UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

METODOS NUMERICOS 3006907 – TALLER CON MATLAB – Capítulo 3

INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN POLINOMIAL

1. Considere la función $f(x) = 10\,\mathrm{sen}(5x)\dfrac{\ln(x^2+3)}{x^2}$ para $x \in [1,8]$.

   (a) Aproximar la función por medio de polinomios interpolantes P_2, P_3, P_4 y P_5 empleando nodos equidistantes.

   (b) Graficar f *vs* P_i para $i = 2,\cdots,5$.

   (c) Graficar errores, es decir, $E(x) = |f(x) - P_i(x)|$ para $i = 2,\cdots,5$, $x \in [1,8]$. ¿Cuál produce menor error? ¿Qué puede concluir?
   Sugerencia: Para graficar errores genere un vector `xx=linspace(1,8,1000)` y grafique con `plot` el valor absoluto de $f(xx) - P_i(xx)$. Para evaluar polinomios se utiliza la instrucción `polyval`.

   (d) Ahora, aproxime la función f en $[1,8]$ por medio del spline cúbico natural S que interpola a f en los nodos

   $$\{x_k\}_{k=0}^{5} = \left\{1, \frac{12}{5}, \frac{19}{5}, \frac{26}{5}, \frac{33}{5}, 8\right\}$$

   y grafique el error.

   (e) Finalmente, aproxime la función f en $[1,8]$ por medio del mejor polinomio interpolante de grado menor igual a 5 y grafique el error.

   (f) ¿Cuál de los polinomios interpolantes obtenidos aproxima mejor (error relativo) el valor de $f(4.7)$?

2. Realizar un proceso similar al propuesto en el ejercicio anterior para $f(x) = 8e^{-x^2} + \mathrm{sen}(3x)$ para $x \in [-10,10]$.

3. Un automóvil va por una carretera recta y su velocidad se cronometra en varios puntos. Los datos tomados de las observaciones aparecen en la tabla adjunta, donde el tiempo se anota en segundos, la distancia en pies y la velocidad en pies por segundo.

Tempo	0	3	5	8	13
Distancia	0	225	383	623	993
Velocidad	75	77	80	74	72

   (a) Use el polinomio interpolante para aproximar la posición del automóvil y su velocidad cuando $t = 10$sg.

   (b) Use la derivada del polinomio para determinar si el automóvil rebasa el límite 55millas/hora; de ser así, ¿en qué momento el automóvil lo excede?

   (c) ¿Cuál es la velocidad máxima predecible del automóvil? *Ayuda*: recuerde que $1\text{pie} = 0.000189393939\text{millas}$.

4. Considere los siguientes datos

x_k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_k	8.25	7.21	6.62	3.94	2.17	1.35	0.89	0.99

   (a) Hallar la recta de regresión para el conjunto de datos.

   (b) Hallar los polinomios óptimos de mínimos cuadrados de grado 2 y grado 5 para el conjunto de datos.

   (c) Hallar la curva $y = \dfrac{1}{Ax+B}$ que mejor se ajusta en el sentido de los mínimos cuadrados para el conjunto de datos.

5. Encuentre el ajuste de curva para los siguientes conjuntos de datos y calcule el error en el sentido de los mínimos cuadrados.

   (a) Se espera que la curva sea de la forma $y = \dfrac{B}{A+x}$

x_k	0.2	1.7	3.3	4.5	6.7	9.1	11
y_k	2.057	1.725	1.598	1.589	1.358	1.412	1.258

(b) Se espera que la curva sea de la forma $y = Be^{Ax}$

x_k	-5	-3	0.2	4.5	7.3
y_k	50.082	33.223	18.1051	1.987	1.450

(c) Se espera que la curva sea de la forma $y = \dfrac{1}{(Ax+B)^2}$

x_k	-3	-1	0	2
y_k	8.25	6.62	3.94	1.35

6. Considere la función $h(x) = \dfrac{1}{10}\cos(3x)\ln(x^2+13) - e^{x/4}$ y el conjunto de nodos dados por $x = 1:10$.

   (a) Hallar el polinomio P que interpola a h en los nodos dados.

   (b) Hallar el valor aproximado de h en $x = 3.8$ (que se obtiene de P).

   (c) Hallar el error relativo que se comete al aproximar h en $x = 3.8$ por medio del polinomio P.

   (d) Si S es el spline cúbico natural para h en los nodos dados, entonces

      i. Hallar el coeficiente del término $(x-3)$ del trozo correspondiente a S.

      ii. Hallar $S(8.5)$ (valor aproximado de h en $x = 8.5$ por medio de S).

      iii. Hallar el error absoluto que se comete al aproximar h en $x = 8.5$ por medio de S.

   (e) Si Q es el polinomio de grado tres que mejor se ajusta en el sentido de los mínimos cuadrados para el conjunto de datos, hallar el error en el sentido de los mínimos cuadrados.

7. Considere la nube de puntos dada en la siguiente tabla:

x_k	-8	-1	0	2	5	9	13	20
y_k	7.5	6.8	-2.3	7.8	5.33	2.01	-2.56	-6.58

   (a) Hallar y graficar el spline cúbico natural S que pasa por los puntos de la tabla. Hallar el valor S en $x = -0.5$.

   (b) Hallar y graficar el spline cúbico sujeto S que pasa por los puntos de la tabla donde $S'(-8) = 2$ y $S'(20) = -3$. Hallar el valor S en $x = 4.1$.

   (c) Hallar y graficar el spline cúbico extrapolado S que pasa por los puntos de la tabla. Hallar el valor S en $x = 11.4$.

   (d) Hallar y graficar el spline cúbico con terminación parabólica S que pasa por los puntos de la tabla. Hallar el valor S en $x = 1.3$.

   (e) Hallar y graficar el spline cúbico S que pasa por los puntos de la tabla que satisface $S''(-8) = 12$ y $S''(20) = -1$. Hallar el valor S en $x = 8.7$.

8. Ejercicios 32 y 33 de la sección 3.5 del texto guía.