MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907
NOTAS DE CLASE - SEMANA 01
SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

Consideraremos el problema de *aproximar* **raíces** o **soluciones** de la ecuación $f(x) = 0$ para una función f dada. Una **raíz** de esta ecuación es llamada también un **cero** de la función f. En adelante, usaremos indistintamente las expresiones: p es raíz o solución de la ecuación $f(x) = 0$ o p es un cero de la función f.

Para *aproximar* a p vamos a estudiar diferentes métodos que generan una sucesión $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ de aproximaciones, que esperamos converja a p (n_0 será 1 o 0 dependiendo del método empleado). Así que primero vamos a recordar/definir conceptos relacionados con la convergencia de una sucesión y conceptos relacionados con la medición del error al *aproximar* la solución p.

> **Definición.** *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de números reales. Esta sucuesión tiene el límite x (convege a x) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, siempre que $n > N(\varepsilon)$. La notación*
>
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad o \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$
>
> *significa que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

La definición nos dice que, para cualquier $\varepsilon > 0$ siempre podemos encontrar un indice $N(\varepsilon)$ a partir del cual se tiene que $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$ (los términos de la sucesión x_n pertenecen al intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\forall n > N(\varepsilon)$). Además, podemos inferir que, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x si o sólo si

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \qquad \text{o} \qquad |x_n - x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Así que nuestro objetivo será construir una sucesión $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ que converja a p y para ellos necesitamos que las distancias $|x_n - p|$ converjan a cero, donde los términos x_n serán las aproximaciones a la raíz p. Primero, vamos a definir el concepto de error.

> **Definición.** *Si p^* es una aproximación de p, el **error absoluto** es $|p^* - p|$ y el **error relativo** es $\dfrac{|p^* - p|}{|p|}$ siempre que $p \neq 0$.*

Por ejemplo, sabemos que el error absoluto cometido al medir dos áreas A y B son de $1\,cm^2$ y $1\,m^2$, respectivamente. ¿Cómo saber en cual medida se cometió mayor error? o ¿como lo indican las medida del error, se cometió mayor error en la medida del área B? Pero, si sabemos que el área A es una hoja de papel tamaño carta y el área B es el estadio Atanasio Girardot, inmediatamente vemos que se cometió mayor error en el área de la hoja de papel tamaño carta ya que sus errores relativos (que son cantidades adimensionales) son comparables

$$\text{error relativo área } A = \frac{1\,cm^2}{603.2246\,cm^2} \approx 1.6578 \times 10^{-3}, \qquad \text{error relativo área } B = \frac{1\,m^2}{8085\,m^2} \approx 1.2369 \times 10^{-4}.$$

El error absoluto es más visto como una medida de exactitud, mientras que el error relativo como una medida de precisión (claramente, siempre que $p \neq 0$).

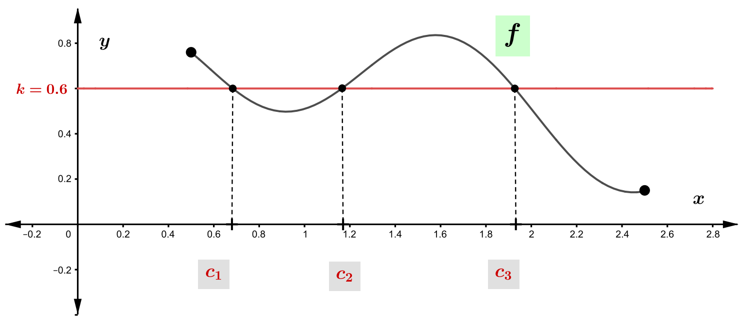
> **Definición.** *El número p^* aproxima a p con t cifras significativas si t es el menor entero no negativo para el cual*
>
> $$\frac{|p^* - p|}{|p|} < 5 \times 10^{-t}$$

El término de cifras significativas se usa con frecuencia para describir vagamente el número de cifras decimales exactas entre p^* y p.

MÉTODO DE BISECCIÓN

Para construir la sucesión generada por el método de bisección, primero veremos un teorema que garantiza la existencia de cero o ceros de una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Teorema (Teorema del Valor Intermedio (T.V.I.).)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y k un valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces *existe al menos un* $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

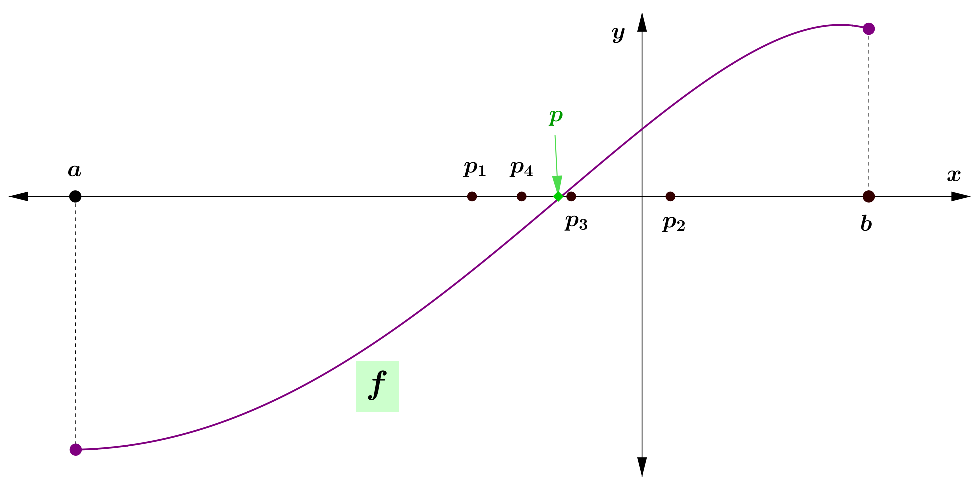


Por ejemplo, en la gráfica se observa de la función f es continua en $[0.5, 2.5]$, $f(0.5) = 0.76$ y $f(2.5) = 0.15$. Por T.V.I. para cualquier valor k entre $f(0.5)$ y $f(2.5)$, existe al menos un $c \in (0.5, 2.5)$ tal que $f(c) = k$. En la gráfica se toma $k = 0.6 \in (0.15, 0.76)$ y vemos que existen c_1, c_2, $c_3 \in (0.5, 2.25)$ tal que $f(c_i) = 0.6$, $i = 1, 2, 3$.

En particular, si f es continua en $[a, b]$, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces $k = 0$ es precisamente un valor intermedio y, por lo tanto, por T.V.I. existe por lo menos una raíz $p \in (a, b)$ de la ecuación $f(x) = 0$, esto es, $f(p) = 0$.

El método de bisección o búsqueda binaria consiste en dividir en dos el intervalo que contiene la raíz p de la ecuación $f(x) = 0$, construyendo así una sucesión de puntos medios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a la raíz p. Siempre que se cumpla que f es continua en $[a, b]$ (denotado por $f \in \mathcal{C}[a, b]$) y $f(a)\, f(b) < 0$, que gracias al T.V.I. garantiza la existencia de al menos una raíz p.

El método de bisección esta dado por: Supongamos que $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y $f(a)\, f(b) < 0$, y que solo hay una raíz en el intervalo.



Sean $a_1 := a$ y $b_1 := b$ y sea $p_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

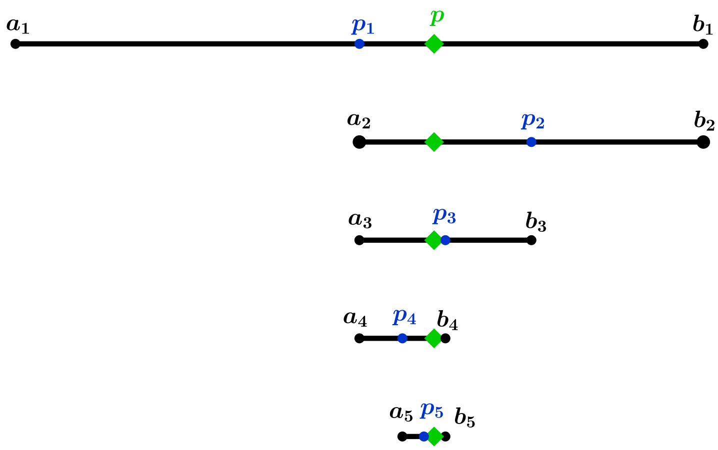
(a) $f(a_1)\, f(p_1) = 0$: en este caso se tiene que $f(p_1) = 0$; por lo tanto ya localizamos una raíz, p_1, y se finaliza el proceso;

(b) $f(a_1)\, f(p_1) < 0$: por lo tanto f tiene una raíz en el intervalo (a_1, p_1) y definimos entonces $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$;

(c) $f(a_1)\, f(p_1) > 0$: por lo tanto f tiene una raíz en el intervalo (p_1, b_1) y definimos entonces $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$;

En los casos (b) y (c) anteriores f tiene una raíz en el nuevo intervalo (a_2, b_2). Por lo tanto, el proceso se vuelve a repetir tomando el punto medio del nuevo intervalo (a_2, b_2), $p_2 := \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ y así sucesivamente, hasta que se satisfaga algún criterio de detención.

En el caso mostrado en la gráfica, vemos que $f \in \mathcal{C}[a, b]$, el signo de $f(a)$ es negativo y el signo de $f(b)$ es positivo, por lo tanto $f(a)\, f(b) < 0$, por lo tanto, podemos proceder a general la sucesión de puntos medios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ así



$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad |p_1 - p| \leq \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2}$$

$$p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \qquad |p_2 - p| \leq \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b - a}{2^2}$$

$$p_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}, \qquad |p_3 - p| \leq \frac{b_3 - a_3}{2} = \frac{b - a}{2^3}$$

$$p_4 = \frac{a_4 + b_4}{2}, \qquad |p_4 - p| \leq \frac{b_4 - a_4}{2} = \frac{b - a}{2^4}$$

$$p_5 = \frac{a_5 + b_5}{2}, \qquad |p_5 - p| \leq \frac{b_5 - a_5}{2} = \frac{b - a}{2^5}$$

Como se ve en la figura, la distancia entre la nueva aproximación p_n y la raíz p esta acotada por la mitad de la longitud del intervalo $[a_n, b_n]$, esto es, $|p_n - p| \leq \dfrac{b_n - a_n}{2}$ para todo $n \geq 1$ y la longitud de cada intervalo $[a_n, b_n]$ se puede escribir en término de la longitud del intervalo inicial $[a, b]$, obteniendo así $|p_n - p| \leq \dfrac{b - a}{2^n} \quad \forall n \geq 1$.

> **Teorema.** *Supongamos que $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y $f(a)\, f(b) < 0$. El método de bisección genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a **un** cero p de f tal que*
>
> $$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n} \quad \forall n \geq 1.$$

De esta relación es inmediato que la sucesión de puntos medios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ generada por el método de bisección siempre converge. En efecto, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} |p_n - p| = 0$ y dado que $0 \leq |p_n - p| \leq \dfrac{b - a}{2^n}$,$\forall n \geq 1$, por teorema de estricción (o del "sándwich"), como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b - a}{2^n} = 0$ concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} |p_n - p| = 0$.

Observaciones

- Una desventaja del método de bisección es que podemos desechar una buena aproximación por estar bisecando el intervalo (en la gráfica, note que p_3 esta más cerca de p que p_4)

- El método puede ser demasiado lento, pero al menos es un método en el que la convergencia está garantizada.

- No sólo se genera una sucesión que converge a la raíz p, se generan tres sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes a p. Siempre se cumple que si el signo de $f(a)$ es positivo, entonces todas las imágenes de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ son positivas y las imágenes de la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son negativa y viceversa. (En la figura se cumple que las imágenes de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es negativas y las de $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son positivas.)

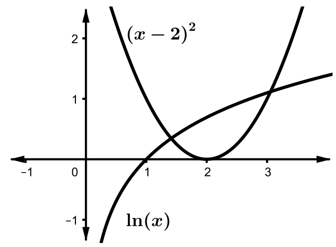
Ejemplo Demuestre que la ecuación $(x - 2)^2 - \ln(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[1, 2]$ y obtenga una aproximación por medio de la sexta iteración de bisección.

Solución. Sea $f(x) = (x-2)^2 - \ln(x)$. Notemos que f es una función continua en $(0, \infty)$ y en particular en el intervalo $[1, 2]$, además

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = (1-2)^2 - \ln(1) = 1 \ (+) \\ f(2) = (2-2)^2 - \ln(2) = -\ln(2) \ (-) \end{array}\right\} \quad \text{hay cambio de signo, se cumple, } f(1)\, f(2) < 0$$

por lo tanto, gracias al T.V.I. podemos garantizar que existe al menos una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[1, 2]$.

De hecho, si bien no tenemos a la mano una gráfica de la función f, estamos buscando la solución de ecuación $(x-2)^2 - \ln(x) = 0$ que corresponde a los puntos de corte entre las curvas $(x-2)^2$ y $\ln(x)$, que son más familiares. En la gráfica vemos que en el intervalo $[1, 2]$ hay un único cero p de f y que f tiene dos ceros en su dominio.



Vamos a aproximar la solución perteneciente al intervalo $[1, 2]$ empleando el método de bisección, para ello llenaremos la siguiente tabla con las aproximaciones, teniendo en cuenta el signo que deben tener las imágenes de las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que en este caso son (+) y (-), respectivamente

n	a_n (+)	b_n (-)	p_n	$f(p_n)$
1	1	2	1.5	-0.1555
2	1	1.5	1.25	0.3394
3	1.25	1.5	1.375	0.0722
4	1.375	1.5	1.4375	-0.0465
5	1.375	1.4375	1.40625	0.01066
6	1.40625	1.4375	1.421875	0.01775
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
∞	p	p	p	0

Empezamos calculando $p_1 = \dfrac{1+2}{2} = 1.5$ cuya imagen es $f(p_1) \approx -0.1555$ (-), por lo tanto $b_2 = p_1$ (cuyas imagenes son negativas) y $a_2 = a_1$. Ahora, calculamos $p_2 = \dfrac{1+1.5}{2} = 1.25$ cuya imagen es $f(p_2) \approx 0.3394$ (+), por lo tanto $a_3 = p_2$ (cuyas imagenes son positivas) y $b_3 = b_2$. Continuamos así sucesivamente, que segun lo demostrado arriba, cuando $n \to \infty$ se cumple que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to p$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \to p$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Notemos que, en este caso p_5 esta más cerca de la solución p que p_6, puesto que su imagen esta mas cerca a cero (la cercania medida en barras de valor absoluto). Pero, como no vamos a "tender al infinito", **¿cuando paramos?**.

Para responder a esta pregunta, recordemos que estamos buscando la solución de la ecuación $f(x) = 0$, así que un primer criterio de parada será cuando la imagen de la aproximación p_n sea "casi" cero, esto es, $f(p_n) \approx 0$. Y un segundo criterio sería cuando la aproximación p_n este "cerca" a p, pero, no conocemos a p, así que empleamos la cota dada en el teorema.

Criterios de parada Dada una tolerancia `tol` vamos a parar de generar puntos medios p_n, esto es, aproximaciones de la raíz p cuando se cumpla una de las siguientes condiciones

- $|f(p_n)| <$ `tol`,
- $|p_n - p| <$ `tol` que no es más que parar cuando $\dfrac{b-a}{2^n} <$ `tol`.

Ejercicios

1. Aproximar la segunda solución de la ecuación $(x-2)^2 - \ln(x) = 0$.

2. Una forma de acelerar la convergencia del método de bisección puede ser que en lugar de bisecar el intervalo, dividir en tres subintervalos y al proceder de manera similar al método de bisección se obtiene la relación $|p_n - p| \leq \dfrac{b-a}{3^n}$, $\forall n \geq 1$. Plantear un algoritmo para este método de trisección y aplicarlo para aproximar las dos soluciones de la ecuación vista $(x-2)^2 - \ln(x) = 0$.

3. Estudiar el método de regla Falsa o posición falsa, sección 2.5 del texto guía.

Por un momento vamos a dejar de lado el problema de aproximar ceros de una función f y nos vamos concentrar en aproximar los puntos fijos de una función g.

Definición (Punto fijo)**.** *p es un **punto fijo** de la función g si $g(p) = p$. Gráficamente, los puntos fijos de g son los "puntos" donde la gráfica de g se "corta" con la recta $y = x$.*

Para aproximar p punto fijo de g vamos a generar una sucesión de aproximaciones $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ que esperamos converja a p. Primero, recordemos unos resultados útiles para garantizar un análisis de convergencia.

Teorema (Teorema de los valores extremos (T.V.E.))**.** *Si $f \in \mathcal{C}[a,b]$ entonces existen c_1, $c_2 \in [a,b]$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo $x \in [a,b]$.*

En este caso decimos que $f(c_1)$ y $f(c_2)$ son los valores mínimo y máximo que alcanza f en $[a,b]$, respectivamente.

Teorema (Teorema del valor medio (T.V.M.))**.** *Si $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y f es diferenciable en (a,b), entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este teorema es importante para la demostración de unicidad de punto fijo y aunque la misma no se exhibe en estas notas, este resultado es importante tenerlo presente.

Teorema. *Si f es una función definida en un conjunto A de numeros reales y $p \in A$, entoces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *f es continua en p,*
- *si $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es cualquier sucesión en A que converge a p, entonces $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p)$.*

MÉTODO DE PUNTO FIJO

Antes de aproximar el punto fijo de una función g en un intervalo $[a,b]$, veamos el teorema que garantiza la existencia y unicidad de punto fijo.

Teorema (T.E.U.P.F. (condiciones suficientes))**.** *Si $g \in \mathcal{C}[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]$ para toda $x \in [a,b]$, entonces g **tiene al menos un** punto fijo en $[a,b]$. Si además, $g'(x)$ existe para $x \in (a,b)$ y existe una constante positiva $0 < k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a,b)$, entonces g hay exactamente **un** único punto fijo $p \in [a,b]$.*

Notemos que gracias al teorema anterior, si una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p y g es continua, entonces

$$g(p) = g\left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(p_n)$$

así, si generamos la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ haciendo $p_{n+1} = g(p_n)$ para cada $n \geq 0$, se tiene que

$$g(p) = \lim_{n\to\infty} g(p_n) = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = p$$

es decir, p es un punto fijo de p.

Ahora, la pregunta es: ¿como hacemos que la sucesión generada por la ***iteración de punto fijo***

$$p_{n+1} = g(p_n) \quad n \geq 0$$

converja a p? La respuesta la encontramos en el siguiente resultado.

Teorema (Convergencia P.F.)**.** *Si la función g satisface las hipotesis del T.E.U.P.F. en $[a,b]$, para cualquier $p_0 \in [a,b]$ la sucesión generada por la iteración $p_n = g(p_{n-1})$, $\forall n \geq 1$, converge a p y se cumple*

$$|p_n - p| \leq k^n\,|p_0 - p|, \quad \forall n \geq 1$$
$$|p_n - p| \leq k^n\,\max\{b - p_0, p_0 - a\}, \quad \forall n \geq 1$$
$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|p_1 - p_0|, \quad \forall n \geq 1$$

Ejemplo Demuestre que la función $g(x) = \ln\left(\dfrac{5e^x}{x^2-1}\right)$ tiene un único punto fijo p en el intervalo $[2,3]$. Estime el número de iteraciones n necesarias para que $|p - p_n| \leq 10^{-5}$ si tomamos $p_0 = 2.3$ y calcule tales iteraciones.

Solución: Para demostrar que g tiene un único punto fijo en $[2,3]$, verifiquemos que g satisface las hipótesis del T.E.U.P.F.

⋆ $g \in \mathcal{C}[2,3]$: g es una función continua cuando $x^2 - 1 \neq 0$ y $\dfrac{5e^x}{x^2-1} > 0$. Esto es, $x \neq \pm 1$, $5e^x > 0$ y $x^2 - 1 > 0$ (en vista que e^x siempre es positiva); $x^2 - 1 > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. En particular, g es continua en $[2,3]$ ($[2,3] \subset (1,\infty)$)✓

⋆ $g(x) \in [2,3]$, $\forall x \in [2,3]$: para garantizar que las imágenes caen en $[2,3]$, podemos usar el T.V.E. ya que g es continua en un intervalo cerrado. Busquemos el valor máximo y mínimo de g en $[2,3]$:

Números críticos: valores de $x \in [2,3]$ donde $g'(x) = 0$ o $g'(x)$ no esta definida. Dado que

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$$

g' no existe cuando $x^2 - 1 = 0$, esto es en $x = \pm 1 \notin [2,3]$ y $g'(x) = 0$ cuando $x^2 - 2x - 1 = 0$, esto es en $x_1 = 1 - \sqrt{2} \notin [2,3]$ y $x_1 = 1 + \sqrt{2} \in [2,3]$, así sus valores extremos son

$$\left.\begin{array}{l} g(2) \approx 2.5108 \\ g(x_1) \approx 2.4491 \text{ mínimo} \\ g(3) \approx 2.53 \text{ máximo} \end{array}\right\} \qquad 2.4491 \leq g(x) \leq 2.53 \qquad \text{esto es,} \qquad g(x) \in [2.4491, 2.53] \subset [2,3],\ \forall x \in [2,3] \qquad \checkmark$$

⋆ g' existe en $(2,3)$ y existe $k \in (0,1)$ tal que $|g'(x)| \leq 1$ para todo $x \in (2,3)$: g' existe en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, en particular en (2,3). Para hallar la constante k, dado que g' es continua en $[2,3]$, nuevamente emplearemos el T.V.E. para obtener los valores extremos de g' en $[2,3]$:

Números críticos: valores de $x \in [2,3]$ donde $g''(x) = 0$ o $g''(x)$ no esta definida. Dado que

$$g''(x) = \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

g'' no existe cuando $x^2 - 1 = 0$, esto es en $x = \pm 1 \notin [2,3]$ y g'' nunca será cero ya que $x^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En este caso g' es creciente en $[2,3]$, por lo tanto sus valores extremos se alcanzan en los extremos del intervalo

$$\left.\begin{array}{l} g'(2) = -\frac{1}{3} \text{ mínimo} \\ g'(3) = \frac{1}{4} \text{ máximo} \end{array}\right\} \qquad -\frac{1}{3} \leq g'(x) \leq \frac{1}{4} \qquad \text{por lo tanto,} \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{3},\ \forall x \in [2,3],$$

en particular, $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$, $\forall x \in (2,3)$ ✓

Gracias al T.E.U.P.F. podemos concluir que g tiene un único punto fijo $p \in [2,3]$. Ahora, para *estimar* el número de iteraciones n, utilizamos la segunda y/o tercer cota del teorema de convergencia P.F. (note que la primer cota no se puede emplear ya que p no es conocido), teorema que nos garantiza la convergencia de la sucesión generada a partir de la iteración de punto fijo. Del análisis anterior, tenemos que $k = \frac{1}{3}$, así $|p_n - p| \leq 10^{-5}$ si $k^n \text{ máx}\{b - p_0, p_0 - a\} \leq 10^{-5}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{máx}\{3 - 2.3, 2.3 - 2\} \leq 10^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3^n} \text{ máx}\{0.7, 0.3\} \leq 10^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0.7}{3^n} \leq \frac{1}{10^5} \quad \Leftrightarrow \quad 3^n \geq 70000$$

$n \geq \dfrac{\ln(70000)}{\ln(3)} \approx 10.1549$ y dado que n es un número iteraciones, el número estimado de iteraciones son $n = 11$. Ahora, vamos aproximar el punto fijo de g hasta su undécima iteración, vamos a poner muchos decimales para que veamos la convergencia

n	p_n
0	$p_0 = 2.3$
1	$p_1 = g(p_0) \approx 2.453151179494175$
2	$p_2 = g(p_1) \approx 2.449567466779666$
3	$p_3 = g(p_2) \approx 2.449491314818230$
4	$p_4 = g(p_3) \approx 2.449489774545428$
5	$p_5 = g(p_4) \approx 2.449489743424906$
6	$p_6 = g(p_5) \approx 2.449489742796144$
7	$p_7 = g(p_6) \approx 2.449489742783440$
8	$p_8 = g(p_7) \approx 2.449489742783183$
9	$p_9 = g(p_8) \approx 2.449489742783178$
10	$p_{10} = g(p_9) \approx 2.449489742783178$
11	$p_{11} = g(p_{10}) \approx 2.449489742783178$

Observaciones

1. Una ventaja del método de punto fijo es la facilidad al calcular las iteraciones, simplemente se calcula la imagen de la iteración anterior.

2. Si la función g satisface las hipótesis del T.E.U.P.F. en $[a,b]$ **no sólo** garantizamos la existencia única de punto fijo, también se garantiza la convergencia de la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ generada por la iteración $p_{n+1} = g(p_n),\ n \geq 0$ para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [a,b]$.

3. Una pequeña desventaja del método de punto fijo, es verificar que en efecto se satisfagan las hipótesis del T.E.U.P.F.

4. Notemos que la convergencia del método lo garantiza el hecho que $0 \leq |p_n - p| \leq k^n \text{ máx}\{b - p_0, p_0 - a\}$ y el teorema de estricción. Así, mientras mas pequeño sea $k \in (0,1)$ más rápida será la convergencia de la sucesión.

5. Nuevamente, **¿cuando paramos?** Como lo vemos en las aproximaciones del ejemplo, a medida que se calculas mas iteraciones vamos ganando decimales iguales, así que un buen criterio de parada será cuando p_{n+1} este muy “cerca” a p_n.

Criterios de parada Dada una tolerancia `tol` y un número máximo de iteraciones `nmax`, vamos a parar de generar aproximaciones p_n del punto fijo p de g cuando se cumpla una de las siguientes condiciones

- $|p_{n+1} - p_n| <$ `tol`,
- $n >$ `nmax`

El criterio asociado a `nmax` es empleado por si, el valor de `tol` es exageradamente pequeño y no se alcanza en un número "prudente" de iteraciones.

Ejercicios

1. Estimar el número de iteraciones del ejemplo empleando la tercer cota del teorema de convergencia P.F., ¿que puede decir con respecto al valor obtenido antes?

2. Estudiar la interpretación geométrica del método de punto fijo, sección 2.2 del texto guía.

Ahora la pregunta es: ¿qué relación hay entre un problema de raíces y un problema de puntos fijos?
Si partimos del problema de hallar el punto fijo p de la ecuación $g(x) = x$, rápidamente lo podemos transformar en un problema equivalente, a saber, hallar la raíz p de la ecuación $g(x) - x = 0$, si denotamos $f(x) := g(x) - x$, no es más, hallar la raíz p de la ecuación $f(x) = 0$.
De manera similar, pero no tan rápida, podemos pasar del problema de hallar la raíz p de la ecuación $f(x) = 0$ a hallar el punto fijo p de g, donde la(s) función(es) g se obtiene al "despejar" x de la ecuación $f(x) = 0$ o simplemente sumar y restar un factor de x a ambos lados de la ecuación $f(x) = 0$.
Ejemplo Sea $f(x) = x^3 + 5e^x + 3$ en $[-2, -1]$. Hallar funciones de iteración g tales que $f(x) = 0$ sea equivalente a $x = g(x)$ en cierto dominio.

Solución: Unas primeras funciones de iteración g candidatas se obtienen al sumar y restar ax con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 5e^x + 3 + ax = ax \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{x^3 + 5e^x + 3 + ax}{a}$$

así las primeras posibles funciones de iteración serán: $g_a(x) = \dfrac{x^3 + 5e^x + 3 + ax}{a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Otras posibles funciones de iteración vienen de despejar x de $x^3 + 5e^x + 3 = 0$, así

$$\begin{aligned}
g_{\text{A}}(x) &= x = -\sqrt[3]{5e^x + 3} \\
g_{\text{B}}(x) &= x = \ln\left(-\frac{x^3 + 3}{5}\right) \\
g_{\text{C}}(x) &= x = -\frac{5e^x + 3}{x^2} \\
g_{\text{D}}(x) &= x = \frac{2x^3 + 5xe^x - 5e^x - 3}{3x^2 + 5e^x}
\end{aligned}$$

¿Cuales funciones g se pueden utilizar para hallar el cero de f en $[-2, -1]$? Notemos que para responder a esta pregunta, según lo visto, la convergencia de la sucesión generada por la iteración de punto fijo $p_{n+1} = g_\star(p_n)$, para $p_0 \in [-2, -1]$ depende del hecho que la función de iteración $g_\star$ satisfaga las hipótesis del T.E.U.P.F. en $[-2, -1]$.

Observaciones

1. Hasta ahora, la ventaja de pasar de un problema de punto fijo $x = g(x)$ a uno de raíces $f(x) = 0$, esta en el hecho que si la función f es continua y hay cambio de signo, aplicamos bisección garantizando convergencia. Pero, ya hemos dicho que es lenta.

2. Hasta ahora, la ventaja de pasar un problema de raíces $f(x) = 0$ a un problema de punto fijo $x = g(x)$, es la rapidez con la que se obtienen las iteraciones (simplemente evaluar en g). Pero, debemos verificar las hipótesis del T.E.U.P.F. para garantizar la convergencia.

3. ¿De donde salio la función de iteración g_{D}?

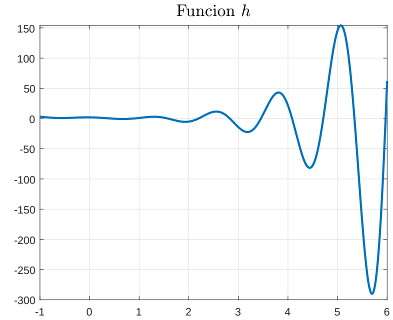
MATLAB

En esta sección presentaremos ejercicios resueltos empleando MATLAB. Se listan las instrucciones que de ejecutan desde la ventana de comandos de MATLAB (`Command Window`).

1. Considere la función

$$h(x) = \cos(5x)(e^x - \tan^{-1}(x)) + e^{-x}$$

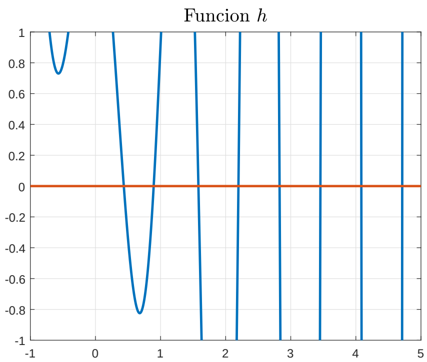
¿Cuántos **ceros** tiene la función h en el intervalo $[-1, 6]$?



Para graficar podemos usar la instrucción `fplot` en la ventana de comandos de MATLAB, así:

```
>> h=@(x) cos(5*x).*(exp(x)-atan(x))+exp(-x)
>> fplot(h,[-1,5])
>> grid on
>> axis([-1 5 -1 1])
```

la instrucción `axis` la empleamos puesto que la gráfica inicial no es claro el conteo de ceros de la función.



También se puede graficar, usando puntos

```
>> x = linspace(-1,5,100)
>> y = cos(5*x).*(exp(x)-atan(x))+exp(-x)
>> plot(x,y)
```

De la gráfica tenemos que h tiene 8 ceros en $[-1, 5]$. Si se quiere que la curva se vea mejor, se puede agregar la instrucción `Linewidth`, así

```
>> fplot(f,[-1,6],'Linewidth',2)
>> plot(x,y,'Linewidth',2)
```

2. Considere la función

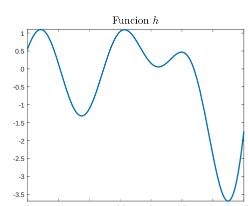
$$h(x) = e^x \cos(3x) - \text{sen}(5x + 1)$$

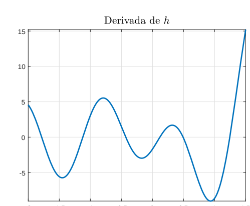
en el intervalo $\mathbb{I} := [-2, 1.5]$.

a) ¿Cuántos **números críticos** tiene la función h en el intervalo $\mathbb{I}$?

Recordemos que los números críticos de la función h son los valores de x para los cuales $h'(x)$ no existe o $h'(x) = 0$. Como la función h es infinitamente diferenciable, los números críticos son los valores de x donde $h'(x) = 0$. Para contar los números críticos de h podemos contar los puntos de máximo o mínimo locales de h o calcular su derivada y contar el número de ceros de h en el intervalo $\mathbb{I}$

```
>> h=@(x) exp(x).*cos(3*x)-sin(5*x+1)
>> fplot(h,[-2,1.5],'Linewidth',2)
>> grid on
>> figure
>> dh=@(x) -3*exp(x).*sin(3*x)+exp(x).*cos(3*x)-5*cos(5*x+1)
>> fplot(dh,[-2,1.5],'Linewidth',2)
>> grid on
```





En la gráfica de la izquierda podemos contar 3 puntos de máximo local y 3 puntos de mínimo local, por lo tanto, tenemos 6 números críticos de la función h en el intervalo $\mathbb{I}$. En la gráfica de la derecha podemos contar de la función derivada de h tiene 6 ceros en el intervalo $\mathbb{I}$, por lo tanto, confirmamos que h tiene 6 números críticos en el intervalo $\mathbb{I}$.

b) Aplicar el método de bisección para aproximar el menor número crítico de la función h hasta que se satisfaga una condición `delta=1e-8`. Escribir el menor número crítico con 6 dígitos decimales por redondeo.

Para emplear el método de bisección necesitamos los siguientes datos de entrada `f, a, b, delta` y obtendremos los datos de salida `c, err, yc`

```
[c, err, yc] = bisect (f, a, b, delta)
```

Para aproximar el menor número crítico de la función h, de la gráfica de la derecha podemos considerar el intervalo $[-2,-1.5]$ y ya nos dan el valor de `delta`. Pediremos que el formato de los números sea largo empleando la instrucción `format long`. Al ejecutar el código de `bisect` obtenemos

```
>> format long
>> [c, err, yc] = bisect (dh, -2, -1.5, 1e-8)
c = -1.783027920871973
err = 7.450580596923828e-09
yc = 8.851815846977473e-08
```

`c` es el valor del menor cero de la derivada de h, esto es, el valor del menor número crítico de h en el intervalo $\mathbb{I}$, `err` es la longitud del último subintervalo donde se aplico el método de bisección y `yc` es el valor de la derivada de h en el valor `c`. Ahora, nos piden el menor número crítico de h con 7 dígitos decimales por redondeo, esto es, el menor número crítico es $x = -1.783028$ (como el séptimo dígito es $9 > 5$, por redondeo el sexto dígito sube a 8).

c) Halle el valor mínimo de la función h en el intervalo $\mathbb{I}$. (Escribir la aproximación con 6 dígitos decimales por redondeo.)

De la gráfica de la función h vemos que el mínimo valor se obtiene en el subintervalo $[1, 1.5]$, para aproximarlo empleamos el método de bisección en el intervalo $[1, 1.5]$ usando la derivada de h

```
>> [c, err, yc] = bisect (dh, 1, 1.5, 1e-8)
c = 1.244903970509768
err = 7.450580596923828e-09
yc = -1.722818261384873e-07
```

luego el valor mínimo de h se obtiene evaluando h en el valor `c` obtenido

```
>> h(c)
   -3.687829674933255
```

es decir, el valor mínimo de h en $\mathbb{I}$ es -3.68783 (como el séptimo dígito es $6 > 5$, por redondeo el sexto dígito sube 1 dígito, que a su vez sube el quinto dígito a 3).

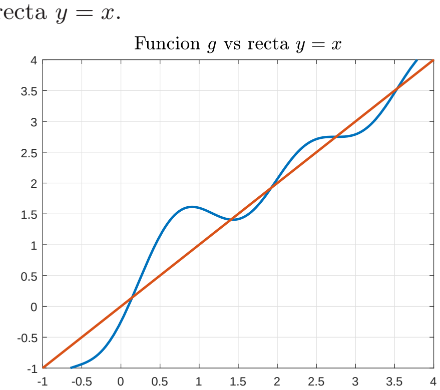
3. Considere la ecuación

$$g(x) = x - \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{3}{2}e^{-x^2}\tan^{-1}(x).$$

a) ¿Cuántos puntos fijos tiene la función g en el intervalo $[-1, 4]$?

Para contar el número de puntos fijos, graficamos la curva de función g y la recta $y = x$.

```
>> g=@(x) x-(1/4)*cos(4*x)+(3/2)*exp(-x.^2).*atan(x)
>> fplot(g,[-1,4],'Linewidth',2)
>> grid on
>> axis([-1,4,-1,4])
>> hold on
>> r=@(x) x
>> fplot(r,[-1,4],'Linewidth',2)
```



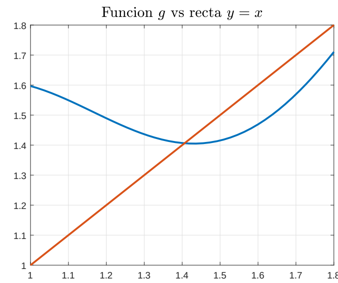
La función g tiene 5 puntos fijos, vemos 4 puntos de corte entre la curva y la recta.

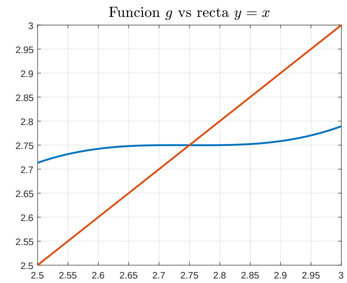
b) Halle un subintervalo $\mathbb{J}$ del intervalo $[-1, 4]$ donde la función g satisface el T.E.U.P.F.

Una de las condiciones del T.E.U.P.F. es que $|g'(x)| \le k < 1$, que graficamente representaría que la pendiente de la curva '*cerca*' del punto fijo no sea *muy inclinada*. Eso descarta el primer, tercer y quinto punto fijo, por lo tanto nos concentramos en el segundo y cuarto punto fijo.

Otra de las condiciones del T.E.U.P.F. es que $g(x) \in \mathbb{J}$ para todo $x \in \mathbb{J}$. Dos intervalos candidatos serían $\mathbb{J}_1 = [1, 1.8]$ y $\mathbb{J}_2 = [2.5, 3]$. Veamos la grafica de g en estos intervalos

```
>> figure, hold on
>> fplot(g,[1,1.8],'Linewidth',2)
>> fplot(r,[1,1.8],'Linewidth',2)
>> figure, hold on
>> fplot(g,[2.5,3],'Linewidth',2)
>> fplot(r,[2.5,3],'Linewidth',2)
```

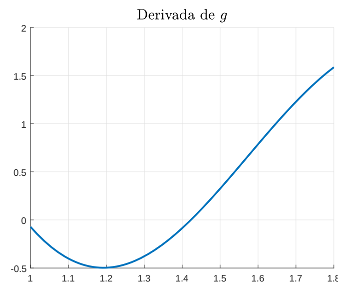


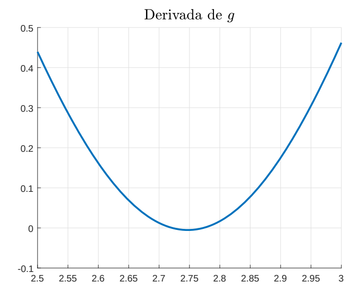


en ambos casos se cumple la condición, es decir, $g(x) \in \mathbb{J}_1, \forall x \in \mathbb{J}_1$ y $g(x) \in \mathbb{J}_2, \forall x \in \mathbb{J}_2$. Para estos intervalos veamos si se cumple que $|g'(x)| < 1$, es decir, $-1 < g'(x) < 1$, para ello, grafiquemos la derivada de g en ambos intervalos

```
>> dg=@(x) 1+sin(4*x)+(3/2)*exp(-x.^2)./(x.^2)-3*x.*exp(-x.^2).*atan(x)
```

```
>> figure
>> hold on
>> grid on
>> fplot(dg,[2.5,3],'Linewidth',2)
>> figure, hold on, grid on
>> fplot(dg,[1,1.8],'Linewidth',2)
```





Se cumple que $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{J}_2 = [2.5, 3]$, específicamente $|g'(x)| \leq g'(3) \approx 0.462$. Pero no se cumple que $|g'(x)| < 1$ en **todo** el intervalo $\mathbb{J}_1$, acá podríamos reducir $\mathbb{J}_1$ de tal modo que se cumpla la condición. Chequee que en $\hat{\mathbb{J}}_1 = [1, 1.6]$ se satisface el T.E.U.P.F.

c) Aplique el método de punto fijo a la función g en el intervalo $\mathbb{J}$, hasta que se satisfaga una tolerancia `tol=1e-9`.

Podemos aproximar el segundo y cuarto punto fijo de g. Para emplear el método de punto fijo necesitamos los siguientes datos de entrada `g, p0, tol, max1` y obtendremos los datos de salida `p, k, err, P`

```
[p, k, err, P] = fixpt (g, p0, tol, max1)
```

Dado que queremos que se satisfaga la condición de la tolerancia `tol=1e-9`, es decir, que las iteraciones paren hasta que la distancia entre dos iteraciones consecutivas sea menor a `1e-9`, damos un número muy alto del máximo de iteraciones `max1`. Finalmente tomamos `p0` perteneciente a los intervalos $\mathbb{J}_2$ y $\hat{\mathbb{J}}_1$

```
>> [p, k, err, P] = fixpt (g, 1.4,1e-9,1000)
p = 1.406257441196537
k = 9
err = 6.707103761272037e-10
P =  1.406947320884853
     1.406190621781274
     1.406264011200263
     1.406256796208994
     1.406257504597315
     1.406257435036808
     1.406257441867247
     1.406257441196537
```

```
>> [p, k, err, P] = fixpt (g, 2.7,1e-9,1000)
p = 2.749846763371620
k = 5
err = 5.220464061039820e-10
P =
2.749827135786985
2.749846864338650
2.749846762849574
2.749846763371620
```

`p` representa la aproximación al segundo punto fijo de g, `k` es el número de iteraciones que se ejecutaron hasta que se cumpliera la condición de la tolerancia, `err` es la distancia entre dos últimas iteraciones consecutivas realizas y el vector `P` tiene todas las iteraciones realizadas. Concluimos así que el segundo punto fijo de g es $x = 1.406257441196537$ y el cuarto es $x = 2.749846763371620$.

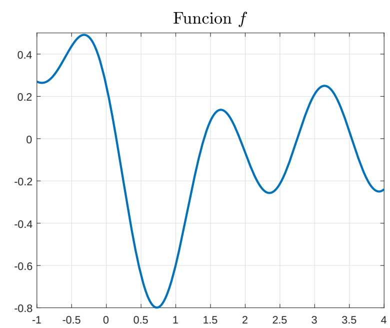
d) Aproximar todos los puntos fijos de g en el intervalo $[-1, 4]$.

Si se toman diferentes valores iniciales para `p0` puede suceder que las sucesiones convergan a los puntos fijos que ya tenemos o a puntos fijos fuera del intervalo, ejecute las siguientes instrucciones y lo notará

```
>> [p, k, err, P] = fixpt (g,0.2,1e-9,1000)
>> [p, k, err, P] = fixpt (g,1.8,1e-9,1000)
>> [p, k, err, P] = fixpt (g,3.5,1e-9,1000)
>> [p, k, err, P] = fixpt (g,1,1e-9,1000)
>> [p, k, err, P] = fixpt (g,0,1e-9,1000)
```

Así que la forma de obtener los puntos fijos faltantes será trasformando el problema de puntos fijos en un problema de ceros, es decir, trasformamos el problema $x = g(x)$ en $f(x) = 0$ donde $f(x) = x - g(x)$, más específicamente, queremos hallar los ceros de $f(x) = \frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{3}{2}e^{-x^2}\tan^{-1}(x)$ en el intervalo $[-1, 4]$.

```
>> f=@(x) (1/4)*cos(4*x)-(3/2)*exp(-x.^2).*atan(x)
>> fplot(f,[-1,4],'Linewidth',2), grid on
```



Aplicaremos el método de bisección en los intervalos $[0, 0.5]$, $[1.6, 2]$ y $[3, 4]$, ya que el segundo y cuarto los conocemos.

```
>> c1 = bisect (f,0,0.5,1e-9)
c1 = 0.143760462757200
>> c3 = bisect (f,1.6,2,1e-9)
c3 = 1.922719727829098
>> c5 = bisect (f,3,4,1e-9)
c5 = 3.534284431952983
```

Podemos chequear que en efecto estos son las aproximaciones a los tres puntos fijos faltantes

```
>> g(c1)
0.143760462858459
>> g(c3)
1.922719727933576
>> g(c5)
3.534284432214511
```