Numeričko rješavanje 2D valne jednadžbe

Sandro Skočić

2023/09/25

Krećemo iz definicije druge parcijalne derivacije:

$$f''(x) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + O(h^2). \tag{1}$$

Valna jednadžba glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \nabla u \tag{2}$$

Za 2d valna jednadžba glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \tag{3}$$

primjenjujemo (1) na 2D valnu jednadžbu, stoga dobivamo:

$$\begin{aligned} &\frac{u(t+dt,x,y) - 2f(t,x,y) + f(t-dt,x,y)}{dt^2} = \\ &\qquad v^2 \Bigg(\frac{u(t,x+dx,y) - 2f(t,x,y) + f(t,x-dx,y)}{dx^2} \\ &\qquad\qquad + \frac{u(t,x,y+dy) - 2f(t,x,y) + f(t,x,y-dy)}{dy^2} \Bigg) \end{aligned} \tag{4}$$

Uzimamo da je $dx = dy = dr$ i manipuliramo jednadžbu tako da u(t-dt,x,y) bude sam, dobivamo:

$$\begin{aligned} u(t+dt,x,y) = \left(c\frac{dt}{dr} \right)^2 \Bigg(& u(t,x+dx,y) + u(t,x-dx,y) + \\ u(t,x,y+dy) + u(t,x,y-dy) - 4u(t,x,y) \Bigg) & + 2u(t,x,y) - u(t-dt,x,y) \end{aligned} \tag{5}$$

Za prvi vremenski korak je potrebno poznavati sustav u prošla dva vremenska koraka. Parcijalna derivacija početnim uvjetima treba biti 0 za početno vrijeme t_0. Mora vrijediti:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

Ako pretvorimo parcijalne derivacije u diskretan oblik imamo:

$$\frac{u(t+dt,x,y)-u(t-dt,x,y)}{2dt}=0 \tag{7}$$

Imamo uvjet:

$$u(t+dt,x,y)=u(t-dt,x,y) \tag{8}$$

Ako uvrstimo uvjet u 2D Valnu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} u(t-dt,x,y) = \left(c\frac{dt}{dr}\right)^2 \Big(& u(t,x+dx,y)+u(t,x-dx,y)+ \\ & u(t,x,y+dy)+u(t,x,y-dy)-4u(t,x,y)\Big)+u(t,x,y) \end{aligned} \tag{9}$$