《信号处理基础》

Fundamentals of Signal Processing

胡峻林

北京航空航天大学软件学院

hujunlin@buaa.edu.cn

课程基本信息

课程性质：选修

学　　分：2

学　　时：32（理论课时，无实验课时）

先修课程：《工科数学分析》

教　　材（无需购买）：《信号与系统》第三版，郑君里主编，高等教育出版社，2011.3

课程简介：《信号处理基础》是信息类本科专业迫切需要学习的一门专业课，旨在使学生掌握信号处理的基本概念、基本理论和基本分析方法。本课程主要讲述信号与系统的基本概念、连续时间系统的时域分析和频域分析方法、离散时间系统的时域分析和变换域分析方法等。通过本课程的学习，建立信号与系统的频域分析以及系统函数的概念，为从事信号处理、系统软件开发等方面的研究工作奠定坚实的理论基础。

学习目标

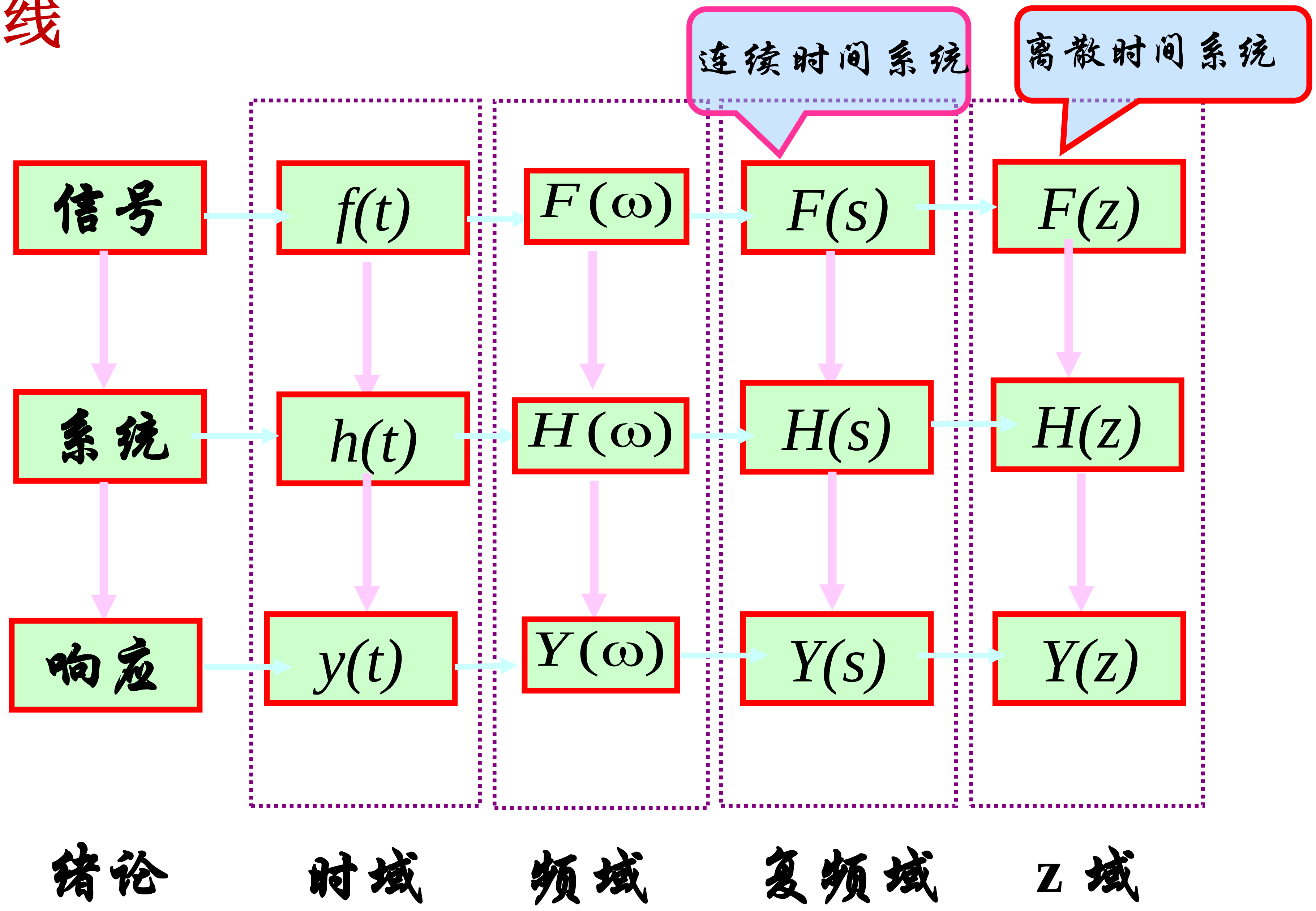
通过学习本课程，

- 掌握信号的时域、频域、复频域分析方法，做到数学概念、物理概念与工程概念的统一，具备信号与系统的分析能力，具有信息获取与处理能力；
- 理解信号的时域、频域、变换域特性，复杂工程问题通过线性时不变系统的时域、频域、复频域分析的相互关联和制约因素；
- 能够运用多种方法得到系统的响应，对系统从时域、频域、复频域分析得出有效的结论，能根据已知的系统结构图、微分方程或差分方程、转移函数等得到系统的输出方程；
- 能够识别和判断系统的性质，对复杂工程问题运用系统函数、零极点分布的规律等给出相应的参数和有效分析。

主要内容

- 信号与系统基本概念
- 连续时间系统的时域分析
- 连续信号的频域分析
- 连续时间系统的复频域分析
- 离散时间系统的时域分析
- 离散信号的变换域分析

课程主线


连续时间系统
离散时间系统
信号
系统
响应
f(t)
h(t)
y(t)
F(ω)
H(ω)
Y(ω)
F(s)
H(s)
Y(s)
F(z)
H(z)
Y(z)
绪论
时域
频域
复频域
z 域

课程考核

- 平时成绩 10% （课堂参与情况）
- 平时作业 40% （4 次课后作业）
- 期末考试 50% （开卷考试，限携带一页手写A4纸）

该课程无补考环节

第1章：信号与系统基本概念

提纲

1.1 信号的定义与分类

1.2 典型连续信号及其时域特性

1.3 信号的时域变换

1.4 信号的时域运算

1.5 奇异信号

1.6 系统的定义与描述

1.7 系统的性质与分类

1.1 信号的定义与分类

1.1.1 信号的定义

- **信号的定义以及信号与信息的关系**

  信号是指信息的表现形式与传送载体，而信息则是信号的具体内容。

- **信号与函数的关系**

  信号可以是时间的一元或多元函数，可以是变换域中变量的函数。

  在讨论信号的有关问题时，“信号”与“函数”两个词常互相通用。

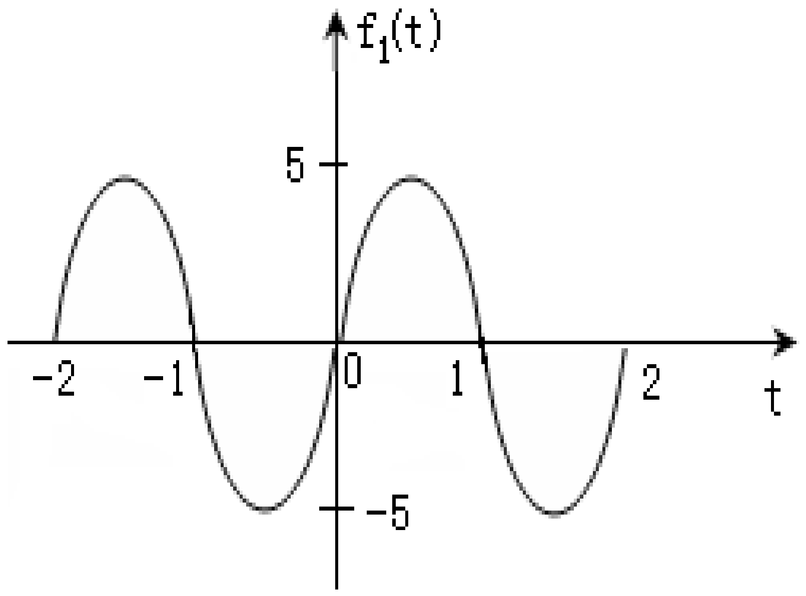
1.1.2 信号的分类

根据信号的特点，常常将信号分为：

- **连续时间信号与离散时间信号**
- **周期信号与非周期信号**
- **确定信号与随机信号**
- **能量信号与功率信号**

1. 连续时间信号与离散时间信号

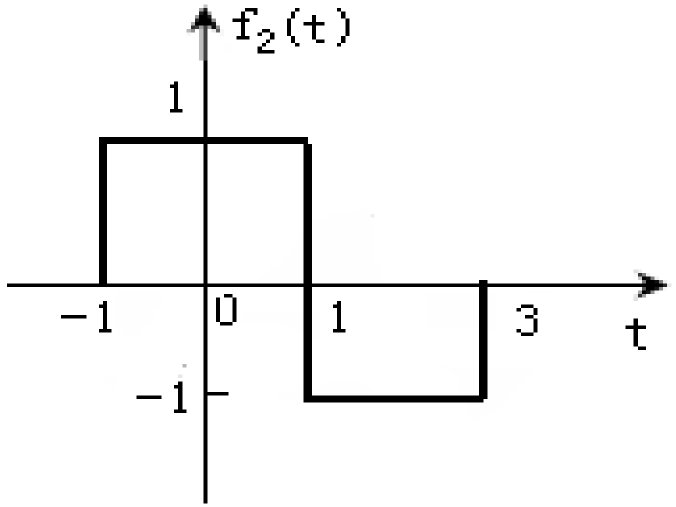
连续时间信号是指在信号的定义域内，除有限个间断点外，任意时刻都有确定函数值的信号，通常用 $f(t)$ 来表示。



数学表达式 $f_1(t) = 5\sin(\pi t)$

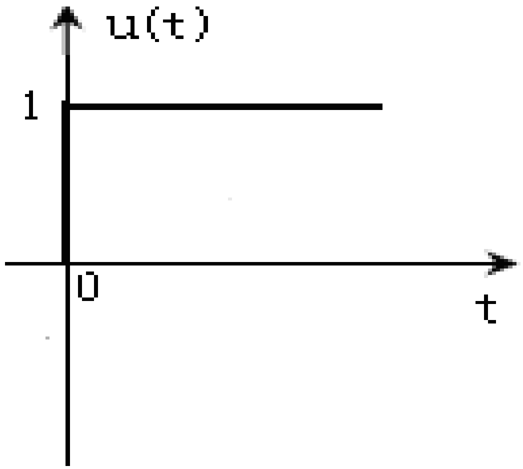
定义域（-∞，∞）

值域[-5，5]都是**连续**的



数学表达式为

$$f_2(t)=\begin{cases}0 & t<-1\\ 1 & -1<t<1\\ -1 & 1<t<3\\ 0 & t>3\end{cases}$$

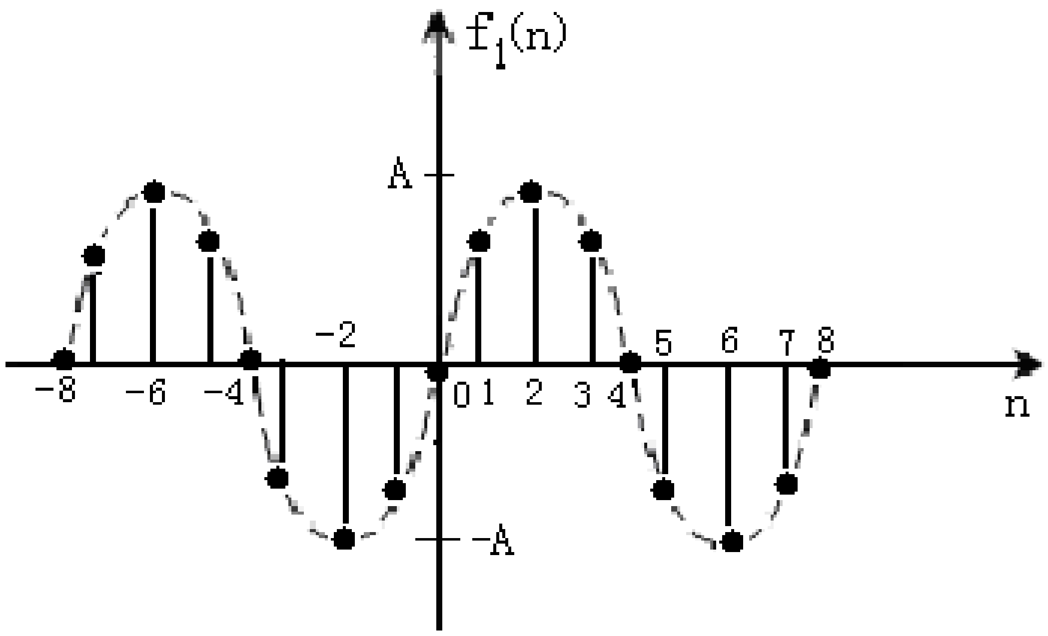


单位阶跃信号，数学表达式为

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

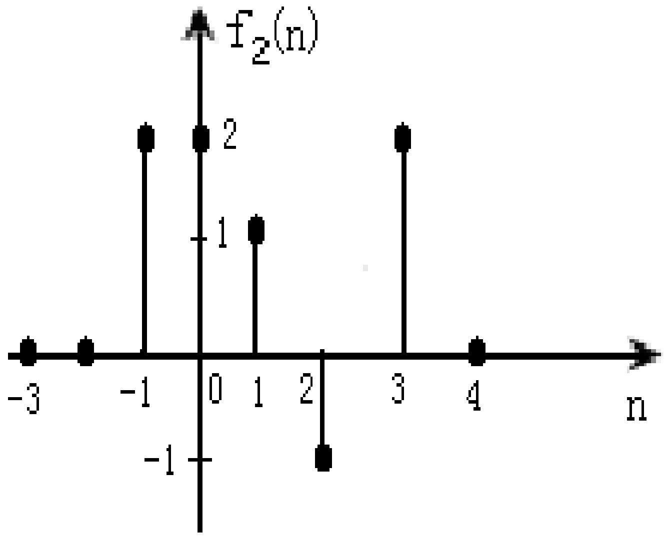
定义域（-∞，∞）是连续的，但信号的值只取0或1。信号在 $t=0$ 处有间断点 。

离散时间信号是指信号的定义域为一些离散时刻，通常用 $f(n)$ 来表示。离散时间信号最明显的特点是其定义域为离散的时刻，而在这些离散时刻之外无定义。

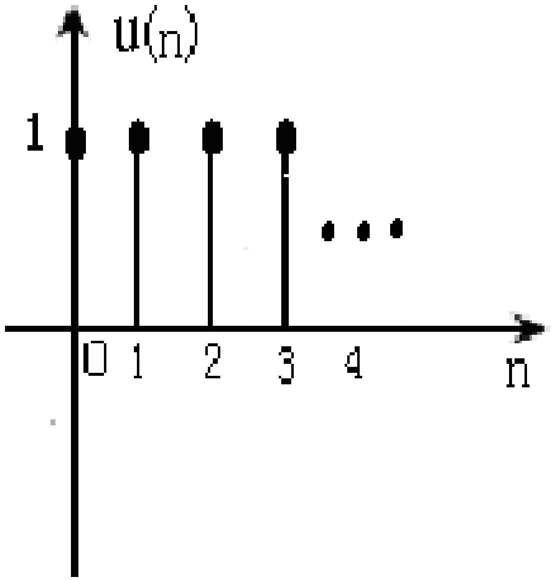


正弦序列

$$f_1(n) = A\sin(\frac{\pi}{4}n)$$



数学表达式为 $f_2(n)=\begin{cases}2 & n=-1,0,3\\1 & n=1\\-1 & n=2\\0 & \text{其它}n\end{cases}$



单位阶跃序列，数学表达式为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\ge 0\\0 & n<0\end{cases}$$

2. 周期信号与非周期信号

周期信号是定义在（-∞，∞）区间，每隔一定时间 T (或整数 N) ，按相同规律重复变化的信号。

连续周期信号 $$f(t) = f(t + mT), m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

离散周期信号 $$f(n) = f(n + mN), m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

非周期信号是不具有重复性的信号。

3. 确定信号与随机信号

根据时间函数的确定性划分，信号可以分为确定信号与随机信号。

- 确定信号是指能够以确定的时间函数表示的信号。
- 随机信号也称为不确定信号，它不是时间的函数。也就是说，在其定义域内的任意时刻没有确定的函数值。如马路上的噪声，电网电压（有效值）波动量的大小等。

本课程着重讨论确定时间信号，随机信号的分析将在数字信号处理等后续课程中研究 。

4. 能量信号与功率信号

根据时间信号的可积性划分，信号可以分为能量信号与功率信号。

连续时间信号归一化能量 $$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left|f(t)\right|^{2}dt$$

连续时间信号归一化功率 $$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|f(t)\right|^{2}dt$$

离散时间信号归一化能量 $$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left|f(n)\right|^{2}$$

离散时间信号归一化功率 $$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|f(n)\right|^{2}$$

能量信号：若信号的归一化能量为非零的有限值，且其归一化功率为零，则该信号为**能量信号。**

功率信号：若信号的归一化能量为无限值，且其归一化功率为非零的有限值，则该信号为**功率信号。**直流信号与周期信号都是功率信号。

需要注意的情况：一个信号不可能既是能量信号又是功率信号，但却有少数信号既不是能量信号也不是功率信号。如单位斜变信号，既不是能量信号也不是功率信号。

提纲

1.1 信号的定义与分类

1.2 典型连续信号及其时域特性

1.3 信号的时域变换

1.4 信号的时域运算

1.5 奇异信号

1.6 系统的定义与描述

1.7 系统的性质与分类

1.2 典型连续信号及其时域特性

1.2.1 直流信号

1.2.2 正弦信号

1.2.3 指数信号

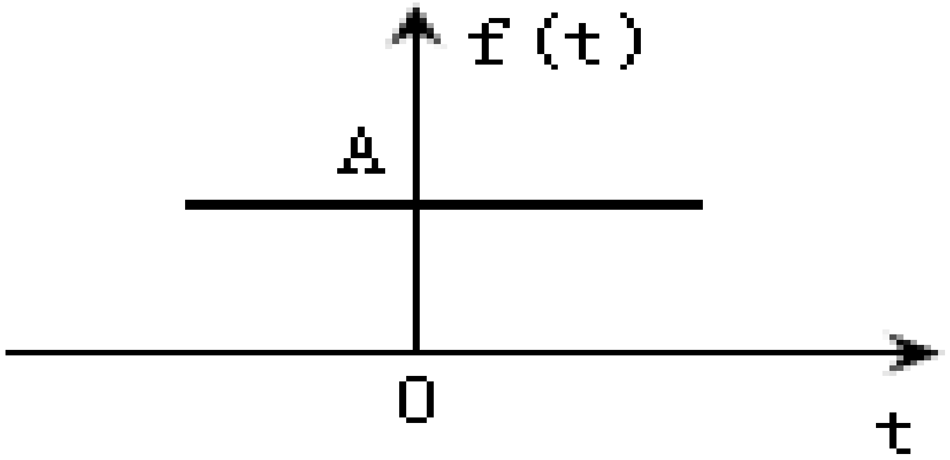
1.2.4 复指数信号

1.2.5 抽样信号

1.2.1 直流信号

直流信号的数学表达式为

$$f(t) = A$$



式中 *A* 为实数，其定义域为（-∞，∞），波形如图所示。

若*A*=1，则称之为单位直流信号。

1.2.2 正弦信号

正弦信号的数学表达式为 $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

正弦信号的性质：

(1)是无时限信号。

(2)是周期信号，其周期为 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

(3)其微分仍然是正弦信号。

(4)满足如下形式的二阶微分方程，即： $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$

1.2.3 指数信号

指数信号数学表达式 $f(t)=Ae^{\alpha t}$

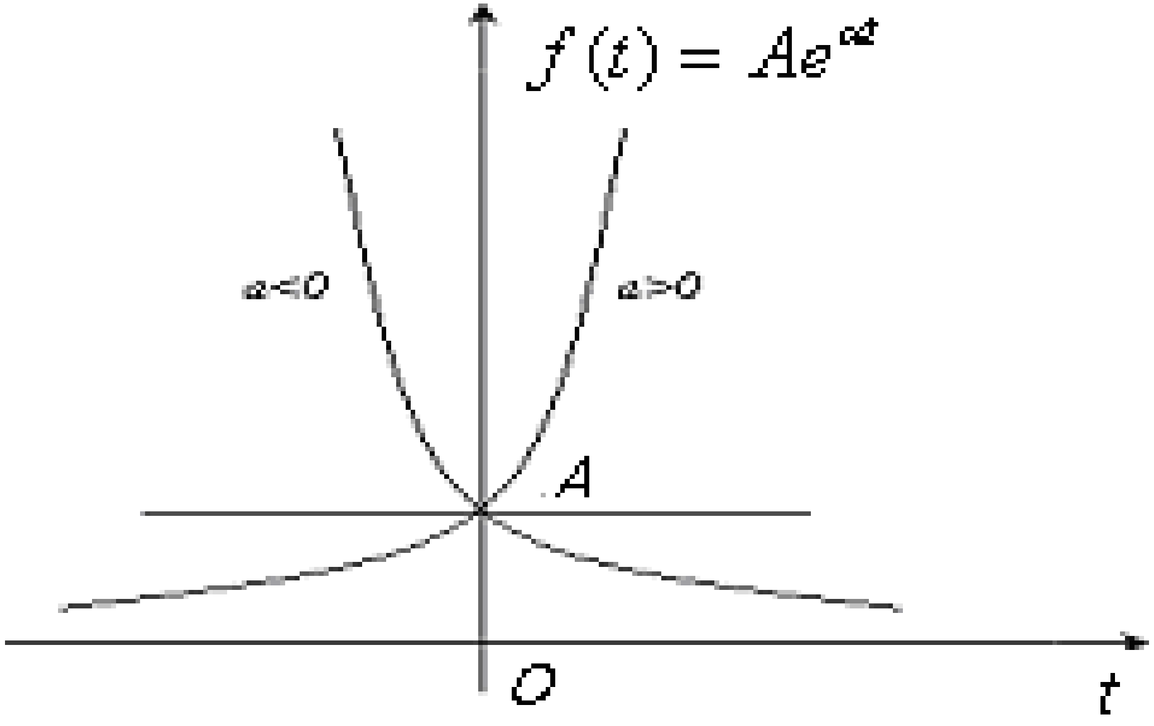
系数*A*是指数信号的初始值，

在*A*为正实数时，

若 $\alpha>0$，则指数信号的幅度随时间增长而增长；

若 $\alpha<0$，指数信号的幅度随时间增长而衰减。

在 $\alpha=0$ 时，信号不随时间而变化，成为直流信号。

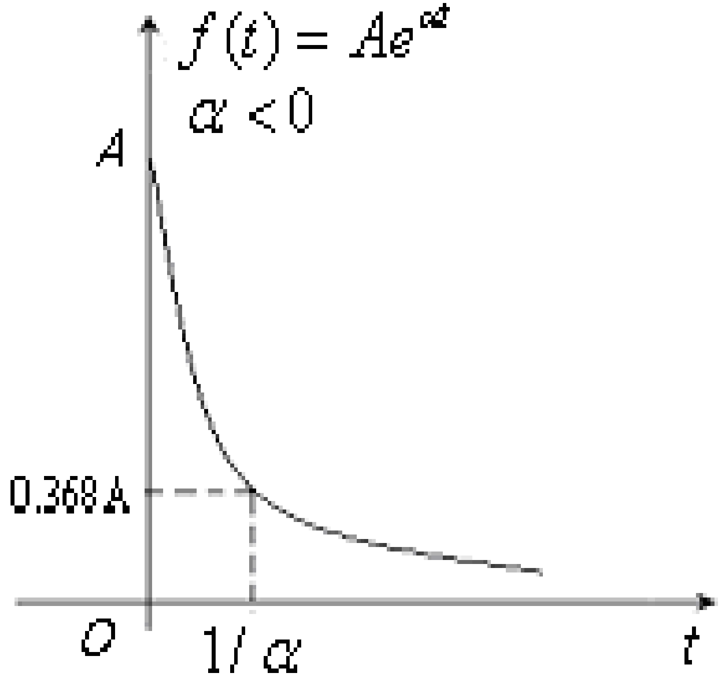


单边指数衰减信号

$$f(t)=\begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t\geq 0,\alpha>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

单边指数衰减信号的性质：

(1) $f(0_-)=0$**，** $f(0_+)=A$**，即在** $t=0$ **时刻有跳变，跳变的幅度为*A*。**



(2)经过 $1/\alpha$**的时间，函数值从*A* 衰减到0.368*A*。**α**称为衰减系数。**

(3)单边指数衰减信号对时间的微分和积分仍是指数形式。

1.2.4 复指数信号

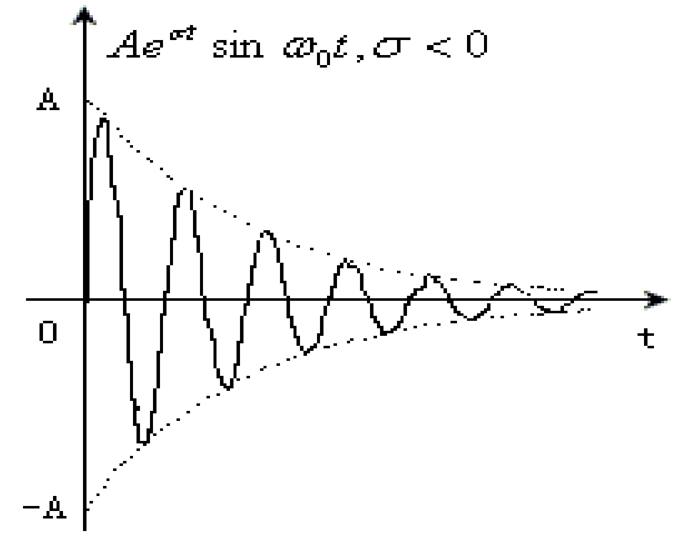
复指数信号的数学表达式 $f(t) = Ae^{st}$

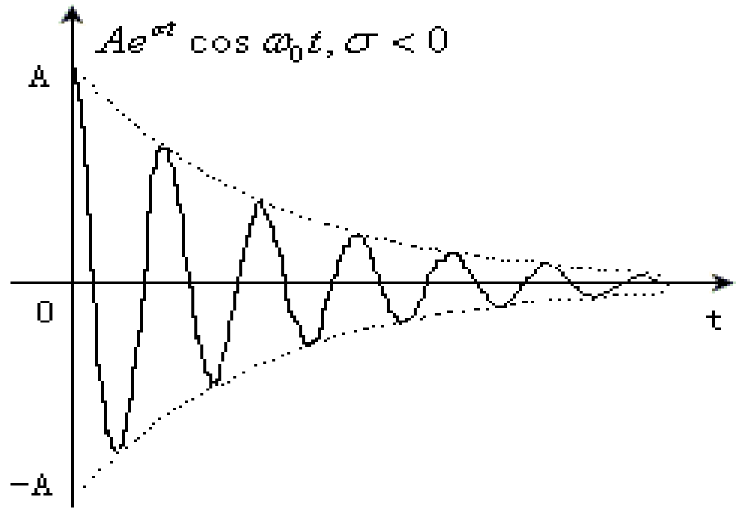
由欧拉公式展开可得

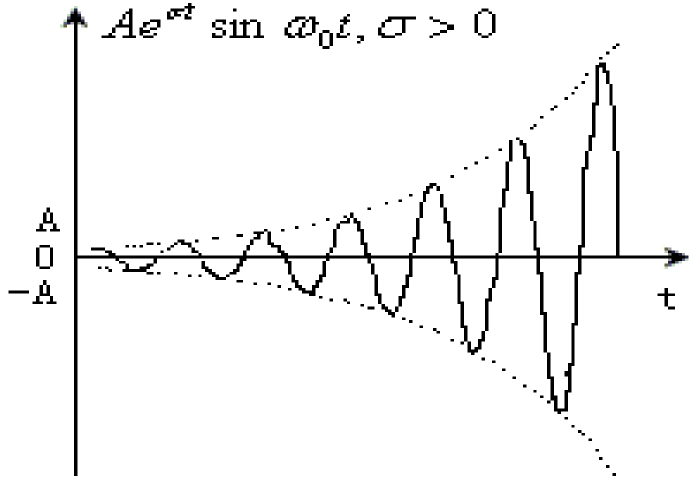
$$Ae^{st} = Ae^{(\sigma + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma t}\cos(\omega_0 t) + jAe^{\sigma t}\sin(\omega_0 t)$$

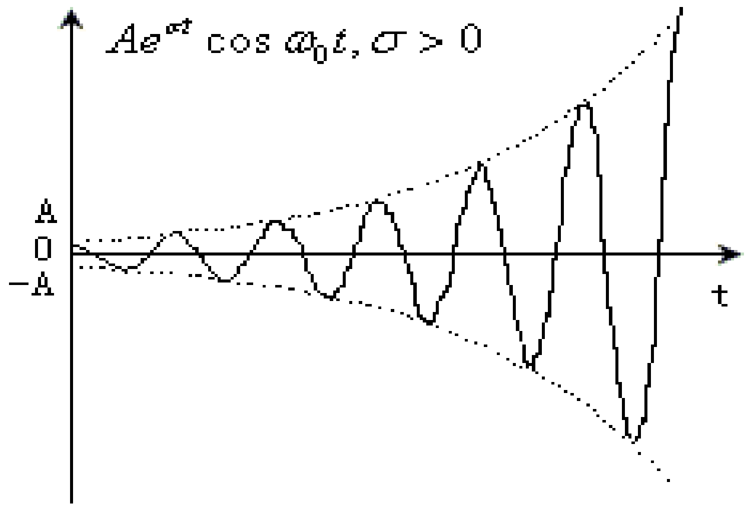
此式表明，一个复指数信号可以分解为实部、虚部两部分。

实部、虚部分别为幅度按指数规律变化的正弦信号。


$Ae^{\sigma t}\sin\omega_0 t, \sigma < 0$
A
0
−A
t


$Ae^{\sigma t}\cos\omega_0 t, \sigma < 0$
A
0
−A
t


$Ae^{\sigma t}\sin\omega_0 t, \sigma > 0$
A
0
−A
t


$Ae^{\sigma t}\cos\omega_0 t, \sigma > 0$
A
0
−A
t

需要指出的是：复指数信号在物理上是不可实现的，但是它概括了多种情况。

利用复指数信号可以表示常见的普通信号，如直流信号、指数信号、正弦信号等。

复指数信号的微分和积分仍然是复指数信号，利用复指数信号可以使许多运算和分析简化。

因此，复指数信号是信号分析中非常重要的基本信号。

1.2.5 抽样信号

抽样信号的数学表达式为 $Sa(t)=\dfrac{\sin t}{t}$

抽样信号的性质

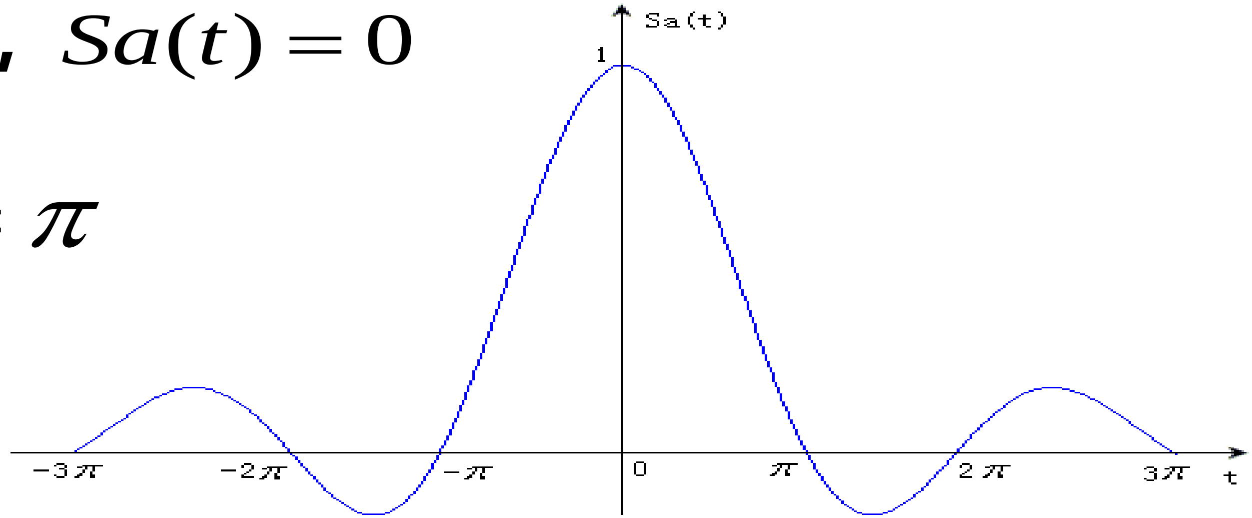
(1) **为实变量** t **的偶函数，即有** $Sa(t)=Sa(-t)$

(2) $\lim\limits_{t\to 0}Sa(t)=Sa(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

(3) **当** $t=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ **时，** $Sa(t)=0$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}Sa(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}dt=\pi$

(5) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}Sa(t)=0$



提纲

1.1 信号的定义与分类

1.2 典型连续信号及其时域特性

1.3 信号的时域变换

1.4 信号的时域运算

1.5 奇异信号

1.6 系统的定义与描述

1.7 系统的性质与分类

1.3 信号的时域变换

1.3.1 反折

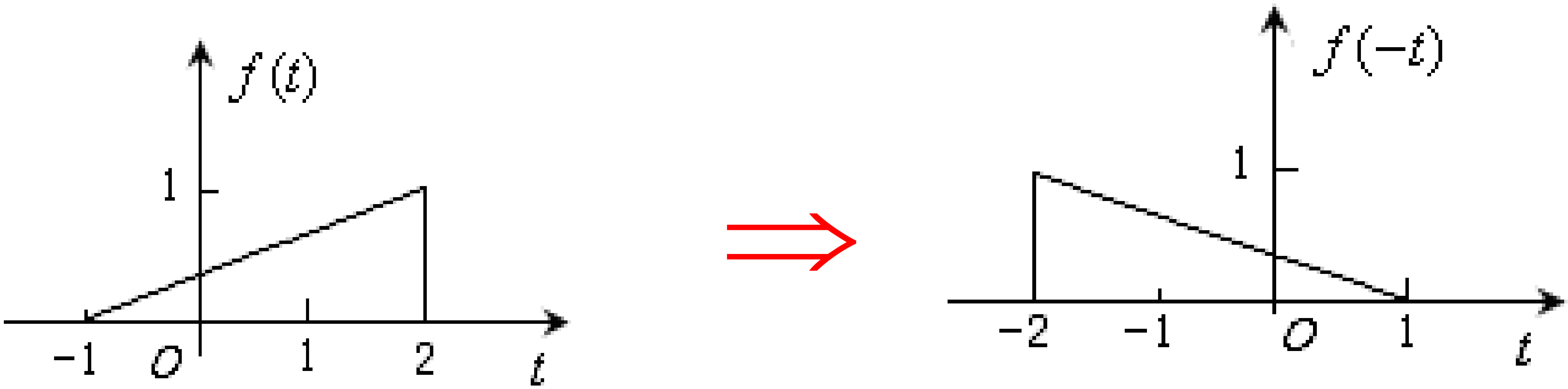
1.3.2 时移

1.3.3 尺度

1.3.4 倒相

1.3.1 反折

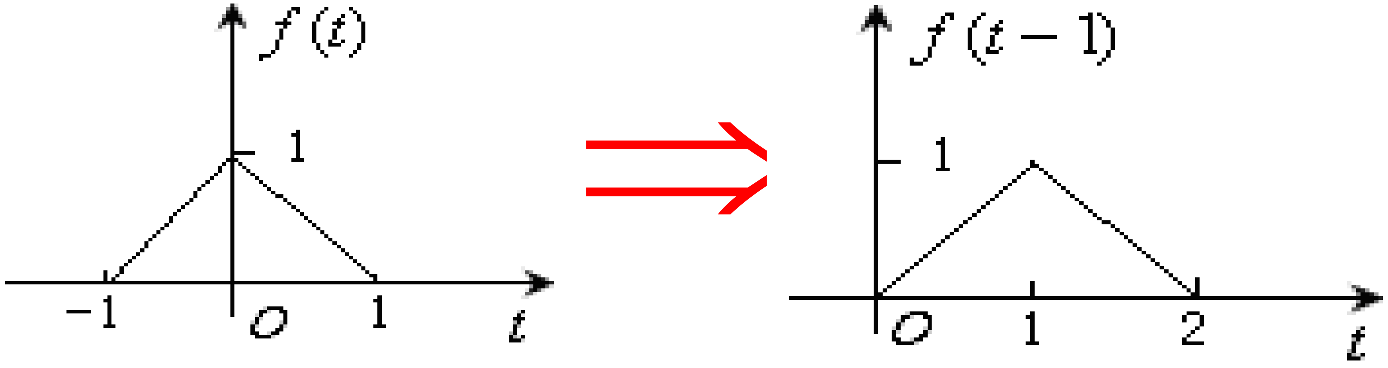
信号的时域反折，就是将信号的波形以纵轴为轴翻转180度。



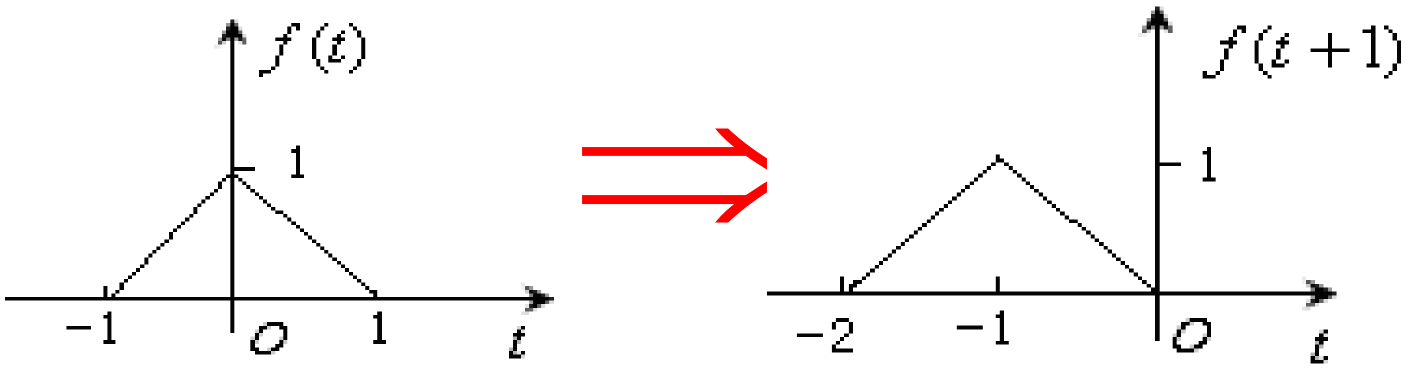
将 $f(t)$ 以纵轴为轴对折，即得反折信号 $f(-t)$ 。
若要求得 $f(t)$ 的反折信号 $f(-t)$，则必须将 $f(t)$中的 t 换为 -t，同时将 $f(t)$定义域中的 t 也必须换为 -t 。

1.3.2 时移

信号的时移（也称平移），就是将信号的波形沿时间轴左、右平行移动，但波形的形状不变。



将 $f(t)$ 沿 t 轴平移 t_0，即得 $f(t-t_0)$, t_0 为实数。



当 $t_0>0$ 时，信号沿 t 轴正方向移动（右移）；

当 $t_0<0$ 时，信号沿 t 轴负方向移动（左移）。

信号的时移变换用时移器（延时器）实现

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{延时器}} \longrightarrow y(t) = f(t - t_0)$$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{预测器}} \longrightarrow y(t) = f(t + t_0)$$

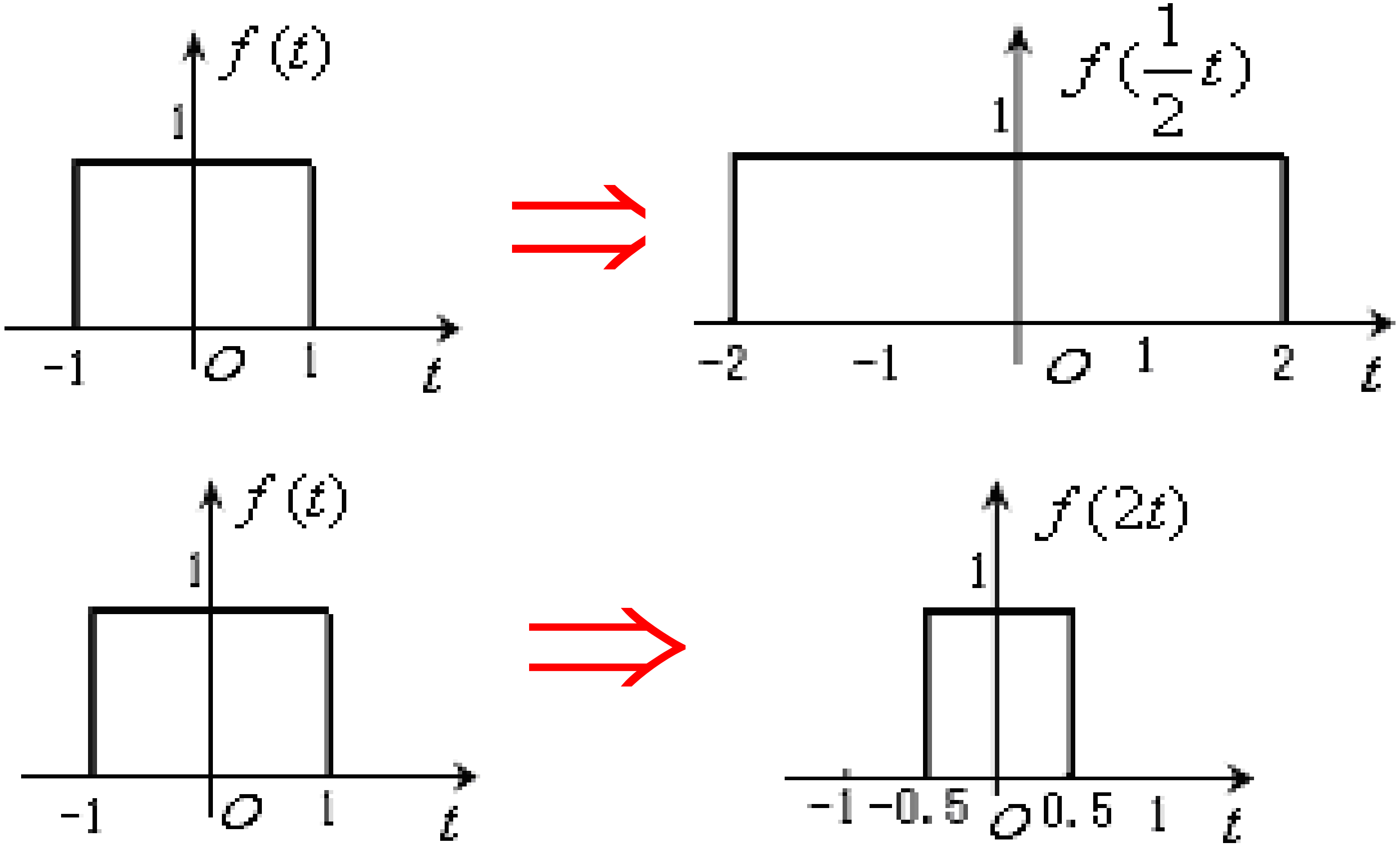
当 $t_0 > 0$ 时，延时器为因果系统，是可以用硬件实现的；

当 $t_0 < 0$ 时，延时器是非因果系统，此时的延时器变成为预测器。

延时器和预测器都是信号处理中常见的系统。

1.3.3 尺度

信号的尺度变换，就是将信号 $f(t)$ 变化到 $f(at)(a>0)$，即 $f(t)$ 信号在时间轴上的扩展或压缩，但纵轴上的值不变。



若 $f(t)$ 是已录在磁带上的声音信号，则:

$f(-t)$ 可看作将磁带倒转播放产生的信号;

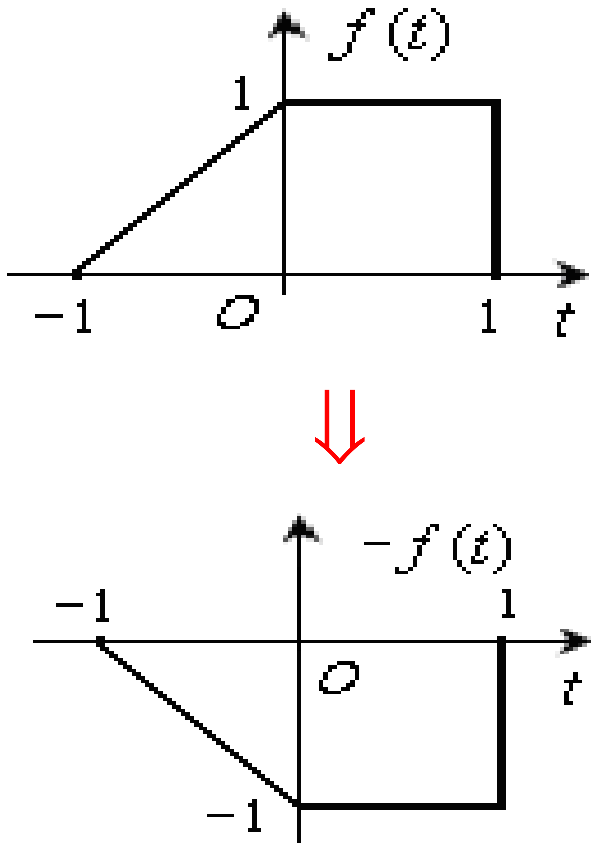
$f(2t)$ 是磁带以二倍速度加快播放的信号;

$f(\frac{1}{2}t)$ 表示磁带放音速度降至一半的信号。

1.3.4 倒相

信号的倒相（也称反相），就是将信号 $f(t)$ 的波形以横轴为轴翻转180度

将 $f(t)$ 以横轴为轴对折，即得倒相信号 $-f(t)$。信号进行倒相时，横轴上的值不变，仅是纵轴上的值改变了正负号，正值变成了负值，负值变成了正值。



信号的倒相用倒相器实现

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{倒相器}} \longrightarrow y(t) = -f(t)$$

提纲

1.1 信号的定义与分类
1.2 典型连续信号及其时域特性
1.3 信号的时域变换
1.4 信号的时域运算
1.5 奇异信号
1.6 系统的定义与描述
1.7 系统的性质与分类

1.4 信号的时域运算

1.4.1 相加

1.4.2 相乘

1.4.3 数乘

1.4.4 微分

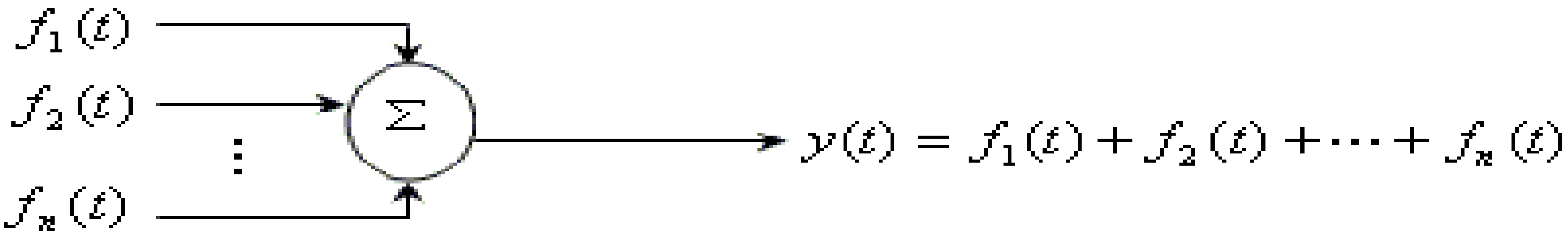
1.4.5 积分

1.4.1 相加

信号的相加是指若干个信号之和，其数学表达式为

$$y(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t) \quad n = 1,2,\cdots$$

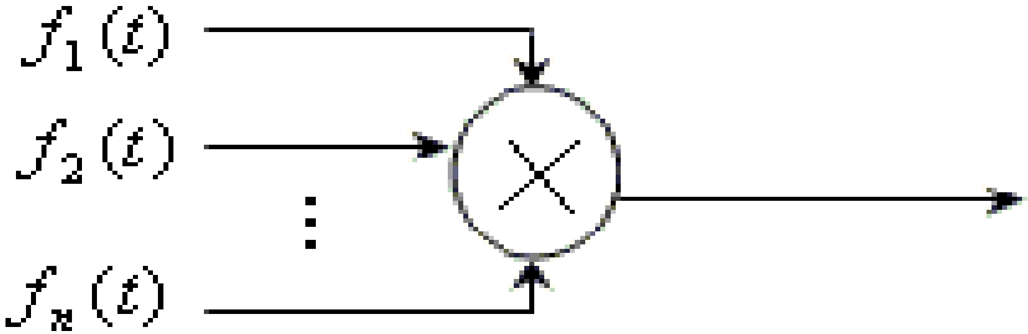
信号在时域相加运算用加法器实现



信号在时域中相加时，横轴(t轴)的值不变，仅是与t轴的值对应的纵坐标值相加。

1.4.2 相乘

信号的相乘是指若干个信号之积。信号在时域相乘运算用乘法器（调制器）实现 。信号处理系统中的抽样器和调制器，都是实现信号相乘运算功能的系统。



$$y(t) = f_1(t) \bullet f_2(t) \bullet \cdots \bullet f_N(t)$$

信号在时域中相乘时，横轴(t轴)的值不变，仅是与t轴的值对应的纵坐标值相乘。

1.4.3 数乘

信号的数乘是指信号 $f(t)$ 乘以常数 a 的运算，其数学表达式为

$$y(t) = af(t)$$

信号的时域数乘运算用数乘器实现，也称比例器或标量乘法器。

$$f(t) \longrightarrow \boxed{a} \longrightarrow y(t) = af(t)$$

信号的时域数乘运算，实质上就是在对应的横坐标值上将纵坐标的值扩大倍a（a>1时为扩大：0<a<1时为缩小）。

1.4.4 微分

信号的**微分**是指信号对时间的导数，其数学表达式为

$$y(t)=\frac{df(t)}{dt}=f'(t)$$

信号的时域微分运算用微分器实现

$$f(t)\longrightarrow\boxed{\frac{d}{dt}}\longrightarrow y(t)=\frac{df(t)}{dt}=f'(t)$$

需要注意的是，当 $f(t)$ 中含有间断点时。则 $f'(t)$ 在间断点上将有冲激函数存在，其冲激强度为间断点处函数 $f(t)$ 跳变的幅度值。

1.4.5 积分

信号的积分是指信号在区间 $(-\infty, t)$ 上的积分，其数学表达式为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

信号的时域积分运算用积分器实现

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

提纲

1.5 奇异信号

奇异信号（奇异函数）是一类特殊的连续时间信号，其函数本身有不连续点（跳变点），或其函数的导数与积分有不连续点。
它们是从实际信号抽象出来的理想化的信号，在信号与系统分析中占有重要的地位。

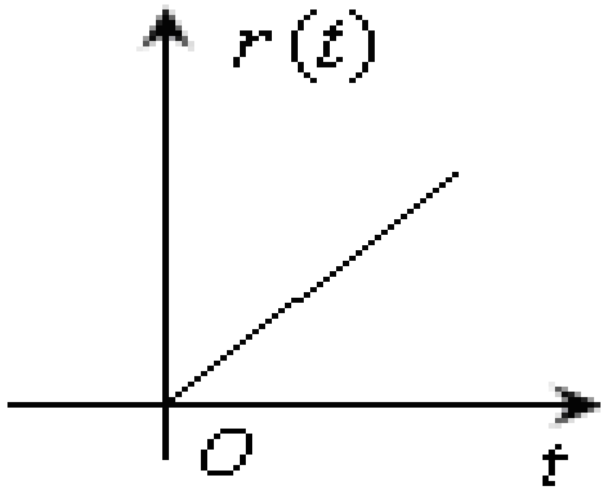
1.5.1 单位斜变信号
1.5.2 单位阶跃信号
1.5.3 单位门信号
1.5.4 单位冲激信号
1.5.5 单位冲激偶信号
1.5.6 符号信号

1.5.1 单位斜变信号

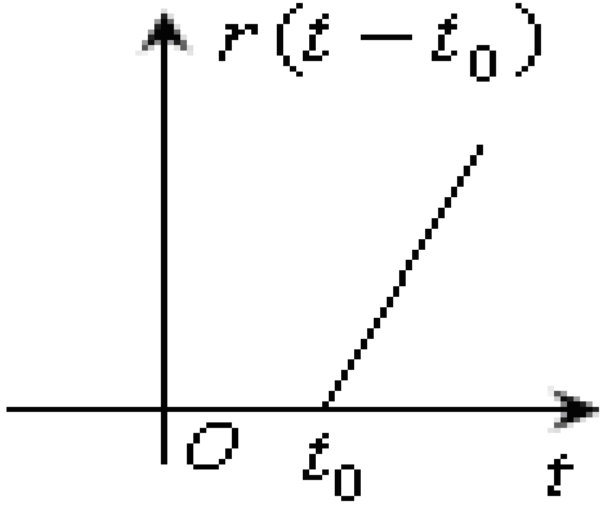
单位斜变信号用 $r(t)$ 表示，其数学表达式为

$$r(t)=\begin{cases} t & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$r(t-t_0)=\begin{cases} t-t_0 & t\ge t_0 \\ 0 & t<t_0 \end{cases}$$



单位斜变信号

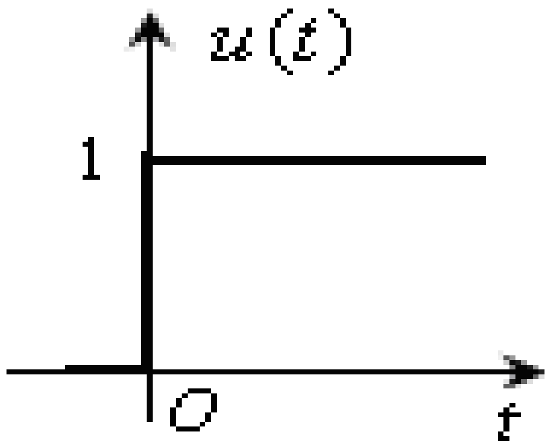


有延时的单位斜变信号

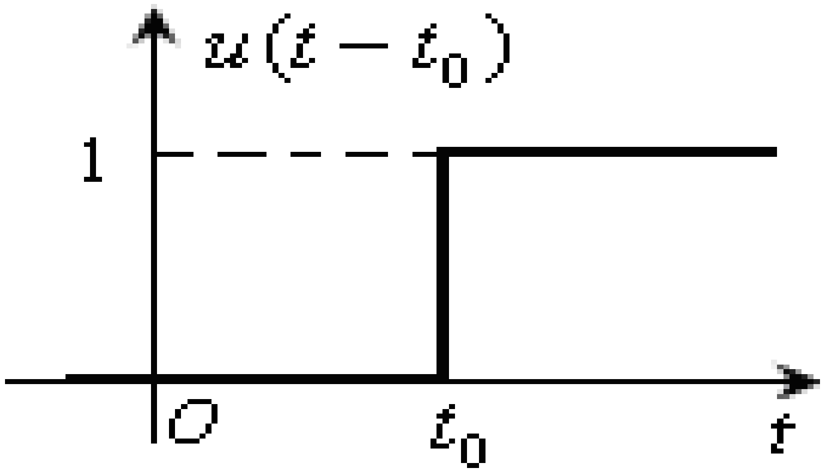
1.5.2 单位阶跃信号

单位阶跃信号用 $u(t)$ 表示，其数学表达式为

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}\qquad u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$



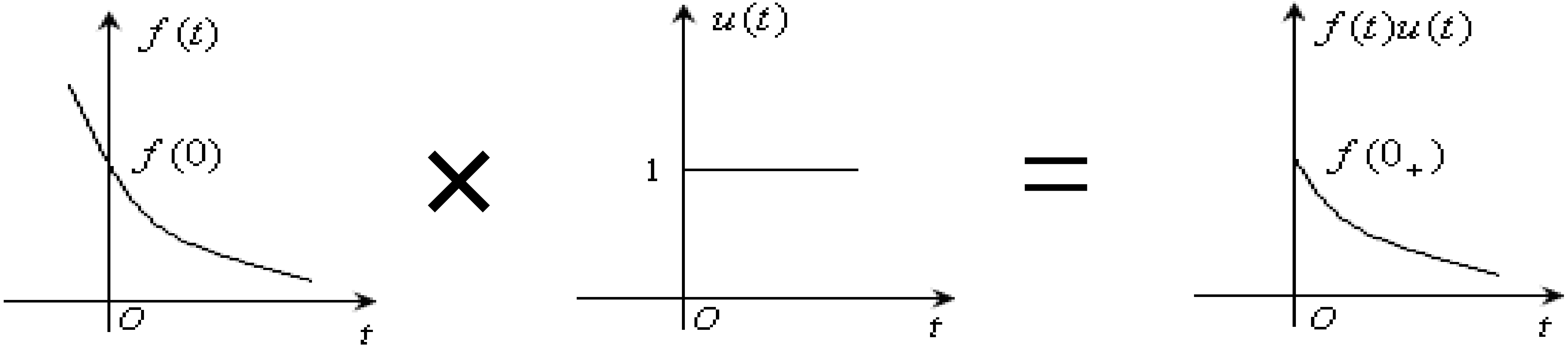
单位阶跃信号



有延时的单位阶跃信号

单位阶跃信号的性质1

单位阶跃信号 $u(t)$ 具有使任意非因果信号 $f(t)$ 变为因果信号的功能（即单边性），即将 $f(t)$ 乘以 $u(t)$，所得 $f(t)u(t)$ 即成为因果信号。

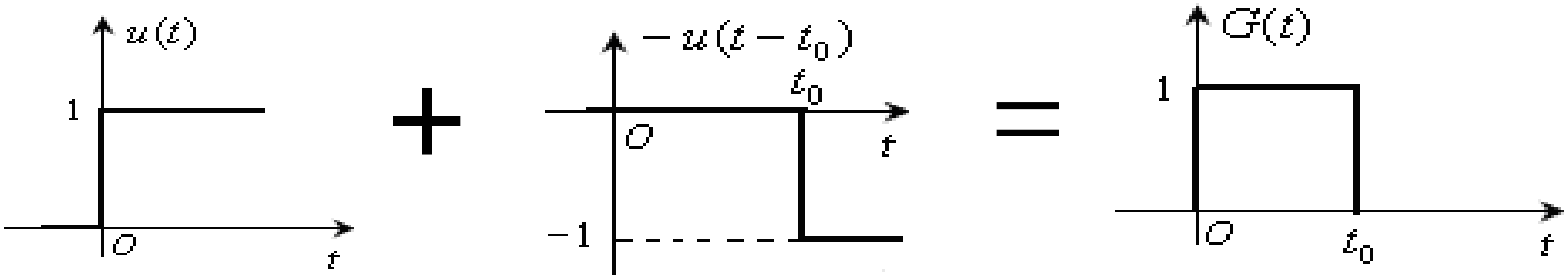


阶跃信号的单边性

单位阶跃信号的性质2

利用阶跃信号与延迟阶跃信号，将任意的矩形脉冲信号表示为

$$G(t) = u(t) - u(t - t_0)$$



矩形脉冲与阶跃信号的关系

单位阶跃信号的性质3

阶跃信号与斜变信号之间的关系为

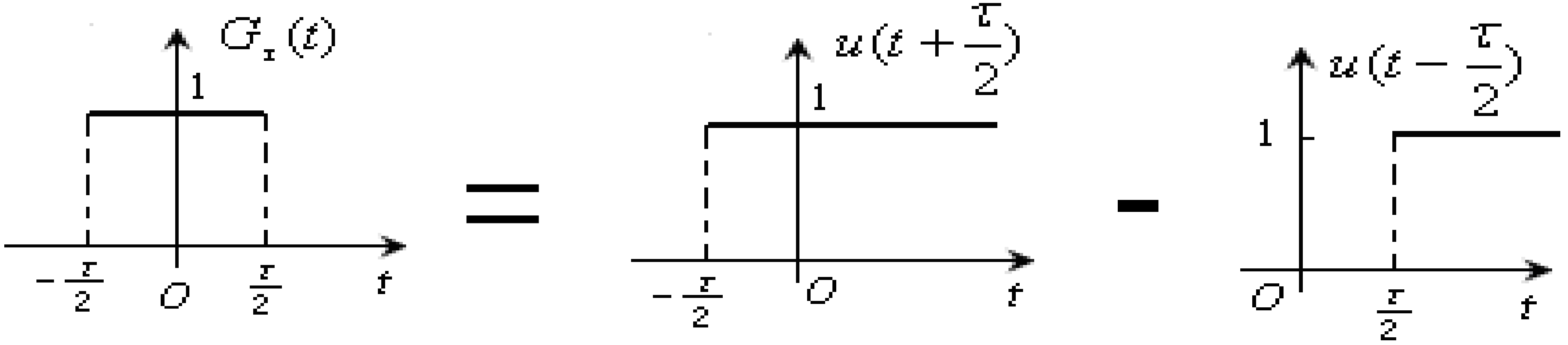
$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

1.5.3 单位门信号

单位门信号是指门宽为 τ 、门高为1的信号，常用符号 $G_\tau(t)$ 表示，其数学表达式为

$$G_\tau(t)=\begin{cases}1 & -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}\\ 0 & t>\frac{\tau}{2},t<-\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$G_\tau(t)=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})$$



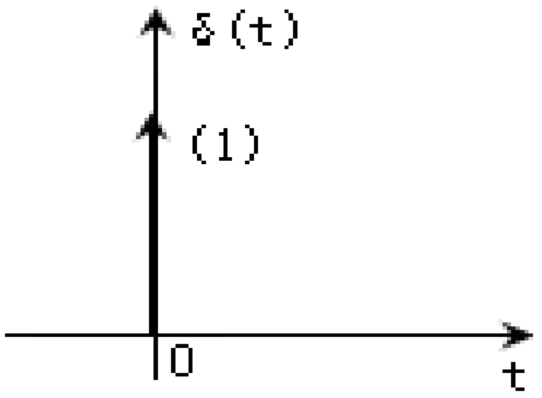
单位门信号

1.5.4 单位冲激信号

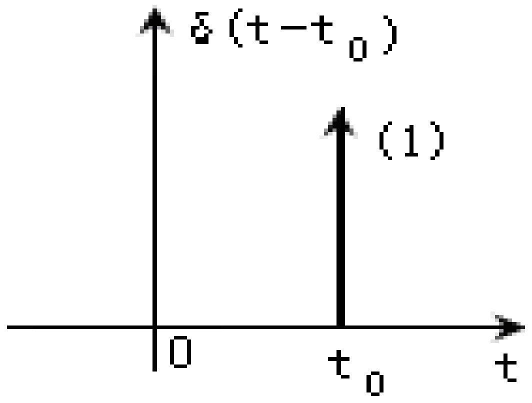
1. 单位冲激信号的定义

定义方法1（狄拉克 定义）：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \\ \delta(t-t_0) = 0, t \neq t_0 \end{cases}$$



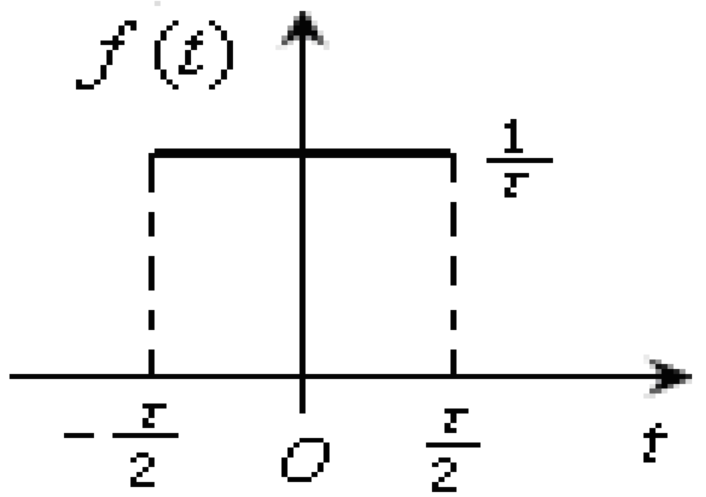
定义方法2（从某些函数的极限来定义）：

单位冲激信号**可理解**为门宽为 τ、门高为 $\frac{1}{\tau}$ 的门信号在 $\tau \to 0$ 时的极限，即

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} f(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

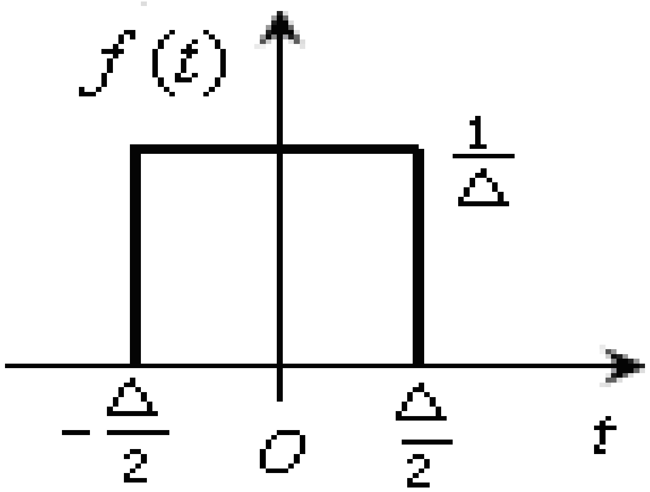
且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau \to 0} f(t) dt = \lim_{\tau \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$



单位冲激信号也可理解为宽为 Δ 、高为 $\frac{1}{\Delta}$ 的矩形脉冲在保持矩形脉冲的面积为1，而使脉宽 Δ 趋于零时，脉高 $\frac{1}{\Delta}$ 必为无穷大，此时的极限即为冲激信号，即

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[u(t+\frac{\Delta}{2})-u(t-\frac{\Delta}{2})]$$



2. 单位冲激信号的性质

(1) 筛选特性

如果信号 $f(t)$是一个在$t = t_0$ 处连续的普通函数，则有

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

推广：如果信号 $f(t)$是一个在 $t = 0$ 处连续的普通函数，则有

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

(2) 抽样特性

如果信号 $f(t)$是一个在 $t = t_0$ 处连续的普通函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

推广：如果信号 $f(t)$ 是一个在 $t = 0$ 处连续的普通函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

(3) 奇偶特性：$\delta(t)$ 为偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$

推广：$$\delta(t-t_0)=\delta[-(t-t_0)]=\delta(t_0-t)$$

(4) 尺度特性：$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)(a\neq 0)$$

推广：

① $$\delta(at-t_0)=\delta[a(t-\frac{t_0}{a})]=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$$

② $$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(at)dt=\frac{1}{|a|}f(0)$$

③ $$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(at-t_0)dt=\frac{1}{|a|}f(\frac{t_0}{a})$$

(5) $\delta(t)$ 与 $u(t)$ 的关系

$\delta(t)$与 $u(t)$ 互为微分与积分的关系，即

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \qquad \delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

推广：

① $$u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau$$

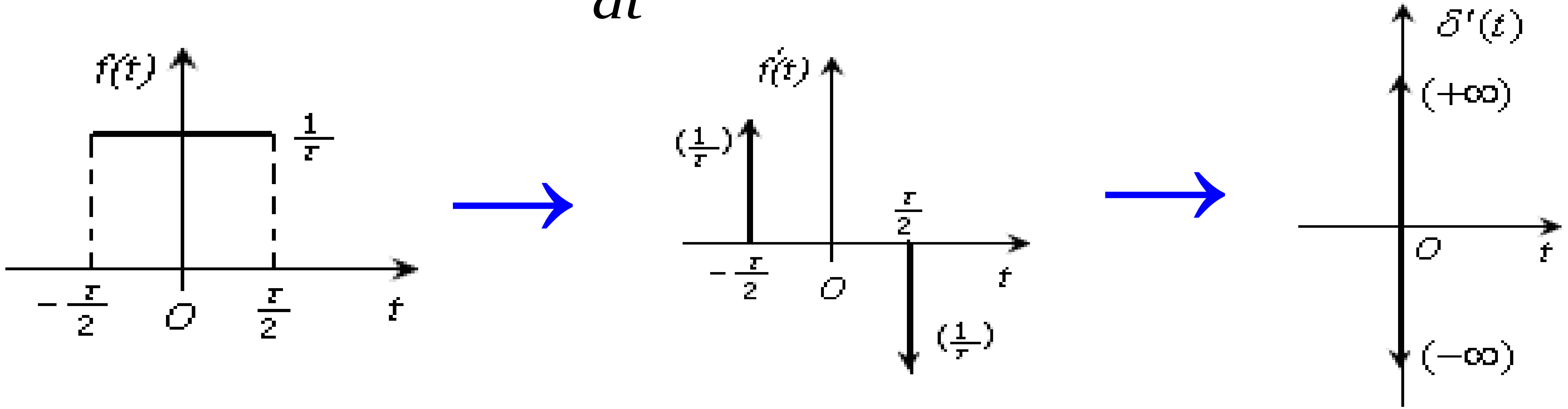
② $$\delta(t-t_0)=\frac{du(t-t_0)}{dt}$$

1.5.5 单位冲激偶信号

1. 单位冲激偶信号的定义

单位冲激信号 $\delta(t)$ 的时间导数即为单位冲激偶信号，用 $\delta'(t)$ 表示。即：

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



冲激偶信号的极限模型

2. 冲激偶信号的性质

(1) 筛选特性

$$f(t)\delta'(t-t_0)=-f'(t_0)\delta(t-t_0)+f(t_0)\delta'(t-t_0)$$

(2) 抽样特性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$$

(3) 尺度特性

$$\delta'(at)=\frac{1}{a|a|}\delta'(t)(a\neq 0)$$

(4) 奇偶特性

$$\delta'(-t)=-\delta'(t)$$

(5) 冲激偶信号与冲激信号的关系

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)d\tau \qquad \delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

推广：

① $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$

② $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$

③ $\delta'(t-t_0) = -\delta'(t_0-t)$

④ $f(t)\delta'(t) = -f'(0)\delta(t) + f(0)\delta'(t)$

1.5.6 符号信号

符号信号用 sgn(t) 表示，其函数定义式为

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

或用阶跃信号表示为

$$\operatorname{sgn}(t)=u(t)-u(-t)=2u(t)-1$$

符号信号也称正负号信号。