2014–2015学年第一学期期末试题

一、选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 是三维列向量，若行列式 $|A|=1$, 则行列式 $|(4\alpha_1,2\alpha_1-3\alpha_2,\alpha_3)|=($　　$)$.

   (A) -24　　(B) -12　　(C) 12　　(D) 24

2. 设 A 为 n 阶非零矩阵， E 为 n 阶单位矩阵，若 $A^3=0$, 则 (　　) .

   (A) $E-A$ 不可逆， $E+A$ 不可逆　　(B) $E-A$ 不可逆， $E+A$ 可逆

   (C) $E-A$ 可逆， $E+A$ 可逆　　(D) $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是 (　　)

   (A) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关

   (B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

   (C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关

   (D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

4. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{4\times6}, R(A)=2$, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中所含解向量的个数是 (　　) .

   (A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

5. 已知 A 是 n 阶可逆矩阵，则与 A 有相同特征值的矩阵是 (　　)

   (A) A^T　　(B) A^2　　(C) A^{-1}　　(D) $A-E$

二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分，把答案填在题中的横线上）

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1&3&3\\1&4&2\\4&5&6\end{vmatrix}$, 则 $A_{12}+A_{33}=$________.

2. 设方阵 A 满足 $A^2+A-5E=0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A-E)^{-1}=$____________.

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(a,0,b)$, $\alpha_3=(1,2,3)$ 线性相关，则实数 a,b 满足的关系式为____________.

4. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, 且 $R(A)=n-1$, η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解, 则对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为__________________.

5. 若3阶矩阵 A 相似于 B，矩阵的特征值分别为1,2,3，那么行列式 $|E+B^{-1}|=$ ________.

三、**简答题**（本大题共6小题，每题10分，共60分.解答应写出推理，演算步骤）

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值。

2. 已知 $A=(2,1,3)$, $B=(2,4,-3)$, 设 $X=A^TB$, 求 X^4.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 满足 $AB=A+2B$, 求矩阵 B 。

4. 设向量组: $\alpha_1=(1,2,3,6),\alpha_2=(1,-1,2,4),\alpha_3=(-1,1,-2,-8),\alpha_4=(1,2,3,2)$.
   (1) 求该向量组的秩及一个最大线性无关向量组;
   (2) 将其余向量表示为该最大线性无关向量组的线性组合。

5. 当 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=a \end{cases}$ 无解或有解; 并在有解的情况下求出其通解。

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x,y 。

四、**证明题**（本大题共2小题，第1题8分，第2题7分，共15分，解答应写出推理步骤）

1. 设 A 、B 均为 n 阶可逆矩阵 $(n\geq 2)$, 证明: $(AB)^*=B^*A^*$ 。（其中 A^* 、 B^* 及 $(AB)^*$ 分别为 A 、B 与 AB 的伴随矩阵）

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$. 证明：若 $k_1\neq 0$, 则向量组 β,α_2,α_3 也线性无关.