Nowa Dyskretna I

8 kwietnia 2025

Aktualna wersja pliku znajduje sie tutaj!

Hejka!

W związku z reworkiem Dyskretnej I jakiego doświadczyliśmy w zeszłym roku – a przez to unieważnienieniem zbieranej przez lata bazy (i fenomenalnych notatek Jakuba Żuchowskiego) postanowiłem chociaż spróbować coś zmienić w tej materii. Tak więc oto tutaj zaczyna się świadectwo tej próby.

Na start przyznam szczerze, że jest to projekt baaaaardzo w przebudowie, dopiero zaczynam zabawę z LaTeX–em, mam mocno średni wpm, a o skillsach z dyskretnej nie wspomnę... – więc tu się zwracam z prośbą o pomoc do Ciebie, drogi czytelniku!

Liczę, że wspólnymi siłami uda nam się stworzyć coś, co przyda się nie tylko przyszłym rocznikom – ale i nam podczas nauki do kolokwiów i ćwiczeń. Tak więc jeżeli masz jakieś uwagi i poprawki możesz się z nimi ze mną podzielić na Discordzie, gdzie znajdziesz mnie pod nickiem `ssk12o` lub na kanale dyskretnej. Tak samo Twoje rozwiązania bardzo ułatwią mi pracę. Możesz je wysłać mi na priv, albo – co preferowane, wrzucić do odpowiedniego folderu na moim dysku google (tutaj!). Plik nazwij numerem zadania, a także, jeżeli chcesz być wspomniany jako autor rozwiązania – w cudzysłowach wpisz swoje imie/nick.

Zadania są kodowane w następujący sposób:

— W - chaotyczne notatki z ćwiczeń, wskazówka, szkic rozwiązania, niepełne rozwiązanie (nie odpowiadam za jakość),
— R - rozwiązanie raczej dobre,
— BRAK - oczywiste. Zachęcam jednak do podesłania własnego rozwiązania,
— 'Jan Kowalski' - szczególne podziękowanie dla wymienionego.

Spis treści

Rozdział 1

Zestaw 1

UWAGA! PIERWSZY ZESTAW SKŁADA SIĘ GŁÓWNIE Z (JESZCZE) NIEOBROBIONYCH NOTATEK Z ĆWICZEŃ

Zadanie 1.1 (W)**.** *Na płaszczyźnie poprowadzono n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę:*

1. obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;
2. obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.

Podpunkty:

1. Warto zauważyć, że ze względu na warunki z treści wiemy, że każda n-ta nowa prosta którą dokładamy przecina każdą z $n-1$ prostych które już istnieją – i tworzy n nowych obszarów. Tak więc $R(n) = R(n-1)+n$. Starczy rozwalić rekurencję.
2. Podobnie.

Zadanie 1.2 (W)**.** *Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadany jest przez $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Udowodnij, że:*

1. $F_0 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$;
2. $5|F_{5n}$,
3. $F_n < 2_n$.

Wszystkie podpunkty można łatwo dowieść indukcyjnie.

Zadanie 1.3 (BRAK)**.** *Turniej n-wierzchołkowy to dowolny graf skierowany $G = (V, E)$, gdzie $|V| = n$ i w którym $(u, v) \in E$ lub $(v, u) \in E$ dla dowolnych $u, v \in V$. Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejść" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.*

Zadanie 1.4 (W)**.** *Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.*

Dowód indukcyjny.

1. przypadek trywialny
2. z założenia indukcyjnego wiemy że ten graf $G' = (V', E')$ ma on ścieżkę Hamiltona. Nazwijmy ją $P = v_1...v_n$. Rozważmy:
   a) $(v, v_1) \in E$. Wtedy $P = vv_1v_2...v_n$
   b) (v_n, v) rys $P = v_1v_2...v_nv$
   c) trzeci przypadek rys. Niech $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ będzie najmniejszym indeksem $(v_i, v) \in E$ oraz $(v, v_{i+1}) \in E$,
      wtedy $P = v_1v_2...v_ivv_{i+1}v_{i+2}...v_n$

Zadanie 1.5 (W)**.** *W każdym polu szachownicy rozmiaru nxn znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:*

— osoby zarażone pozostają zarażone,

— *osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiednią rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony). Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż n osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.*

Jakaś podpowiedź. Przekątne (małe) dzielą plansze po zarażeniu na kwadraty zarażonych. Przerwy w ciągach diagonalnych robią przerwy na końcu.

Ewentualnie: Jeżeli rozrzucić komórki w pierwszej iteracji, jest ich n-1. liczymy obwod tej figury. obwod ten jest rowny maksymalnie 4n - 4

jesli tylko uzasadnic formalnie ze przy kazdej iteracji obwod jest conajwyżej taki ajk poprzednio, co tez znaczy ze nie wszystkie sa zarażone, bo obwod byłby równy 4n.

Jak udowodnić tą zależność?

Od bartka: Pusta kratka, n zarażonych obok i $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Rozważamy przypadki ile krawędzi jest przy każdym n. Patrzymy ile znika i ile powstaje. Dochodzimy do tego że jest nie więcej.

Zadanie 1.6 ('Jedrek'). *Wykaż, że w grupie n osób istnieją dwie, które mają taka samą liczbę znajomych.*

Reductio ad absurdum

Zakładamy, że każdy ma inną ilość znajomych, czyli jest n osób i n możliwych ilości znajomych (od 0 do $n-1$) – czyli ilstnieje osoba posiadająca 0 znajomych oraz soba posiadająca $n-1$ znajomych, czyli każdy jest jej znajomym – również osobą posiadająca 0 znajomych.

Sprzeczność!

Zadanie 1.7 (W). *Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.*

Niech $f : [n] \to [n]$ tak że $\forall_{k \in [n]} f(x) \neq k$. f - permutacja Niech g - permutacja g = (1 2 3 4 5 ... n) $O_n = f \circ g \circ g \circ g$ (i g złożone n razy)

Dirichlet. $\forall f : [n] \to [n-1]$ istnieje x_1, x_2 że $x_1 \neq x_2$ tże $f(x_1) = f(x_2)$

$\forall_{k \in [n]} \exists_{i \in [n-1]} O_i(k) = k \leftarrow$ funkcja by wrócił do właściwego proporczykami.

$F(k)$ = ilość obrotów stołem aby ambasador k miał przed sobą swój proporczyk. Widzimy że nowa funkcja $F(k) : [n] \to [n-1]$ Z zasady Dirichleta istnienieje dwóch ambasadorów x_1, x_2 tże $x_1 \neq x_2$ tże $F(x_1) = F(x_2)$.

Zadanie 1.8 (W). *Pokaż, że w dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.*

Weźmy ciąg: $a_1, a_2, a_3 ..., a_n$

Wprowadzmy ciag sum częściowych: $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$

Reszty z dzielenia przez n są następującej postaci $\{0, 1, 2, ...n_1\}$. jesli istniej S_k tże skmodn=o to koniec zadania

załóżmy ze tak nie jest, czyli ze dla kazdego ka w [n] $S_k \ modn \neq 0$ Czyli ile możliwości mamy na resztę od 1 do n-1. z zasady diricchleta widzimy ze istnieje k'¡k tże Sk i Sk' maja tkaa sama reszte z dzielenia. ale wtedy Sk-Sk' jest podzielne przez n i reprezentuje sume ak'+1 + ak'+2 +...+ak

Widzimy zatem ze ciag ak'+1 do ak ma żądaną własność

jeżeli weźmiemy jakiś pierwszy podciąg $a_1 modn \neq 0$ $a_1 + a_2 modn \neq 0$ i $a_1 + a_2 modn$

Zadanie 1.9 ('Jedrek' TO BE DONE)**.** *Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n–elemetowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.*

Dowód indukcyjny

1. Dla $n = 2$ oczywiste
2. Załóżmy, że jest to prawdą dla zbioru n elementowego którego podzbiorów jest 2^n. Podzbiorów zbioru $n+1$ elementowego jest 2^{n+1}, 2^n bez elementu $n+1$

Zadanie 1.10 (BRAK)**.** *Dla n–elementowego zbioru X rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{F}$, gdzie $|F| > n/2$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje $x \in X$ należący do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{F}$.*

Zadanie 1.11 (W)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica $2n \times 2n$ z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat $2 \geqslant 2$ bez jednego pola).*

Dowód indukcyjny.

1. $n = 1$; rysunek 1
2. zał ind spełnione dla n. teza ind dla $n+1$. rysunek2 ogólnie dzielimy na cztery, zał ind, od pozostałych trzech odejmujemy po jednym kawałeczku, załatwiamy je z ind a kawałeczki załatwiamy jednym l-em

Zadanie 1.12 (W)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica $n \times n$. Dla jakich wartosci $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości 2×2 oraz 3×3.*

Dla kostek 2x2 i 3x3 oczywiste. Dla ich wielokrotności oczywsite.

Teraz łączenie. I go nie zrozumiałem. Well, shit happens. Ale do przemyślenia.

Zadanie 1.13 (BRAK)**.**

zrobione, ale średnio z zapisem. Nie zrozumiałem, ale za to macie zdjątko tablicy. rysunek1.

Rozdział 2

Zestaw 2

Zadanie 2.1 (R)**.** *Na ile sposobów można ustawić n wież na szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Starczy zauważyć, że dla każdej wieży wybieramy rząd i kolumnę w której się znajduje – i tym samym zmniejsza liczbę dostępnych o jeden. Tak więc odpowiedź wynosi:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = n! \cdot n!$$

Zadanie 2.2 (R)**.** *Na ile sposobów można ustawić k wież na szachownicy $n \times m$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Zadanie analogiczne od poprzedniego - z tym, że zmienił nam się rozmiar planszy, a ponadto nie wypełniamy jej całej. Zasada pozostaje jednak ta sama. Na start jednak warto założyć, że $k \leqslant max\{n, m\}$ (choć w sumie jeżeli tak nie jest, to odpowiedź to 0). Mając to już za sobą.

$$n \cdot m \cdot (n-1) \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (m-k+1)$$

(wykonujemy mnożenie $k + k$ elementów – stąd to $-k + 1$).

Zadanie 2.3 (R)**.** *Znaléźć definicje rekurencyjne następujących ciągów:*

1. *$a(n)$ – liczba słów długości n nad alfabetem $\{0, 1\}$, które nie zawierają dwóch jedynek koło siebie.*
2. *$b(n)$ – liczba różnych pokryć prostokąta o wymiarze $2 \times n$ dominami wymiaru 2×1.*

1. Oczywiście $a(1) = 2$, $a(2) = 3$. Rozważmy słowo n elementowe. Zauważamy, że jeżeli ono kończy sie ono zerem to poprzedzające słowo $n - 1$ elementowe jest dowolne. Jeżeli natomiast kończy się jedynką, to poprzedzające słowo $n - 2$ elementowe jest dowolne (tak jakby sie cofamy krok dalej by mieć dowolność). Stąd: $a(n) = a(n-1)+a(n-2)$.
2. Analogicznie do poprzedniego. Jak wiemy $a(1) = 1$, $a(2) = 2$. Zastanówmy się nad $a(n)$: Rozważamy ciąg o długości n. Jeżeli na końcu jest blok poziomy, to wiemy że powstał on z ciągu długości $a(n - 2)$. Jeżeli jest pionowy, to wiemy, że musiał on powstać z ciągu długości $n - 1$. A stąd $a(n) = a(n - 1) + a(n - 2)$.

Zadanie 2.4 (W/R)**.** *Ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$:*

1. *gdzie x_i są liczbami naturalnymi?*
2. *gdzie x_i są dodatnimi liczbami naturalnymi?*

Starczy wykonać siatkę która na dole ma $x_1 ... x_4$, a w rzędach wartości od 0 (1) do 7. Wysokość nad x_i oznacza wartość sumy do tego elementu włącznie, a przeskok względem poprzedniej wysokości oznacza wartość danego x_i. Więc można to potraktować jako ścieżki, a na mocy własności z wykładu wiemy ile jest ścieżek po kracie. Tak więc:

1.
$$\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7}$$

2.
$$\binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$$

Zadanie 2.5 (W)**.** *Rozważmy czekoladę złożoną z $m \times n$ kostek. Na ile sposobów można wykroić prostokąt złożony z $k \times k$ sąsiadujących ze sobą kostek ze sobą kostek czekolady?*

Na początek warto wykonać założenia $k \leqslant n$, $k \leqslant m$ (albo stwierdzić że wtedy odpowiedź to zero). Potem zauważamy, że ilość sposobów można połączyć z ilością punktów startowych ulokowania prostokąta w tabliczce. Mamy ich

$$(n-k+1) \times (m-k+1)$$

Zadanie 2.6 (W)**.** *(Reguła sumowania po górnym indeksie). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Starczy zrobić indukcje. Wychodzi za darmo. Kombinarotrycznie też się da. Polecam spróbować samemu.

Zadanie 2.7 (W)**.** *(Reguła sumowania równoległego). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

Starczy zrobić indukcje. Wychodzi za darmo.

Zadanie 2.8 (W)**.** *Ile jest funkcji $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ monotonicznych takich, że $f(i) \leqslant f(j)$ dla $i < j$?*

Rozwiązanie korzystające z tej samej koncepcji co 4 z tego zestawu. Tworzymy kratkę, gdzie kolumny to argumenty, a rzędy to wartości. Interesują nas ścieżki z początku do końca - które generują nam wszystkie funkcje spełniające warunki zadania. Tak więc:

$$\binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}$$

.

Zadanie 2.9 (R)**.** *Ile jest k–elementowych podzbiorów zbioru n–elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb?*

Zauważamy, że możemy stworzyć funkcję 'jest nie–jest'. Jest to funkcja charakterystyczna przyjmująca 0 lub 1 w zależności od tego czy element zbioru występuje, czy nie występuje w podzbiorze. Generujemy więc zbiór typu 10101 aż do uzyskania k jedynek (tu $k = 3$), ustalamy miejsca które możemy dopełniać zerami (by były to ciągi długości n – funkcja charakterystyczna). Czyli mamy $k - 1$ zer na start i $n - (k) - (k - 1)$ zer jeszcze do zrobienia. Czyli finalnie:

$$\binom{n-k+1}{k}$$

I to było rozwiązanie pierwsze, myślę bardziej oczywiste rozwiązanie.Da się jednak prościej – zaczynając od ciągu $n - k$ zer i wkładając jedynki w dozwolone miejsca.

Zadanie 2.10 (zawsze na kolokwim – podwójne zliczanie)**.** *Posługując się interpretacją kombinatoryczną udowodnij, że:*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

Historyjkowo: wybieramy z n osób dwie drużyny, które w sumie mają mieć k osób.

L: wybieramy osoby do podziału na drużyny na $\binom{n}{k}$ sposobów. Każdą z k osób które wybraliśmy wrzucamy albo do jednej albo do drugiej drużyny – czyli mamy 2 możliwości. Stąd ilość podziałów na drużyny wynosi $2^k\binom{n}{k}$

P: Ustalmy i liczbę osób w pierwszej drużynie. Wybieramy jej skład – robimy to na $\binom{n}{i}$ możliwości. Wybierzmy skład drugiej drużyny (z pozostałych nam nieprzydzielonych ludzi) – składającej się z $k - i$ osób: $\binom{n-i}{k-i}$. Pierwsza drużyna może mieć od 0 do k osób, więc sumując po tych wartościach otrzymujemy: $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$.

A stąd zauważamy, że L = P, czyli:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

Zadanie 2.11. *Udowodnij poniższe tożsamości na dwa sposoby: posługując się interpretacją kombinatoryczną albo rozwinięciem dwumianu $(1+x)^n$:*

1.

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n+n^2)2^{n-2}$$

3.

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

1. (można pochodną dwumianu) historyjka o wyborze króla i jego wojska
2. (można drugą pochodną dwumianu)

Rozdział 3

Zestaw 3

Zadanie 3.1. *Wykaż, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ istnieje $k \geqslant 1$ takie, że:*

$$S(n,0) < S(n,1) < ... < S(n,k-1) \leqslant S(n,k) > S(n,k+1) > ... > S(n,n)$$

Zadanie trudne, na ćwiczeniach prowadzący stwierdził, że nie robimy – bo za trudne. Powodzenia!

Zadanie 3.2. *Wykaż, że:*

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Historyjkowo:

Weźmy zbiór $n-1$ elementowy. Wybierzmy z niego k elementów, co możemy zrobić na $\binom{n-1}{k}$ sposobów. Następnie dołączamy do wybranych elementów n element. Pozostałe $n-k-1$ elementów możemy podzielić na $B(n-k-1)$ sposobów. Sumując k od 0 do $n-1$:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{(n-k-1)} \binom{n-1}{k} \overset{i=n-1-k}{=} \sum_{i=0}^{n-1} B(i) \binom{n-1}{n-1-i}$$

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Zadanie 3.3. *Wykaż, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

$$S(n,k+1) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0<i_0<...<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} ... \binom{i_1}{i_0}$$

Historyjkowo:

Zacznijmy od przepisania powyższego równania do trochę innej formy:

$$(k+1)! \cdot S(n,k+1) = \sum_{0<i_0<...<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} ... \binom{i_1}{i_0}$$

Zastanówmy się co mamy po prawej. Mamy sumę po wszystkich monotonicznych ciągach od 0 do n. Weźmy jeden konkretny. Weźmy ponadto jakiś zbiór 'duży' (nie w sensie wielkości, ale konceptu) n elementowy zbiór i weźmy wybierzmy z niego i_{k-1} elementów (robimy to na $\binom{n}{i_{k-1}}$ – sposobów). Następnie z tego naszego zbioru i_{k-1} elementów wybierzmy zbiór i_{k-2} elementowy (robimy to ponownie na $\binom{i_{k-1}}{i_{k-2}}$); i tak dalej po wszystkich wyrazach naszego ciągu. I co otrzymujemy? Podział naszego 'dużego' zbioru n – elementowego na $k+1$ zbiorów, ale z kolejnością. A co mamy po lewej? Podział zbioru n elementowego na $k+1$ podzbiorów – ale bez kolejności, którą można dorzucić za pomocą $(k+1)!$.

$$L = P$$

Zadanie 3.4. *Rozważ następującą procedurę generującą pewne liczby naturalne* $\{a_{i,j}\}_{1 \geqslant i \geqslant j}$*:*

1. $a_{0,0} = 1$,
2. $a_{n+1,0} = a_{n,n}$, *dla* $n \geqslant 0$,
3. $a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,k}$, *dla* $n \geqslant k \geqslant 0$.

Zadanie trudne, niestety sam nie zrobiłem ani nie zapisałem rozwiązania na ćwiczeniach. Wiem, że w rozwiązaniu wykorzystaliśmy pracę dostępną tutaj!.

Zadanie 3.5. *Wykaż, że liczba podziałów zbioru* $(n-1)$ *elementowego jest równa liczbie podziałów zbioru* $\{1, ..., n\}$ *niezawierających sąsiednich liczb w jednym bloku.*

Rozważmy funkcję pomiędzy podziałem zbioru $n-1$ elementowego a podziałem zbioru $\{1, ..., n\}$:

Po pierwsze, poindeksujmy po kolei elementy naszego podziału $[n-1]$. Idąc od prawej po naszym $n-1$ elementowym podziale wybieramy z każdego bloku co drugą liczbę zaczynając od drugiej, wyciągamy ją i idziemy dalej. Po przejściu przez cały podział dorzucamy do niego nowy zbiór: składający się z wszystkich wyciągniętych przez nas elementów i n.

Na przykład:

$$12|3|45678 \to 864|3|2|7519$$

(trzeba jeszcze tylko udowodnić, że ta funkcja jest bijekcją)

Zauważamy, że w ten sposób jednoznacznie stworzyliśmy zbiór będący podziałem zbioru $\{1, ..., n\}$. A jak wiemy z *ELiTMu* jeżeli pomiędzy zbiorami istnieje bijekcja to są równoliczne.

Zadanie 3.6. *Udowodnij, że liczba ukorzenionych drzew binarnych na* n *wierzchołkach to* n*-ta liczba Catalana.*

Ukorzenione drzewo jest drzewem binarnym, jeśli każdy wierzchołek ma co najwyżej dwójkę dzieci przy czym co najwyżej jedno lewe dziecko i co najwyżej jedno prawe dziecko.

Chcemy dowieźć, że liczba ukorzenionych drzew binarnych $N(n)$ jest równa $B(n)$.

Na start zauważamy, że $F(1) = 1 = B(1)$.

Teraz chcemy pokazać, że: $F(n) = \sum_{i=0}^{n-1} F(i)F(n-i-1)$. Rozważmy drzewo n wierzchołkowe. Niech prawe dziecko ma korzeń z i wierzchołkami a lewe z $n-i-1$. Czyli istnieje $F(i)$ możliwych drzew z dla prawego dziecka i $F(n-1-i)$ dla lewego. Czyli dla tego zespołu istnieje $F(i) \cdot F(n-1-i)$ możliwych drzew. Wiemy, że liczba i wierzchołków po prawej może osiągnąć wartości od 0 do $n-1$ czyli

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n-1} F(i)F(n-i-1)$$

Co jest rekurencją spełnianą przez liczby Bella.

Zadanie 3.7. *Triangulacją* n *– wierzchołkowego wielokąta wypukłego nazywamy zbiór* $(n-3)$ *wzajemnie nieprzecinających się jego przekątnych, które dzielą jego obszar na* $(n-2)$ *trójkątów.*

1. *ile jest triangulacji* n*–wierzchołkowego wielokąta wypukłego?*
2. *Ile jest triangulacji* n*–wierzchołkowego wielokąta wypukłego, w których każdy trójkąt triangulacji ma przynajmniej jeden bok na brzegu wielokąta?*

Polecam wziąć sobie kartkę i rysować, bo może być ciężko.

1. Weźmy $n+2$ wierzchołkowy wielokąt wypukły. Zastanówmy się ile jest triangulacji $T(n)$? Weźmy jeden z jego wierzchołków. Wybierzmy ponadto po kolei kolejne krawędzie tego wielokąta i utwórzmy z na nich trójkąty. Zauważamy, że możemy wybrać n krawędzi, stworzyć na nich trójkąty, a dla powstałych wielokątów zapisać rekurencję. Tak więc wynikowa suma po $i \in [n]$ krawędziach będzie sumą po wszystkich podziałach utworzonych po wszystkich trójkątach, tak więc:

$$T(n) = \underbrace{\underbrace{T(0)}_{lewa} \cdot \underbrace{T(n-1)}_{prawa}}_{\text{dla trójkąta na } i=1} + T(1) \cdot T(n-2) \cdot ... \cdot T(n-1) \cdot T(0)$$

Co jest rekurencją spełnianą przez liczby Catalana.

2. Na pewno jest jakieś elegantsze rozwiązanie, ale da się stwierdzić, że liczba ta wynosi

1. Weźmy bok 12 – jest on częścią pewnego trójkąta 12 i (po triangulacji) Jeśli T_{n+2} = wszystkie figury T_{n+2} = te triangulacje z T_{n+2}, które będą zwierały $\Delta 12$ i stąd T^i_{n+2} sa parami rozłączne oraz $T_{n+2} = U^{n+1}_{i+3} T^i_{n+2}$ Mamy $|T_{n+2}| = \sum_{i=3}^{n+1} |T^i_{n+2}| = \sum_{i=3}^{n+1} |T_i| \cdot |T_{n+3-i}|$ Niech $|T_2| = 1$ i $|T_3| = 1$.
   Co po przekształceniach da n–tą liczbę Catalana
2. Podpunkt 2 – dokładnie tak samo jak 1. Niech figura ma n wierzchołków. Wybieramy bok 12 oraz zauważamy że 12 jest częścią pewnego trójkąta $\Delta 12$ i:
   a) $i = 3$, n Zauważmy, że w przypadku i = 3 krawedz 13 musi byc czescia trojkata $\Delta 134$ lub $\Delta 13n$ i bla bla bla ostatecznie generujemy procedure gdzie tak schodkowo generujemy, i dla kazdej krawedzi mamy dwie możliwości zbudowania nowego trojakąta. Ile zatem takich możliwości jest? Jest ich 2^{n-4}. Sytuacja symetryczna dla n.
   b) $i \neq 3$ oraz $i \neq n$
   $$2^{i-4} \cdot 2^{n-i-1} = 2^{n-5}$$
   Czyli sumarycznie:
   $$2^{i-4} + 2^{i-4} + (n-4) \cdot 2^{n-5}$$
   czyli do $(n \cdot 2^{n-5})$

Zadanie 3.8 (R/prywata). *Wykaż, że liczba drzew etykietowanych na zbiorze* $1, ..., n$ *wynosi* n^{n-2}.

Drogi studencie, to jest jedno z tych zj@b@nych zadań, które moim zdaniem nie powinno sie tu znaleźć.

Jest to nietrywialny problem świata rzeczywistego – który całe szczęście ma swoje rozwiązanie (o grozo z nazwiskiem!).

Algorytm, będący bijekcją pomiędzy dowolnym (a de facto większym od 2) grafem a ciągiem $n-2$ liczb o możliwych wartościach $[n]$ – którego liczność to oczywiście

$$n^{n-2}$$

znajdziesz tutaj! Jedynym problem pozostaje udowodnienie, że powyższa funkcja faktycznie jest bijekcją...

Rozdział 4

Zestaw 4

Zadanie 4.1. *Oblicz* $S(n,2)$.

Czyli *de facto* pytanie o to, na ile sposobów można podzielić na 2 niepuste zbiory zbiór n elementowy.

$$S(n,2) = \frac{\overbrace{2^n}^{\text{wszystkie podzbiory}} - \overbrace{2}^{\text{bez pustego i całego}}}{\underbrace{2}_{\text{nie interesuje nas kolejność}}} = 2^{n-1} - 1$$

Oczywiście da się to zrobić też rekurencyjnie – choć jest to dłuższe zadanie (które mimo wszystko polecam zrobić).

Zadanie 4.2. *Wykaż, że mamy dokładnie*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}$$

permutacji zbioru $[n]$ *o typie* $1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}$ *(mających* λ_i *cykli długości* i *dla* $i \in [n]$*).*

Permutację $[n]$ jako funkcję można utożsamiać z ciagiem n elementowym, przy czym ważne jest to, że nie istotny jest początek ani koniec tego ciągu (bo permutacja to cykl).

Zauważamy, że wszystkich permutacji $[n]$ jest $n!$. Zapiszmy te cykle w postaci ciągu:

$$\underbrace{(\cdot)(\cdot)\ldots(\cdot)}_{\lambda_1}\underbrace{(\cdot\cdot)\ldots(\cdot\cdot)}_{\lambda_2}\ldots\underbrace{(\underbrace{\cdot\ldots\cdot}_{n})\ldots(\underbrace{\cdot\ldots\cdot}_{n})}_{\lambda_n}$$

Usuńmy z każdego i elementowego ciągu kolejność (bo chcemy cykle, nie stricte ciągi), czyli dla każdego podzielmy przez i, co robimy finalnie dzieląc przez i^{λ_i} dla każdego i.

Ponadto, zauważamy, że nasz sposób ułożenia cykli zakłada kolejność, której pozbędziemy się dzieląc przez $\lambda_i!$ dla każdej grupy cykli.

Czyli finalnie liczba takich cykli będzie równa:

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}$$

Zadanie 4.3. *Posługując się interpretacją kombinatoryczną, wykaż tożsamość:*

$$S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k,m)$$

Kombinatorycznie:

Lewa: Liczba podziałów zbiory $[n+1]$ na $m+1$ bloków:

$$S(n+1, m+1)$$

Prawa: Wybieramy k liczb które nie będą w nowym bloku z liczbą $n+1$. Pozostałe będą z $n+1$. Spośród liczb wybranych tworzymy m bloków na $S(k,m)$ sposobów. Sumując po wszystkich możliwych k:

$$\sum_k \binom{n}{k} S(k,m)$$

L=P

Zadanie 4.4. *Zakładając, że zachodzi równość:*

$$(x_1 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+...+n_k=n} \binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} x_1^{n_1} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}$$

podaj ile wynosi $\binom{n}{n_1 n_2 ... n_k}$.

Zadanie koncepcyjne w zasadzie analogiczne do kombinatorycznego wyprowadzenia $(x+y)^n$.

Iloczyn $x_1^{n_1} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}$ powstaje w sposób taki, że z każdego z nawiasów:

$$(x_1 + ... + x_k) \cdot (x_1 + ... + x_k) \cdot ... \cdot (x_1 + ... + x_k)$$

wybieramy jedną z liczb od x_1 do x_k, przy czym x_i wybieramy n_i razy. Wybierzmy z których nawiasów wybieramy. Dla n_1 wybieramy z $\binom{n}{n_1}$ nawiasów, dla n_2 z $\binom{n-n_1}{n_2}$ itd. dla n_k z $\binom{n-n_1-n_2-...n_{k-1}}{n_k} = \binom{n_k}{n_k}$. I robimy tak po wszystkich możliwych układach, ale wiemy, że lewa strona założenia równa się prawej, więc:

$$\binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} ... \binom{n_k}{n_k}$$

(można przeczytać dodatkowo)

Zadanie 4.5. *Wykaż, że*

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n,$$

gdzie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Historyjkowo:

Lewa: Zastanówmy się, ile jest permutacji $[n]$ w których wyróżniamy jeden cykl. Ustalmy i. Generujemy wszystkie permutacje n-elementowe o i cyklach za pomocą $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ i wybieramy z niej wyróżnioną na i sposobów. Sumując po wszystkich i (liczbach cykli) otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$$

Prawa: Zróbmy to samo, ale inaczej. Ustalmy k – liczbę elementów w wyróżnionym cyklu. Stwórzmy wyróżniony cykl, możemy zrobić to na $\binom{n}{k} \cdot i! \cdot \frac{1}{k}$. Z reszty elementów tworzymy permutację na $(n-k)!$ sposobów. Czyli finalnie otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k} = n! \cdot H_n$$

Zadanie 4.6. *Wykaż, że dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*
1. $x^n = \sum_k S(n,k) x^{\underline{k}}$
2. $x^{\bar{n}} = \sum_k \left[{n \atop k} \right] x^k$.

Udowodnimy najpierw dla $x \in \mathbb{N}$, potem zbiorczo uzasadnimy dla $\mathbb{R}$.

1. Historyjkowo:

Lewa: Wrzucamy n osób do x pokoi. Robimy to na x^n sposobów.
Prawa: Dzielimy n osób na k grup – robimy to na $S(n,k)$ sposobów. Wybieramy z wszystkich x pokoi k pokoi na $\binom{x}{k}$ sposobów i przydzielamy je do grup na $k!$ sposobów. Tak więc sumarycznie sumując po wszystkich licznościach k:

$$\sum_k S(n,k) \cdot \binom{x}{k} \cdot k! = \sum_k S(n,k) \cdot x^{\underline{k}}$$

Pozostaje jedynie kwestia uzasadnienia, że dzieje się tak nie tylko dla $x \in \mathbb{N}$, ale i dla $x \in \mathbb{R}$.

2. Historyjkowo:

Prawa: Będziemy permutować $[n]$, a powstałe cykle dzielić pomiędzy szuflady. Ustalmy k. Perutmujemy zbiór $[n]$ na k cykli, robimy to na $\left[{n \atop k} \right]$ sposobów. Każdy z otrzymanych cykli wrzucamy do szufladki, robimy to na x^k sposobów.
Sumując po wszystkich k otrzymujemy:

$$\sum_k \left[{n \atop k} \right] \cdot x^k$$

Lewa: Bierzemy po kolei elementy z $[n]$ i wrzucamy je do dostępnych miejsc (szufladek i fragmentów permutacji). Pierwszy możemy wrzucić na x sposobów, drugi na $(x+1)$, trzeci na $(x+2)$ itd. Sumarycznie, dla wszystkich elementów:

$$\underbrace{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot ... \cdot (x+n-1)}_{n \text{ elementów}} = x^{\overline{n}}$$

Udowodniliśmy powyższe równości dla $x \in \mathbb{N}$, zauważmy, że po obu stronach równości mamy wielomiany, przerzucając je na jedną stronę zauważymy, że powstały wielomian ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, jedyny taki wielomian to wielomian zerowy, wielomiany po obu stronach równości są sobie równe, więc równość zachodzi także dla $x \in \mathbb{R}$.

Rozdział 5

Zestaw 5

Zadanie 5.1. *Wykaż zasadę włączeń i wyłączeń korzystając z indukcji po liczbie zbiorów.*

Zadanie 5.2 (Autorem rozwiązania jest: 'Kuba Jaworski')**.** *Wykaż, że mamy*

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j}(m-j)^n$$

suriekcji ze zbioru $[n]$ *w zbiór* $[m]$*.*

Funkcja będąca surjekcją jest funkcją, której zbiór wartości jest równy przeciwdziedzinie.

Zauważmy, że liczba surjekcji to liczba wszystkich funkcji odjąć liczba funkcji nie będących surjekcjami.

Wszystkich funkcji $f : [n] \to [m]$ mamy: n^m.

Zadanie 5.3. *Ile jest ciągów długości* $2n$ *takich, że każda liczba* $i \in [n]$ *występuje dokładnie dwa razy oraz kaze sąsiednie dwa wyrazy są różne.*

Zadanie 5.4. *Wykaż, że dla* $n \geqslant 3$ *zachodzi tożsamość*

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

gdzie $D(n)$ *jest liczbą permutacji zboru* $[n]$ *bez punktów stałych.*

Zadanie 5.5. *Wykaż (najlepiej kombinatorycznie), że dla dowolnych* $n, k \in \mathbb{N}$ *zachodzi:*

1. $S(n,k) = \sum_{0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_{n-k} \leqslant k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$
2. $c(n,k) = \sum_{0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{n-k} < k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$

1. z1
2. z2

Zadanie 5.6. *Ciąg podziałów zbioru* $1, \ldots, n$ *tworzymy następująco. Startujemy od podziału zawierającego tylko zbiór* $1, \ldots, n$*. Podział* $(i+1)$*–wszy otrzymujemy z podziału* i*-tego poprzez:*

1. *wybranie jednego, co najmniej* 2*-elementowego zbioru z podziału* i*-tego i podzielenie go na dwa niepuste podzbiory,*
2. *podzielenie każdego, co najmniej* 2*-elementowego zbioru z podziału* i*-tego na dwa niepuste podzbiory.*

W obu przypadkach procedura kończy swoje działanie jeżeli wszystkie zbiory podziału są jednoelementowe. Na ile sposobów można wykonać powyższe procedury? Na ile sposobów możemy wykonać powyższe procedury zakładając, że po każdym kroku zbiory podziałów zawierają kolejne liczby naturalne?