高等数学–微积分(一)

第三章·导数、微分、边际与弹性

2020 年 12 月 23 日

■ 统计与数学学院　■ 王官杰

第一节 导数的概念

第一节	导数的概念
1.1	导数的引例
1.2	导数的定义
1.3	导数的几何意义
1.4	函数可导性与连续性的关系
1.5	小结　思考

例 1　物体作变速直线运动，经过的路程s是时刻t的函数，$s = f(t)$。求在t_0时刻物体的瞬时速度。

- 从t_0到$t_0 + \Delta t$的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

- 在t_0时刻的瞬时速度为

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

例 2　求曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线斜率。

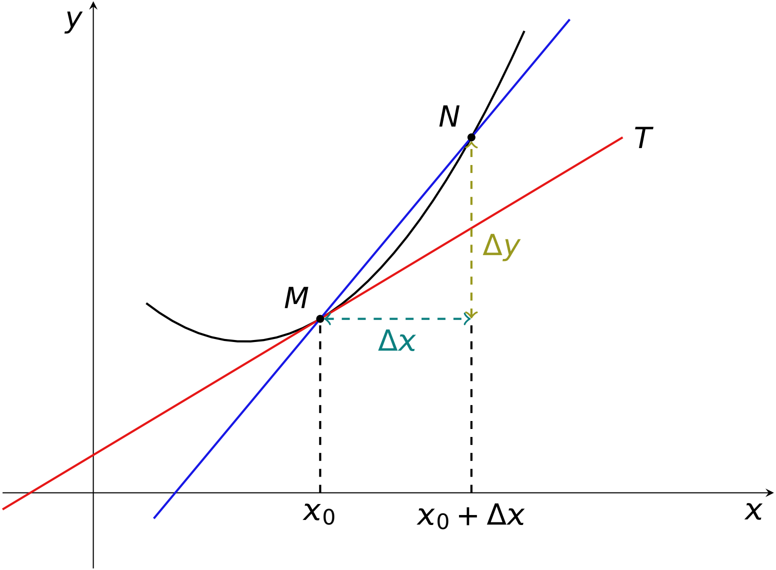
- 设N点在M点附近，则割线MN的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

- 让N点往M点跑，则切线MT的斜率为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数引例：切线斜率



第一节	导数的概念
1.1	导数的引例
1.2	导数的定义
1.3	导数的几何意义
1.4	函数可导性与连续性的关系
1.5	小结　思考

定义　设$y=f(x)$在x_0的某邻域有定义。若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为$f(x)$在x_0处的导数（或微商）。记为$f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，或$\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}$。

注记　导数$f'(x_0)$反映了$f(x)$在点x_0处的变化快慢，因此 $f'(x_0)$ 又称为$f(x)$在x_0 点的变化率.

导数的几种形式

- $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ （定义）
- $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ （令$h=\Delta x$）
- $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ （令$x=x_0+h$）

导数的定义

如果$f(x)$在x_0处有导数，则称函数$f(x)$在x_0点可导．否则，称$f(x)$在x_0
可导。

对于点 x_0, 如果当 $\Delta x \to 0$ 时比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$, 此时函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处是不可导的, 但是为了方便，也往往说函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处的导数为无穷大, 并记作 $f'(x_0) = \infty$.

如果 $f(x)$ 在区间 I 内每一点都可导，则称$f(x)$在区间 I 内可导。

如果$f(x)$在区间 I 内可导，则每个 $x_0 \in I$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 I 内的导函数（简称导数），记为 $f'(x)$，或y'，或$\dfrac{dy}{dx}$，或 $\dfrac{d}{dx}f(x)$。此时有

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

导函数的几种形式

- $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$（定义）
- $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$（令$h = \Delta x$）

在上式中虽然 x 可以取区间 I 内的任何数值，但在取极限的过程中, x 是常量，Δx 是变量.

求导数的步骤

1. 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;
2. 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;
3. 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 3　求函数 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导数.

解　$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C - C}{h} = 0$。

所以

$$(C)' = 0.$$

例 4　求幂函数$f(x)=x^n$的导数。

解　由条件得

$$
\begin{aligned}
\left(x^n\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right] \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

更一般地，对于任意给定的实数 μ,

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

例 5 求函数 $f(x)=\cos x$的导数。

解 由条件得

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{2+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\\
&= -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x,\ (\sin x)'=\cos x.}$$

求导数举例

例 6　求函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

解　易知

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta} \\
&= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} \\
&= a^x \ln a
\end{aligned}
$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a, \ (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.}$$

例 7 求函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 由条件知

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$$

利用导数的定义，可以得到

$$(C)' = 0 \tag{1}$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1} \tag{2}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{3}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{4}$$

利用导数的定义，可以得到

$$
\boxed{
\begin{aligned}
(a^x)' &= a^x \cdot \ln a, & (e^x)' &= e^x && (5)\\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}, & (\ln x)' &= \frac{1}{x}. && (6)
\end{aligned}
}
$$

分段函数的导数

对于分段函数，我们有（假定$g(x)$和$h(x)$总可导）：

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x \le a \\ h(x), & x > a \end{cases} \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases} g'(x), & x < a \\ h'(x), & x > a \end{cases}$$

注记　$f'(a)$需要单独研究：未必有$f'(a)=g'(a)$。

左导数和右导数

定义 设$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0]$上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为$f(x)$ 在x_0 处的左导数，记为$f'_-(x_0)$.

定义 设$f(x)$在$[x_0, x_0+\delta)$上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为$f(x)$ 在x_0 处的右导数，记为$f'_+(x_0)$.

导数与左右导数

性质 导数存在$\Longleftrightarrow$左导数和右导数都存在且相等。

$$导数：f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$左导数：f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$右导数：f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

分段函数的导数

性质 假定$g(x)$和$h(x)$总可导，分段函数

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x \le a \\ h(x), & x > a \end{cases}.$$

如果$f(x)$在$x=a$点连续，则有

$$f'_-(a)=g'(a), \qquad f'_+(a)=h'(a).$$

例 8 判断函数$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$在点$x=-1$的连续性与可导性。……………………………不连续且不可导

例 9 判断函数$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$在点$x=1$处的连续性与可导性。……………………………连续但不可导

例 10 判断函数$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$在点$x=0$处的连续性与可导性。……………………………连续且可导

第一节	导数的概念
1.1	导数的引例
1.2	导数的定义
1.3	导数的几何意义
1.4	函数可导性与连续性的关系
1.5	小结　思考

函数$f(x)$在x_0处的导数$f'(x_0)$，就是曲线$y=f(x)$在点(x_0,y_0) 处的切线斜率。

从而点(x_0,y_0)处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

例 11　求$f(x)=x^2$在点$(1,1)$处的切线方程和法线方程.

练习　求$f(x)=\dfrac{1}{x}$在点$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$处的切线方程和法线方程.

答案　切线方程为$x+4y-4=0$。

法线方程为$8x-2y-15=0$。

第一节	导数的概念
1.1	导数的引例
1.2	导数的定义
1.3	导数的几何意义
1.4	函数可导性与连续性的关系
1.5	小结　思考

定理 $f(x)$在x_0点可导，则$f(x)$在x_0点连续。

证明.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0.$$

即 $\lim\limits_{\Delta x_0\to 0}f(x+\Delta x)=f(x_0)$. 所以函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

注意：$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\not\Rightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点可导.

例 12 $f(x) = |x|$ 在$x = 0$处连续但不可导.

推论 $f(x)$在x_0点不连续$\Longrightarrow f(x)$在x_0点不可导。

例 13 判断$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$，在点$x = -1$处的连续性与可导性。

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，但

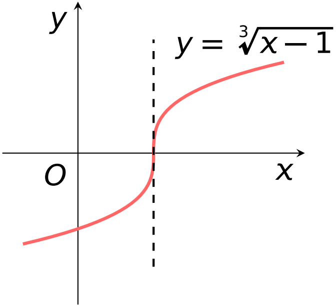
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$$

称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有无穷导数(不可导).

例如,

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

在 $x=1$ 处不可导.

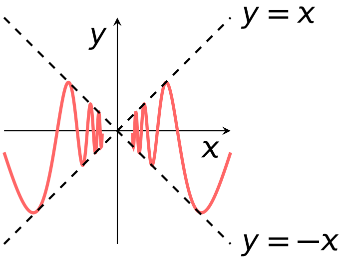


函数 $f(x)$ 在连续点的左右导数都不存在 (指摆动不定)，则 x_0 点不可导。

例如,

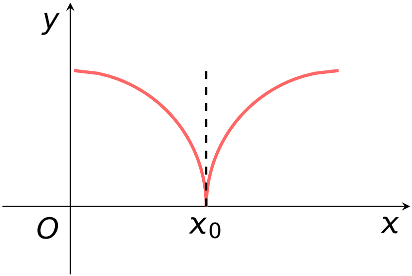
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

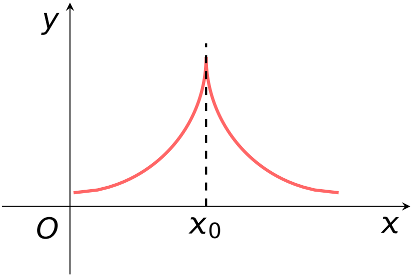
在 $x=0$ 处不可导.



可导与连续的关系

若 $f'(x_0) = \infty$, 且在点 x_0 的两个单侧导数符号相反，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的尖点 (不可导点).





第一节	导数的概念
1.1	导数的引例
1.2	导数的定义
1.3	导数的几何意义
1.4	函数可导性与连续性的关系
1.5	小结　思考

小结

1. 导数的实质: 增量比的极限,即瞬时变化率;
2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$
3. 导数的几何意义: 切线的斜率;
4. 可导的函数一定连续，但连续的函数不一定可导;
5. 求导数最基本的方法: 由定义求导数.
6. 判断可导性 $\begin{cases} \text{不连续,一定不可导.} \\ \text{连续} \begin{cases} \text{直接用定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等} \end{cases} \end{cases}$

思考题

思考　函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系?

解　由导数的定义知， $f'(x_0)$ 是一个具体的数值， $f'(x)$ 是由于 $f(x)$ 在某区间 I 上每一点都可导而定义在I上的一个新函数，即 $\forall x \in I$, 有唯一值 $f'(x)$ 与之对应，所以两者的区别是：一个是数值，另一个是函数. 两者的联系是：在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 即是导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值.