UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907
TALLER 4, SEMESTRE 01–2023

Tema: Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y S.O.R.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tal que:

   (a) El polinomio característico de la matriz de iteración de Jacobi asociado al sistema es:

   $$p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{911}{1720}\right)^2 \left(\lambda - \frac{431}{577}\right) \left(\lambda - \frac{2417}{9004}\right).$$

   ¿Qué puede decir sobre la convergencia de la sucesión generada por el método de Jacobi?

   (b) Si la matriz de iteración y el vector de términos independientes del método de Gauss-Seidel asociada al sistema son:

   $$\mathbf{T}_{\mathrm{GS}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{120} & \frac{11}{40} \\ 0 & \frac{3}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{11}{20} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_{\mathrm{GS}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{30} \\ \frac{37}{120} \\ -\frac{3}{20} \end{bmatrix}.$$

   ¿Qué puede decir sobre la convergencia de la sucesión generada por el método de Gauss-Seidel? Calcule la primera iteración tomando como vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1, -1, -1, 1]^T$.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales (**SIN REORDENAR EL SISTEMA**):

   $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ -x + 4y + 2z &= 3 \\ x - y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

   (a) Calcule la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel, $\mathbf{T}_{\mathrm{GS}}$.

   (b) ¿El método iterativo de Gauss - Seidel genera una sucesión convergente? En caso afirmativo calcule las dos primeras iteraciones del método, comenzando en $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (c) Considere la solución exacta del sistema $\mathbf{x} = \left[-\frac{1}{7}, \frac{5}{11}, \frac{40}{77}\right]^T$. Calcule la norma infinito del error absoluto y relativo de las aproximaciones obtenidas con relación a la solución exacta.
   Ayuda: Recuerde que el error absoluto y relativo estan dados por

   $$E_{\mathrm{abs}} = \|\mathbf{x}_{\mathrm{exa}} - \mathbf{x}_{\mathrm{aprox}}\| \qquad \text{y} \qquad E_{\mathrm{rel}} = \frac{\|\mathbf{x}_{\mathrm{exa}} - \mathbf{x}_{\mathrm{aprox}}\|}{\|\mathbf{x}_{\mathrm{exa}}\|}$$

   donde $\mathbf{x}_{\mathrm{aprox}}$ es la aproximación de la solución exacta $\mathbf{x}_{\mathrm{exa}}$. ($E_{\mathrm{rel}}$ este bien definido siempre que $\|\mathbf{x}_{\mathrm{exa}}\| \neq 0$.)

   (d) Calcule la norma uno del vector residual $\mathbf{r} = \mathbf{Ax}_{\mathrm{aprox}} - \mathbf{b}$ para las aproximaciones obtenidas. ¿Cuál es la mejor aproximación?

3. Considere el sistema de ecuaciones lineales (**NO LO REORDENE**):

   $$\begin{aligned} 3x + y - z &= -1 \\ -x + 4y + z &= 3 \\ -x + 2y + 5z &= -2 \end{aligned}$$

   ¿Qué puede decir sobre la convergencia de las sucesiones generadas por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel? Calcule la primera iteración tomando como vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. Considere el sistema de ecuaciones lineales (**NO LO REORDENE**):

$$\begin{aligned} x+y&=2\\ -x+3y+z&=3\\ -x+2z&=1 \end{aligned}$$

Si los espectros de las matrices de iteración de Jacobi $\mathbf{T}_{\mathrm{J}}$ y Gauss-Seidel $\mathbf{T}_{\mathrm{GS}}$ son:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{J}})&=\{-0.18+0.6562i,-0.18-0.6562i,0.36\}\,,\\ \sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{GS}})&=\{0,-0.6076,0.2743\}\,. \end{aligned}$$

(a) ¿El método iterativo de Jacobi converge?

(b) Calcule la primera iteración por el método iterativo de Jacobi, comenzando en $\mathbf{x}^{(0)}=\left[1,\frac{1}{2},1\right]^T$.

(c) Considere la solución exacta del sistema $\mathbf{x}=[1,1,1]^T$. Calcule la norma uno del error relativo de la aproximación obtenida con relación a la solución exacta.

(d) ¿El método iterativo de Gauss-Seidel converge?

(e) Calcule la primera iteración por el método iterativo de Gauss - Seidel, comenzando en $\mathbf{x}^{(0)}=\left[1,\frac{1}{2},1\right]^T$.

(f) Calcule la norma dos del error relativo de la aproximación obtenida en el item anterior con relación a la solución exacta.

(g) Calcule la norma infinito de los vectores residuales asociados a las aproximaciones obtenidas. ¿Cuál es la mejor aproximación?

5. Considere un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 5 & 0 & 3 & 0\\ -3 & -1 & 5 & 0 & 3\\ 0 & -3 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ -1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si las matrices de iteración del método de SOR asociadas al sistema con parámetros $\omega=0.5$, 0.8 y 0.9 tienen los siguientes espectros:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{T}_{\omega=0.5})&=\{0.42045\pm0.3109i,0.43584\pm0.18662i,0.50841\},\\ \sigma(\mathbf{T}_{\omega=0.8})&=\{-0.055472\pm0.20754i,0.20546,0.088708\pm0.16087i\},\\ \sigma(\mathbf{T}_{\omega=0.9})&=\{-0.44784,0.10309,-0.026226,-0.028153\pm0.086409i\}. \end{aligned}$$

(a) ¿Qué puede decir sobre la convergencia de la sucesión generada por el método de SOR?

(b) ¿Teóricamente, cuál (de los convergentes) es más rápido?

(c) Obtenga la primera aproximación a la solución del sistema empleando el método de SOR (sólo los convergentes). Tome como vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}=[-1,0,1,0,1]^T$. Calcule la norma uno del residual para cada una de las aproximaciones obtenidas en (b). ¿Cuál es la mejor aproximación?

6. Considere el sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0\\ -3 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 5\\ 0\\ 1\\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Qué puede decir sobre la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR con paramétro $0<\omega<2$?

(b) Si $\sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{J}})=\{-0.7861,0.7861,-0.4668,0.4668\}$ halle:

(i) $\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{J}})$ (ii) $\rho(\mathbf{T}_{\mathrm{GS}})$ (iii) El parámetro óptimo ω para usar el método de S.O.R.

(c) Halle el valor de $x_2^{(1)}$ que se obtiene al emplear el método de S.O.R. con el parámetro óptimo ω si se toma como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}=\left[1,-2,\dfrac{7}{4},-1\right]^T$.