

## Table des matières

1. Énoncé du problème . . . . .	2
2. Discrétisation . . . . .	4
3. L'identité d'énergie discrète . . . . .	5
4. Condensation de masse . . . . .	7
5. Le pas de temps autorise par la condition de CFL . . . . .	7
6. La partie droite . . . . .	9

Sofya Sizova, Anastasiya Dulepova

6 mars 2020

## 1 Énoncé du problème

On s'intéresse au problème

Trouver  $u \in C^2(0, T; L^2(\Omega))$  telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \times [0, T_{\max}] \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T_{\max}] \end{cases} \quad (1)$$

Le coefficient  $\sigma$  est supposé constant, avec une vitesse  $c = 2$  et  $\sigma = c^2$ . En multipliant l'équation (1) par la fonction test  $v \in H^1(\Omega)$  et en intégrant sur le domaine de  $\Omega$ , on obtiens la formulation variationnelle en utilisant les formules de Green. Il faut noter que si la solution forte  $u$  de (1) vérifie  $u \in C^2(0, T; L^2(\Omega))$ , on peut relaxer la régularité de solution en temps et utiliser le fait que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) d\Omega = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x, t) v(x),$$

car la partie droite est bien définie au sens de distribution en raison de régularité suffisante. Donc, on suppose maintenant que  $u \in C^1(0, T; L^2(\Omega))$  simplement. Il faut que la fonction  $u$  soit  $C^1$  minimum, car les conditions

initiales doivent pouvoir être définies ponctuellement. Alors, la formulation variationnelle est la suivante

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u \in C^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^0(0, T; H^1(\Omega)) \text{ tel que} \\ & \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} uv d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega & \forall v \in H^1(\Omega) \text{ p.p } t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T_{\max}] \end{cases} \end{aligned}$$

Pour obtenir l'identité d'énergie on multiplie la première équation de (1) par  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et intègre sur  $\Omega$ . Donc

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} f \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega. \quad (2)$$

On peut modifier le premier terme de (2) comme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

La deuxième égalité est admissible car la régularité de  $u$  est suffisante selon les hypothèses ci-dessus. Le second terme de (2) est égal à  $\int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega$  par la formule de Green et la condition au bord de  $\Omega$  pour  $\frac{\partial u}{\partial n}$ . Donc, on peut s'amener à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma \nabla u \frac{\partial \nabla u}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\sqrt{\sigma} \nabla u)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\sqrt{\sigma} \nabla u)^2 \text{ par hypothèses de régularité} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \sqrt{\sigma} \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Donc, l'énergie est définie par  $E(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\sigma} \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}^2$ , et on a l'identité

$$\frac{dE(t)}{dt} = (f(t), \frac{\partial u}{\partial t})_{L^2(\Omega)},$$

Si  $f = 0$ , alors  $E = E_0 = \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma} \nabla u_0\|^2$ , i.e. l'énergie se conserve en l'absence de source.

## 2 Discrétisation

Maintenant on discrétise cette formulation variationnelle par les éléments finis de Lagrange  $P^1$  en espace et différences finies centrées d'ordre 2 en temps. On va tout d'abord discrétiser l'espace en utilisant la méthode de Galerkin. Soit  $V_h$  est de dimension fini et  $V_h \subset H^1(\Omega)$ , qui vérifie la propriété d'approximation, c'est à dire quand  $h$  tend vers 0,  $\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|$  tend vers zéro  $\forall v \in H^1(\Omega)$ . Alors, la formulation variationnelle semi-discrète est

Trouver  $u_h \in C^1(0, T; V_h)$  tel que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v_h d\Omega & \forall v_h \in V_h \text{ p.p } t \in (0, T), \\ u_h(0) = u_{h,0}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{h,1} & \text{dans } \Omega \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T_{\max}] \end{cases} \quad (3)$$

On introduit la base de  $V_h$   $(\omega_i)_{i=1..N}$ , où  $N = \dim V_h$ . Donc, on peut écrire  $u_h$

$$u_h(t) = \sum_{i=1..N} u_h(M_i, t) \omega_i = \sum_{i=1..N} U_i(t) \omega_i.$$

Alors, on peut réécrire la formulation (3) dans une forme matricielle

$$\begin{cases} \mathbb{M} \frac{d^2 U}{dt^2}(t) + \mathbb{K}^{\sigma} U(t) = F(t) \\ U(0) = U_0, \quad \frac{dU}{dt}(0) = U_1, \end{cases} \quad (4)$$

où  $\mathbb{M}_{ij} = \int_{\Omega} \omega_i \omega_j d\Omega$ ,  $\mathbb{K}_{ij}^{\sigma} = \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_i \nabla \omega_j d\Omega$  sont les matrices symétriques, positives (car  $(\mathbb{M}V, V) = \|v_h\|^2 > 0$ , et  $(\mathbb{K}V, V) = \|\sigma \nabla v_h\|^2 > 0$ ) et en plus définies positives (car  $\omega_i \in H_0^1$  et dans cet espace on a l'inégalité de Poincaré),  $F_j = \int_{\Omega} f \omega_j d\Omega$ .

Pour la discrétisation en temps on considère  $U_i^k = U_i(t_k)$ , donc  $u_h^k = \sum_{i=1..N} U_i^k \omega_i$ . On va discrétiser la seconde dérivée dans (3) par le schéma d'ordre 2, le schéma saute-mouton. Donc, l'équation dans (4) discrétisé en temps est

$$\mathbb{M} \frac{U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{K}^{\sigma} U^k = F^k.$$

Ici  $\Delta t = \frac{T}{M}$ ,  $M$  es le nombre de couches en temps. Il faut définir les conditions initiales dans ce cas. En  $t = 0$  on a  $u_h(0) = u_h^0 \approx u_{h,0}$ . Pour le prochain pas

du temps  $t_1 = \Delta t$  on utilise la formule de Taylor d'ordre 2

$$u(\Delta t) = u_0 + \Delta t u_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0) + O(\Delta t^3)$$

D'après l'équation initiale (1) cela conduit (variationnellement) à l'approximation

$$(u_h(\Delta t), v_h)_{L^2} = (u_h^1, v_h)_{L^2} \approx (u_{h,0}, v_h)_{L^2} + \Delta t (u_{h,1}, v_h)_{L^2} - \frac{\Delta t^2}{2} (\sigma \nabla u_{h,0}, \nabla v_h)_{L^2} + \frac{\Delta t^2}{2} (f(0), v_h)_{L^2}$$

car  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sigma \Delta u + f$  dans notre cas homogène avec  $\sigma = c^2 = \text{const}$ . Alors à partir de Taylor on déduit la condition initiale matricielle

$$\mathbb{M}U^1 = \mathbb{M}U_0 + \Delta t \mathbb{M}U_1 - \frac{\Delta t^2}{2} c^2 \mathbb{K}U_0 + \frac{\Delta t^2}{2} F^0.$$

L'indice supérieur signifie un pas de temps, et inférieur signifie le pas d'espace. Finalement, le schéma totalement discrétisé est (5).

$$\begin{cases} \mathbb{M} \frac{U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1}}{\Delta t^2} + \sigma \mathbb{K}U^k = F^k, \\ U^0 = U_0, \\ \mathbb{M}U^1 = \mathbb{M}U_0 + \Delta t \mathbb{M}U_1 - \frac{\Delta t^2}{2} \sigma \mathbb{K}U_0 + \frac{\Delta t^2}{2} F^0. \end{cases} \quad (5)$$

On peut accélérer ce schéma en augmentant le pas de temps  $\Delta t$  ou la taille de discrétisation en espace  $h$ . Mais il est important de se rappeler que les valeurs arbitraires de  $h$  et  $\Delta t$  peuvent entraîner une instabilité de schéma. Il faut que ces valeurs satisfassent l'inégalité de stabilité (la condition de Courant–Friedrichs–Levy), qui sera donnée ci-dessous. De plus, le schéma peut être accéléré si, au lieu d'utiliser la matrice de masse exacte, on utilisera la matrice de masse condensée, qui approche la matrice exacte et qui est diagonale et, par conséquent, son inverse est très facile à calculer.

### 3 L'identité d'énergie discrète

On définit une énergie discrète du schéma  $\mathcal{E}$ , qui représente l'approximation de l'énergie continue  $E(t)$ .

$$\mathcal{E}^{k+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} \right\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2} (c^2 \mathbb{K}U^k, U^{k+1}).$$

Ici  $\|U\|_{\mathbb{M}}^2 = (\mathbb{M}U, U)$ . Pour obtenir l'inégalité d'énergie discrète on multiplie la première équation de (5) par  $\frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}$ . En regroupant les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbb{M}\frac{(U^{k+1} - U^k)^2 - (U^k - U^{k-1})^2}{\Delta t^2} + \frac{1}{2}(c^2\mathbb{K}U^k, U^{k+1}) - \frac{1}{2}(c^2\mathbb{K}U^k, U^{k-1}) \\ = \Delta t(F^k, \frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}). \end{aligned}$$

Donc on voit qu'en l'absence de source l'énergie discrète se conserve.

$$\mathcal{E}^{k+1/2} = \mathcal{E}^{k-1/2} \quad \forall k \geq 1. \quad (6)$$

Pour en déduire la condition de stabilité à partir d'égalité (6), il faut s'assurer que  $(c^2\mathbb{K}U^k, U^{k+1})$  soit définie positive. Cela conduit à la formulation d'une condition de stabilité nécessaire de type CFL (7).

$$\gamma_{\text{cfl}} = \frac{c^2\Delta t^2}{4} \sup_{V \neq 0} \frac{(\mathbb{K}V, V)}{(\mathbb{M}V, V)} \leq 1. \quad (7)$$

On peut utilisé la théorie connue pour exprimer cette condition dans une autre forme.

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{cfl}} &= \frac{c^2\Delta t^2}{4} \sup_i |\lambda_i|, \text{ où} \\ \lambda_i &\text{ sont les solution de probleme aux valeurs propres} \\ \begin{cases} -\text{div}(\sigma \nabla u) = \lambda u, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} & \quad (8) \\ &\text{qui est equivalente de la formulation matricielle } c^2\mathbb{K}U = \lambda_h\mathbb{M}U. \end{aligned}$$

Alors, le schéma est stable, si le pas en temps

$$\Delta t \leq \frac{2}{c\sqrt{\sup |\lambda_i|}}. \quad (9)$$

Pour donner l'expression plus précise il faut calculer le spectre du problème (8).

## 4 Condensation de masse

L'inconvénient de la formulation (5) est que le schéma n'est pas explicite et on doit chaque fois inverser la matrice  $\mathbb{M}$ . On veut approcher la matrice de masse  $\mathbb{M}$  par une matrice diagonale en utilisant les formules de quadratures suivante

$$\int_{\mathcal{T}} g(x) dT \approx \frac{|\mathcal{T}|}{3} \sum_{i=1}^3 g(S_i),$$

où  $\mathcal{T}$  est une triangle dans le maillage avec l'aire égal à  $|\mathcal{T}|$  et  $S_i, i = 1, 2, 3$  sont ses sommets. Dans notre cas  $g(x)$  est  $w_\alpha(x)w_\beta(x)$  ( $w$  sont les fonctions de base) et pour la matrice de masse élémentaire approchée on a

$$\mathbb{M}_{\alpha\beta}^{elem,ap} \approx \frac{|\mathcal{T}|}{3} \sum_{i=1}^3 w_\alpha(S_i)w_\beta(S_i) = \frac{|\mathcal{T}|}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

Pour calculer la matrice condensée on somme les matrices élémentaires sur tout les triangles. Et on obtient alors une matrice diagonale  $\mathbb{M}^{cond}$ .

Les expressions pour la matrice de rigidité et la matrice de masse sans condensation sont présentées ci-dessus.

## 5 Le pas de temps autorise par la condition de CFL

En résolvant le problème (8) numériquement pour le maillage comme dans fig. 1 on a trouvé les plus grandes valeurs propre  $\lambda_h^{sup}$  pour  $h = 0.02j, j = 1..10$ . Donc, par (9) on obtiens l'estimations pour  $\Delta t$ , qui sont présentés dans le tableaux dessous.

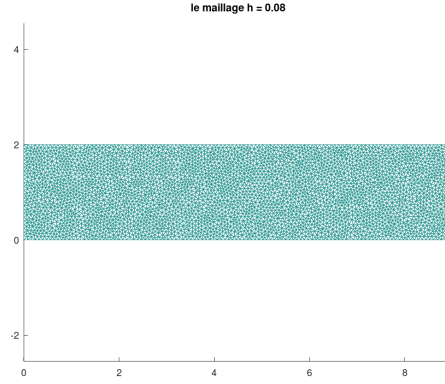


FIGURE 1 – La discrétisation de domaine avec  $h = 0.8$ .

TABLE 1 – Le pas de temps maximum autorisé par la condition CFL pour la matrice exacte (gauche) et la matrice condensée (droite)

$h$	$\Delta t_{ex}$	$\Delta t_{cond}$
0.02	0.001	0.003
0.04	0.003	0.007
0.06	0.004	0.01
0.08	0.006	0.015
0.1	0.008	0.018
0.12	0.009	0.022
0.14	0.011	0.025
0.16	0.012	0.028
0.18	0.014	0.034
0.2	0.014	0.038

On voit que les conditions CFL pour la matrice de masse condensée sont moins restrictives (on a  $\Delta t$  plus grands) ce qui est un autre avantage de cette approche.



## 6 La partie droite

La partie droite dans (5) est calculée à l'aide d'une méthode d'interpolation.

Car

$$f(t) \approx \sum_J f(t, M_J) w_J,$$

on peut approcher le second membre (qui a des composants  $F_I^k = F_I(t_k) = \int_{\Omega} f(t_k) w_I d\Omega$ ) par

$$F^k \approx M \tilde{F}^k \quad \text{avec} \quad \tilde{F}^k = f(t_k, M_J)_{J=1,N}.$$