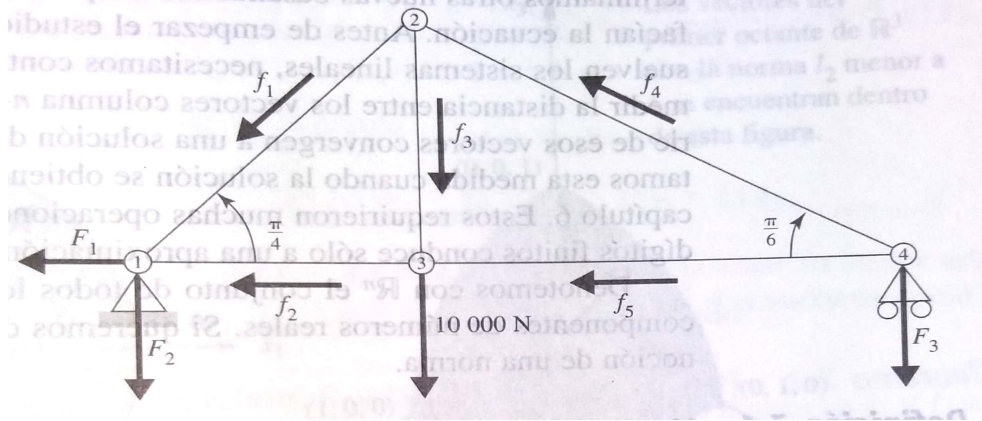


PROBLEMAS DE APLICACIÓN.  
métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR.  
Newton-Raphson para sistema de ecuaciones no lineales.



1. La figura en la parte superior muestra una estructura que se mantiene estacionaria en el extremo inferior de la izquierda ①, que se desplaza horizontalmente en el extremo inferior derecho ④ y que tiene juntas de pasador en ①, ②, ③ y ④. Se coloca una carga de 10000 newtons (N) en la junta ③ y las fuerzas que actúan sobre los miembros de la estructura tienen magnitudes dadas por  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  y  $f_5$  como se observa en la figura. El miembro de soporte estacionario tiene una fuerza horizontal  $F_1$  y una fuerza vertical  $F_2$ , pero el miembro de soporte móvil tiene únicamente la fuerza vertical  $F_3$ . Si la estructura está en equilibrio estático, las fuerzas en cada junta deben agregarse al vector cero, de modo que la suma de las componentes horizontal y vertical de las fuerzas en cada junta debe ser cero. Esto genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

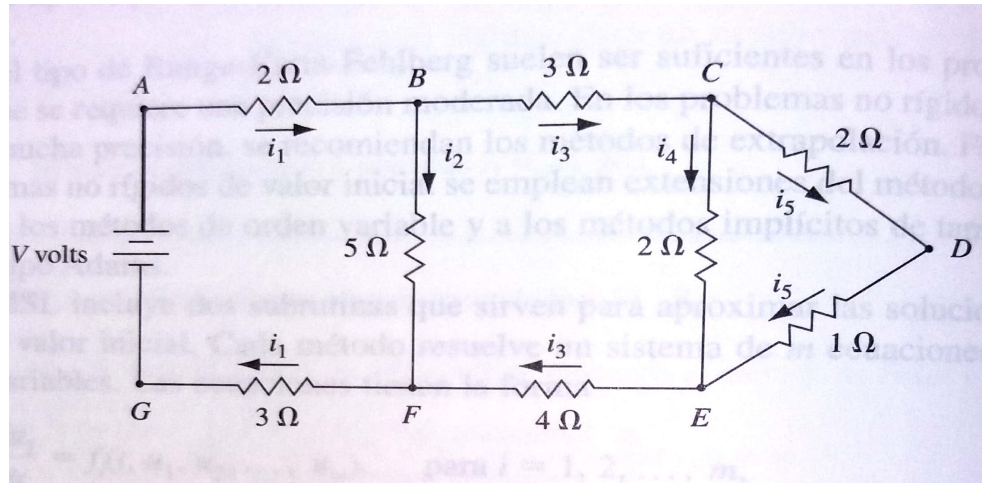
Junta	Componentes horizontales	Componentes verticales
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - f_3 + \frac{1}{2}f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2}f_4 - F_3 = 0$

Este sistema puede expresarse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Explique por qué se reordenó el sistema de ecuaciones.

- b) Aproxime la solución del sistema lineal resultante con una exactitud de  $10^{-2}$  en la norma infinito, utilizando como aproximación inicial el vector cuyos elementos son todos unos mediante tres métodos diferentes: el método de Jacobi, el método de Gauss-Seidel y el método SOR, este último con parámetro  $\omega = 1.25$
- c) ¿Cuál es el radio espectral de cada una de las tres matrices de iteración de punto fijo correspondientes a los tres métodos considerados en el literal b)?



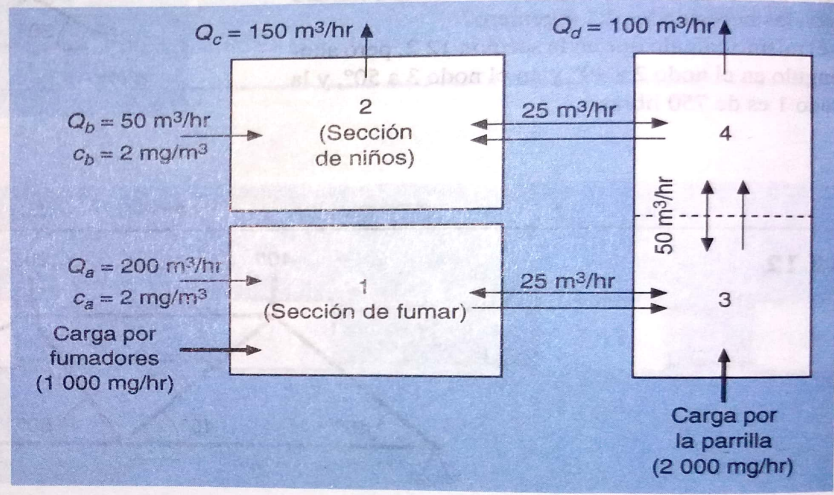
2. Las leyes de Kirchhoff de los circuitos eléctricos establecen que el flujo neto de la corriente que pasa por las uniones de un circuito es cero, y que la caída de voltaje neto alrededor de las partes cerradas del circuito también es cero. Supóngase que aplicamos un potencial de  $V$  volts entre los puntos  $A$  y  $G$  del circuito en la gráfica anterior, y que  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  e  $i_5$ , representan el flujo de corriente como se muestra en el diagrama. Al utilizar  $G$  como punto de referencia, las leyes de Kirchhoff establecen que las corrientes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 5i_1 + 5i_2 &= V \\ i_3 - i_4 - i_5 &= 0 \\ 2i_4 - 3i_5 &= 0 \\ 5i_1 - 7i_3 - 2i_4 &= 0 \end{aligned}$$

Suponga que  $V = 5,5$  volts. Realice un reordenamiento de las ecuaciones de tal forma que se forme un sistema lineal tridiagonal y analice la posibilidad de resolverlo usando alguno de los métodos iterativos considerados en este capítulo.

**FIGURA P12.17**

Vista aérea de los cuartos en un restaurante. Las flechas en un sentido representan los flujos de aire volumétricos, mientras que las flechas en ambos sentidos representan la mezcla difusa. Las cargas debido al humo y la parrilla agregan masa de monóxido de carbono al sistema pero con entrada de aire insignificante.



Escaneado con CamScanner

3. Como su nombre implica, la polución de aire entrante tiene que ver con la contaminación encerrada en espacios tales como casas, oficinas, áreas de trabajo, etc. Suponga que se diseña un sistema de ventilación para un restaurante como se muestra en la figura P.12.17. El área de servicio del restaurante consiste en dos cuartos cuadrados y uno alargado. El cuarto 1 y el 3 tienen fuentes de monóxido de carbono, de los fumadores y una parrilla. Se pueden escribir los balances de masa en estado estable para cada cuarto. Por ejemplo, para la sección de fumadores (cuarto número 1), el balance se escribe como:

$$0 = W_{\text{fumador}} + Q_a C_a - Q_a c_1 + E_{1,3}(c_3 - c_1)$$

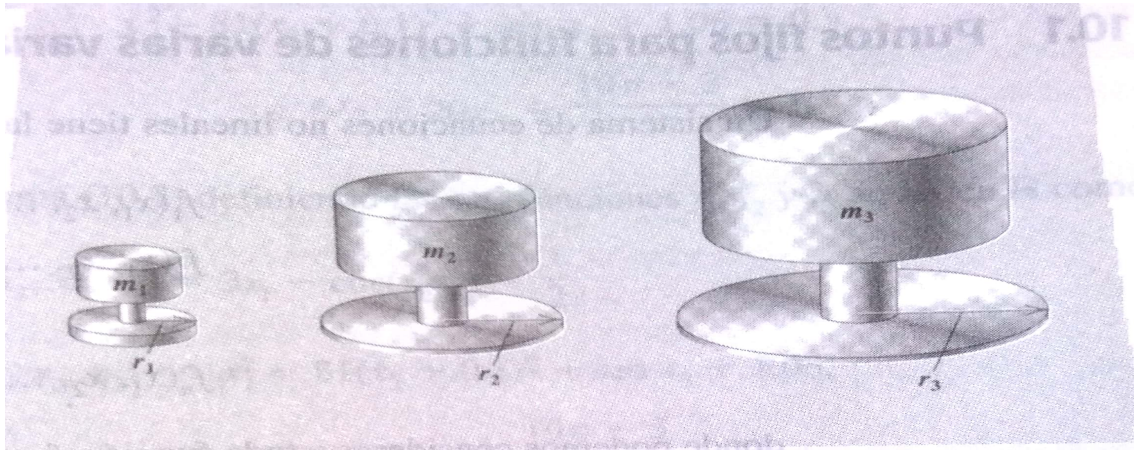
carga + entrada - salida + mezcla

o sustituyendo los parámetros

$$225c_1 - 25c_2 = 1400$$

De forma análoga se obtienen los balances para los otros dos cuartos.

- Resuelva la concentración, en estado estable, de monóxido de carbono para cada cuarto.
- Determine qué porcentaje de monóxido de carbono en la sección de niños es a causa de i) los fumadores, ii) la parrilla y iii) el aire que entra por la ventilación.



Escaneado con CamScanner

4. La presión que se requiere para sumir un objeto grande y pesado en un suelo blando y homogéneo situado arriba de un terreno de base dura, puede predecirse mediante la presión que se requiere para introducir objetos más pequeños en el mismo terreno. Específicamente, la presión  $p$  para sumir una placa circular de radio  $r$  a una distancia  $d$  en un terreno blando, donde el terreno de base sólida se halla a una  $D > d$  debajo de la superficie, puede aproximarse con una ecuación de forma

$$p = \alpha e^{\beta r} + \lambda r ,$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\lambda$  son constantes que dependen de  $d$  y de la consistencia del terreno, pero no del radio de la placa. Si queremos determinar el tamaño mínimo de la placa necesaria para sostener una gran carga, metemos tres cargas pequeñas con radios distintos a la misma distancia; en la figura anterior se muestran las cargas requeridas para esta maniobra. Esto genera las siguientes tres ecuaciones no lineales en las incógnitas  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\lambda$  :

$$m_1 = \alpha e^{\beta r_1} + \lambda r_1 ,$$

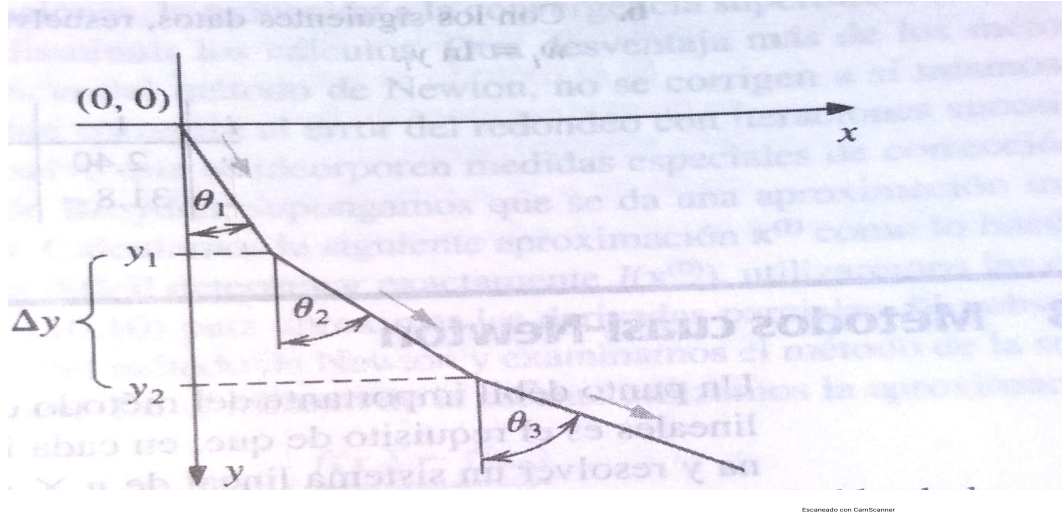
$$m_2 = \alpha e^{\beta r_2} + \lambda r_2 ,$$

$$m_3 = \alpha e^{\beta r_3} + \lambda r_3 ,$$

en las tres incógnitas  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\lambda$ .

- Calcule los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\lambda$  ; si suponemos que una placa cuyo radio es de 1  $plg$  requiere una presión de  $10 \frac{lb}{plg^2}$  para enterrarse 1  $pie$  en un campo fangoso, una placa de radio 2  $plg$  requiere una presión de  $12 \frac{lb}{plg^2}$  para enterrarse 1  $pie$  y una placa de radio 3  $plg$  requiere una presión de  $15 \frac{lb}{plg^2}$  para enterrarse la misma distancia ( todo lo anterior suponiendo que el lodo tiene una profundidad de más de 1  $pie$  ).
- Use los cálculos del literal anterior para predecir el tamaño mínimo de la placa circular que se necesitará para sostener una carga de 500 *libras* en este campo, con un hundimiento menor o igual que 1  $pie$ .





5. Un modelo para calcular la forma de un sumidero de descarga de flujo por gravedad, que reducirá al máximo el tiempo de tránsito de las partículas granulares descargadas, utiliza la solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales, la cual se calcula numéricamente mediante el método de Newton para funciones vectoriales:

a)

$$f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \frac{\text{sen}(\theta_{n+1})}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \frac{\text{sen}(\theta_n)}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0 ,$$

para toda  $n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ .

b)

$$f_N(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^N \tan(\theta_i) - X = 0 ,$$

donde

1)

$$v_n^2 = v_0^2 - 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^n \frac{1}{\cos(\theta_j)}$$

para toda  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  ,      y

2)

$$w_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_i^3 \cos(\theta_j)} ,$$

para toda  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  .

La constante  $v_0$  es la velocidad inicial del material granular,  $X$  es la coordena  $x$  del extremo final del sumidero,  $\mu$  es la fuerza de fricción,  $N$  es el número de segmentos del sumidero y  $g$  es la constante gravitacional  $g = 32,17 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}$ . La variable  $\theta_i$  es el ángulo del  $i$ -ésimo segmento del suindero respecto a la vertical, como se aprecia en la figura , y  $v_i$  es la velocidad de la partícula en el  $i$ -ésimo segmento del sumidero.

Resuelva el sistema de ecuaciones dado por los literales a) y b) para  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)^T$  con  $\mu = 0.1$  ,  $X = 2$  ,  $\Delta y = 0.2$  ,  $N = 20$  y  $v_0 = 0$  , donde los valores de  $v_n$  y  $w_n$  pueden obtenerse directamente de 1) y 2). Itere hasta que  $\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\|_\infty \leq 10^{-2}$ .

## Bibliografía

Steven C. Chapra y Raymond P. Canale; 2001, Métodos numéricos para ingenieros, McGraw Hill; tercera edición. Ejercicio número 3.

Richard L. Burden, Douglas J. Faires y Annette M. Burden; 2017, Análisis numéricos, Cengage learning; décima edición. Ejercicios números 1, 2, 4 y 5.