Nowa Dyskretna I

14 marca 2025

Hejka!
W związku z reworkiem Dyskretnej I jakiego doświadczyliśmy w zeszłym roku – a przez to unieważnienieniem zbieranej przez lata bazy (i fenomenalnych notatek Jakuba Żuchowskiego) postanowiłem chociaż spróbować coś zmienić w tej materii. Tak więc oto tutaj zaczyna się świadectwo tej próby.

Na start przyznam szczerze, że jest to projekt baaaaardzo w przebudowie, dopiero zaczynam zabawę z LaTeX–em, mam mocno średni wpm, a o skillsach z dyskretnej nie wspomnę... – więc tu się zwracam z prośbą o pomoc do Ciebie, drogi czytelniku!

Liczę, że wspólnymi siłami uda nam się stworzyć coś, co przyda się nie tylko przyszłym rocznikom – ale i nam podczas nauki do kolokwiów i ćwiczeń. Tak więc jeżeli masz jakieś uwagi i poprawki możesz się z nimi ze mną podzielić na Discordzie pod nickiem `ssk12.` lub na kanale dyskretnej. Tak samo własne rozwiązania bardzo ułatwią mi pracę. Jeżeli będziesz chciał, możesz zostać wspomniany jako autor rozwiązania.

Link do repo na githubie, gdzie znajduje się aktualna wersja tego pliku: `https://github.com/ssk12o/Nowa-Dyskretna-I`

Zadania są kodwane w następujący sposób:
— Ć – chaotyczne notatki z ćwiczeń, esencja *work in progress*,
— W - wskazówka, szkic rozwiązania, niepełne rozwiązanie (nie odpowidam za jakość),
— A – rozwiązanie autorskie,
— AR ‘Jan Kowalski’ – rozwiązanie dzi,
— BRAK – oczywiste. Zachęcam jednak do podesłania własnego rozwiązania.

Spis treści

Rozdział 1

Zestaw 1

Zadanie 1.1 (W)**.** *Na płaszczyźnie poprowadzono n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę:*

1. *obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;*
2. *obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.*

Dowód. Podpunkty:

1. Warto zauważyć, że ze względu na warunki z treści wiemy, że każda n-ta nowa prosta którą dokładamy przecina każdą z $n-1$ prostych które już istnieją – i tworzy n nowych obszarów. Tak więc $R(n) = R(n-1) + n$. Starczy rozwalić rekurencję.
2. Podobnie.

□

Zadanie 1.2 (W)**.** *Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadany jest przez $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Udowodnij, że:*

1. $F_0 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$;
2. $5|F_{5n}$,
3. $F_n < 2_n$.

Dowód. Wszystkie podpunkty można łatwo dowieść indukcyjnie. □

Zadanie 1.3 (BRAK)**.** *Turniej n-wierzchołkowy to dowolny graf skierowany $G = (V, E)$, gdzie $|V| = n$ i w którym $(u, v) \in E$ lub $(v, u) \in E$ dla dowolnych $u, v \in V$. Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejść" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.*

Dowód. □

Zadanie 1.4 (Ć)**.** *Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.*

Dowód. Dowód indukcyjny.

1. przypadek trywialny
2. z założenia indukcyjnego wiemy że ten graf $G' = (V', E')$ ma on ścieżkę Hamiltona. Nazwijmy ją $P = v_1...v_n$. Rozważmy:
   a) $(v, v_1) \in E$. Wtedy $P = vv_1v_2...v_n$
   b) (v_n, v) rys $P = v_1v_2...v_nv$
   c) trzeci przypadek rys. Niech $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ będzie najmniejszym indeksem $(v_i, v) \in E$ oraz $(v, v_{i+1}) \in E$, wtedy $P = v_1v_2...v_ivv_{i+1}v_{i+2}...v_n$

□

Zadanie 1.5 (W)**.** *W każdym polu szachownicy rozmiaru nxn znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:*

— *osoby zarażone pozostają zarażone,*
— *osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiednią rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony). Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż n osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.*

Dowód. Jakaś podpowiedź. Przekątne (małe) dzielą plansze po zarażeniu na kwadraty zarażonych. Przerwy w ciągach diagonalnych robią przerwy na końcu.

Ewentualnie: Jeżeli rozrzuick komórki w pierwszej iteracji, jesti ich n-1. liczymi obwod tej figory. obwod ten jest rowny maksymalnie 4n - 4

jesli tylko uzasadnic formalnie ze przy kazdej iteracji obwod jest conajwyzej taki ajk poprzednio, co tez znaczy ze nie wszystkie sa zarażone, bo obwod byłby równy 4n.

Jak udowodnić tą zależność?

Od bartka: Pusta kratka, n zarażonych obok i $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Rozważamy przypadki ile krawędzi jest przy każdym n. Patrzymy ile znika i ile powstaje. Dochodzimy do tego że jest nie więcej. □

Zadanie 1.6 (BRAK)**.** *Wykaż, że w grupie n osób istnieją dwie, które mają taka samą liczbę znajomych.*

Dowód. □

Zadanie 1.7 (Ć)**.** *Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.*

Dowód. Niech $f : [n] \to [n]$ tak że $\forall_{k\in[n]} f(x) \neq k$. f - permutacja Niech g - permutacja g = (1 2 3 4 5 ... n) $O_n = f \circ g \circ g \circ g$ (i g złożone n razy)

Dirichlet. $\forall f : [n] \to [n-1]$ istnieje x_1, x_2 że $x_1 \neq x_2$ tże $f(x_1) = f(x_2)$

$\forall_{k\in[n]} \exists_{i\in[n-1]} O_i(k) = k \leftarrow$ funkcja by wrócił do właściwego proporczykami.

$F(k)$ = ilość obrotów stołem aby ambasador k miał przed sobą swój proporczyk. Widzimy że nowa funkcja $F(k) : [n] \to [n-1]$ Z zasady Dirichleta istnienieje dwóch ambasadorów x_1, x_2 tże $x_1 \neq x_2$ tże $F(x_1) = F(x_2)$. □

Zadanie 1.8 (Ć)**.** *Pokaż, że w dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.*

Dowód. Weźmy ciąg: $a_1, a_2, a_3 ..., a_n$

Wprowadzmy ciag sum częściowych: $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$

Reszty z dzielenia przez n są następującej postaci $\{0, 1, 2, ...n_1\}$. jesli istnije S_k tże skmodn=o to koniec zadania

zalozmy ze tak nie jest, czyli ze dla kazdego ka w [n] $S_k\ modn \neq 0$ Czyli ile możliwości mamy na resztę od 1 do n-1. z zasady diricchleta widzimy ze istnieje k'¡k tże Sk i Sk' maja tkaa sama reszte z dzielenia. ale wtedy Sk-Sk' jest podzilene przez n i reprezentuje sume ak'+1 + ak'+2 +...+ak

Widzimy zatem ze ciag ak'+1 do ak ma żadaną własność

jeżeli weźmiemy jakiś pierwszy podciąg $a_1 modn \neq 0$ $a_1 + a_2 modn \neq 0$ i $a_1 + a_2 modn$

□

Zadanie 1.9 (BRAK)**.** *Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n–elemetowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.*

Dowód. □

Zadanie 1.10 (BRAK)**.** *Dla n–elementowego zbioru X rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{F}$, gdzie $|F| > n/2$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje $x \in X$ należący do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{F}$.*

Dowód. □

Zadanie 1.11 (Ć)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica $2n \times 2n$ z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat $2 \geqslant 2$ bez jednego pola).*

Dowód. Dowód indukcyjny.

1. $n = 1$; rysunek 1
2. zał ind spełnione dla n. teza ind dla $n + 1$. rysunek2 ogólnie dzielimy na cztery, zał ind, od pozostałych trzech odejmujemy po jednym kawałeczku, załatwiamy je z ind a kawałeczekki załatwiamy jednym l-em

□

Zadanie 1.12 (Ć)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica* $n \times n$*. Dla jakich wartosci* $n \geqslant 1$ *możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości* 2×2 *oraz* 3×3*.*

Dowód. Dla kostek 2x2 i 3x3 oczywiste. Dla ich wielokrotności oczywsite.

Teraz łączenie. I go nie zrozumiałem. Well, shit happens. Ale do przemyślenia. □

Zadanie 1.13 (Zadanie 10)**.**

Dowód. zrobione, ale średnio z zapisem. Nie zrozumiałem, ale za to macie zdjątko tablicy. rysunek1. praca domowa □

Rozdział 2

Zestaw 2

Zadanie 2.1 (W)**.** *Na ile sposobów można ustawić n wież na szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Dowód. Starczy zauważyć, że dla każdej wieży wybieramy rząd i kolumnę w której się znajduje – i tym samym zmniejsza liczbę dostępnych o jeden. Tak więc odpowiedź wynosi:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = n! \cdot n!$$

□

Zadanie 2.2 (W)**.** *Na ile sposobów można ustawić k wież na szachownicy $n \times m$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Dowód. Zadanie analogiczne od poprzedniego - z tym, że zmienił nam się rozmiar planszy, a ponadto nie wypełniamy jej całej. Zasada pozostaje jednak ta sama. Na start jednak warto założyć, że $k \leqslant max\{n, m\}$ (choć w sumie jeżeli tak nie jest, to odpowiedź to 0). Mając to już za sobą.

$$n \cdot m \cdot (n-1) \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (m-k+1)$$

(wykonujemy mnożenie $k + k$ elementów – stąd to $-k + 1$). □

Zadanie 2.3. *Znalźć definicje rekurencyjne następujących ciągów:*

1. *$a(n)$ – liczba słów długości n nad alfabetem $\{0, 1\}$, które nie zawierają dwóch jedynek koło siebie.*
2. *$b(n)$ – liczba różnych pokryć prostokąta o wymiarze $2 \times n$ dominami wymiaru 2×1.*

Dowód. 1. Oczywiście $a(1) = 2$, $a(2) = 3$. Rozważmy słowo n elementowe. Zauważamy, że jeżeli ono kończy sie ono zerem to poprzedzające słowo $n-1$ elementowe jest dowolne. Jeżeli nastomiast kończy się jedynką, to poprzedzające słowo $n-2$ elementowe jest dowolne (tak jakby sie cofamy krok dalej by mieć dowolność). Stąd: $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.

2. Analogicznie do poprzedniego. Jak wiemy $a(1) = 1$, $a(2) = 2$. Zastanówmy się nad $a(n)$: Rozważamy ciąg o dłuugości n. Jeżeli na końcu jest blok poziomy, to wiemy że powstał on z ciągu długości $a(n-2)$. Jeżeli jest pionowy, to widzmy że musiał on powstać z ciągu długości $n-1$. A stąd $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.

□

Zadanie 2.4 (W)**.** *Ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$:*

1. *gdzie x_i są liczbami naturalnymi?*
2. *gdzie x_i są dodatnimi liczbami naturalnymi?*

Dowód. Starczy wykonać siatkę która na dole ma $x_1 ... x_4$, a w rzędach wartości od 0 (1) do 7. Wysokość nad x_i oznacza wartość sumy do tego elementu włącznie, a przeskok względem poprzedniej wysokości oznacza wartość danego x_i. Więc można to potraktować jako ścieżki, a na mocy własności z wykładu wiemy ile jest ścieżek po kracie. Tak więc:

1.

$$\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7}$$

2.
$$\binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$$
□

Zadanie 2.5. *Rozważmy czekoladę złożoną z $m \times n$ kostek. Na ile sposobów można wykroić prostokąt złożony z $k \times k$ sąsiadujących ze sobą kostek ze sobą kostek czekolady?*

Dowód. Na początek warto wykonać założenia $k \leqslant n$, $k \leqslant m$ (albo stwierdzić że wtedy odpowiedź to zero). Potem □

Zadanie 2.6. *(Reguła sumowania po górnym indeksie). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Dowód. Starczy zrobić indukcje. Wychodzi za darmo. Kombinarotrycznie też się da. □

Zadanie 2.7. *(Reguła sumowania równoległego). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

Dowód. Starczy zrobić indukcje. Wychodzi za darmo. □

Zadanie 2.8. *Ile jest funkcji $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ monotonicznych takich, że $f(i) \leqslant f(j)$ dla $i < j$?*

Dowód. Rozwiązanie kożystające z tej samej koncepcji co 4 z tego zestawu. Tworzymy kratkę, gdzie kolumny to argumenty, a rzędy to wartości. Interesują nas ścieżki z początku do końca - które generują nam wszystkie funkcje spełniające warunki zadania. Tak więc:
$$\binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}$$
. □

Zadanie 2.9. *Ile jest k–elementowych podzbiorów zbioru n–elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb?*

Dowód. Jest nie jest to funkcja 1 - 0 (funkcaj charakterystyczna). Generujemy zbiór typu 10101 aż do uzyskania k jedynek (tu k=3), ustalamy miejsca w które możemy dopełniać zerami (by ciągi były długości n - funkcja charakterystyczna). Czyli mamy k-1 zer na start, n-k-k+1 zer jeszcze do zrobienia

Czyli finalnir
$$\binom{n-k+1}{k}$$
□