MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 07

INTERPOLACIÓN DE TRAZADORES CÚBICOS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

Una forma de eliminar las oscilaciones al aumentar el número de puntos al interpolar una nube de puntos o al tomar muchos nodos para aproximar una función en un intervalo, es usar la interpolación *fragmentaria* o aproximación *fragmentaria*.

Consideremos $n+1$ puntos distintos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ donde $x_0 < \cdots < x_n$. La interpolación fragmentaria consiste en encontrar una función S definida en $[x_0, x_n]$ que en cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ tiene una forma particular.

⋆ **Interpolación lineal a trozos**

El interpolante lineal a trozos S se construye por medio de las rectas $S_j(x)$ que pasan por los puntos (x_j, y_j) y (x_{j+1}, y_{j+1}), $j = 0, \ldots, n-1$.

Ejemplo Hallar el interpolante lineal a trozos para los valores de la tabla

x_j	1	3	5	9
y_j	2	4	3	8

Solución: Calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_j, y_j) y (x_{j+1}, y_{j+1}), $j = 0, 1, 2$, encontramos las ecuaciones de las rectas con la ecuación punto-pendiente y obtenemos el interpolante lineal a trozos.

$$S(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [1,3], \\ \frac{1}{2}(11-x), & x \in (3,5], \\ \frac{1}{4}(5x-13), & x \in (5,9]. \end{cases}$$

El interpolante lineal a trozos es una curva continua en $[x_0, x_n]$ y no diferenciable en los nodos interiores $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, por lo tanto, buscamos un interpolante polinomial fragmentario que en los nodos interiores sea diferenciable.

⋆ **Interpolación cúbica o Spline cúbico**

La interpolación fragmentaria más común es la que utiliza polinomios cúbicos y recibe el nombre de interpolación de spline cúbicos y en este caso podemos pedir que $S \in \mathcal{C}^2[x_0, x_n]$.

Definición. *Dada una función f definida en $[a,b]$ y un conjunto de $n+1$ nodos $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, un interpolante de spline cúbico S para f es una función a trozos definida en $[x_0, x_n]$ por*

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

que cumple las siguientes condiciones:

a. *S_j es un polinomio de grado menor o igual a 3 definido en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, \ldots, n-1$*

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 .$$

b. *S es interpolante: $S(x_j) = f(x_j)$ para $j = 0, \ldots, n$.*

c. *S es continuo: $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j = 0, \ldots, n-2$.*

d. *S' es continua: $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para $j = 0, \ldots, n-2$.*

e. *S'' es continua: $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para $j = 0, \ldots, n-2$.*

Observaciones Notemos que de las condiciones:

a. los polinomios S_j son todos de grado menor o igual a 3, cada uno tiene 4 (incógnitas) coeficientes y generan un conjunto de $4n$ coeficientes,

b. S es una función interpolante de la tabla, lo cual proporciona $n+1$ ecuaciones, por los $n+1$ nodos,

c. la continuidad de S aporta $n-1$ ecuaciones al sistema de ecuaciones, ya que S es continua en cada tramo por ser polinomica, así que la continuidad recae sobre los $n-1$ nodos interiores,

d. la continuidad de S' aporta también $n-1$ ecuaciones al sistema de ecuaciones y

e. la continuidad de S'' aporta las últimas $n-1$ ecuaciones al sistema de ecuaciones.

En total hay $4n-2$ ecuaciones y $4n$ incógnitas, lo que deja dos grados de libertad, esto es, nos faltan dos condiciones ***extra*** para tener un sistema cuadrado. Se acostumbra establecer las dos ecuaciones faltantes a partir de *restricciones en los extremos del intervalo.*

Definición (cont)**.** *S cumple una de las siguientes condiciones de frontera:*

- ***Naturales**: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.*
- ***Sujetas**: $S'(x_0) = f'(x_0) \quad y \quad S'(x_n) = f'(x_n)$.*
- ***Curvatura dada en los extremos**: $S''(x_0) = f''(x_0) \quad y \quad S''(x_n) = f''(x_n)$.*
- ***Terminación Parabólica: S'' es constante en los intervalos extremos***
- ***Extrapolada: S'' se extrapola en los intervalos extremos***

Ejemplo Halle los valores de a, b, c y d para que la función siguiente sea un spline cúbico sujeta para una función f en $[1,3]$ que cumple la condición $f'(1) = f'(3)$

$$S(x) = \begin{cases} 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, & 1 \leq x < 2, \\ a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

<u>*Solución:*</u> Verifiquemos que S cumple las condiciones (a. hasta la e.) de la definición de spline

a. Si denotamos

$$S_0(x) := 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3 \quad \text{y} \quad S_1(x) := a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$$

S_0 y S_1 son polinomios de grado menor o igual a 3.

b. No hay función f conocida, así que solo podemos decir que S debe interpolar la tabla

x_j	1	2	3
$y_j = f(x_j)$	0	a	$a+b+c+d$

c. Continuidad de S: se debe cumplir que $S_0(2) = S_1(2)$

$$3 + 2 - 1 = a \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 4}$$

d. Continuidad de S': se debe cumplir que $S_0'(2) = S_1'(2)$

$$\left.\begin{array}{l} S_0'(x) := 3 + 4(x-1) - 3(x-1)^2 \\ S_1'(x) := b + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_0'(2) = 3 + 4 - 3 \\ S_1'(2) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

e. Continuidad de S'': se debe cumplir que $S_0''(2) = S_1''(2)$

$$\left.\begin{array}{l} S_0''(x) := 4 - 6(x-1) \\ S_1''(x) := 2c + 6d(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_0''(2) = 4 - 6 \\ S_1''(2) = 2c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

f. Spline cúbico sujeto: esto es $S'(1) = f'(1)$ y $S'(3) = f'(3)$, nos dicen que $f'(1) = f'(3)$, así

$$S'(1) = S'(3) \quad \Leftrightarrow \quad S_0'(1) = S_1'(3) \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 4 + 2(-1) + 3d \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{d = \tfrac{1}{3}}$$

♣ Construcción del spline cúbico

Queremos construir de una manera eficaz el spline cúbico para la función f en los nodos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) := a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3, & x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x) := a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3, & x \in [x_1, x_2], \\ \quad\vdots & \\ S_j(x) := a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ S_{j+1}(x) := a_{j+1} + b_{j+1}(x-x_{j+1}) + c_{j+1}(x-x_{j+1})^2 + d_{j+1}(x-x_{j+1})^3, & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}] \\ \quad\vdots & \\ S_{n-1}(x) := a_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3, & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

• Denotamos por h_j la longitud de cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$ y las dos primeras derivadas de cada S_j estan dadas por

$$\begin{array}{ll} \boxed{h_j = x_{j+1} - x_j} & j = 0, \ldots, n-1, \\ S_j'(x) = b_j + 2c_j(x-x_j) + 3d_j(x-x_j)^2, & j = 0, \ldots, n-1, \\ S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x-x_j), & j = 0, \ldots, n-1. \end{array}$$

• De la condición de interpolación

$$a_j = S_j(x_j) = f(x_j) \quad j = 0, \ldots, n-1, \boldsymbol{n}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_j = f(x_j)} \quad j = 0, \ldots, n-1, \boldsymbol{n}$$

donde a_n aunque no es incógnita, la asociamos al valor de la función f en x_n.

• De la continuidad de S: $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$ para $j = 0, \ldots, n-2$, así

$$a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = a_{j+1}, \quad j = 0, \ldots, n-2, \boldsymbol{n-1}, \tag{1}$$

donde la igualdad es válida para $n-1$ gracias al valor de a_n ya definido.

• De la continuidad de S': $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$ para $j = 0, \ldots, n-2$, así

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, \quad j = 0, \ldots, n-1, \boldsymbol{n-1} \tag{2}$$

donde b_n aunque no es incógnita, está asociado al valor de $S'(x_n)$.

• De la continuidad de S'': $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$ para $j = 0, \ldots, n-2$, así

$$2c_{j+1} = 2c_j + 6d_j h_j, \quad j = 0, \ldots, n-2, \boldsymbol{n-1}, \tag{3}$$

donde c_n aunque no es incógnita, está definida por $c_n := \frac{1}{2}S''(x_n)$.
Despejamos d_j de (3)

$$\boxed{d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}} \qquad j = 0, \dots, n-1,$$

y reemplazando el valor de d_j en (1) y (2)

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} h_j^3 \quad \Rightarrow \quad a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{c_{j+1} + 2c_j}{3} h_j^2 \tag{4}$$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3\frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} h_j^2 \quad \Rightarrow \quad b_{j+1} = b_j + (c_{j+1} + c_j)h_j \tag{5}$$

encontramos una expresión para b_j de (4)

$$\boxed{b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})}$$

y reemplazando en (5), pero con un subíndice menos, es decir, reemplazamos en la expresión $b_j = b_{j-1} + h_{j-1}(c_j + c_{j-1})$ y obtenemos el sistema

$$\boxed{h_{j-1}c_{j-1} + 2c_j(h_{j-1} + h_j) + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \qquad j = 1, \dots, n-1.}$$

Del procedimiento anterior, reducimos el sistema de $4n$ incógnitas al sistemas en las incógnitas $c_0, \dots, c_n$ ya que los valores de los h_j y a_j son conocidos. <u>Pero</u>, tenemos un sistema con $n+1$ incógnitas y $n-1$ ecuaciones, las dos ecuaciones faltantes se obtienen de las condiciones de frontera. Una vez se introducen las condiciones de frontera, resolvemos el sistema, recuperamos los valores de d_j y b_j, $j = 0, \dots, n-1$, construimos los S_j, $j = 0, \dots, n-1$, y por ende el spline cúbico S.

♣ En el caso de tener condición de frontera natural, se debe cumplir que $S''(x_0) = 0$ y $S''(x_n) = 0$, que en términos de las incógnitas se traducen en $c_0 = 0$ y $c_n = 0$ (ya que $S''(x_j) = 2c_j$, $j = 0, \dots, n$) y el sistema de ecuaciones a resolver es $\boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{A}_{(n-1)\times(n-1)}$

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) - \frac{3}{h_{n-3}}(a_{n-2} - a_{n-3}) \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \end{bmatrix}$$

Notemos que la matriz $\boldsymbol{A}$ es e.d.d. y por ende invertible, lo cual garantiza el spline cúbico natural existe y es único.

♣ En el caso de tener condición de frontera con curvatura conocida, se debe cumplir que $S''(x_0) = f''(x_0)$ y $S''(x_n) = f''(x_n)$, que en términos de las incógnitas se traduce en $c_0 = \frac{1}{2}f''(x_0)$ y $c_n = \frac{1}{2}f''(x_n)$ y el sistema de ecuaciones a resolver es $\boldsymbol{Ac} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$ con la misma matriz $\boldsymbol{A}_{(n-1)\times(n-1)}$, el vector de incógnitas $\boldsymbol{c}$ y el vector $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ es el resultado de modificar la primera y última componente de $\boldsymbol{b}$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)h_0 \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) - \frac{3}{h_{n-3}}(a_{n-2} - a_{n-3}) \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) - \frac{1}{2}f''(x_n)h_{n-1} \end{bmatrix}$$

que se obtiene de la relación $h_{j-1}c_{j-1} + 2c_j(h_{j-1} + h_j) + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$ con $j = 1$

$$h_0c_0 + 2c_1(h_0 + h_1) + h_1c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2}f''(x_0)h_0 + 2c_1(h_0 + h_1) + h_1c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$$

y con $j = n - 1$

$$h_{n-2}c_{n-2} + 2c_{n-1}(h_{n-2} + h_{n-1}) + h_{n-1}c_n = \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2})$$

$$\Updownarrow$$

$$h_{n-2}c_{n-2} + 2c_{n-1}(h_{n-2} + h_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(x_n)h_{n-1} = \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ es la misma e.d.d. garantizando que el spline cúbico con curvatura conocida existe y es único.

En el caso de tener condición de frontera con terminación parabólica, se debe cumplir que S'' sea constante en los intervalos extremos, esto es, en los intervalos $[x_0, x_1]$ y $[x_{n-1}, x_n]$. Dado que $S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$ en $(x_j, x_{j+1}]$, la condición se traduce en que los polinomios S_0'' y S_{n-1}'' sean constantes y esto se cumple siempre que $d_0 = 0$ y $d_{n-1} = 0$

$$0 = d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} \qquad \Rightarrow \qquad c_0 = c_1,$$
$$0 = d_{n-1} = \frac{c_n - c_{n-1}}{3h_{n-1}} \qquad \Rightarrow \qquad c_n = c_{n-1}.$$

Así el sistema de ecuaciones a resolver es $\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ con la matriz $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{(n-1)\times(n-1)}$ dada por

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 3h_0 + 2h_1 & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & \\ & & h_{n-2} & 2h_{n-2} + 3h_{n-1} & \end{bmatrix}$$

el vector de incógnitas $\boldsymbol{c}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ dados antes. La matriz $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ es matriz e.d.d. garantizando que el spline cúbico con terminación parabólica existe y es único.

Ejemplo Hallar el spline cúbico que interpola la nube de puntos

x_k	-3	-1	2	3	7
y_k	5	4	12	6	0

$\star$ Spline natural $\quad\star$ Spline tal que $S''(-3) = -1$ y $S''(7) = 2$ (curvatura conocida) $\quad\star$ Spline con terminación parabólica.

<u>*Solución:*</u> Queremos hallar el spline cúbico de la forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x + 3) + c_0(x + 3)^2 + d_0(x + 3)^3, & x \in [-3, -1], \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x + 1) + c_1(x + 1)^2 + d_1(x + 1)^3, & x \in [-1, 2], \\ S_2(x) = a_2 + b_2(x - 2) + c_2(x - 2)^2 + d_2(x - 2)^3, & x \in [2, 3], \\ S_3(x) = a_3 + b_3(x - 3) + c_3(x - 3)^2 + d_3(x - 3)^3, & x \in [3, 7]. \end{cases}$$

Vamos a construir el sistema de ecuaciones en las variables c_0, c_1, c_2, c_3 y c_4 dado por la relación

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \qquad j = 1, 2, 3.$$

esto es

$$\begin{aligned}
j=1 \;\rightarrow \qquad & h_0c_0+2(h_0+h_1)c_1+h_1c_2=\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{3}{h_0}(a_1-a_0)\\
j=2 \;\rightarrow \qquad & h_1c_1+2(h_1+h_2)c_2+h_2c_3=\frac{3}{h_2}(a_3-a_2)-\frac{3}{h_1}(a_2-a_1)\\
j=3 \;\rightarrow \qquad & h_2c_2+2(h_2+h_3)c_3+h_3c_4=\frac{3}{h_3}(a_4-a_3)-\frac{3}{h_2}(a_3-a_2)
\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
h_0 &= x_1-x_0=-1-(-3)=2 & a_0 &= f(x_0)=y_0=5\\
h_1 &= x_2-x_1=2-(-1)=3 & a_1 &= f(x_1)=y_1=4\\
h_2 &= x_3-x_2=3-2=1 & a_2 &= f(x_2)=y_2=12\\
h_3 &= x_4-x_3=7-3=4 & a_3 &= f(x_3)=y_3=6\\
& & a_4 &= f(x_4)=y_4=0
\end{aligned}$$

así el sistema de ecuaciones esta dado por

$$\begin{aligned}
2c_0+10c_1+3c_2 &= \frac{19}{2}\\
3c_1+8c_2+c_3 &= -26\\
c_2+10c_3+4c_4 &= \frac{27}{2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Hasta acá el procedimiento es el mismo para cada una de las diferentes condiciones de frontera.

$\star$ Spline natural: debe cumplir que $S''(-3)=0$ y $S''(7)=0$, que se traduce en $c_0=0$ y $c_4=0$, así (6) se convierte en el sistema

$$\left.\begin{aligned}
10c_1+3c_2 &= \tfrac{19}{2}\\
3c_1+8c_2+c_3 &= -26\\
c_2+10c_3 &= \tfrac{27}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned}
c_1 &\approx 2.2443\\
c_2 &\approx -4.3143\\
c_3 &\approx 1.7814
\end{aligned}$$

reemplazamos en la relación para d_j y b_j, $j=0,1,2,3$

$$d_j=\frac{c_{j+1}-c_j}{3h_j} \;\Rightarrow\; \begin{cases}
d_0=\dfrac{c_1-c_0}{3h_0}\approx \frac{2.2443}{6}\approx 0.374\\
d_1=\dfrac{c_2-c_1}{3h_1}\approx \frac{-4.3143-2.2443}{9}\approx -0.7287\\
d_2=\dfrac{c_3-c_2}{3h_2}\approx \frac{1.7814-(-4.3143)}{2}\approx 2.0319\\
d_3=\dfrac{c_4-c_3}{3h_3}\approx \frac{0-1.7814}{8}\approx -0.1485
\end{cases}$$

$$b_j=\frac{1}{h_j}(a_{j+1}-a_j)-\frac{h_j}{3}(2c_j+c_{j+1}) \;\Rightarrow\; \begin{cases}
b_0=\frac{1}{h_0}(a_1-a_0)-\frac{h_0}{3}(2c_0+c_1)\approx \frac{1}{2}(4-5)-\frac{2}{3}(2.2443)\approx -1.9962\\
b_1=\frac{1}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{h_1}{3}(2c_1+c_2)\approx \frac{1}{3}(12-4)-\frac{3}{3}(2(2.2443)-4.3143)\approx 2.4924\\
b_2=\frac{1}{h_2}(a_3-a_2)-\frac{h_2}{3}(2c_2+c_3)\approx (6-12)-\frac{1}{3}(2(-4.3143)+1.7814)\approx -3.7176\\
b_3=\frac{1}{h_3}(a_4-a_3)-\frac{h_3}{3}(2c_3+c_4)\approx \frac{1}{4}(0-6)-\frac{4}{3}(2(1.7814))\approx -6.2505
\end{cases}$$

por lo tanto, el spline cúbico natural para los puntos es

$$S(x)=\begin{cases}
5-1.9962(x+3)+0.374(x+3)^3, & x\in[-3,-1],\\
4+2.4924(x+1)+2.2443(x+1)^2-0.7287(x+1)^3, & x\in[-1,2],\\
12-3.7176(x-2)-4.3143(x-2)^2+2.0319(x-2)^3, & x\in[2,3],\\
6-6.2505(x-3)+1.7814(x-3)^2-0.1485(x-3)^3, & x\in[3,7].
\end{cases}$$

$\star$ Spline con curvatura conocida: debe cumplir que $S''(-3) = -1$ y $S''(7) = 2$, que se traduce en $2c_0 = -1$ y $2c_4 = 2$, así (6) se convierte en el sistema

$$\left.\begin{array}{r}10c_1 + 3c_2 = \frac{19}{2} + 1\\ 3c_1 + 8c_2 + c_3 = -26\\ c_2 + 10c_3 = \frac{27}{2} - 4\end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l}c_1 \approx 2.34\\ c_2 \approx -4.3\\ c_3 \approx 1.38\end{array}$$

procediendo como antes para obtener b_j y d_j, $j = 0, 1, 2, 3$, así el spline cúbico con curvatura conocida para los puntos es

$$S(x) = \begin{cases} 5 - 1.3933(x+3) - 0.5(x+3)^2 + 0.4733(x+3)^3, & x \in [-3,-1],\\ 4 + 2.2867(x+1) + 2.34(x+1)^2 - 0.7378(x+1)^3, & x \in [-1,2],\\ 12 - 3.5933(x-2) - 4.3(x-2)^2 + 1.8933(x-2)^3, & x \in [2,3]\\ 6 - 6.5133(x-3) + 1.38(x-3)^2 - 0.0317(x-3)^3, & x \in [3,7]. \end{cases}$$

$\star$ Spline con terminación parabólica: se debe cumplir que S'' es constante en los intervalos extremos, esto es, en los intervalos $[-3,-1]$ y $[3,7]$, esto es, que S_0'' es constante en $[-3,-1]$ y S_3'' es constante en $[3,7]$, que se traduce en que $c_0 = c_1$ y $c_4 = c_3$, así (6) se convierte en el sistema

$$\left.\begin{array}{r}12c_1 + 3c_2 = \frac{19}{2}\\ 3c_1 + 8c_2 + c_3 = -26\\ c_2 + 14c_3 = \frac{27}{2}\end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l}c_1 \approx 1.8134\\ c_2 \approx -4.0871\\ c_3 \approx 1.2562\end{array}$$

procediendo como antes para obtener b_j y d_j, $j = 0, 1, 2, 3$, así el spline cúbico con terminación parabólica para los puntos es

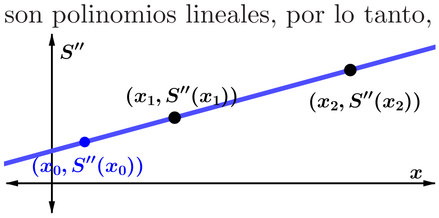
$$S(x) = \begin{cases} 5 - 4.1269(x+3) + 1.8134(x+3)^2, & x \in [-3,-1],\\ 4 + 3.1269(x+1) + 1.8134(x+1)^2 - 0.6556(x+1)^3, & x \in [-1,2],\\ 12 - 3.6940(x-2) - 4.0871(x-2)^2 + 1.7811(x-2)^3, & x \in [2,3],\\ 6 - 6.5249(x-3) + 1.2562(x-3)^2, & x \in [3,7]. \end{cases}$$

♠ En el caso de tener condición de frontera sujeta, se debe cumplir que $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$, que en términos de las incógnitas se traducen en $b_0 = f'(x_0)$ y $b_n = f'(x_n)$, y por (5) $b_n = b_{n-1} + (c_n + c_{n-1})h_{n-1}$. Así, de la relación obtenida para los b_j se tiene

$$f'(x_0) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) \quad \Rightarrow \quad h_0 c_0 = \frac{3}{2h_0}(a_1 - a_0) - \frac{3}{2}f'(x_0) - \frac{1}{2}h_0 c_1$$

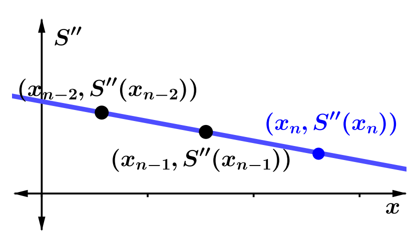
$$f'(x_n) = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + (c_n + c_{n-1})h_{n-1} \quad \Rightarrow \quad h_{n-1}c_n = -\frac{3}{2h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) + \frac{3}{2}f'(x_n) - \frac{1}{2}h_{n-1}c_{n-1}$$

♠ En el caso de tener condición de frontera extrapolada, se debe cumplir que $S''(x_0)$ y $S''(x_n)$ se extrapola de los valores de $S''(x_1)$, $S''(x_2)$ y $S''(x_{n-2})$, $S''(x_{n-1})$, respectivamente. Dado que cada S_j es un polinomio de grado a lo más 3, S_j'' son polinomios lineales, por lo tanto, al extrapolar (igualando pendientes) obtenemos



$$\frac{S''(x_2) - S''(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{S''(x_1) - S''(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{2c_2 - 2c_1}{h_1} = \frac{2c_1 - 2c_0}{h_0}$$

$$\frac{S''(x_{n-1}) - S''(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} = \frac{S''(x_n) - S''(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2c_{n-1} - 2c_{n-2}}{h_{n-2}} = \frac{2c_n - 2c_{n-1}}{h_{n-1}}$$



Ejercicios Identificar los sistema de ecuaciones $\widehat{A}\boldsymbol{c} = \widehat{\boldsymbol{b}}$ y $\breve{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ necesarios para obtener el spline cúbico sujeto y extrapolado, respectivamente.

MATLAB

1. Considere los siguientes puntos obtenidos de una cierta función f:

x_k	-1	2	3	5	6
y_k	3	-1	1	5	4

a) Hallar el spline cúbico natural S para la nube de puntos y el valor aproximado de f en $x = 2.5$ obtenido por el spline.

Para obtener el spline natural necesitamos los siguientes datos de entrada `X,Y` y obtendremos el dato de salida `S`

```
S=csnatural(X,Y)
```

`X,Y` son los vectores que contienen la nube de puntos y `S` es la matriz que contiene los coeficientes de los tamos S_i, más exactamente, la matriz con los coeficientes a_i, b_i, c_i y d_i. Veamos como interpretar los valores de `S`

```
>> x=[-1 2 3 5 6];
>> y=[3 -1 1 5 4];
>> S=csnatural(x,y)
S =
 0.1342         0    -2.5413    3.0000
-0.2907    1.2080     1.0827   -1.0000
-0.3247    0.3360     2.6267    1.0000
 0.5373   -1.6120     0.0747    5.0000
```

así el spline natural esta dado por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 3 - 2.5413(x+1) + 0.1342(x+1)^3, & x \in [-1,2], \\ S_1(x) = -1 + 1.0827(x-2) + 1.208(x-2)^2 - 0.2907(x-2)^3, & x \in [2,3], \\ S_2(x) = 1 + 2.6267(x-3) + 0.336(x-3)^2 - 0.3247(x-3)^3, & x \in [3,5], \\ S_3(x) = 5 + 0.0747(x-5) - 1.612(x-5)^2 + 0.5373(x-5)^3, & x \in [5,6]. \end{cases}$$

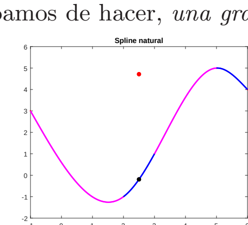
Para obtener el valor aproximado de f en $x = 2.5$ obtenido por S, debemos evaluar en S_1 puesto de $2.5 \in [2,3]$. Para ello empleamos la instrucción de MATLAB `polyval` pero teniendo en cuenta que necesitamos los coeficientes de S_1, esto es, la segunda fila de `S`, además debemos tener presente que el polinomio no es de la forma $d_i x^3 + c_i x^2 + b_i x + a_i$, tiene la forma $d_i(x-x_1)^3 + c_i(x-x_1)^2 + b_i(x-x_1) + a_i$, por lo tanto no evaluamos directamente en $x = 2.5$, debemos evaluar en $(2.5 - x_i)$, más exactamente

```
>> y25 = polyval(S(2,:),2.5-2)
y25 = -0.1930
```

así, el valor aproximado de f en $x = 2.5$ obtenido por S es aproximadamente -0.193.

Hay una rutina más que nos muestra la grafica del spline obtenido, grafiquemos tambien los puntos que se obtienen al evaluar directamente en $x = 2.5$ y en la forma como lo acabamos de hacer, *una grafica dice mas que mil palabras*

```
>> GraficaCercha(x,y,S)
>> hold on
>> plot(2.5,y25,’.k’,’MarkerSize’,20)
>> y25m = polyval(S(2,:),2.5)
>> plot(2.5,y25m,’.r’,’MarkerSize’,20
```



La evaluación incorrecta es el punto rojo y la correcta el punto negro.

b) Hallar el spline con curvatura dada en los extremos S para la nube de puntos que verifica las condiciones $S''(-1) = 3$ y $S''(6) = -1$, ¿cuál es el valor aproximado de f en $x = 4.3$ obtenido por este spline?

Para obtener el spline con curvatura dada necesitamos los siguientes datos de entrada `X,Y,a,b` y obtendremos el dato de salida `S`

```
S=csconocido(X,Y,a,b)
```

`S,X,Y` representan la matriz y vectores mencionados ya, `a,b` son los valores de S'' en los extremos. En este caso el spline con curvatura se obtiene así

```
>> S=csconocido(x,y,3,-1)
S =
-0.0960    1.5000   -4.9693    3.0000
-0.0747    0.6360    1.4387   -1.0000
-0.3277    0.4120    2.4867    1.0000
 0.3513   -1.5540    0.2027    5.0000
```

así el spline con curvatura esta dado por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 3 - 4.9693(x+1) + 1.5(x+1)^2 - 0.096(x+1)^3, & x \in [-1,2], \\ S_1(x) = -1 + 1.4387(x-2) + 0.636(x-2)^2 - 0.0747(x-2)^3, & x \in [2,3], \\ S_2(x) = 1 + 2.4867(x-3) + 0.412(x-3)^2 - 0.3277(x-3)^3, & x \in [3,5], \\ S_3(x) = 5 + 0.2027(x-5) - 1.554(x-5)^2 + 0.3513(x-5)^3, & x \in [5,6]. \end{cases}$$

Para hallar el valor aproximado de f en $x = 4.3$ obtenido por este spline, debemos evaluar en S_2 puesto de $4.3 \in [3,4]$

```
>> y43 = polyval(S(3,:),4.3-3)
y43 = 4.2091
```

así, el valor aproximado de f en $x = 4.3$ obtenido por S es aproximadamente 4.2091.

2. Considere la función $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)\ln(4x^2+1) - \tan^{-1}(2x)}{x^2+2}$ y el conjunto de nodos dados por $x = -3:2:9$.

a) Halle el spline cúbico S tal que S'' se extrapola en los intervalos extremos, spline que aproxima a h en los nodos dados.

Para obtener el spline S tal que S'' se extrapola en los intervalos extremos empleamos la rutina `csextrapolado`

```
S=csextrapolado(X,Y)
```

los valores de entrada y salida son como antes. En este caso debemos definir la función, el vector x y calcular las imágenes y de h en x para emplear la rutina

```
>> h=@(x) (sin(x).*log(4*x.^2+1)-atan(2*x))./(x.^2+2);
>> x=-3:2:9
x = -3    -1     1     3     5     7     9
>> y=h(x)
y = 0.0815   -0.0824    0.0824   -0.0815
                                  -0.2184    0.0387    0.0105
```

```
>> S=csextrapolado(x,y)
S =
-0.0189    0.1547   -0.3156    0.0815
-0.0189    0.0411    0.0760   -0.0824
 0.0125   -0.0725    0.0130    0.0824
 0.0132    0.0027   -0.1268   -0.0815
-0.0196    0.0821    0.0428   -0.2184
-0.0196   -0.0357    0.1357    0.0387
```

el spline pedido tiene la forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = -0.0189(x+3)^3 + 0.1547(x+3)^2 - 0.3156(x+3) + 0.0815, & x \in [-3,-1], \\ S_1(x) = -0.0189(x+1)^3 + 0.0411(x+1)^2 + 0.076(x+1) - 0.0824, & x \in [-1,1], \\ S_2(x) = 0.0125(x-1)^3 - 0.0725(x-1)^2 + 0.0130(x-1) + 0.0824, & x \in [1,3], \\ S_3(x) = 0.0132(x-3)^3 + 0.0027(x-3)^2 - 0.1268(x-3) - 0.0815, & x \in [3,5], \\ S_4(x) = -0.0196(x-5)^3 + 0.0821(x-5)^2 + 0.0428(x-5) - 0.2184, & x \in [5,7], \\ S_5(x) = -0.0196(x-7)^3 - 0.0357(x-7)^2 + 0.1357(x-7) + 0.0387, & x \in [7,9]. \end{cases}$$

b) Halle el error cometido al aproximar h en $x = 6.4$ por medio del spline.

Primero, para hallar el valor del spline en $x = 6.4$, debemos evaluar en S_4 puesto de $6.4 \in [5,7]$ y para hallar el error evaluamos h en $x = 6.4$

```
>> s64 = polyval(S(5,:),6.4-5)
s64 = -0.0514
>> h64 = h(6.4)
h64 = -0.0209
```

```
>> error = abs(h64-s64)
error = 0.0305
```

por lo tanto, el error cometido al aproximar h en $x = 6.4$ por medio del spline es aproximadamente 0.0305.

Nota Las rutinas de los otros tipos de spline son `csconstante` y `csfit`.