UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907
TALLER 3, SEMESTRE 01–2023

Tema: Orden de convergencia. Método de Newton y sus extensiones.

1. Considere la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida mediante la fórmula de iteración
$$x_{n+1} = \frac{2x_n e^{x_n} - e^{x_n} + 4}{2e^{x_n}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
   (a) Demostrar que la sucesión converge a $\ln 4$.
   (b) Demostrar que el orden de convergencia es uno, para todo $x_0 > 0$.

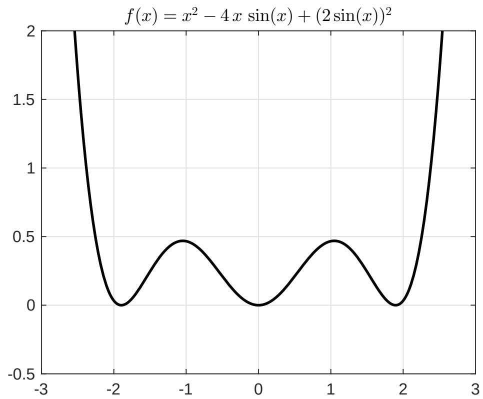
2. Considere la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida mediante la fórmula de iteración
$$x_{n+1} = \frac{3x_n^4}{4x_n^3 + 64}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
   (a) Demostrar que la sucesión converge a p (hallar p).
   (b) Demostrar que el orden de convergencia es dos, para todo $x_0 > 0$.

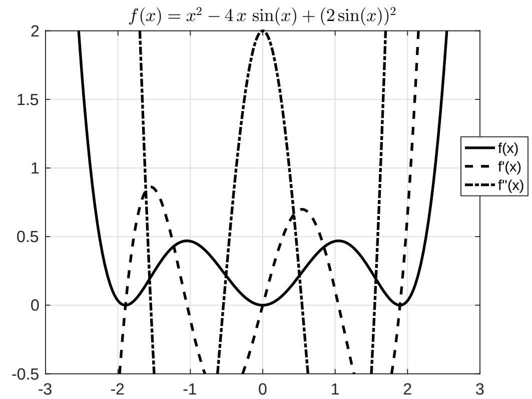
3. Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida mediante la fórmula de iteración
$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3a\right)}{3x_n^2 + a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0 > 0, \quad a > 0$$
   converge a $\sqrt{a}$ y el orden de convergencia es tres.

4. Considere la ecuación $x^2 e^x - x e^x + x = 0$.
   (a) Demuestre de $\widehat{x} = 0$ es una solución de la ecuación.
   (b) ¿Cuál es la multiplicidad de la raíz $\widehat{x} = 0$ de la ecuación?
   (c) ¿Cuál es el orden de convergencia de la sucesión generada por el método de Newton para aproximar $\widehat{x}$?
   (d) ¿Cuál es el orden de convergencia de la sucesión generada por el método de Newton Modificado para aproximar $\widehat{x}$?
   (e) ¿Cuál es el la iteración de Newton acelerado para aproximar la raíz de la ecuación y cuál es orden de convergencia de la sucesión generada por éste?

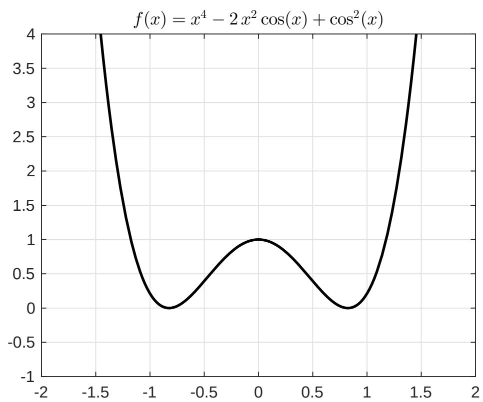
5. Repetir el ejercicio anterior con la ecuación $xe^x - e^x + 1 = 0$.

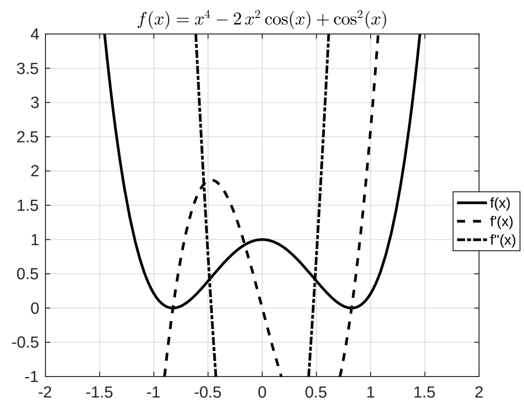
6. Considere la función $f(x) = x^2 - 4x\,\mathrm{sen}(x) + (2\,\mathrm{sen}(x))^2$.
   (a) ¿Cuántos ceros diferentes tiene la función f? ¿Cuál es la multiplicidad de cada uno de los ceros de la función f?
   (b) Aproxime cada uno de los ceros de la función f mediante x_4 obtenido por el método de Newton tomando x_0 adecuadamente. ¿Cuál es el orden de convergencia del método de Newton para cada uno de los ceros de esta función f? ¿Es posible usar el método de bisección para resolver este ejercicio?
   (c) Halle la fórmula de iteración de Newton Modificado para aproximar los ceros de f.
   (d) Aproxime cada uno de los ceros de la función f mediante x_4 obtenido por el método de Newton Modificado tomando el mismo valor de x_0 del literal (b). ¿Cuál aproximación se acerca más a cada cero de la función?
   (e) Ahora, aproxime cada uno de los ceros de la función f mediante x_4 obtenido por el método de Newton acelerado tomando el mismo valor de x_0 del literal (b). ¿Cuál aproximación se acerca más a cada cero de la función?





7. Repetir el ejercicio anterior con función $f(x) = x^4 - 2x^2\cos(x) + \cos^2(x)$.





8. Encuentre todos los posibles valores de α, β y ξ para los cuales la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & \xi \\ -\beta & 5 & \xi \\ -1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$ es estrictamente dialgonal dominante.

9. Demuestre que la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ es definida positiva.

10. Considere el método iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$. Si la matriz de iteración $\mathbf{T}$ esta dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} & -\dfrac{2}{7} \\ 0 & -\dfrac{1}{14} & -\dfrac{19}{56} & -\dfrac{3}{56} \\ 0 & \dfrac{2}{35} & -\dfrac{1}{35} & -\dfrac{16}{35} \\ 0 & \dfrac{1}{20} & \dfrac{13}{80} & -\dfrac{7}{80} \end{bmatrix}$$

(a) Halle $\|\mathbf{T}\|_1$ y $\|\mathbf{T}\|_\infty$.

(b) Si el espectro de la matriz de iteración $\mathbf{T}$ está dado por $\sigma(\mathbf{T}) = \left\{0, 0, -\dfrac{293}{3125} + \dfrac{196}{625}i, -\dfrac{293}{3125} - \dfrac{196}{625}i\right\}$

entonces halle el radio espectral es $\rho(\mathbf{T})$.

(c) Concluir sobre la convergencia o divergencia de la sucesión generada por la iteración $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$.

11. Considere el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & \beta & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Halle la matriz de iteración de Jacobi $\mathbf{T}_{\mathrm{J}}$ asociada a este sistema.

(b) Halle $\|\mathbf{T}_{\mathrm{J}}\|_1$ y encuentre todos los posibles valores de β para los cuales $\|\mathbf{T}_{\mathrm{J}}\|_1 < 1$. ¿Qué puede decir sobre la convergencia de la sucesión generada por el método de Jacobi para tales valores de β?

(c) Demostrar que para $\beta = 0$ la matriz de iteración de Gauss-Seidel $\mathbf{T}_{\mathrm{GS}}$ esta dada por

$$\mathbf{T}_{\mathrm{GS}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

Halle $\|\mathbf{T}_{\mathrm{GS}}\|_\infty$. ¿Qué puede decir sobre la convergencia de la sucesión generada por el método de Gauss-Seidel?

12. Considere el sistema de ecuaciones lineales (**NO LO REORDENE**):

$$\begin{aligned} x - y - z &= 4 \\ -x + y - 3z &= -8 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

Demostrar que el polinomio característico de la matriz de iteración Jacobi $\mathbf{T}_{\mathrm{J}}$ es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda + 5.$$

(a) Demuestre que $\lambda + 0.7601$ es un factor de $p(\lambda)$. Calcular el radio espectral de $\mathbf{T}_{\mathrm{J}}$.

(b) Concluir sobre la convergencia o divergencia de la sucesión generada por el método de Jacobi.

13. Considere el siguiente código MATLAB

```
function n1 = norma1(v,n)
% Calcula la norma uno de un vector v de R^n.
% Datos de Entrada
%   - v:= vector.
%   - n:= dimensión del vector.
% Datos de Salida
%   - n1:= norma uno de v.
n1=0;
for i=1:n
n1=n1+abs(v(i));
end
```

Modificar adecuadamente el código anterior para construir una function que calcule la norma `p` de un vector (tenga en cuenta que `p` deberá ser un nuevo parámetro de entrada). Compare sus resultados con la instrucción de MATLAB `norm(v,p)`.

14. Construir dos function que calculen la norma infinito y la norma uno de una matriz $\mathbf{A}$ de orden n. Compare sus resultados con la instrucción de MATLAB `norm(A,inf)` y `norm(A,1)`, respectivamente

15. Construir una function que diga si una matriz $\mathbf{A}$ es estrictamente diagonal dominante. Recordemos que, se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ es estrictamente diagonalmente dominante si se cumple

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

16. Empleando el `help` de MATLAB, explorar las instrucciones `diag`, `triu`, `tril`, `poly` y `eig`. Construir una function que halle la matriz de iteración de Jacob $\mathbf{T}_{\mathrm{J}}$, que calcule su polinomio característico, su radio espectral y diga si la sucesión generada será o no convergente a la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.