UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907
TALLER 2, SEMESTRE 01–2023

Tema: Métodos de Punto fijo y Newton

1. Falso o Verdadero (Justifique)

   (a) Suponga que $g \in \mathscr{C}[0,7]$ y $g'(x)$ esta definida para todo $x \in (0,7)$. Si $|g'(x)| < 1$ para $0 < x < 7$ y $x_0 = 3$, entonces la iteración $x_{i+1} = g(x_i)$ converge.

   (b) Supongamos que tenemos dos funciones g_1 y g_2 que satisfacen el Teorema de Existencia y Unicidad de Punto Fijo (T.E.U.P.F.) en $[a,b]$ y tales que generan iteraciones de punto fijo convergentes al mismo punto fijo, además

   $$\max_{x\in[a,b]} |g_1'(x)| = 0.8 \qquad \text{y} \qquad \max_{x\in[a,b]} |g_2'(x)| = 0.3$$

   entonces la sucesión generada con g_1 converge más rápido.

2. Considerar la función $g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(4 - x^2\right)$.

   (a) Utilice el T.E.U.P.F. para demostrar que la función g tiene un único punto fijo $p \in [0,1]$.

   (b) ¿Qué puede afirmar sobre la iteración de punto fijo $x_n = g(x_{n-1})$, $n = 1,2,\ldots$, si tomamos $x_0 \in [0,1]$?

   (c) ¿Cuál es el valor obtenido para x_5 si tomamos $x_0 = 0.4$?

   (d) Teniendo en cuenta (a), (b) y (c), ¿cuál es el menor número de iteraciones necesarias n para que $|p - x_n| \leq 10^{-5}$?

3. Repetir el ejercicio anterior con la función $g(x) = -1 + \frac{1}{4}(e^x - 2)^2$ en el intervalo $[-3,1]$.

4. Demuestre que

   $$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

   empleando el T.E.U.P.F. en el intervalo $[1,2]$.

5. La función $f(x) = \dfrac{1}{e^x} + \cos(\pi x)$ tiene infinitos ceros y se desea aproximar uno de estos ceros.

   (a) Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $[4,5]$

   (b) Demuestre que la función f satisface las hipótesis **necesarias** para aplicar el método de Newton en el intervalo $[4,5]$.

   (c) Escriba la fórmula de iteración de Newton para **esta** función.

   (d) ¿Cuál es el orden de convergencia del método de Newton en este caso? **Justifique** su respuesta

6. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) - e^{-x}$.

   (a) Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $[0,1]$.

   (b) Verifique que la función f satisface las hipótesis del método de Newton en el intervalo $[0,1]$.

   (c) Halle la fórmula de iteración de Newton para la función f y aproxime la raíz en $[0,1]$ mediante x_5 obtenida por este método, tomando $x_0 = 0$.

   (d) ¿Cuál es el orden de convergencia de la sucesión generada por la iteración de Newton para la raíz en $[0,1]$ de la ecuación dada?