

Questão 1. Mostre que o Gibbs Sampler é um caso particular do Metropolis Hastings. Em que sentido dizemos que o Gibbs Sampler representa a escolha “Ideal” de distribuição de proposta q_{ij} ?

Questão 2. Considere uma variável com espaço amostral $S = \mathbb{Z}^2$, ou seja, os elementos do espaço amostral são vetores (x_1, x_2) , em que suas componentes $x_i \in \mathbb{Z}$. Assuma que a variável X tem distribuição proporcional à densidade da normal bivariada com média $(0, 0)$ e matriz de covariâncias identidade para $x \in \mathbb{Z}^2$, ou seja

$$P(x_1, x_2) \propto \exp \left[-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} \right].$$

- Monte um algoritmo de MCMC para estimar a média e variância desta distribuição.
- Faça gráficos de suas distribuições marginais e conjunta (não se esqueça que como a variável é discreta, não é apropriado fazer uma estimativa de densidade por kernel - função padrão do plot.mcmc).

Questão 3. Utilize e modifique o algoritmo do script de aula mcmc1.r para estimar a média e a variância da distribuição sobre os números $S = \{1, \dots, 99999\}$ tal que

$$P(x) \propto (x[1] + x[2] + x[3] + x[4] + x[5])^5.$$

Aqui, $x[i]$ é o i -ésimo algarismo de x . O que você nota comparando o número de iterações necessárias para obter um tamanho amostral efetivo de 200 para este problema e para o problema original?

Questão 4. Considere o modelo Bayesiano para regressão linear simples, e os dados gerados no script de aula mcmc4 ex.

$$P(y_i | \beta_0, \beta_1, \phi) \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, 1/\phi)$$

$$P(\beta_0) \sim N(0, 1/\tau_0)$$

$$P(\beta_1) \sim N(0, 1/\tau_1)$$

$$P(\phi) \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$$

- Qual a posteriori para esse modelo?
- Monte (e implemente) um algoritmo de Metropolis-Hastings para estimar a distribuição à posteriori para os parâmetros do modelo (β_0, β_1, ϕ) , utilizando como distribuição proposta $q_{ij} \sim N(i, s^2)$.
- Avalie o efeito que o valor de s^2 tem sobre a convergência do modelo. Encontre um valor de s^2 ótimo.
- Quais as estimativas de média à posteriori para os três parâmetros do modelo?
- Encontre as distribuições condicionais dos três parâmetros relevantes do modelo, e monte o algoritmo Gibbs Sampler.
- Compare seus resultados com o Metropolis Hastings e Gibbs Sampler. Qual método é mais efetivo na obtenção das amostras?

Questão 5. Mostre que a distribuição Gama é a conjugada da Poisson e da Exponencial.