第一章　不定积分

一、单项选择题

1. 设 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数, 则下列各式中正确的是 (B) .

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x=g(x)+C$;　　(B) $\int g(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$;

(C) $\int f'(x)\mathrm{d}x=g(x)+C$;　　(D) $\int g'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

2. 下列各式中等于 $f(x)$ 的是 (D) .

(A) $\int \mathrm{d}f(x)$;　　(B) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x$;　　(C) $\int f'(x)\mathrm{d}x$;　　(D) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'$.

3. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x^2+1}+C$ 则 $\int xf\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x=$ (D) .

(A) $x\sqrt{2x^2+1}+C$;　　(B) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C$;

(C) $\frac{1}{4}\sqrt{2x^2+1}+C$;　　(D) $\frac{1}{4}\sqrt{2(2x+1)^2+1}+C$.

4. 函数 $\cos\frac{\pi}{2}x$ 的一个原函数是 (A) .

(A) $\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x$;　　(B) $\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$;　　(C) $-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x$;　　(D) $-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$.

5. $\int 3^x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=$ (D) .

(A) $(3\mathrm{e})^x+C$;　　(B) $\frac{1}{3}(3\mathrm{e})^x+C$;　　(C) $3\mathrm{e}^x+C$;　　(D) $\frac{(3\mathrm{e})^x}{1+\ln 3}+C$.

6. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}}=$ (B) .

(A) $\sqrt{1-2x}+C$;　　(B) $-\sqrt{1-2x}+C$;　　(C) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x}+C$;　　(D) $-2\sqrt{1-2x}+C$.

7. 设 $\displaystyle\int\frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln(1+x)+C$, 则 $\displaystyle\int\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=$ (D) .

(A) $\frac{1}{\ln(1+x)}+C$;　　(B) $\frac{\ln(1+x)}{x}+C$;　　(C) $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C$;　　(D) $x+\frac{x^2}{2}+C$.

8. 不定积分 $\displaystyle\int\sin^2\frac{x}{2}=$ (C) .

(A) $2\cos^2\dfrac{x}{2}+C$; (B) $x+\sin x+C$; (C) $\dfrac{1}{2}(x-\sin x)+C$; (D) $1-2\sin^2\dfrac{x}{2}+C$.

9. $\displaystyle\int\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=$ (B).

(A) $\dfrac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+C$; (B) $-\dfrac{1}{\arcsin x}+C$;

(C) $\pm\dfrac{1}{\arcsin x}+C$; (D) $-\dfrac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+C$.

10. $\displaystyle\int x^5\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x=$ (B).

(A) $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x(x-1)+C$; (B) $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3}\left(x^3-1\right)+C$;

(C) $\mathrm{e}^{x^3}\left(x^3-1\right)+C$; (D) $\mathrm{e}^{x^3}\left(x^3+1\right)+C$.

11. $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$, 则 $f'(x)=$ (C).

(A) $1/x$; (B) $x\ln x-x+C$; (C) $-1/x^2$; (D) e^x.

12. $x^x(1+\ln x)$ 的原函数是 (B).

(A) $\dfrac{1}{1+x}x^{x+1}+\ln x+C$; (B) x^x+C;

(C) $x\ln x+C$; (D) $\dfrac{1}{2}x^x\ln x+C$.

13. 当 $x<-1$ 时, $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=$ (B).

(A) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$; (B) $\arcsin\dfrac{1}{x}+C$; (C) $-\arcsin\dfrac{1}{x}+C$; (D) $\pm\arcsin\dfrac{1}{x}+C$.

14. $\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x=$ (B).

(A) $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x}{2}\cos x+\sin 2x\right)+C$; (B) $\dfrac{1-2x^2}{4}\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x+C$;

(C) $\dfrac{1-x^2}{4}(\cos 2x+\sin 2x)+C$; (D) $\dfrac{1-x^2}{4}\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x+C$.

15. $\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x=$ (C).

(A) $x(\arcsin x)^2+C$;

(B) $x(\arcsin x)^2+\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+C$;

(C) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

(D) $x(\arcsin x)^2+\dfrac{2\arcsin x}{3(1-x^2)^3}+C$.

16. $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=$ (C).

(A) $\tan x-\sec x+C$;

(B) $\cot x-\csc x+C$;

(C) $\tan\frac{x}{2}+C$;

(D) $\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

17. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=$ (B) .

(A) $\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C$;

(B) $-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C$;

(C) $\arctan(-\cos 2x)+C$;

(D) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1}\right|+C$.

18. 设 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$, 则 $I=$ (C) .

(A) $-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})+C$;

(B) $2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})+C$;

(C) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$;

(D) $-2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

19. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x=$ (B) .

(A) $x-\cos x-C$;

(B) $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$;

(C) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;

(D) $\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

20. $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=$ (D) .

(A) $\frac{1}{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$;

(B) $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{4(1+x^2)^2}+C$;

(C) $-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$;

(D) $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2(1+x^2)}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

21. 将 $\frac{x+1}{x^2(x^2+1)(x^2+x+1)}$ 分解为部分分式, 下列做法中, 正确的做法是设它为 (D) .

(A) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{1+x^2}+\frac{c}{x^2+x+1}$;

(B) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{1+x^2}+\frac{c_1x+c_2}{x^2-x+1}$;

(C) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{1+x^2}+\frac{d}{x^2+x+1}$;

(D) $\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{b_1x+b_2}{1+x^2}+\frac{c_1x+c_2}{x^2+x+1}$

22. $\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+1}=$ (B) .

(A) $\ln|\sin^2 x+1|+C$;

(B) $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$;

(C) $x-\arctan(\sqrt{2}x)+C$;

(D) $x-\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

23. $I=\int e^{2x}\sin 3x\,dx=$ (D) .

(A) $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x-2\cos 2x)+C$; (B) $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 2x)+C$;

(C) $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C$; (D) $\frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C$.

24. 已知函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$, 且 $F(\frac{\pi}{4})=0$, 则 $F(x)=$ (B) .

(A) $\ln\left|1+\cos^2 x\right|-\ln\frac{3}{2}$;

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$;

(C) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\sin x}{\sqrt{2}+\sin x}\right|$;

(D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\sin x}{\sqrt{2}+\sin x}\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|3-2\sqrt{2}\right|$.

25. 设 $f(x)\neq 0$, 且有连续的二阶导数, 则 $\int\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{\left(f'(x)\right)^2}{(f(x))^2}\right\}dx=$ (A) .

(A) $\frac{f'(x)}{f(x)}+C$; (B) $\frac{f(x)}{f'(x)}+C$; (C) $f(x)f'(x)+C$; (D) $\left[f'(x)\right]^2+C$.

二、填空题

1. 设 $f(x)dx=F(x)+C$, 则 $\int\sin x f(\cos x)dx$ ____$-F(\cos x)+C$____.

2. 设 $\int f(x)dx=F(x)+C$, 则 $\int f(\sin x)\cos x\,dx=$ ____$F(\sin x)+C$____.

3. 设 $\int f(x)dx=F(x)+C$, 则 $\int xf'(x)dx=$ ____$xf(x)-F(x)+C$____.

4. 如果等式 $\int f(x)e^{-\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}+C$ 成立, 则函数 $f(x)=$ ____$\frac{1}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$____.

5. 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$, 则 $\int\frac{1}{f(x)}dx=$ ____$-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+C$____.

6. 若 $\int f(x)dx=F(x)+C$, 则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$ ____$-F(e^{-x})+C$____.

7. $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx=$ ____$x+\cos x+C$____.

8. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int xf(x)dx=$ ____$(x+1)e^{-x}+C$____.

9. 若 $f(x)=e^{-x}$, 则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=$ ____$\frac{1}{x}+C$____.

10. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$, 则 $\int x f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x =$ $\underline{-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2 + C}$.

11. 如果 $\dfrac{2}{1+x^2} f(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]^2$, 且 $f(0)=0$, 则 $f(x) =$ $\underline{\arctan x}$.

12. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x =$ $\underline{\dfrac{2}{9}\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}} + C}$.

13. 若函数 $f\left(x^2-1\right) = \ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 则 $\int \varphi(x)\mathrm{d}x =$ $\underline{x + 2\ln|x-1| + C}$.

14. 设 $f'(\ln x) = 1 + x\ (x>0)$, 则 $f(x) =$ $\underline{x + \mathrm{e}^x + C}$.

15. $\displaystyle\int \frac{f(x) - x f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x =$ $\underline{\dfrac{x}{f(x)} + C}$.

16. $f'(\cos x + 2) = \sin^2 x + \tan^2 x$, 则 $f(x) =$ $\underline{\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{3}(x-2)^3 + C}$.

17. 设 $f(x)$ 连续可导, 则 $\int f'(2x)\mathrm{d}x =$ $\underline{\left(\displaystyle\int f'(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f'(2x)\mathrm{d}(2x) = \right)\frac{1}{2} f(2x) + C}$.

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} =$ $\underline{\ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + C}$, 其中 a 是正的常数.

19. 已知 $\dfrac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\displaystyle\int f(x)\cdot\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x =$ $\underline{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)^2 + C}$.

20. 已知曲线上任一点的二阶导数 $y' = 6x$, 且在曲线上 $(0,-2)$ 处的切线为 $2x - 3y = 6$, 则这条曲线方程为 $\underline{3x^3 + 2x - 3y - 6 = 0}$.

三、计算题

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x - 6}$

解. 原式 $= \dfrac{1}{5}\ln\dfrac{x-3}{x+2} + C$

2. $\displaystyle\int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x\,\mathrm{d}x$

解. 原式 $= \dfrac{1}{11}\tan^{11} x + C$

3. $\displaystyle\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x$

解. 原式$=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

解. 原式$=-\frac{1}{\arcsin x}+C$

5. $\int x\cdot\sqrt[4]{x+9}\,\mathrm{d}x$

解. 原式$=\frac{4}{9}\sqrt[4]{(x+9)^9}-\frac{36}{5}\sqrt[4]{(x+9)^5}+C$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

解. 原式$=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

7. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$

解. 原式$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$

解. 原式$=\ln\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right)+C$

9. $\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}dx$

解. 原式$=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+2\right)+C$

10. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$

解. 原式$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+\arctan(x+1)+C$

11. $\int \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$

解. 原式$=x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2-1}+C$

12. 求 $\int \frac{3^x5^x}{(25)^x-9^x}dx$

解. 由条件得：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{3^x 5^x}{5^{2x}-3^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\ln\frac{5}{3}} \int \frac{d\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}-1} = \frac{1}{2\ln\frac{5}{3}} \ln\left|\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{5}{3}\right)^x+1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2(\ln 5-\ln 3)} \ln\left|\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}\right| + C.
\end{aligned}$$

13. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$

解. 由条件易知

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2}$$

令 $\mathrm{e}^x = t$，则 $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^2} \\
&= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln|t| + \frac{1}{1+t} - \ln|1+t| + C \\
&= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + C.
\end{aligned}$$

14. 求 $\displaystyle\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}\,dx.$

解. 由条件易知：原式 $= \dfrac{1}{5}\displaystyle\int \frac{x^{10}\,\mathrm{d}x^5}{(x^5+1)^4}$, 令 $u = x^5$, 则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{5}\int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u)^4} \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{(u+1)(u-1)+1}{(1+u)^4}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{5}\int [\frac{u-1}{(1+u)^3}+\frac{1}{(1+u)^4}]\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{5}\int \left[\frac{1}{(1+u)^2}-\frac{2}{(1+u)^3}+\frac{1}{(1+u)^4}\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}-\frac{1}{3(1+u)^3}\right]+C \\
&= \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{1+x^5}+\frac{1}{(1+x^5)^2}-\frac{1}{3(1+x^5)^3}\right]+C.
\end{aligned}
$$

15. 求 $\displaystyle\int \frac{x^2\cdot\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

解. 令 $x=\cos t$，则 $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= -\int t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{t^2}{4}-\frac{1}{2}\int t\cos 2t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{t^2}{4}-\frac{1}{4}\int t\,d(\sin 2t) \\
&= -\frac{t^2}{4}-\frac{1}{4}\left[t\sin 2t-\int \sin 2t\,\mathrm{d}t\right] \\
&= -\frac{t^2}{4}-\frac{1}{4}t\sin 2t-\frac{1}{8}\cos 2t+C_1 \\
&= -\frac{1}{4}(\arccos x)^2-\frac{1}{2}\arccos x\cdot x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{8}\left(2x^2-1\right)+C_1 \\
&= -\frac{1}{4}(\arccos x)^2-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arccos x-\frac{1}{4}x^2+C
\end{aligned}
$$

16. 计算积分 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

解. 原式 $=\displaystyle\int \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$, 令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$
\text{原式}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C.
$$

17. 计算积分 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.

解. 分母有理化，则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{x-(x+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \left[x\sqrt{x+1}-\sqrt{x}(x+1)\right]\mathrm{d}x \\
&= -\int (x+1-1)\sqrt{x+1}\,d(x+1)+\int(\sqrt{x}+x\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+C
\end{aligned}$$

18. 求不定积分 $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-12}}$.

解. 易知 $\sqrt{x^2+4x-12}=\sqrt{(x+2)^2-4^2}$, 令 $x+2=4\sec t$, 则 $\mathrm{d}x=4\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t$, 于是我们有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(4\sec t-2)}{4\sec t\cdot 4\tan t}\cdot 4\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \sec t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t+\tan t|-\frac{1}{2}t+C_1 \\
&= \ln\left|\frac{x+2}{4}+\frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{4}\right|-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{x+2}+C_1 \\
&= \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-12}\right|-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{x+2}+C.
\end{aligned}$$

19. 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}$.

解. 令 $a=A\cos\varphi, b=A\sin\varphi$, 其中 $A=\sqrt{a^2+b^2}$, 则

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b},$$

于是

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x}\\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\varphi)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{\varphi}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{\varphi}{2}}\right|+C\\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{b\tan\frac{x}{2}-a+\sqrt{a^2+b^2}}{b-\tan\frac{x}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\right|+C.
\end{aligned}$$

20. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$

解. 原式$=\ln|\csc 2x-\cot 2x|-\dfrac{1}{2}\sin^{-2}x+C=\ln|\tan x|-\dfrac{1}{2}\csc^2 x+C$

21. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$

解.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{x+1-2\sqrt{x+1}+1}{(x+1)-1}\mathrm{d}x\\
&= \int\left(1+\frac{2}{x}-2\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= x+2\ln|x|-2\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

令 $\sqrt{x+1}=u$，则 $x=u^2-1$，$\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$，于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x &= \int\frac{u}{u^2-1}2u\,\mathrm{d}u=2\int\frac{u^2-1+1}{u^2-1}\mathrm{d}u\\
&= 2u+\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}=2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C\\
&= 2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= x+2\ln|x|-4\sqrt{x+1}-2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C\\
&= x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C.
\end{aligned}$$

22. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$.

解. 原式$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$

23. 求 $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$

解. 令 $\sqrt{2x-1}=u, 2x-1=u^2, x=\frac{1+u^2}{2}$, 则 $\mathrm{d}x=u\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\int \frac{\left(\frac{1+u^2}{2}\right)^2-1}{u}\cdot u\,\mathrm{d}u\\
&=\int \left[\frac{\left(1+u^2\right)^2}{4}-1\right]\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{4}\int \left(1+2u^2+u^4-4\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\left(-3u+\frac{2}{3}u^3+\frac{u^5}{5}\right)+C\\
&=-\frac{3}{4}\sqrt{2x-1}+\frac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3}+\frac{1}{20}\sqrt{(2x-1)^5}+C
\end{aligned}$$

四、综合与应用题

1. 一质点作直线运动，已知其加速度为 $a=12t^2-3\sin t$. 如果 $v(0)=5$，$s(0)=-3$，求：

(1) 速度 v 与时间 t 的关系；

(2) 位移 s 与时间 t 的关系.

解. (1) 由条件知

$$v=\int a\,\mathrm{d}t=\int \left(12t^2-3\sin t\right)\mathrm{d}t=4t^3+3\cos t+C_1.$$

又 $v(0)=5$，得 $5=3+C_1$，$C_1=2$，故 $v=4t^3+3\cos t+2$.

(2) 由条件知

$$s=\int v\,dt=\int \left(4t^3+3\cos t+2\right)dt=t^4+3\sin t+2t+C_2.$$

又 $s(0)=-3$，得 $C_2=-3$，故 $s=t^4+3\sin t+2t-3$.

2. 一曲线通过点 $\left(\mathrm{e}^2,3\right)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解. 由条件知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x},\ y=\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C,$$

又曲线过点 $\left(\mathrm{e}^2,3\right)$，于是 $3=\ln \mathrm{e}^2+C$，$C=1$，故所求方程为

$$y=\ln|x|+1.$$

3. 导出计算积分 $I_n=\int\tan^n x\,\mathrm{d}x$ 的递推公式，其中 n 为自然数.

解. 由条件

$$\begin{aligned}I_n&=\int\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int\tan^{n-2}x\left(\sec^2 x-1\right)\mathrm{d}x\\&=\int\tan^{n-2}x\sec^2 x\,\mathrm{d}x-\int\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}x\\&=\int\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}\tan x-\int\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}(n\geq 2)\end{aligned}$$

$$I_1=\int\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C，I_0=\int\mathrm{d}x=x+C$$

4. 若 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\ln x}{x}$，问 $f(x)$ 与 $\frac{\ln x}{x}$ 间有什么关系？并求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解. 由条件知

$$f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x}+C.$$

于是

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1-2\ln x}{x}+C.$$

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2\left(x-y\right)=x^2$ 所确定的隐函数，试求 $\int\frac{dx}{y^2}$.

解. 设 $y=t\cdot x$，代入方程得 $t^2x(1-t)=1$，即 $x=\frac{1}{t^2(1-t)}$，则

$$\mathrm{d}x=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t,\ y=\frac{1}{t(1-t)},$$

于是

$$\int\frac{dx}{y^2}=\int t^2(1-t)^2\cdot\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}dt=\int\left(3-\frac{2}{t}\right)dt=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C.$$

6. 设 $f\left(\sin^2 x\right)=\frac{x}{\sin x}$，求 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解. 设 $\sin^2 x = t$，即 $\sin x = \sqrt{t}$，$x = \arcsin\sqrt{t}$，$f(t) = \dfrac{\arcsin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= -2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x} \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \sqrt{1-x}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

7. 设 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解. 设 $\ln x = t$，则 $x = \mathrm{e}^t$，$f(t) = \dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$, 于是

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \ln(1+e^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \int \left(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x \\ &= x - \left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\ln(1+\mathrm{e}^x) + C\end{aligned}$$

8. 设 $f\left(x^2-1\right) = \ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f\left[\varphi(x)\right] = \ln x$，求 $\int \varphi(x)\mathrm{d}x$.

解. 因为

$$f\left(x^2-1\right) = \ln\frac{\left(x^2-1\right)+1}{(x^2-1)-1},$$

从而有

$$f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}.$$

又

$$f\left[\varphi(x)\right] = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$$

于是

$$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

故

$$\int \varphi(x)\mathrm{d}x = x + 2\ln|x-1| + C.$$

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\le 0 \\ \sin x, x>0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的不定积分.

解. 由条件易得

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+C_1, & x\le 0; \\ -\cos x + C_2, & x>0. \end{cases}$$

由原函数的连续性得，$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x^3}{3}+C_1\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-\cos x + C_2)$，从而 $C_1 = C_2 - 1$，再令 $C_1 = C_2 - 1 = C$ 即得

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+C, & x\le 0, \\ 1-\cos x + C, & x>0. \end{cases}$$

10. 在什么条件下，积分 $\int \dfrac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\mathrm{d}x$ 表示有理函数？

解. 由

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2},$$

可知，当 $A_1\neq 0$，$B_1\neq 0$ 时，$\dfrac{A_1}{x}, \dfrac{B_1}{x-1}$ 的积分为对数函数，因此要使该积分为有理函数，必须 $A_1 = B_1 = 0$, 故

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_2}{(x-1)^2},$$

于是

$$ax^2+bx+c \equiv A_2x(x-1)^2 + A_3(x-1)^2 + B_2x^3.$$

令 $x=0$，得 $A_3 = c$ ①；令 $x=1$，得 $B_2 = a+b+c$ ②；并结合比较令 x^3，x^2 的系数，得

$x^3: A_2 + B_2 = 0$ ③； $x^2: A_3 - 2A_2 = a$ ④；

由①–④，可得所求条件为 $a+2b+3c=0$.

11. 设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$. 求 $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x$.

解. 因为 $x=f\left(f^{-1}(x)\right)$，所以

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)dx &= xf^{-1}(x)-\int x\,df^{-1}(x)\\ &= xf^{-1}(x)-\int f\left(f^{-1}(x)\right)df^{-1}(x)\\ &= xf^{-1}(x)-F\left(f^{-1}(x)\right)+\mathrm{C}\end{aligned}$$

12. 设 $f'\left(x\tan\frac{x}{2}\right)=(x+\sin x)\tan\frac{x}{2}+\cos x$，求 $f(x)$.

解. 由条件

$$f'\left(x\tan\frac{x}{2}\right)=x\tan\frac{x}{2}+\sin x\tan\frac{x}{2}+\cos x=x\tan\frac{x}{2}+1.$$

令 $u=x\tan\frac{x}{2}$, 则 $f'(u)=u+1$，故

$$f(u)=\int(u+1)du=\frac{u^2}{2}+u+C,$$

所以

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+x+C.$$

五、分析与证明题

1. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$f(x)$ 可微且其反函数 $f^{-1}(x)$ 存在，则

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-F\left[f^{-1}(x)\right]+C.$$

解. 由分部积分公式得

$$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-\int x\,d\left[f^{-1}(x)\right],$$

设 $t=f^{-1}(x)$, 则 $x=f(t)$, 于是

$$\int x\,d\left[f^{-1}(x)\right]=\int f(t)dt=F(t)+C=F\left[f^{-1}(x)\right]+C,$$

所以

$$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F\left[f^{-1}(x)\right]+C.$$

2. 证明函数 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$，$\mathrm{e}^x\mathrm{sh}\,x$ 和 $\mathrm{e}^x\mathrm{ch}x$ 都是 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

解. 易知

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)'=\mathrm{e}^{2x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$$

所以 $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ 是 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数. 又因为

$$(\mathrm{e}^x\mathrm{sh}x)'=\mathrm{e}^x\mathrm{sh}x+\mathrm{e}^x\mathrm{ch}x=\mathrm{e}^x(\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x)=\frac{\mathrm{e}^x\cdot\left(\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x\right)}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$$

所以 $\mathrm{e}^x\mathrm{sh}x$ 是 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

同理，易证 $\mathrm{e}^x\mathrm{ch}x$ 也是 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

3. 设 $f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$，证明：$y=\dfrac{x^2}{2}\mathrm{sgn}x$ 是 $y=|x|$ 的原函数.

解. 易知

$$y=\frac{x^2}{2}\mathrm{sgn}x=\begin{cases}0.5x^2 & x>0\\ 0 & x=0\\ -0.5x^2 & x<0\end{cases},\quad y'=\begin{cases}x & x>0\\ & \\ -x & x<0\end{cases}$$

于是

$$y'\big|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{0.5x^2\cdot\mathrm{sgn}x-0}{x-0}=\lim_{x\to0}0.5x\cdot\mathrm{sgn}x=0$$

即：$y'=|x|$，所以 $y=\dfrac{x^2}{2}\mathrm{sgn}x$ 是 $y=|x|$ 的原函数.