[3-1]T14 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$.

$\lim_{x\to1}f(x)=0 \Rightarrow f(1)=0$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

T9. $f(x)$ 偶函数，$f'(0)$ 存在，证 $f'(0)=0$

$f(-x)=f(x)$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

令 $x=-t$ $\lim_{t\to0^+}\frac{f(-t)-f(0)}{-t}$

$$=-\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{t}$$

$f'_-(0)=-f'_+(0)$ ✓

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$f'_+(0)=f'_-(0)$ ✓

$\therefore f'_+(0)=\_'(0)=0 \Rightarrow f'(0)=0$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A+\alpha(x) \qquad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

$$f(x)-f(a)=A(x-a)+\underbrace{\alpha(x)\cdot(x-a)}_{\to o(x-a)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot(x-a)}{x-a}=\lim_{x-a}\alpha(x)=0$$

3-1 T12.2 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{2}{x} & x\neq0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x \arctan \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \arctan \frac{1}{x}$$ 并不存在

$$\lim_{x \to 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$