

## Table des matières

|   |   |
|---|---|
| 1. Énoncé du problème . . . . .                               | 2 |
| 2. Discrétisation . . . . .                                   | 4 |
| 3. L'identité d'énergie discrète . . . . .                    | 5 |
| 4. Condensation de masse . . . . .                            | 7 |
| 5. Le pas de temps autorise par la condition de CFL . . . . . | 7 |

# Sofya Sizova, Anastasiya Dulepova

2 mars 2020

## 1 Énoncé du problème

On s'intéresse au problème

$$\text{Trouver } u \in C^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ telle que} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \times [0, T_{\max}] \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T_{\max}] \end{cases} \quad (2)$$

En multipliant l'équation (1) par la fonction test  $v \in H^1(\Omega)$  et en intégrant sur le domaine de  $\Omega$ , on obtiens la formulation variationnelle en utilisant les formules de Green. Il faut noter que si la solution forte  $u$  de (1) vérifie  $u \in C^2(0, T; L^2(\Omega))$ , on peut relaxer la régularité de solution en temps et utiliser le fait que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) d\Omega = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x, t) v(x), \quad (3)$$

car la partie droite est bien définie au sens de distribution en raison de régularité suffisante. Donc, on suppose maintenant que  $u \in C^1(0, T; L^2(\Omega))$  simplement. Il faut que la fonction  $u$  soit  $C^1$  minimum, car les conditions initiales doivent pouvoir être définies ponctuellement. Alors, la formulation

variationnelle est suivante

Trouver  $u \in C^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^0(0, T; H^1(\Omega))$  tel que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} uv d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega & \forall v \in H^1(\Omega) \text{ p.p } t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T_{\max}] \end{cases} \quad (4)$$

Pour obtenir l'identité d'énergie on multiplie la première équation de (1) par  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et intègre sur  $\Omega$ . Donc

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} f \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega. \quad (5)$$

On peut modifier le premier terme de (5) comment

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (6)$$

La deuxième égalité est admissible car la régularité de  $u$  est suffisante selon les hypothèses ci-dessous. Le second terme de (5) est égal à  $\int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega$  après l'équation (4) avec  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ . Donc, on peut s'amener

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma \nabla u \frac{\partial \nabla u}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\sqrt{\sigma} \nabla u)^2 = \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\sqrt{\sigma} \nabla u)^2 &\text{ par hypothèses de régularité } = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \sqrt{\sigma} \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Donc, l'énergie est définie par  $E(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\sigma} \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}^2$ , et on a l'identité

$$\frac{dE(t)}{dt} = \left( f(t), \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{ou} \quad (8)$$

$$E(t) = \int_{\Omega} f \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + E_0. \quad (9)$$

Si  $f = 0$ , alors  $E = E_0 = \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma} \nabla u_0\|^2$ , l'énergie se conserve dans le système ferme.

## 2 Discrétisation

Maintenant on discrétise cette formulation variationnelle par les éléments finis de Lagrange  $P^1$  en espace et différences finies centrées d'ordre 2 en temps. On va tout d'abord discrétiser l'espace en utilisant la méthode de Galerkin. Soit  $V_h$  est de dimension fini et  $V_h \subset H^1(\Omega)$ , qui vérifie la propriété d'approximation, c'est à dire quand  $h$  tend vers 0,  $\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|$  tend vers zéro  $\forall v \in H^1(\Omega)$ . Alors, la formulation variationnelle semi-discrète est

Trouver  $u_h \in C^1(0, T; V_h)$  tel que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v_h d\Omega & \forall v_h \in V_h \text{ p.p } t \in (0, T), \\ u_h(0) = u_{h,0}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{h,1} & \text{dans } \Omega \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T_{\max}] \end{cases} \quad (10)$$

On introduit la base de  $V_h$   $(\omega_i)_{i=1..N}$ , où  $N = \dim V_h$ . Donc, on peut écrire  $u_h$

$$u_h(t) = \sum_{i=1..N} u_h(M_i, t) \omega_i = \sum_{i=1..N} U_i(t) \omega_i. \quad (11)$$

Alors, on peut réécrire la formulation (10) dans une forme matricielle

$$\mathbb{M} \frac{d^2 U}{dt^2}(t) + \mathbb{K}^\sigma U(t) = F(t) \quad (12)$$

$$U(0) = U_0, \quad \frac{dU}{dt}(0) = U_1, \quad (13)$$

où  $\mathbb{M}_{ij} = \int_{\Omega} \omega_i \omega_j d\Omega$ ,  $\mathbb{K}_{ij} : \sigma = \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_i \nabla \omega_j d\Omega$  sont les matrices symétriques, (car  $(\mathbb{M}V, V) = \|v_h\|^2 > 0$ , et  $(\mathbb{K}V, V) = \|\sigma \nabla v_h\|^2 > 0$ ) et définies positives (car  $\omega_i \in H_0^1 \quad \forall i$  et dans cette espace on a l'inégalité de Poincaré),  $F_j = \int_{\Omega} f \omega_j d\Omega$ .

Pour la discrétisation en temps on considère  $U_i^k = U_i(t_k)$ , donc  $u_h^k = \sum_{i=1..N} U_i^k \omega_i$ . On va discrétiser la seconde dérivée dans (10) par le schéma d'ordre 2, le schéma saute-mouton. Donc, l'équation (12) discrétise en temps est

$$\mathbb{M} \frac{U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{K}^\sigma U^k = F^k. \quad (14)$$

Ici  $\Delta t = \frac{T}{M}$ ,  $M$  es le nombre de couches dans le temps. Il faut définir les conditions initiales dans ce cas. En  $t = 0$  on a  $u_h(0) = u_h^0 \approx u_{h,0}$ . Pour le

prochain pas du temps  $t_1 = \Delta t$  on utilise la formule de Taylor d'ordre 2

$$u(\Delta t) = u_0 + \Delta t u_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0) + O(\Delta t^3) \quad (15)$$

Pour notre équation initiale (1) cela conduit à

$$(u_h(\Delta t), v_h)_{L^2} = (u_h^1, v_h)_L^2 \approx (u_{h,0}, v_h) + \Delta t \left( \frac{\partial u_h}{\partial t}(0), v_h \right)_{L^2} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left( \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(0), v_h \right)_{L^2}. \quad (16)$$

On sait que  $(\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}|_{t=0}, v_h)_{L^2} + (\sigma \nabla u^0, \nabla v_h) = (f^0, v_h)_L^2$ , donc  $(\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}|_{t=0}, v_h)_{L^2} = F^0 - \sigma \mathbb{K} U_0$  dans le milieu homogène, où  $\sigma = c^2$ , comme dans notre cas. À partir de Taylor on déduit la condition initiale

$$\mathbb{M} U^1 = \mathbb{M} U_0 + \Delta t \mathbb{M} U_1 - \frac{\Delta t^2}{2} c^2 \mathbb{K} U_0 + \frac{\Delta t^2}{2} F^0. \quad (17)$$

L'indice supérieur signifie un pas dans le temps, et inférieur signifie le pas dans espace. Finalement, le schéma totalement discrétise est (18).

$$\begin{cases} \mathbb{M} \frac{U^{k+1} - 2U^k + U^{k-1}}{\Delta t^2} + \sigma \mathbb{K} U^k = F^k, \\ U^0 = U_0, \\ \mathbb{M} U^1 = \mathbb{M} U_0 + \Delta t \mathbb{M} U_1 - \frac{\Delta t^2}{2} c^2 \mathbb{K} U_0 + \frac{\Delta t^2}{2} F^0. \end{cases} \quad (18)$$

On peut accélérer ce schéma en augmentant le pas d'un temps  $\Delta t$  ou la taille de discrétisation en espace  $h$ . Mais il est important de se rappeler que les valeurs arbitraires de  $h$  et  $\Delta t$  peuvent entraîner une instabilité de schéma. Il faut que ces valeurs satisfassent l'inégalité de stabilité (la condition de Courant–Friedrichs–Levy), qui sera donné ci-dessous.

### 3 L'identité d'énergie discrète

On définit une énergie discrète du schéma  $\mathcal{E}$ , qui représente l'approximation de l'énergie continue  $E(t)$ .

$$\mathcal{E}^{k+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} \right\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2} (c^2 \mathbb{K} U^k, U^{k+1}). \quad (19)$$

Ici  $\|U\|_{\mathbb{M}}^2 = (\mathbb{M}U, U)$ . Pour obtenir l'inégalité d'énergie discrète on multiplie la première équation de (18) par  $\frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}$ . En regroupant les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbb{M}\frac{(U^{k+1} - U^k)^2 - (U^k - U^{k-1})^2}{\Delta t^2} + \frac{1}{2}(c^2\mathbb{K}U^k, U^{k+1}) - \frac{1}{2}(c^2\mathbb{K}U^k, U^{k-1}) \\ = \Delta t(F^k, \frac{U^{k+1} - U^{k-1}}{2\Delta t}). \end{aligned} \quad (20)$$

En absence de source on obtiens que l'énergie discrète se conserve.

$$\mathcal{E}^{k+1/2} = \mathcal{E}^{k-1/2} \quad \forall k \geq 1. \quad (21)$$

Pour déduire la condition de stabilité à partir d'égalité (21), il faut s'assurer que  $(c^2\mathbb{K}U^k, U^{k+1})$  soit définie positive. Cela conduit à la formulation d'une condition de stabilité nécessaire de type CFL (22).

$$\gamma_{\text{cfl}} = \frac{c^2\Delta t^2}{4} \sup_{V \neq 0} \frac{(\mathbb{K}V, V)}{(\mathbb{M}V, V)} \leq 1. \quad (22)$$

On peut utilisé le théorie connu pour exprimer cette condition dans une autre forme.

$$\gamma_{\text{cfl}} = \frac{c^2\Delta t^2}{4} \sup_i |\lambda_i|, \text{ où} \quad (23)$$

$\lambda_i$  sont les solution de probleme aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\text{div}(\sigma \nabla u) = \lambda u, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (24)$$

qui est equivalente de la formulation  $c^2\mathbb{K}U = \lambda_h\mathbb{M}U$ .

Alors, le schéma est stable, si le pas en temps

$$\Delta t \leq \frac{2}{c\sqrt{\sup |\lambda_i|}}. \quad (25)$$

Pour donner l'expression plus précise il faut calculer le spectre du problème (24).

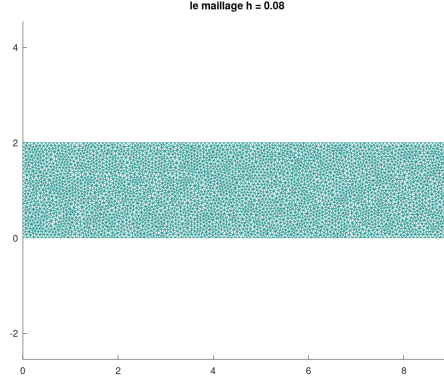


FIGURE 1 – La discrétisation de domaine avec  $h = 0.8$ .

## 4 Condensation de masse

L'inconvénient de la formulation (18) est que le schéma n'est pas explicite et on doit chaque fois inverser la matrice  $\mathbb{M}$ . On veut approcher la matrice de masse  $\mathbb{M}$  par une matrice diagonale en utilisant les formules de quadratures suivante

$$\int_{\mathcal{T}} g(x) dT \approx \frac{|\mathcal{T}|}{3} \sum_{i=1}^3 g(S_i), \quad (26)$$

où  $\mathcal{T}$  est une triangle dans le maillage avec l'aire égal à  $|\mathcal{T}|$  et les sommets  $S_i, i = 1, 2, 3$ . Dans le cas du maillage uniforme,  $\mathbb{M}^{cond} = h^2 I$ ,  $I$  est la matrice unitaire. Les expressions pour la matrice de rigidité et la matrice de masse sans condensation sont présenté ci-dessous.

## 5 Le pas de temps autorise par la condition de CFL

En résolvant le problème (24) numériquement pour le maillage comme dans fig. 1 on a trouvé les plus grandes valeurs propre  $\lambda_h^{sup}$  pour  $h = 0.02j, j = 1..10$ . Donc, par (25) on obtiens l'estimations pour  $\Delta t$ , qui sont présentés dans le tableaux dessous.

TABLE 1 – Le pas de temps maximum autorisé par la condition CFL pour la matrice exacte (gauche) et la matrice condensée (droite)

| $h$  | $\Delta t_{ex}$ | $\Delta t_{cond}$ |
|------|-----------------|-------------------|
| 0.02 | —               | —                 |
| 0.04 | 0.005           | —                 |
| 0.06 | 0.009           | 12 bit            |
| 0.08 | 0.012           | 12 bit            |
| 0.1  | 0.015           | 12 bit            |
| 0.12 | 0.018           | 12 bit            |
| 0.14 | 0.021           | 12 bit            |
| 0.16 | 0.024           | 12 bit            |
| 0.18 | 0.028           | 12 bit            |
| 0.2  | 0.028           | bit               |

## 6 La partie droite (5.7)

La partie droite dans (18) est calculer à l'aide d'une méthode d'interpolation.

$$F^k = M\tilde{F}^k = \sum_{j=1..3} Mf(t_k, S_j) \quad (27)$$