

MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER UN SISTEMA
DE ECUACIONES LINEALES

Muchos de los problemas de ingeniería y ciencias se modelan por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales y lo usual es resolver numéricamente estas ecuaciones. El proceso de solución numérica de una ecuación diferencial lleva, a través de una discretización, a un problema de álgebra lineal de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con \mathbf{A} matriz cuadrada invertible, \mathbf{b} vector de datos y \mathbf{x} vector solución que es una aproximación de la solución de la ecuación diferencial.

La solución numérica de sistemas lineales es una parte central de los métodos numéricos. En el curso básico de álgebra lineal se estudian métodos directos para la solución de sistemas encabezado por la eliminación de Gauss. En este curso nos concentramos en métodos iterativos.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right\} \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

donde \mathbf{A} es la matriz de coeficientes del sistema, \mathbf{b} es vector de datos y \mathbf{x} es el vector de incógnitas

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Estamos interesados en aproximar la solución \mathbf{x} cuando n es grande, ya que en ese caso emplear un método directo es “costoso” en tiempo de computación y memoria para almacenamiento.

Un método iterativo para resolver el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ comienza con una aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ y genera una sucesión de aproximaciones (vectores) $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ que, bajo condiciones adecuadas, converge a \mathbf{x} . Partimos del sistema de ecuaciones y lo vamos a escribir en un problema equivalente (recordemos: acá equivalente significa que ambos problemas tienen la misma solución)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \xLeftrightarrow{\text{despejamos } \mathbf{x}} \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

Notemos que nuevamente estamos pasando de un problema de ‘ceros’ $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ a uno de ‘punto fijo’ $\mathbf{x} = g(\mathbf{x}) := \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$. Para generar la sucesión empleamos la ecuación de iteración

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

La matriz \mathbf{T} recibe el nombre de matriz de iteración y \mathbf{c} vector asociado a la matriz de iteración \mathbf{T} .

Primero, analicemos qué necesitamos para garantizar convergencia. De manera similar a como se analizó convergencia en el capítulo anterior, queremos que la *distancia* entre la aproximación $\mathbf{x}^{(k)}$ y la solución \mathbf{x} tienda a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Recordemos que la distancia entre vectores la medimos con la *norma* vectorial de la diferencia $\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$. En este capítulo también necesitamos el concepto de norma matricial y sus propiedades.

Definición. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Una **norma vectorial** es cualquier función real definida en V notada por

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

y que cumple las siguientes propiedades

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V,$
2. $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0},$
3. $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$
4. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad (\text{desigualdad triangular}).$

A un espacio vectorial V provisto de una norma $\|\cdot\|$ se le llama espacio vectorial normado y se le denota $(V, \|\cdot\|)$.

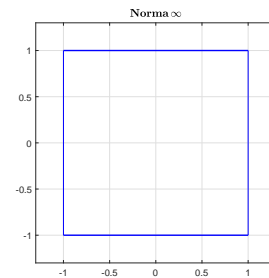
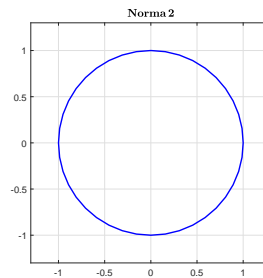
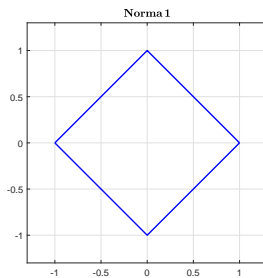
Ejemplo Dados $V = \mathbb{R}^n$ (espacio de vectores (columna) de n componentes reales) y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, se definen las siguientes normas:

■ **Norma euclídeana:** $\|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

■ **Norma infinito:** $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$

■ **Norma uno:** $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|.$

Ejemplo Representación gráfica de las vecindades de radio 1 centrados en el origen de \mathbb{R}^2 en las normas 1, 2 e infinito.



Por comodidad de notación, muchas veces escribiremos un vector columna como $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio Demostrar que la función $\|\cdot\|_p$ definida en \mathbb{R}^n por $\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{N}$ es una norma vectorial.

Ejemplo Sea $\mathbf{x} = [1, -2, 3]^T \in \mathbb{R}^3$. Hallar $\|\mathbf{x}\|_1, \|\mathbf{x}\|_\infty, \|\mathbf{x}\|_2$ y $\|\mathbf{x}\|_5$

Solución: De las definiciones se sigue que

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |3|\} = 3,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |3|^2} = \sqrt{14},$$

$$\|\mathbf{x}\|_5 = \sqrt[5]{|1|^5 + |-2|^5 + |3|^5} = \sqrt[5]{276}.$$

Las cuatro normas del ejemplo son parecidas en un sentido matemático que se denomina *equivalencia*. Entonces a la pregunta, ¿cuál de las normas empleamos? la respuesta es *cualquiera*, basados en el siguiente teorema.

Teorema. *Todas las normas sobre un espacio de dimensión finita son equivalentes.*

Lo que me dice el teorema anterior es que, si $\|\cdot\|_\bullet$ y $\|\cdot\|_\star$ son dos normas cualesquiera en un espacio de dimensión finita y la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ converge a \mathbf{x} con respecto a la norma $\|\cdot\|_\bullet$, entonces la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ también converge a \mathbf{x} con respecto a la norma $\|\cdot\|_\star$.

Definición. *Una norma matricial es una función*

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{A} &\longmapsto \|\mathbf{A}\|\end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
2. $\|\mathbf{A}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$,
3. $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\| \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y
5. $\|\mathbf{A} \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Teorema. *Si $\|\cdot\|$ es norma vectorial sobre \mathbb{R}^n entonces*

$$\|\mathbf{A}\| := \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

es una norma matricial sobre $\mathbb{R}^{n \times n}$.

A cada norma matricial definida a partir de una norma vectorial se le llama **norma natural o inducida** y se denota con el mismo símbolo que la norma vectorial.

Ejemplo Sea $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una norma matricial **no** inducida es la norma de Frobenius

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y algunas normas matriciales inducidas son

- $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}| \right)$ (máximo suma de filas).
- $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |a_{ij}| \right)$ (máximo suma de columnas).
- $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ (norma espectral).

En la norma espectral ρ representa el radio espectral de una matriz. Para entender este concepto, veamos/recordemos algunas definiciones

Definición. Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada.

- Diremos que un número $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio (o autovalor) de \mathbf{A} si existe un vector no nulo, $\mathbf{v} \neq 0$, tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Al vector \mathbf{v} se le llama vector propio (o autovector) asociado al valor propio λ .

λ es un valor propio de \mathbf{A} si y sólo si λ es un cero del polinomio característico $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, esto es, λ es raíz de la ecuación característica $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

- El espectro de \mathbf{A} es el conjunto de todos sus valores propios:

$$\sigma(\mathbf{A}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un valor propio de } \mathbf{A} \right\}.$$

- El radio espectral de \mathbf{A} es el máximo módulo de sus valores propios:

$$\rho(\mathbf{A}) := \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |\lambda|.$$

Recordemos que el módulo de $\lambda \in \mathbb{C}$ dado por $\lambda = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ está dado por $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Así, para hallar la norma espectral de una matriz \mathbf{A} debemos hallar el radio espectral de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Hay un caso particular cuando \mathbf{A} es simétrica.

Teorema. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), entonces $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$.

Ejemplo Consideremos las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}.$$

Hallar $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$, $\|\mathbf{A}\|_F$ y $\|\mathbf{B}\|_2$.

Solución: Empecemos con las normas asociadas a la matriz \mathbf{A} :

- $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{|-1| + |2| + |-5|, |-2| + |-1| + |3|, |-5| + |-3| + |-4|\} = \max\{4, 6, 12\} = 12$
- $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{|-1| + |-2| + |-5|, |2| + |-1| + |-3|, |-1| + |3| + |-4|\} = \max\{8, 6, 8\} = 8$
- $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-5)^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{70}$

Ahora, dado que \mathbf{B} es simétrica, basta con hallar el radio espectral de \mathbf{B} . El polinomio característico de \mathbf{B} es

$$p_{\mathbf{B}}(\lambda) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 5 \\ 5 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(11 - \lambda) - 25 = \lambda^2 - 9\lambda - 47$$

los ceros del polinomio característico $\lambda_1 \approx -3.7$ y $\lambda_2 \approx 12.7$, ésto es, $\sigma(\mathbf{B}) \approx \{-3.7, 12.7\}$, así $\rho(\mathbf{B}) \approx \max\{|-3.7|, |12.7|\} = 12.7$ y por lo tanto $\|\mathbf{B}\|_2 \approx 12.7$.

Terminamos este repaso con un resultado útil para demostrar convergencia.

Corolario. Para cualquier matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ no nulo y cualquier norma natural o inducida $\|\cdot\|$ se cumple

$$\|\mathbf{A}\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Ahora, retomemos el análisis de convergencia de la iteración (1) a la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (equivalente a la solución del sistema $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$)

$$\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} = (\mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}) - (\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x})$$

y de manera similar $\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k-2)} - \mathbf{x})$, así

$$\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k-2)} - \mathbf{x})) = \mathbf{T}^2(\mathbf{x}^{(k-2)} - \mathbf{x}) = \dots = \mathbf{T}^k(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x})$$

y al calcular la norma vectorial $\|\cdot\|$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{T}^k(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{T}^k\| \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{T}\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|,$$

las desigualdades son consecuencia del corolario y la última propiedad de norma matricial. Por lo tanto, para poder concluir que $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \mathbf{x}$ necesitamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}^k\| = 0$ para la norma matricial inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|$. Pero, la pregunta ahora será ¿cuál norma vectorial debo usar para que se tenga el límite cero? La respuesta esta contenida en los siguientes teoremas.

Teorema. Sea $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{T}^k\| = 0$ para todas las normas naturales o inducidas si y sólo si $\rho(\mathbf{T}) < 1$.

Teorema. Sea $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\rho(\mathbf{T}) \leq \|\mathbf{T}\|$ para cualquier norma matricial natural o inducida $\|\cdot\|$.

En resumen, si conocemos el radio espectral de la matriz \mathbf{T} sabemos si hay convergencia o no. Si no tenemos este número, podemos buscar si alguna de las normas matriciales inducidas es menor que 1.

Finalmente, para el análisis de convergencia de la sucesión generada a partir de la iteración (1) tenemos un teorema y un corolario.

Teorema. La sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ definida por la iteración $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ $k = 0, \dots$ converge a la solución única del sistema $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ para toda aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $\rho(\mathbf{T}) < 1$.

Este teorema permite concluir convergencia y divergencia de la sucesión, sin embargo, dado que el cálculo del radio espectral de la matriz de iteración puede ser complicado, tenemos el siguiente corolario, consecuencia de los dos resultados anteriores.

Corolario. Si $\|\mathbf{T}\| < 1$ para alguna norma matricial natural o inducida y \mathbf{c} es un vector cualquiera, la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ definida por la iteración $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ $k = 0, \dots$ converge a la solución única del sistema $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ para toda aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ y además se cumple

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{T}\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|, \quad k = 0, 1, \dots \\ \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| &\leq \frac{\|\mathbf{T}\|^k}{1 - \|\mathbf{T}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Observación Dado que $\rho(\mathbf{T}) \leq \|\mathbf{T}\|$ para toda norma natural o inducida, se tiene la siguiente relación

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \approx \rho(\mathbf{T})^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|, \quad k = 0, 1, \dots$$

Así que es conveniente seleccionar un método iterativo con $\rho(T)$ mínimo.

Vemos que los resultados de convergencia hablan del sistema de ecuaciones $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$, así que la pregunta ahora es: ¿cómo vamos a obtener un sistema $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ partiendo de nuestro objeto de estudio, a saber, el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$? Para responder a esta pregunta, estudiaremos los métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel y los métodos de relajación: S.O.R.

★ MÉTODO DE JACOBI

Queremos aproximar la solución del sistema de n ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

cuya ecuación i -ésima tiene la forma

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i.$$

Supongamos que $\mathbf{a}_{i,i} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. El método de Jacobi se obtiene al despejar de la ecuación i -ésima la variable x_i

$$x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j, \quad i = 1, \dots, n$$

así, la nueva aproximación $x_i^{(\mathbf{k}+1)}$ (lado izquierdo) se obtiene al reemplazar en el lado derecho x_j por la aproximación anterior $x_j^{(\mathbf{k})}$. La ecuación de **iteración escalar** de Jacobi está dada por

$$x_i^{(\mathbf{k}+1)} = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j}x_j^{(\mathbf{k})}, \quad i = 1, \dots, n$$

Nos preguntamos: ¿quién es \mathbf{T} acá? Para responder, vamos a reescribir la matriz \mathbf{A} de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ así

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que al despejar x_i de la ecuación i -ésima, pasamos al lado derecho los términos asociados a las variables x_1, \dots, x_{i-1} (términos al lado izquierdo de $a_{i,i}x_i$ -ver \mathbf{U}) y los términos asociados a las variables x_{i+1}, \dots, x_n (términos al lado derecho de $a_{i,i}x_i$ -ver \mathbf{L}), y luego pasamos a dividir el $a_{i,i}$. Esto da lugar a la matriz de iteración \mathbf{T}_J y al vector asociado \mathbf{c}_J dados por

$$\mathbf{T}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

La iteración matricial del método de Jacobi es

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+1)} = \mathbf{T}_J \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \mathbf{c}_J.$$

★ MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Nuevamente, supongamos que $a_{i,i} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. El método de Gauss-Seidel se obtiene al despejar de la ecuación i -ésima la variable x_i

$$x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j, \quad i = 1, \dots, n$$

y para generar la nueva aproximación $x_i^{(k+1)}$ (lado izquierdo) vamos a reemplazar en el lado derecho los valores x_j para $j = 1, \dots, i-1$ por la aproximación nueva $x_j^{(k)}$ y los valores x_j para $j = i+1, \dots, n$ por la aproximación anterior $x_j^{(k-1)}$.

La ecuación de **iteración escalar** de Gauss-Seidel está dada por

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n$$

Para obtener la matriz de iteración asociada a Gauss-Seidel, regresamos a la ecuación anterior, en donde vemos que

$$a_{i,1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} + a_{i,i} x_i^{(k+1)} = b_i - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{i,n} x_n^{(k)}$$

Matricialmente se puede ver como $(D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$, por lo tanto

$$T_{GS} = (D - L)^{-1}U \quad \text{y} \quad c_{GS} = (D - L)^{-1}b$$

y la iteración matricial del método de Gauss-Seidel es

$$x^{(k+1)} = T_{GS} x^{(k)} + c_{GS}.$$

Antes de ver un ejemplo, que para efectos de interpretar lo que se ha dicho, se hará para un sistema de ecuaciones con orden 3 (recuerden que el objetivo de estudiar estos métodos iterativos es para atacar sistemas de orden mucho mayor), vamos a definir un concepto que nos permite saber si una aproximación es “buena”.

Definición. Supongamos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es una aproximación a la solución del sistema lineal $Ax = b$. El vector **residual** de x^* respecto a este sistema es $r = Ax^* - b$.

De la definición se sigue que x^* es una buena aproximación si $r \approx 0$, que para efectos prácticos, x^* es una buena aproximación si $\|r\| \approx 0$ en una norma vectorial $\|\cdot\|$. Así:

Criterios de parada Dada una tolerancia `tol`, un `delta` y un número máximo de iteraciones `nmax`, vamos a parar de generar aproximaciones $x^{(k)}$ de la raíz x de la ecuación $Ax = b$ cuando se cumpla una de las siguientes condiciones

- $\|r^{(k)}\| < \text{tol}$
- $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \text{delta}$,
- $n > \text{nmax}$

La segunda condición se debe a que la ecuación de iteración no es más que una iteración de punto fijo. En la primera condición $r^{(k)}$ es el residual asociado a la aproximación $x^{(k)}$, pero, realmente es un poco “costosa” por el cálculo de $Ax^{(k)}$, así que realmente se emplea al final de las iteraciones, para saber que tan cerca estamos de la solución.

Ejemplo Aproximar la solución del sistema

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 - 6x_2 - 7x_3 &= 17 \end{aligned}$$

usando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, si las sucesiones generadas por las iteraciones asociadas convergen, con aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1, -1, -1]^T$.

Solución: Primero analicemos las sucesiones generadas por las iteraciones asociadas a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel y para ello, necesitamos las respectivas matrices de iteración \mathbf{T}_J y \mathbf{T}_{GS} . Para ambos métodos debemos partir despejando la variable x_i de la i -ésima ecuación

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 + 2x_2 + x_3 \\x_2 &= 3 + \frac{1}{2}x_1 + x_3 \\x_3 &= -\frac{17}{7} + \frac{1}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2\end{aligned}$$

★ Método de Jacobi: la ecuación escalar del método está dada por

$$\left. \begin{aligned}x_1^{(\mathbf{k}+1)} &= 3 + 2x_2^{(\mathbf{k})} + x_3^{(\mathbf{k})} \\x_2^{(\mathbf{k}+1)} &= 3 + \frac{1}{2}x_1^{(\mathbf{k})} + x_3^{(\mathbf{k})} \\x_3^{(\mathbf{k}+1)} &= -\frac{17}{7} + \frac{1}{7}x_1^{(\mathbf{k})} - \frac{6}{7}x_2^{(\mathbf{k})}\end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{T}_J = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_J = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -\frac{17}{7} \end{bmatrix}.$$

El corolario nos dice: si existe alguna norma matricial inducida de \mathbf{T}_J menor a 1, podemos concluir convergencia. Veamos las normas 1 e infinito

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}_J\|_1 &= \max \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{7}, 2 + \frac{6}{7}, 1 + 1 \right\} = \frac{20}{7} > 1 \\ \|\mathbf{T}_J\|_\infty &= \max \left\{ 2 + 1, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \right\} = 3 > 1\end{aligned}$$

aún no podemos concluir nada y dado que calcular la norma 2 de \mathbf{T}_J es más largo que calcular su radio espectral, procedemos a usar el teorema, es decir, calculemos $\rho(\mathbf{T}_J)$

$$\begin{aligned}p_{\mathbf{T}_J}(\lambda) &= \det(\mathbf{T}_J - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{6}{7} & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{7} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\lambda \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \left(\lambda^2 + \frac{6}{7} \right) - 2 \left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{7} \right) + \left(-\frac{3}{7} + \frac{\lambda}{7} \right) = -\lambda^3 + \frac{2}{7}\lambda - \frac{1}{7}\end{aligned}$$

notemos que $p_{\mathbf{T}_J}(0) = \frac{1}{7} > 0$ y $p_{\mathbf{T}_J}(-1) = -\frac{4}{7} < 0$, así que gracias al T.V.I. $p_{\mathbf{T}_J}$ tiene al menos un cero en $[-1, 0]$. Si aplicamos el método de Newton obtenemos que $\lambda_1 \approx -0.6998$ y si realizamos división sintética, podemos factorizar el polinomio característico ([ejercicio](#))

$$p_{\mathbf{T}_J}(\lambda) = (\lambda + 0.6998)(-\lambda^2 + 0.6998\lambda - 0.204118) \quad \xRightarrow{\text{usando fórmula general}} \quad \begin{cases} \lambda_1 \approx -0.6998 \\ \lambda_{2,3} \approx 0.34994 \pm 0.28576i \end{cases}$$

luego

$$\rho(\mathbf{T}_J) \approx \max\{|-0.6998|, |0.34994 \pm 0.28576i|\} \approx \max\{0.6998, \sqrt{0.34994^2 + 0.28576^2}\} \approx \max\{0.6998, 0.451793\}$$

así $\rho(\mathbf{T}_J) \approx 0.6998 < 1$ y por el teorema podemos concluir que la sucesión generada por la iteración $\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+1)} = \mathbf{T}_J \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \mathbf{c}_J$ converge para todo $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. Calculemos unas iteraciones

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{T}_J \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c}_J = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -\frac{17}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{10}{7} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{T}_J \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{c}_J = \begin{bmatrix} \frac{46}{7} \\ \frac{11}{7} \\ -\frac{32}{7} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{12}{7} \\ -\frac{139}{49} \end{bmatrix}.$$

Si analizamos qué tan cerca están las iteraciones en la norma 1, $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_1 \approx 4.9286$, $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_1 \approx 10.6429$ y $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)}\|_1 \approx 6.8776$ no parecen acercarse, veamos que tan cerca estamos de la solución en la última iteración calculada $\|\mathbf{r}^{(3)}\|_1 \approx 9.4082$, lejos. Si queremos aproximarnos debemos hacer más iteraciones, nuevamente se ve la necesidad de emplear una herramienta computacional que haga estos cálculos.

★ Método de Gauss-Seidel: la ecuación escalar del método está dada por

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 3 + 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 3 + \frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{17}{7} + \frac{1}{7}x_1^{(k+1)} - \frac{6}{7}x_2^{(k+1)} \end{aligned} \quad (2)$$

no es inmediata la matriz de iteración \mathbf{T}_{GS} , debemos poder escribir $x_2^{(k+1)}$ y $x_3^{(k+1)}$ en términos de la iteración anterior, como lo esta $x_1^{(k+1)}$. Para ello vamos a empezar reemplazando el valor de $x_1^{(k+1)}$ en la segunda ecuación de (2)

$$x_2^{(k+1)} = 3 + \frac{1}{2} \left(3 + 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)} \right) + x_3^{(k)} = \frac{9}{2} + x_2^{(k)} + \frac{3}{2}x_3^{(k)}$$

y reemplazamos los valores de $x_1^{(k+1)}$ y $x_2^{(k+1)}$ en la tercera ecuación de (2)

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{17}{7} + \frac{1}{7} \left(3 + 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)} \right) - \frac{6}{7} \left(\frac{9}{2} + x_2^{(k)} + \frac{3}{2}x_3^{(k)} \right) = -\frac{41}{7} - \frac{4}{7}x_2^{(k)} - \frac{8}{7}x_3^{(k)}$$

obteniendo así

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 3 + 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{9}{2} + x_2^{(k)} + \frac{3}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{41}{7} - \frac{4}{7}x_2^{(k)} - \frac{8}{7}x_3^{(k)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{T}_{\text{GS}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_{\text{GS}} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{9}{2} \\ -\frac{41}{7} \end{bmatrix}.$$

Para analizar convergencia, notemos que la matriz \mathbf{T}_{GS} tiene en una de sus entradas un 2, eso significa que al calcular las normas 1 e infinito, no podremos concluir convergencia (lo mismo pasaba con \mathbf{T}_{J} , pero se realizó para tener el proceso completo en caso de no verse una entrada con valor absoluto mayor a 1). Vamos directamente al radio espectral, que ahora es más fácil de calcular gracias a la columna nula (vamos a emplear esta columna para hallar el determinante)

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{T}_{\text{GS}}}(\lambda) &= \det(\mathbf{T}_{\text{GS}} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{8}{7} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{8}{7} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \left[(1 - \lambda) \left(-\frac{8}{7} - \lambda \right) + \frac{6}{7} \right] = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{7}\lambda - \frac{2}{7} \right) \end{aligned}$$

así $\sigma(\mathbf{T}_{\text{GS}}) = \left\{ 0, \frac{1+\sqrt{57}}{14}, \frac{1-\sqrt{57}}{14} \right\}$, por ende $\rho(\mathbf{T}_{\text{GS}}) \approx \max\{0, 0.6107, -0.4678\} = 0.6107$ y por teorema, podemos concluir que la sucesión generada por la iteración $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}_{\text{GS}}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_{\text{GS}}$ converge para todo $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. Calculemos unas iteraciones

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{T}_{\text{GS}}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c}_{\text{GS}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{9}{2} \\ -\frac{41}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{29}{7} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{T}_{\text{GS}}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{c}_{\text{GS}} = \begin{bmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{111}{49} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{64}{49} \\ \frac{68}{49} \\ -\frac{1177}{343} \end{bmatrix}.$$

Si analizamos qué tan cerca están las iteraciones en la norma 1, $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_1 \approx 7.1429$, $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_1 \approx 6.4490$ y $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)}\|_1 \approx 3.8192$ no parecen acercarse, pero si lo hacen un poco más que en el método de Jacobi, veamos qué tan cerca estamos de la solución en la última iteración calculada $\|\mathbf{r}^{(3)}\|_1 \approx 3.3703$, aún lejos.

Hasta acá la convergencia del método depende de la matriz de iteración \mathbf{T} , pero hay unos **casos especiales** en los que se puede analizar la convergencia a partir de la matriz de coeficientes del sistema \mathbf{A} . Antes, definamos un tipo especial de matrices.

Definición. Se dice que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es estrictamente diagonal dominante por filas cuando

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Nota En adelante, abreviaremos una matriz estrictamente diagonal dominante por filas por **e.d.d.** y se entenderá que es por filas.

Ejemplo Consideremos las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 2 & -5 \\ 2 & -7 & -3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Analicemos si son matrices **e.d.d.**

$$\left. \begin{array}{l} |-10| > |2| + |-5| \quad \checkmark \\ |-7| > |2| + |-3| \quad \checkmark \\ |-5| > |-1| + |3| \quad \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ es e.d.d.} \quad \left. \begin{array}{l} |-12| > |3| \quad \checkmark \\ |-5| > |5| \quad \times \end{array} \right\} \Rightarrow B \text{ no es e.d.d.}$$

Para este tipo especial de matrices tenemos el siguiente teorema de convergencia.

Teorema. Si A es una matriz estrictamente diagonal dominante por filas (**e.d.d.**) entonces las sucesiones generadas por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para toda aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo Hallar las dos primeras aproximaciones generadas por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema

$$\begin{aligned} -10x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 11 \end{aligned}$$

tomando como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^T = [1, 1, -1]^T$.

Solución: Dado que la matriz de coeficientes de este sistema coincide con la matriz A del ejemplo anterior y ésta es una matriz **e.d.d.**, por teorema, podemos concluir (sin necesidad de hallar T_J y T_{GS}) que las sucesiones generadas por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen para cualquier aproximación inicial. Para hallar las dos aproximaciones que nos piden, basta con tener las ecuaciones escalares de ambos métodos.

★ Método de Jacobi: las ecuaciones escalares están dadas por

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(k)} - \frac{3}{7}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{3}{5}x_2^{(k)} \end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, -1]^T$

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}x_2^{(0)} - \frac{1}{2}x_3^{(0)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \\x_2^{(1)} &= -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(0)} - \frac{3}{7}x_3^{(0)} = -\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \\x_3^{(1)} &= -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{3}{5}x_2^{(0)} = -\frac{11}{5} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{9}{5}\end{aligned}$$

obtenemos $\mathbf{x}^{(1)} = [\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{9}{5}]^T$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}x_2^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\frac{9}{5} = \frac{32}{35} \\x_2^{(2)} &= -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(1)} - \frac{3}{7}x_3^{(1)} = -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\frac{3}{5} + \frac{3}{7}\frac{9}{5} = \frac{4}{5} \\x_3^{(2)} &= -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(1)} + \frac{3}{5}x_2^{(1)} = -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\frac{4}{7} = -\frac{346}{175}\end{aligned}$$

Si miramos la norma infinito de diferencia entre aproximaciones $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_\infty \approx 0.8$ y $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_\infty \approx 0.3143$ está disminuyendo.

★ Método de Gauss-Seidel: las ecuaciones escalares están dadas por

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} \\x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(k+1)} - \frac{3}{7}x_3^{(k)} \\x_3^{(k+1)} &= -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{5}x_2^{(k+1)}\end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, -1]^T$

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}x_2^{(0)} - \frac{1}{2}x_3^{(0)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \\x_2^{(1)} &= -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(1)} - \frac{3}{7}x_3^{(0)} = -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{16}{35} \\x_3^{(1)} &= -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(1)} + \frac{3}{5}x_2^{(1)} = -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\frac{16}{35} = -\frac{358}{175}\end{aligned}$$

obtenemos $\mathbf{x}^{(1)} = [\frac{3}{5}, \frac{16}{35}, -\frac{358}{175}]^T$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}x_2^{(1)} - \frac{1}{2}x_3^{(1)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\frac{16}{35} + \frac{1}{2}\frac{358}{175} = \frac{71}{70} \\x_2^{(2)} &= -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(2)} - \frac{3}{7}x_3^{(1)} = -\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\frac{71}{70} + \frac{3}{7}\frac{358}{175} = \frac{1254}{1225} \\x_3^{(2)} &= -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(2)} + \frac{3}{5}x_2^{(2)} = -\frac{11}{5} - \frac{1}{5}\frac{71}{70} + \frac{3}{5}\frac{1254}{1225} = -\frac{1261}{705}\end{aligned}$$

Si miramos la norma infinito de diferencia entre aproximaciones $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_\infty \approx 1.0457$ y $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|_\infty \approx 0.5665$ está disminuyendo.

MATLAB

Aunque el objetivo de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel están orientados a sistemas de ecuaciones grandes, vamos a resolver un primer ejercicio pequeño para introducir las instrucciones MATLAB y los códigos de estos métodos. Posteriormente, resolvemos un ejercicio donde la matriz \mathbf{A} es obtenida al querer aproximar la solución de la ecuación de Poisson numéricamente.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- a) Halle la norma uno de la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel para este sistema y la norma infinita de la matriz de iteración del método de Jacobi. ¿Podemos concluir que la sucesión generada por el método de Gauss-Seidel/Jacobi converge para todo vector inicial de \mathbb{R}^4 ?

Primero digitamos la matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{b}

```
>> A=[-5 3 0 0;1 -5 2 0;0 1 -5 1;1 0 1 -2]
A =
    -5     3     0     0
     1    -5     2     0
     0     1    -5     1
     1     0     1    -2

>> b=[4 3 2 4]'
b =
     4
     3
     2
     4
```

Para obtener las matrices de iteración usamos la notación matricial, esto es, $\mathbf{T}_j = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ y $\mathbf{T}_{GS} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$.

Hallemos la descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ usando las instrucciones `diag`, `triu` y `tril`

```
>> D=diag(diag(A))
D =
    -5     0     0     0
     0    -5     0     0
     0     0    -5     0
     0     0     0    -2

>> L=triu(A)-A
L =
     0     0     0     0
    -1     0     0     0
     0    -1     0     0
    -1     0    -1     0

>> U=tril(A)-A
U =
     0    -3     0     0
     0     0    -2     0
     0     0     0    -1
     0     0     0     0
```

Ahora podemos obtener las matrices de iteración y para ello podemos usar la instrucción `inv` o `\` para obtener las inversas.

La instrucción `\` de MATLAB esta optimizada, así que emplearemos esta instrucción

```
>> format rat
>> Tj=D\(L+U)
Tj =
     0          3/5          0          0
    1/5          0          2/5          0
     0          1/5          0          1/5
    1/2          0          1/2          0

>> Tgs= (D-L)\U
Tgs =
     0          3/5          0          0
     0          3/25         2/5          0
     0          3/125        2/25         1/5
     0          39/125       1/25         1/10
```

la instrucción `format rat` permite ver las entradas de las matrices en su representación matricial, la usamos en este caso para permitir verificar fácilmente que se obtienen las mismas matrices por el procedimiento mencionado arriba. Para los cálculos siguientes volveremos al formato largo con la instrucción `format long`.

Nos piden calcular la norma uno de \mathbf{T}_j y la norma infinito de \mathbf{T}_{GS} , para ello usamos la instrucción `norm` así

```
>> format long
>> norm(Tgs,)
    1.0560000000000000
>> norm(Tj,inf)
    1
```

no podemos concluir con estas normas calculadas la convergencia de las sucesiones generadas por estos dos métodos, ya que se debe cumplir que la norma sea menor a 1. Claro que el Corolario menciona que si alguna norma es menor que 1 podemos concluir convergencia, lo que podríamos hacer es calcular otra norma matricial para ver si cumple la condición.

- b) Halle los radios espectrales de las matrices de iteración de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. ¿Teóricamente cual de las dos sucesiones de aproximaciones obtenidas por los dos métodos converge más rápido?

El radio espectral de una matriz es el máximo entre los módulos de los valores propios, esto es

```
>> max(abs(eig(Tj)))
    0.579432270597753
>> max(abs(eig(Tgs)))
    0.412162926772897
```

Podemos concluir que ambos métodos generan sucesiones convergentes. Teóricamente el método que genera la sucesión que converge más rápido es aquel cuyo radio espectral es menor, que en este caso será la sucesión generada por el método de Gauss-Seidel.

- c) Si denotamos por \mathbf{x}_J y \mathbf{x}_{GS} las aproximaciones obtenidas al aplicar los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel con aproximación inicial $\mathbf{P}=[0;0;0;0]$ y $\mathbf{delta}=1e-3$, respectivamente, calcular $\|\mathbf{x}_J\|_3$ y $\|\mathbf{x}_{GS}\|_5$.

Para emplear los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel necesitamos los siguientes datos de entrada \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{P} , \mathbf{delta} , $\mathbf{max1}$ y obtendremos el dato de salida \mathbf{X}

```
X = jacobi (A, B, P, delta, max1) y X = gseid (A, B, P, delta, max1)
```

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{P} corresponden a la matriz \mathbf{A} , vector lado derecho \mathbf{b} y la aproximación inicial \mathbf{x}_0 , respectivamente; el valor de \mathbf{delta} y $\mathbf{max1}$ están asociados a los criterios de parada, dos aproximaciones cercanas y a un máximo número de iteraciones. Calculemos \mathbf{x}_J y \mathbf{x}_{GS}

```
>> xJ = jacobi (A, b, [0;0;0;0], 1e-3, 100)
xJ =
-1.701158144000000
-1.503347776000000
-1.410696000000000
-3.553954992000000

>> xG = gseid (A, b, [0;0;0;0], 1e-3, 100)
xG =
-1.702390346931200
-1.505053877608960
-1.412238305100672
-3.557314326015936
```

y para obtener las normas pedidas

```
>> norm(xJ,3)
    3.826241273339888
>> norm(xG,5)
    3.591182269178392
```

así $\|\mathbf{x}_J\|_3 \approx 3.826241273339888$ y $\|\mathbf{x}_{GS}\|_5 \approx 3.591182269178392$.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{A} = \text{full}(\text{gallery}('poisson',30))$ y $\mathbf{b} = \text{ones}(900,1)$.

- a) Si denotamos \mathbf{x}_J la aproximación obtenida al aplicar el método de Jacobi con aproximación inicial $\mathbf{P} = \text{zeros}(9,1)$ y $\mathbf{delta} = 1e-5$, entonces:

- ¿Cuál es el número de iteraciones necesarios para satisfacer el criterio \mathbf{delta} ?
- Calcular $\|\mathbf{x}_J\|_2$ y si \mathbf{r} representa el vector residual asociado a la aproximación, calcular $\|\mathbf{r}\|_5$.

Primero veamos la forma que tiene la matriz $\text{gallery}('poisson',n)$ con n más pequeño, por ejemplo con $n=3$

```
>> A = full(gallery('poisson',3))
A =
    4    -1     0    -1     0     0     0     0     0
   -1     4    -1     0    -1     0     0     0     0
    0    -1     4     0     0    -1     0     0     0
   -1     0     0     4    -1     0    -1     0     0
    0    -1     0    -1     4    -1     0    -1     0
    0     0    -1     0    -1     4     0     0    -1
    0     0     0    -1     0     0     4    -1     0
    0     0     0     0    -1     0    -1     4    -1
    0     0     0     0     0    -1     0    -1     4
```

notemos que la matriz tiene una estructura de matriz tridiagonal por bloques, donde los bloques superior e inferior son matrices identidades negativas y los bloques de la diagonal son matrices tridiagonales con diagonal de 4 y diagonal superior e inferior de -1 . Además el orden de la matriz obtenida es 9×9 , así que la matriz pedida $A = \text{full}(\text{gallery}('poisson',30))$ será de orden 900×900 . Note que aparece la instrucción `full` que tiene la misión de ver completamente la matriz, ¿que pasa si omitimos esta instrucción?

```
>> AA = gallery('poisson',3)
AA =
    (1,1)      4
    (2,1)     -1
    (4,1)     -1
    (1,2)     -1
    (2,2)      4

    (8,9)     -1
    (9,9)      4
```

nos indica solo las posiciones de la matriz no nulas. Este es un almacenamiento especial que tiene incorporado MATLAB para matrices que tienen muchas entradas nulas.

(i). Continuemos con lo pedido, pondremos punto y coma al final de las instrucciones para no ver todo lo que aparece en pantalla

```
>> A = full(gallery('poisson',30));
>> b = ones(900,1);
```

la instrucción `ones(n,m)` crea una matriz de orden $n \times m$ de unos, en este caso, **b** es el vector columna de tamaño 900. Aplicamos el método de Jacobi y para ver el número de iteraciones necesarias basta con entrar al código `jacobi` y agregar la variable del contador de iteraciones al final, en este caso la variable es la **k**

```
X = X';
k
```

la última instrucción de `jacobi` es `X = X'`; así que agregamos la línea nueva **k**. Así, al ejecutar el código de `jacobi` sabremos cual es el número de iteraciones

```
>> A = full(gallery('poisson',30));
>> b=ones(900,1);
>> xJ = jacobi (A, b, zeros(900,1), 1e-3, 1000);
k =
    353
```

se necesitaron 353 iteraciones para que se cumpliera el criterio de **delta**.

(ii). Usamos la instrucción de norma y definición de residuo para completar lo pedido

```
>> norm(xJ,2)
    1.030412109988663e+03
>> rJ = A*xJ-b;
>> norm(rJ,5)
    0.674996467213979
```

así $\|x_J\|_2 \approx 1030.412109988663$ y si **r** representa el vector residual asociado a la aproximación, calcular $\|r\|_5 \approx 0.674996467213979$. Al menos en la norma 5 la aproximación no está tan cerca de la solución.

- b) Si denotamos x_{GS} la aproximación obtenida al aplicar el método de Gauss-Seidel con aproximación inicial $P = \text{zeros}(900,1)$ y $\text{delta} = 1e-5$, entonces:

(i). ¿Cuál es el número de iteraciones necesarios para satisfacer el criterio **delta**?

(ii). Calcular $\|\mathbf{x}_{\text{GS}}\|_3$ y si \mathbf{r} representa el vector residual asociado a la aproximación, calcular $\|\mathbf{r}\|_1$.

Procedemos de manera similar a lo realizado en el ítem anterior

```
>> xGS = gseid (A, b, zeros(900,1), 1e-3, 1000);  
k =  
    237  
>> norm(xGS,3)  
    1.121516322579280e+03  
>> rGS = A*xGS-b;  
>> norm(rGS,1)  
    0.366134498731814
```

se necesitaron menos iteraciones que en el método de Jacobi: 237, $\|\mathbf{x}_{\text{GS}}\|_3 \approx 1121.51632257928$ y $\mathbf{r} \approx 0.366134498731814$.

c) ¿Cuál de las aproximaciones obtenidas es mejor con respecto a la norma infinito?

Para comparar entre las dos aproximaciones cual es mejor, lo justo es que sea en una misma norma, veamos

```
>> norm(rJ,inf)  
    0.262531111170247  
>> norm(rGS,inf)  
    0.142572150921239
```

la que esta más cerca de la solución con respecto a la norma infinito es la aproximación obtenida por el método de Gauss-Seidel.