2\cdot 2^{-x} \leqslant 1 \\ 2^x - 2\cdot 2^{-x} > 0 \\ \log_9 (2x+3) - \log_3 x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 2\cdot 2^{-x} \geqslant 1 \\ 2x+3 \geqslant x^2 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 2\cdot 2^{-x} \leqslant 1 \\ 2^{2x} - 2 > 0 \\ 2x+3 \leqslant x^2 \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{2x} - 2^x - 2 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{2x} - 2^x - 2 \leqslant 0 \\ 2^{2x} > 2 \\ x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x \geqslant 2 \\ 2^x \leqslant -1 \quad \emptyset \end{array}\right. \\ (x-3)(x+1) \leqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x \leqslant 2 \\ 2^x \geqslant -1 \; (\forall x) \\ x > \dfrac{1}{2} \\ x > 0 \\ (x-3)(x+1) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 1\\ (x-3)(x+1)\leqslant 0\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases} x\leqslant 1\\ x>\dfrac{1}{2}\\ x>0\\ (x-3)(x+1)\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$



$\emptyset$

Ответ: $[1;3]$.

3. $\left(\log_{\sqrt{3}} x\right)\sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3-\log_x 9}+4=0.$

Поскольку $\log_{a^k} x=\dfrac{1}{k}\log_{|a|} x$, $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$, исходное уравнение преобразуется к виду $2\log_3 x\sqrt{2-2\log_x 3}=-4$. Заметив, что $\log_3 x=\dfrac{1}{\log_x 3}$, получим

$$\sqrt{2-2\log_x 3}=-2\log_x 3 \Leftrightarrow \begin{cases}2-2\log_x 3=4\log_x^2 3\\ \log_x 3\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\log_x^2 3+\log_x 3-1=0\\ \log_x 3\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_x 3=-1\\ \log_x 3=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ \log_x 3\leqslant 0;\end{cases}$$

$$\log_x 3=-1;\quad 3=\frac{1}{x};\quad x=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x=\dfrac{1}{3}$.

4. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 5$?

$\log_a\dfrac{m+n}{2}>\dfrac{1}{2}\left(\log_a m+\log_a n\right)$ при $a>1$, поэтому

$$\log_2 3=\log_2\frac{6}{2}=\log_2\frac{4+2}{2}>\frac{1}{2}\left(\log_2 4+\log_2 2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(2+1)=1{,}5;$$

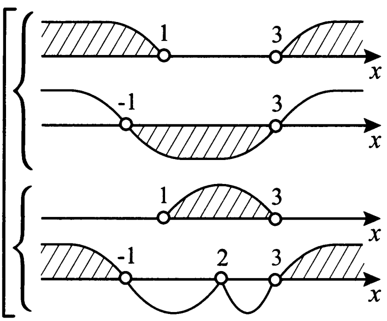
$$\log_2 3 - \log_3 5 > 1{,}5 - \log_3 5 = \log_3 3^{\frac{3}{2}} - \log_3 5 =$$
$$= \log_3 \sqrt{27} - \log_3 5 > 0 \ \ (\text{так как } \sqrt{27} > 5).$$

Итак, $\log_2 3 > \log_3 5$.

5. $|x-2|^{x^2-2x-3} < 1 \Leftrightarrow |x-2|^{x^2-2x-3} < |x-2|^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-2| > 1 \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} |x-2| < 1 \\ x^2-2x-3 > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-2 > 1 \\ x-2 < -1 \end{array}\right. \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 1 \\ x-2 > -1 \\ (x-3)(x+1) > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \\ (x-3)(x+1) > 0 \\ x \neq 2. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-1; 1)$.

6. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \dfrac{10}{3}$.

$5 - 2\sqrt{6} = \dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$. Пусть $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = t \ \ (t > 0)$,

тогда $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{10}{3}$; $\quad 3t^2 - 10t + 3 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3}; \end{array}\right.$

$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\sin x} = 3$;

$\sin x = \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3 < 1$, так как $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 3$;

$x = (-1)^k \arcsin \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$.

б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\sin x} = \dfrac{1}{3}$;

$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2} > 3; \quad \sin x = \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\left(\dfrac{1}{3}\right)$;

$x = (-1)^n \arcsin \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\left(\dfrac{1}{3}\right) + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$

Верно ли, что $\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \dfrac{1}{3} \leqslant -1$?

$\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \dfrac{1}{3} \leqslant \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < \sqrt{3}-\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{9} < 3+2-2\sqrt{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} < 4\dfrac{8}{9} = \dfrac{44}{9} \Leftrightarrow \sqrt{6} < \dfrac{22}{9} \Leftrightarrow 6 < \dfrac{484}{81}$ — ложь.

Таким образом, $\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \dfrac{1}{3} > -1$, т. е. решение существует.

Ответ: а) $x = (-1)^k \arcsin \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$;

б) $x = (-1)^n \arcsin \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\left(\dfrac{1}{3}\right) + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$

7. $2^{3x} - 8\cdot 2^{-3x} - 6\cdot 2^x + 12\cdot 2^{-x} = 1.$

Пусть $2^x - 2\cdot 2^{-x} = t$.

Тогда, поскольку $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, имеем
$t^3 = 2^{3x} - 6\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-x} + 12\cdot 2^x\cdot 2^{-2x} - 8\cdot 2^{-3x} =$
$= \underline{2^{3x}} - 6\cdot 2^x + 12\cdot 2^{-x} - \underline{8\cdot 2^{-3x}} =$
$= 2^{3x} - 8\cdot 2^{-3x} - 6\cdot 2^x + 12\cdot 2^{-x} = (2^x - 2\cdot 2^{-x})^3$, т. е. уравнение приобретает вид $(2^x - 2\cdot 2^{-x})^3 = 1$. Следовательно,
$2^x - 2\cdot 2^{-x} = 1;\ 2^{2x} - 2^x - 2 = 0;\ \left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = -1 \notin E\,(y = 2^x); \end{array}\right.\ x = 1.$

Ответ: 1.

8. $\left.\begin{array}{l} \log_5 4 = a \\ \log_5 3 = b \end{array}\right|\ \log_{25} 12 = ?$

$\log_{25} 12 = \dfrac{1}{2}\log_5 12 = \dfrac{1}{2}(\log_5 4 + \log_5 3) = \dfrac{a+b}{2}.$

9 Зак. 1157

Решение зачетной карточки 4

1. $\left.\begin{array}{l}\lg 3 = a\\ \lg 2 = b\end{array}\right|\quad \log_5 6 = ?$

$a + b = \lg 3 + \lg 2 = \lg 6;$

$$\log_6 5 = \log_6 10 - \log_6 2 = \frac{1}{\lg 6} - \frac{1}{\log_2 6} =$$

$$= \frac{1}{a+b} - \frac{1}{1+\log_2 3} = \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \log_2 3}$$

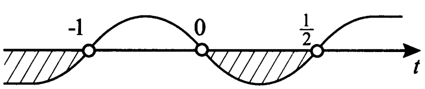
$$= \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a/b+1} = \frac{1}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{1-b}{a+b};$$

$$\log_5 6 = \frac{a+b}{1-b}.$$

2. $2x^{\log_{\frac{1}{2}} x} - x^{-\log_{\frac{1}{2}} x} < -1.$

Пусть $x^{\log_{\frac{1}{2}} x} = t \ (t > 0)$.

Тогда $2t - \dfrac{1}{t} + 1 < 0;\quad \dfrac{2t^2+t-1}{t} < 0;\quad \dfrac{(2t-1)(t+1)}{t} < 0;$



$(-\infty; -1) \not\subset E(t)$

$$\begin{cases} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \dfrac{1}{2} & \text{(так как } y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ — убывающая функция)}\\ x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > 0 & (\forall x)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log^2_{\frac{1}{2}} x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}} x > 1\\ \log_{\frac{1}{2}} x < -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2}\\ \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < x < \dfrac{1}{2}\\ x > 2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$.

3. $4^{-x}-3^{-x-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}-x}-2^{-2x-1}$. $4^{-x}+4^{-x-\frac{1}{2}}=3^{-x+\frac{1}{2}}+3^{-x-\frac{1}{2}}$;

$4^{-x-\frac{1}{2}}(2+1)=3^{-x-\frac{1}{2}}(3+1)$; $4^{-x-1\frac{1}{2}}-3^{-x-1\frac{1}{2}}=0$;

$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x-1\frac{1}{2}}=1$; $x=-1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

4. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=\left(2\sqrt{2}\right)^x$.

Разделим обе части уравнения на $\left(2\sqrt{2}\right)^x$:

$$\left(\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}}\right)^x+\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{8}}\right)^x=1.$$

Пусть $a=\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{15}}{8}}\leqslant 1$, $b=\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{15}}{8}}\leqslant 1$.

Но $a^2+b^2=1$, следовательно, можно положить $a=\sin\alpha$ и $b=\cos\alpha$.

Тогда уравнение примет вид $(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x=1$. Это возможно, если $x=2$, т. е. в случае тригонометрического тождества.

Ответ: 2.

5. $\dfrac{1}{\log_3(x^2-7x+12)}<\dfrac{1}{\log_3 20}$.

$$\frac{\log_3 20-\log_3\left(x^2-7x+12\right)}{\log_3 20\cdot\log_3\left(x^2-7x+12\right)}<0.$$

Заметим, что $\log_3 20>0$, поэтому неравенство приобретает вид $\dfrac{\log_3\frac{x^2-7x+12}{20}}{\log_3(x^2-7x+12)}>0$.

Поскольку $\log_a b>0\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(b-1)>0\\ a>0\\ b>0\end{cases}$, имеем

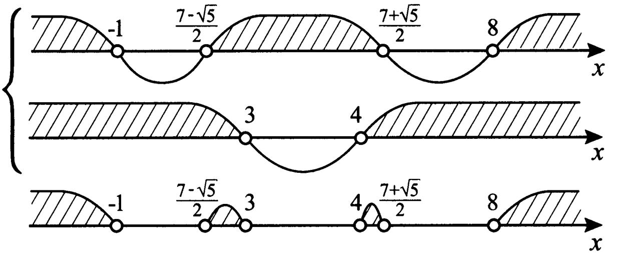
$$\log_{(x^2-7x+12)}\frac{x^2-7x+12}{20}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x^2-7x+12}{20}-1\right)\left(x^2-7x+12-1\right)>0 \\ x^2-7x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-7x-8\right)\left(x^2-7x+11\right)>0 \\ x^2-7x+12>0; \end{cases}$$

$x^2-7x-8=(x-8)(x+1)$; $\quad x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$;

$x^2-7x+11=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-44}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}$;



Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{7-\sqrt{5}}{2};3\right)\cup\left(4;\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(8;\infty)$.

6. $\log_2\left(2^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)>-2$.

Пусть $\log_2\left(2^x-1\right)=t$.

Тогда $\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)=-1-\log_2\left(2^x-1\right)$; $\; t(-1-t)>-2$;

$t^2+t-2<0$; $\quad -2<t<1$;

$$\begin{cases} \log_2\left(2^x-1\right)<1 \\ \log_2\left(2^x-1\right)>-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$y=\log_2 x$ — возрастающая функция

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-1<2 \\ 2^x-1>\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x<3 \\ 2^x>\dfrac{5}{4}; \end{cases}$$

$\log_2\dfrac{5}{4}<x<\log_2 3$ ($y=\log_2 x$ — возрастающая функция).

Ответ: $\left(\log_2\dfrac{5}{4};\log_2 3\right)$.

7. $\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = x + \lg 25.$

$\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = \lg 10^x + \lg 25;$

$\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = \lg 25\cdot 10^x; \quad 6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x = 25\cdot 10^x.$

Разделим обе части уравнения на 5^x: $6 + 25\cdot 4^x = 25\cdot 2^x$.

Пусть $2^x = t$ $(t > 0)$. Тогда $25t^2 - 25t + 6 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{25\pm 5}{50}; \quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{5} \\ t = \dfrac{2}{5}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^x = \dfrac{3}{5} \\ 2^x = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2 0{,}6 \\ x = \log_2 0{,}4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\log_2 0{,}6; \log_2 0{,}4\}$.

8. $$\begin{cases} (\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[9]{x^{15}} \\ (\sqrt[5]{x})^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt[6]{x^{-2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3}} = x^{\frac{15}{9}} \\ x^{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{5}} = x^{-\frac{2}{6}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \neq 1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y} = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \\ x = 1 \quad (\forall y \geqslant 0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{5}{3} \\ \sqrt{y} = \dfrac{10}{3} \end{cases} \\ x = 1 \quad (\forall y \geqslant 0); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{9} \\ y = \dfrac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\dfrac{7}{9} \\ y = 11\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Пусть $y = t$; пара чисел $(1; t)$ $\forall t \geqslant 0$ является решением.

Ответ: $\left(2\dfrac{7}{9}; 11\dfrac{1}{9}\right) \cup (1; t)$ где $\forall t \geqslant 0$.

Решение зачетной карточки 5

1. $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1.$

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{2}} + \log_3 x > 1; \qquad \log_3 x \left(\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} + 1\right) > 1;$$

$$\log_3 x \cdot \frac{1 + \log_3 \frac{1}{2}}{\log_3 \frac{1}{2}} > 1, \text{ так как } \log_3 \frac{1}{2} < 0 \text{ и } \log_3 \frac{1}{2} + 1 > 0;$$

$$\log_3 x < \frac{\log_3 \frac{1}{2}}{1 + \log_3 \frac{1}{2}}; \qquad \log_3 x < \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2} + 1}},$$

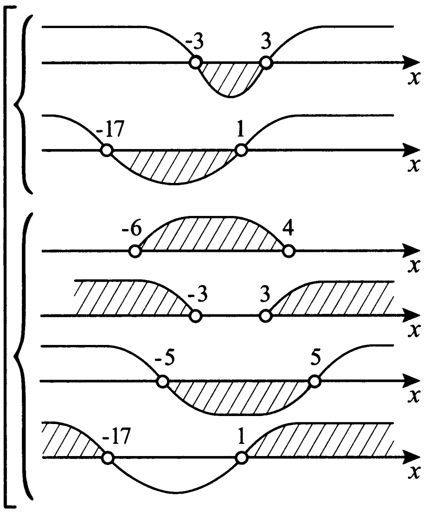
$$\text{так как } \frac{1}{\log_3 \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\log_3 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 3.$$

Ответ: $0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1,5} 3}$.

2. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24 - 2x - x^2}{14}\right) > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24 - 2x - x^2}{14}\right) > \log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{25 - x^2}{16}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{25 - x^2}{16} > 1 \\ \dfrac{24 - 2x - x^2}{14} > \dfrac{25 - x^2}{16} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{24 - 2x - x^2}{14} > 0 \\ 0 < \dfrac{25 - x^2}{16} < 1 \\ \dfrac{24 - 2x - x^2}{14} < \dfrac{25 - x^2}{16} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 < 9 \\ x^2 + 16x - 17 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 24 < 0 \\ x^2 > 9 \\ x^2 < 25 \\ x^2 + 16x - 17 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-3;1)\cup(3;4)$.

3. $81^x - 16^x - 2\cdot 9^x\left(9^x - 4^x\right) + 36^x = 0.$

$81^x - 16^x - 2\cdot 81^x + 2\cdot 36^x + 36^x = 0;$

$3\cdot 36^x - 81^x - 16^x = 0;$

$3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{4x} - 1 = 0.$

Пусть $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} = t\ \ (t > 0)$. Тогда

$t^2 - 3t + 1 = 0;\qquad t_{1,2} = \dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2};\qquad t = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\in(0;\infty).$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{3+\sqrt5}{2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}\\ \dfrac{3-\sqrt5}{2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\log_{\frac32}\dfrac{3+\sqrt5}{2}\\ 2x=\log_{\frac32}\dfrac{3-\sqrt5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac12\log_{\frac32}\dfrac{3+\sqrt5}{2}\\ x=\dfrac12\log_{\frac32}\dfrac{3-\sqrt5}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac12\log_{\frac32}\dfrac{3+\sqrt5}{2};\ \dfrac12\log_{\frac32}\dfrac{3-\sqrt5}{2}\right\}$.

4. $$\begin{cases} \log_3(x+2y)+\log_{\frac{1}{3}}(x-2y)=1 \\ x^2+y^2=4+\dfrac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{x+2y}{x-2y}=1 \\ x^2+y^2=4+\frac{1}{2}y \\ x+2y>0 \\ x-2y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3(x-2y) \\ x^2+y^2=4+\frac{1}{2}y \\ x+2y>0 \\ x-2y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ 16y^2+y^2=4+\frac{1}{2}y \\ x+2y>0 \\ x-2y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ 34y^2-y-8=0 \\ x+2y>0 \\ x-2y>0; \end{cases}$$

$$34y^2-y-8=0; \qquad y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+1088}}{68}=\frac{1\pm 33}{68};$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}; x=2 \\ y=-\dfrac{8}{17}; x=-1\dfrac{15}{17}. \end{array}\right.$$

Следовательно, наша система равносильна следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x=2 \\ 2+2\cdot\frac{1}{2}>0 \\ 2-2\cdot\frac{1}{2}>0 \end{cases} & \text{— истина} \\ \begin{cases} y=-\frac{8}{17} \\ x=-1\frac{15}{17} \\ -1\frac{15}{17}+\frac{-16}{17}>0 \\ -1\frac{15}{17}+\frac{16}{17}>0 \end{cases} & \text{— ложь} \end{array}\right.$$

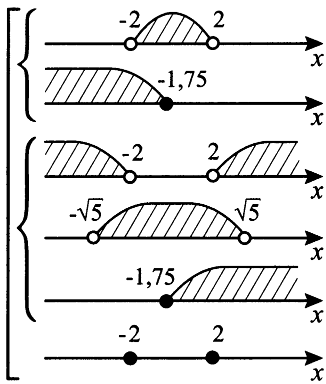
Ответ: $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

5. $\left(5-x^2\right)^{4x+7} \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(5-x^2\right)^{4x+7} \leqslant \left(5-x^2\right)^0$.

а) Поскольку

$$a^{f(x)} \leqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f(x)\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ \forall x\in D(f), \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{имеем} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5-x^2>1 \\ 4x+7\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5-x^2<1 \\ 5-x^2>0 \\ 4x+7\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5-x^2=1 \\ \forall x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ x>-2 \\ x\leqslant -1{,}75 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right. \\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \\ x\geqslant -1{,}75 \end{cases} \\ x^2=4. \end{array}\right.$$



б) При $x=\sqrt{5}$ $\quad 0^{4\sqrt{5}+7}\leqslant 1$ — истина.

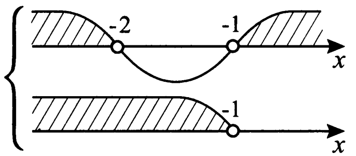
в) При $x=-\sqrt{5}$ $\quad 0^{-5\sqrt{5}+7}$ — не определено.

Ответ: $[-2;-1{,}75]\cup\left[2;\sqrt{5}\right]$.

6. $\log_2\left(\log_3\dfrac{x-1}{x+1}\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

$\log_2\left(\log_3\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\log_2\left(\log_3\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0;\ \ 2\log_2\left(\log_3\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0;$

$$\begin{cases} \log_3\dfrac{x-1}{x+1}<1 \\ \log_3\dfrac{x-1}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}<3 \\ \dfrac{x-1}{x+1}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+4}{x+1}>0 \\ \dfrac{2}{x+1}<0. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -2)$.

7. $\sqrt[x]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} - \sqrt[x]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} - \sqrt[x]{\frac{2}{3}} + \sqrt[x]{\frac{3}{2}} = 3.$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^3 - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^3 - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right) = 3;$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} - 1\right) = 3;$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right) = 3;$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2\right) = 3.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t$. Тогда $t\left(t^2 + 2\right) = 3$;

$t^3 + 2t - 3 = 0$; $\quad f(t) = t^3 + 2t - 3$; $\quad f(1) = 0$.

Поделим $f(t)$ на $t - 1$:

$$\begin{array}{l|l}
-\;\; t^3 \qquad + 2t - 3 & t - 1 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{t^3 - t^2} & t^2 + t + 3 \quad (\mathcal{D} < 0) \\
\qquad -\;\; t^2 + 2t - 3 & \\
\qquad\quad \underline{t^2 - \;\; t} & \\
\qquad\qquad -\;\; 3t - 3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{3t - 3} &
\end{array}$$

Итак, $(t - 1)\left(t^2 + t + 3\right) = 0$; $\quad t = 1$; $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$

Пусть $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = m \ (m > 0)$, тогда

$$m-\frac{1}{m}=1; \quad m^2-m-1=0; \quad m_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\notin(0;\infty) \\ m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\in(0;\infty) \end{array}\right.; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \frac{1}{x}=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x=\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

8. Сравните $\log_3 5$ и $\log_{11} 15$.

$1<\log_3 5<2; \quad 1<\log_{11} 15<2.$

Разделим интервал $(1;2)$ на две части: $(1;1{,}5)$ и $(1{,}5;2)$.

Поскольку $1{,}5=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\log_3 3\sqrt{3}>\log_3 5,\ 1<\log_3 5<1{,}5.$

Поскольку $1{,}5=\log_{11} 11^{\frac{3}{2}}=\log_{11} 11\sqrt{11}>\log_{11} 15,$
$1<\log_{11} 15<1{,}5.$

Разделим интервал $(1;1{,}5)$ на две части:
$\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{5}{4};1{,}5\right)$.

Поскольку $\dfrac{5}{4}=\log_3 3^{\frac{5}{4}}=\log_3 3\sqrt[4]{3}<\log_3 5$ $(9\sqrt{3}<25$, так как $81\cdot 3<625)$, $\log_3 5>\dfrac{5}{4}$.

Поскольку $\dfrac{5}{4}=\log_{11} 11^{\frac{5}{4}}=\log_{11} 11\sqrt[4]{11}>\log_{11} 15$
$(121\cdot\sqrt{11}>225; \quad \sqrt{11}>3)$,
$\log_{11} 15<\dfrac{5}{4}$.

Итак, $\log_3 5>\log_{11} 15$, что и требовалось выяснить.

Решение зачетной карточки 6

1. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x \leqslant 2.$

$\frac{1}{2} \log_2 \log_2 x + \log_2 \frac{1}{2} \log_2 x \leqslant 2;$

$\log_2 \sqrt{\log_2 x} + \log_2 \log_2 x^{\frac{1}{2}} \leqslant 2;$

$\log_2 \left(\sqrt{\log_2 x} \cdot \frac{1}{2} \log_2 x \right) \leqslant \log_2 4;$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\log_2 x)^{\frac{3}{2}} \leqslant 4 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 x)^{\frac{3}{2}} \leqslant 8 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leqslant 4 \\ \log_2 x > 0 \end{cases}$$

$1 < x \leqslant 2^4.$

Ответ: $(1; 16]$.

2. $4^{\lg x + 1} - 6^{\lg x} - 3 \cdot 3^{\lg x^2} = 0.$

$4 \cdot 4^{\lg x} - 6^{\lg x} - 3 \cdot 3^{2 \lg x} = 0.$

Разделим обе части уравнения на $3^{2 \lg x}$:

$4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{2 \lg x} - \left(\frac{2}{3} \right)^{\lg x} - 3 = 0.$

Пусть $\left(\frac{2}{3} \right)^{\lg x} = t$ $(t > 0)$, тогда $4t^2 - t - 3 = 0;$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8};$

$$\left[\begin{aligned} & t = 1 \\ & t = -\frac{3}{4} \notin E(t); \end{aligned} \right.$$

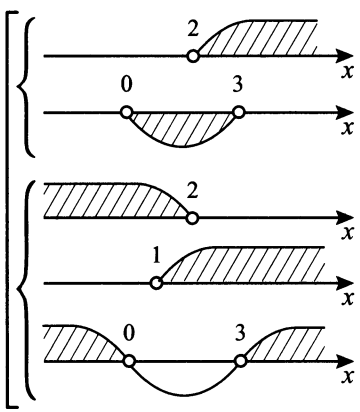
$\left(\frac{2}{3} \right)^{\lg x} = 1; \quad \lg x = 0; \quad x = 1.$

Ответ: 1.

3. $\log_{(x-1)}(x+1) > 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{(x-1)}(x+1) > \log_{(x-1)}(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1 \\ x+1>(x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<1 \\ x-1>0 \\ x+1<(x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ x^2-3x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ x>1 \\ x^2-3x>0. \end{cases} \end{array}\right.$$



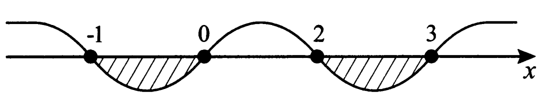
Ответ: $(2;3)$.

4. $x^2\cdot 2^{2x}+9(x+2)\cdot 2^x+8x^2 \leqslant (x+2)\cdot 2^{2x}+9x^2\cdot 2^x+8x+16.$

$x^2\left(2^{2x}-9\cdot 2^x+8\right)-x\left(2^{2x}-9\cdot 2^x+8\right)-2\left(2^{2x}-9\cdot 2^x+8\right)\leqslant 0;$

$\left(x^2-x-2\right)\left(2^{2x}-9\cdot 2^x+8\right)\leqslant 0;$

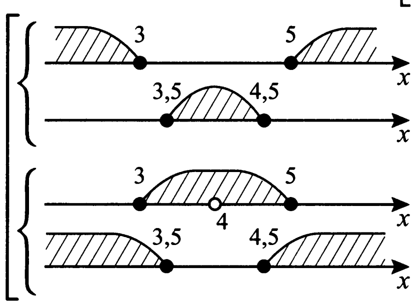
$(x-2)(x+1)(2^x-8)(2^x-1)\leqslant 0.$



Ответ: $[-1;0]\cup[2;3]$.

5. $|x-4|^{(2x-9)(2x-7)} \leqslant 1;$

а) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-4| \geqslant 1\\ (2x-9)(2x-7) \leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}|x-4| \leqslant 1\\ (2x-9)(2x-7) \geqslant 0\\ |x-4| > 0\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x \geqslant 5\\ x \leqslant 3\end{array}\right.\\ (x-4{,}5)(x-3{,}5) \leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant 5\\ x \geqslant 3\\ x \neq 4\\ (x-4{,}5)(x-3{,}5) \geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$



$\emptyset$

б) При $x = 4$ $\quad 0^{-1}$ — не определено.

Ответ: $[3; 3{,}5] \cup [4{,}5; 5]$.

6. $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x +$

$+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x = 2^{x+1};$

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x +$$

$$+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x = 2;$$

Пусть $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x = t \ \ (t > 0).$

Поскольку

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2-8x+7-x^2+8x+9}{16}}=1,$$

имеем $\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x=\dfrac{1}{t}$;

$t+\dfrac{1}{t}=2;\quad (t-1)^2=0.$

Следовательно, $\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x=1$;

$\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}=4;$

$\sqrt{x^2-8x+7}=4-\sqrt{x^2-8x-9};$

$x^2-8x+7=16-8\sqrt{x^2-8x-9}+x^2-8x-9;$

$\sqrt{x^2-8x-9}=0;\quad \left[\begin{array}{l}x=9\\ x=-1.\end{array}\right.$

Проверкой убеждаемся, что оба корня подходят.

Ответ: $\{-1;9\}$.

7. $\begin{cases}3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0\\ \lg(3x-y)+\lg(y+x)-4\lg 2=0.\end{cases}$

Область определения системы $D(\mathrm{C})$: $\begin{cases}3x-y>0\\ y+x>0\end{cases}$.

$\begin{cases}3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0\\ \lg\big((3x-y)(x+y)\big)=\lg 16.\end{cases}$

Пусть $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}=t\ \ (t>0)$. Тогда $3t^2+7t-6=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+72}}{6}=\dfrac{-7\pm 11}{6};\qquad \left[\begin{array}{l}t=-3\notin(0;\infty)\\ t=\dfrac{2}{3};\end{array}\right.$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}=\frac{2}{3}; \quad 2x-y=2; \quad \begin{cases}2x-y=2\\ (3x-y)(y+x)=16\end{cases};$$

$$\begin{cases}y=2x-2\\ (3x-2x+2)(x+2x-2)=16;\end{cases} \quad \begin{cases}y=2x-2\\ 3x^2+4x-20=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x-2\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.\end{cases} \quad (2;2)\in D(\mathrm{C}).$$

Ответ: $(2;2)$.

8. $\sqrt{x^2-7x+10}+9\log_4\dfrac{x}{8}\geqslant 2x+\sqrt{14x-20-2x^2}-13.$

Пример достаточно странный. Выясним на всякий случай область определения неравенства $D(\mathrm{H})$:

$$\begin{cases}x^2-7x+10\geqslant 0\\ \dfrac{x}{8}>0\\ 14x-20-2x^2\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-5)(x-2)\geqslant 0\\ x>0\\ -2(x-5)(x-2)\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5.\end{array}\right.$$

Вот это да — только два значения! Проверим.

Пусть $x=2$.

$$\sqrt{(2-5)(2-2)}+9\log_4\frac{1}{4}\geqslant 4+\sqrt{-2(2-2)(5-2)}-13;$$

$-9\geqslant -9$, значит, $x=2$ — корень.

Пусть $x=5$.

$$\sqrt{(5-2)(5-5)}+9\log_4\frac{5}{8}\geqslant 10+\sqrt{-2(5-5)(5-2)}-13;$$

$$9\log_4\frac{5}{8}\geqslant -3; \quad 9\cdot\left(\log_4 5-\frac{3}{2}\right)\geqslant -3; \quad \log_4 5-\frac{3}{2}\geqslant -\frac{1}{3};$$

$$\log_4 5\geqslant 1\frac{1}{6}; \quad \log_4 5\geqslant \log_4 4^{\frac{7}{6}}; \quad 5\geqslant 4\sqrt[6]{4}; \quad 125\geqslant 64\sqrt{4};$$

$125\geqslant 128$ — ложь.

Ответ: $x=2$.

Решение зачетной карточки 7

1. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow$

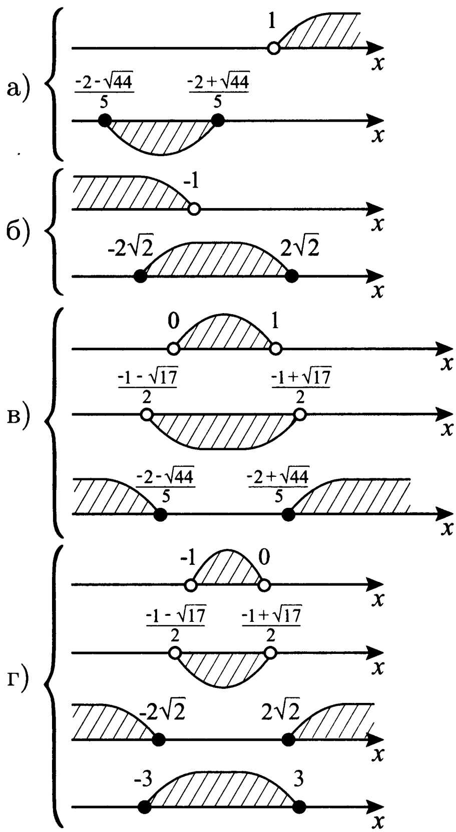
$$\Leftrightarrow \log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \geqslant \log_{|x|}|x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x|>1 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 \geqslant |x| \end{cases} \\ \begin{cases} 0<|x|<1 \\ \sqrt{9-x^2}>x+1 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 \leqslant |x| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \sqrt{9-x^2} \geqslant 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ \sqrt{9-x^2} \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ \sqrt{9-x^2}>x+1 \\ \sqrt{9-x^2} \leqslant 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x<0 \\ \sqrt{9-x^2}>x+1 \\ \sqrt{9-x^2} \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ 9-x^2 \geqslant 4x^2+4x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ 9-x^2 \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 9-x^2>x^2+2x+1 \\ 9-x^2 \leqslant 4x^2+4x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x<0 \\ 9-x^2>x^2+2x+1 \\ 9-x^2 \leqslant 1 \\ 9-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x>1 \\ 5x^2+4x-8 \leqslant 0 \end{cases} & \text{а)} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x^2 \leqslant 8 \end{cases} & \text{б)} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ x^2+x-4<0 \\ 5x^2+4x-8 \geqslant 0 \end{cases} & \text{в)} \\ \begin{cases} -1<x<0 \\ x^2+x-4<0 \\ x^2 \geqslant 8 \\ x^2 \leqslant 9 \end{cases} & \text{г)} \end{array}\right.$$

$$5x^2+4x-8=0; \qquad x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{44}}{5}.$$

$$x^2+x-4=0; \qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}.$$



Ответ: $\left[-2\sqrt{2};-1\right) \cup \left[\dfrac{-2+\sqrt{44}}{5};1\right)$.

2. $\log_{20} 80 - \log_{80} 640 = (1 + \log_{20} 4) - (1 + \log_{80} 8) =$

$= \log_{20} 4 - \log_{80} 8 = 2\log_{20} 2 - 3\log_{80} 2 = \dfrac{2}{\log_2 20} - \dfrac{3}{\log_2 80} =$

$= \dfrac{2}{\log_2 20} - \dfrac{3}{2 + \log_2 20} = \dfrac{4 + 2\log_2 20 - 3\log_2 20}{\log_2 20(2 + \log_2 20)} =$

$= \dfrac{4 - \log_2 20}{\log_2 20(2 + \log_2 20)} = \dfrac{\log_2 16 - \log_2 20}{\log_2 20(2 + \log_2 20)} < 0,$

так как $\log_2 16 < \log_2 20$, $\log_2 20(2 + \log_2 20) > 0$.

Итак, $\log_{80} 640 > \log_{20} 80$, что и требовалось выяснить.

3. $\log_{\frac{1}{7}} \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < \log_7 \log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\log_7 \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < \log_7 \log_7 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_7 \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 1 \\ \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > \log_7 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x > 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 7-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7-x \geqslant 0 \\ x^2+1 > (7-x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 7-x < 0 \\ x^2+1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 7 \\ x^2+1 > 49-14x+x^2 \end{cases} \\ x > 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 7 \\ 14x > 48 \end{cases} \\ x > 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\frac{3}{7} < x \leqslant 7 \\ x > 7. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(3\frac{3}{7}; \infty\right)$.

4. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

Пусть $64^x = t$, $t > 0$; $64^y = z$, $z > 0$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} t^2 + z^2 = 12 \\ t \cdot z = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)^2 - 2t \cdot z = 12 \\ t \cdot z = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)^2 = 12 + 8\sqrt{2} \\ t \cdot z = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)^2 = \left[2\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2 \\ t \cdot z = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

а) $\begin{cases} t + z = 2\left(1 + \sqrt{2}\right) \\ t \cdot z = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

По теореме, обратной теореме Виета, t и z являются корнями уравнения $m^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)m + 4\sqrt{2} = 0$, т. е. либо $t = 2$, $z = 2\sqrt{2}$, либо $t = 2\sqrt{2}$, $z = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 64^x = 2 \\ 64^y = 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 64^x = 2\sqrt{2} \\ 64^y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{6}. \end{cases} \end{array}\right.$$

б) $\begin{cases} t + z = -2\left(1 + \sqrt{2}\right) \\ t \cdot z = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

t и z являются корнями уравнения

$k^2 + 2\left(1 + \sqrt{2}\right)k + 4\sqrt{2} = 0$,

т. е. либо $t = -2$, $z = -2\sqrt{2}$, либо $t = -2\sqrt{2}$, $z = -2$,

но $t, z > 0$, поэтому в данном случае решений нет.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{4}\right)$; $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{6}\right)$.

5. $\dfrac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \dfrac{\log_5 150}{\log_6 5} = \dfrac{\log_5 30}{1/\log_5 30} - \dfrac{\log_5 5 + \log_5 30}{1/\log_5 6} =$

$= \log_5^2 30 - (1 + \log_5 30)\log_5 6 =$

$= \log_5^2 30 - \log_5 30 \cdot \log_5 6 - \log_5 6 =$

$= \log_5 30\,(\log_5 30 - \log_5 6) - \log_5 6 =$

$= \log_5 30 \log_5 5 - \log_5 6 =$

$= \log_5 30 - \log_5 6 = \log_5 5 = 1.$

6. $\log_{1-2x}\left(6x^2-5x+1\right)=\log_{1-3x}\left(4x^2-4x+1\right)+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{1-2x}(2x-1)(3x-1)=\log_{1-3x}(2x-1)^2+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-2x}(1-2x)+\log_{1-2x}(1-3x)=2\log_{1-3x}(1-2x)+2 \\ 1-2x>0 \\ 1-3x>0 \\ 1-2x\neq 1 \\ 1-3x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-2x}(1-3x)=\dfrac{2}{\log_{1-2x}(1-3x)}+1 \\ x<\dfrac{1}{2} \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Пусть $\log_{1-2x}(1-3x)=t$, тогда

$$\begin{cases} t^2-t-2=0 \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right. \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_{1-2x}(1-3x)=2 \\ \log_{1-2x}(1-3x)=-1 \end{array}\right. \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1-3x=(1-2x)^2 \\ 1-3x=\dfrac{1}{1-2x} \end{array}\right. \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x^2-x=0 \\ 6x^2-5x+1=1 \end{array}\right. \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1}{4} \\ x=0 \\ x=\frac{5}{6} \end{array}\right. \\ x<\frac{1}{3} \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

7. $\log_{2-5x} 3 + \dfrac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{2-5x} 3 + \log_{2-5x} 2 \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2-5x} 6 \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$$

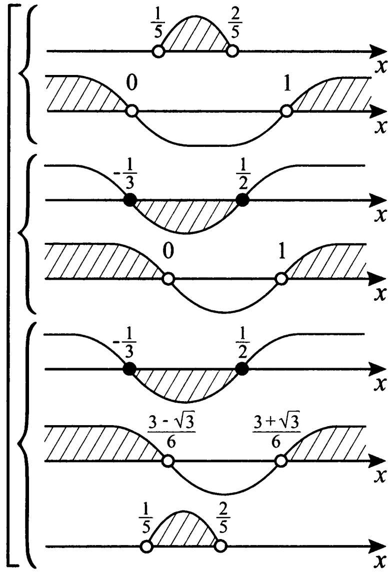
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_6(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}.$$

Пусть $\log_6(2-5x) = a$, $\log_6\left(6x^2-6x+1\right) = b$. Тогда $\dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{b-a}{ab} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \geqslant a \\ a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \quad \varnothing \\ \begin{cases} b \geqslant a \\ a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b \leqslant a \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b \leqslant a \\ a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b \leqslant a \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b \leqslant a \\ a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_6(2-5x) < 0 \\ \log_6\left(6x^2-6x+1\right) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_6\left(6x^2-6x+1\right) \leqslant \log_6(2-5x) \\ \log_6(2-5x) > 0 \\ \log_6\left(6x^2-6x+1\right) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_6\left(6x^2-6x+1\right) \leqslant \log_6(2-5x) \\ \log_6(2-5x) < 0 \\ \log_6\left(6x^2-6x+1\right) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2-5x < 1 \\ 6x^2-6x+1 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 6x^2-6x+1 \leqslant 2-5x \\ 6x^2-6x+1 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 6x^2-6x+1 \leqslant 2-5x \\ 0 < 6x^2-6x+1 < 1 \\ 0 < 2-5x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x < \frac{2}{5} \\ 6x(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6x^2 - x - 1 \leqslant 0 \\ 6x^2 - 6x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6x^2 - x - 1 \leqslant 0 \\ 6x^2 - 6x + 1 > 0 \\ x > \frac{1}{5} \\ x < \frac{2}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$



$$6x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

$$\frac{1}{5} - \frac{3-\sqrt{3}}{6} = \frac{6 - 15 + 5\sqrt{3}}{30} = \frac{5\sqrt{3} - 9}{30} < 0,$$

так как $25 \cdot 3 - 81 < 0$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

8. $(x^2-4)^{\frac{1}{3}\log_{x^2-4}\left(\log_3^3(5x-9)\right)} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 1 \\ \log_3(5x-9) > 0 \\ \left(\log_3^3(5x-9)\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 1 \\ 5x - 9 > 1 \\ \log_3(5x-9) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 1 \\ x > 2 \\ 5x - 9 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 \neq 5 \\ x > 2 \\ x = 3{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3{,}6.$$

Ответ: 3,6.

Ответы на итоговые самостоятельные работы

Итоговая самостоятельная работа 1

1. $\boxed{5}$; 2. $\boxed{1}$; 3. $\boxed{\frac{1}{27}; 27}$; 4. $\boxed{-1}$; 5. $\boxed{0}$; 6. $\boxed{3}$;
7. $\boxed{[-3; -3) \cup (0; 1]}$; 8. $\boxed{\{-1\} \cup [0; \infty)}$; 9. $\boxed{(0; 0{,}25] \cup [4; \infty)}$;
10. $\boxed{(2; \sqrt{2})\,; (2; -\sqrt{2})}$.

Итоговая самостоятельная работа 2

1. $\boxed{\frac{2}{3}}$; 2. $\boxed{6}$; 3. $\boxed{\emptyset}$; 4. $\boxed{5; 10}$; 5. $\boxed{6^{-2}}$;
6. $\boxed{(-\infty; -1) \cup (0{,}5; 1) \cup (1{,}5; \infty)}$; 7. $\boxed{[-1; -1) \cup (6; \infty)}$;
8. $\boxed{[2; 5]}$; 9. $\boxed{4; \infty}$; 10. $\boxed{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}}$.

Итоговая самостоятельная работа 3

1. $\boxed{-2}$; 2. $\boxed{0}$; 3. $\boxed{1}$; 4. $\boxed{4; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}}$; 5. $\boxed{11; 101}$;
6. $\boxed{[-1{,}25; -1) \cup [0; \infty)}$; 7. $\boxed{(-1; 0) \cup (1; 2)}$;
8. $\boxed{\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)}$; 9. $\boxed{\left(\sqrt{3} - 1; 1\right)}$;
10. $\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}}$.

Итоговая самостоятельная работа 4

1. $\boxed{\frac{2a-1}{3-a}}$; 2. $\boxed{\log_3 8 < \log_5 32 < \log_2 5}$; 3. $\boxed{1}$; 4. $\boxed{0}$;
5. $\boxed{1{,}25}$; 6. $\boxed{(-\infty; -1] \cup \left[-\frac{4}{5}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right] \cup \{0\}}$;
7. $\boxed{\left(1 - \sqrt{6}; -1\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{5}; 1 + \sqrt{6}\right)}$;
8. $\boxed{2; [3; \infty)}$; 9. $\boxed{\left(-1; -\frac{1}{2}\right)}$; 10. $\boxed{(-2; 0; 2)}$.

Итоговая самостоятельная работа 5

1. $\boxed{9}$; 2. $\boxed{3{,}75}$; 3. $\boxed{5}$; 4. $\boxed{28}$; 5. $\boxed{3}$; 6. $\boxed{20}$; 7. $\boxed{\pm\frac{1}{2}}$;
8. $\boxed{[-2; \infty)}$; 9. $\boxed{3}$; 10. $\boxed{[4; \infty)}$.

Итоговая самостоятельная работа 6

1. $\boxed{\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3-\sqrt{17}}{4}; \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right\}}$; 2. $\boxed{\left\{\frac{1}{7}; 343\right\}}$; 3. $\boxed{x=0}$;

4. $\boxed{(0;1)\cup\left[\sqrt{3};\infty\right)}$; 5. $\boxed{\left(0; 7^{1-\sqrt{2}}\right]\cup\left(1; 7^{1+\sqrt{2}}\right]}$;

6. $\boxed{\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)}$;

7. $\boxed{\left(0; 2^{-\sqrt{3}}\right]\cup\left[2^{\sqrt{3}}; 2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right]}$; 8. $\boxed{4:1,\ 2:5}$;

9. $\boxed{[-3;-2]\cup[1;3]}$; 10. $\boxed{x=3}$.

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ЛОГАРИФМЫ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Художник *Ю.Н. Куликов*
Компьютерная Верстка *С.С. Афонин*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
Тел.: (812) 943-8076; E-mail: spb@petroglyph.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 292-3660, 292-3661
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; http://viktoriya-plus.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 29.11.2015 г. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 18 печ. л. Тираж 1 500 экз. Заказ № 1157

Первая Академическая типография «Наука»
1199034, Санкт-Петербург, 9 линия, дом 12/28

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Построение и преобразования графиков. Параметры. (в 3-х книгах)
12. Уравнения и неравенства с параметрами.
13. Задачи с параметрами на экзаменах.
14. Введение в математический анализ.
15. Комплексные числа.
16. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
18. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-98712-266-2
9 785987 122662