注意：文件只列出了部分要点，没有提到的内容不代表不会考察.

7 参数估计

7.1 参数估计

参数估计

主要内容：矩估计，极大似然估计，估计量的无偏性和方差的比较

矩估计

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$,其中 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 为待估计的 k 个未知参数,假设 X 的$1\sim k$ 阶原点矩都存在,则有

$$\mu_i=E\left(X^i\right)=\mu_i(\theta_1,\cdots,\theta_k)\quad i=1,2,\cdots,k$$

取

$$\hat{\mu}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^i\quad i=1,2,\cdots,k$$

得方程组

$$\mu_i(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\hat{\mu}_i\quad i=1,2,\cdots,k$$

解得

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)\quad i=1,2,\cdots,k$$

称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩法估计量简称矩估计

例子. 当总体中只有一个参数时，矩估计即是用样本均值估计总体期望.

例子. 当总体中有两个或以上的参数时, 总体期望与方差的矩估计分别为

$$\hat{\mu}=\overline{X},\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

极大似然估计

若总体为离散型, 其分布律为

$$P\{X=x\}=p\left(x,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right),$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本,其观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ · 记

$$A=\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\},$$

则事件 A 发生的概率为

$$L\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=\prod_{i=1}^{n}p\left(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$$

设连续型总体X的概率密度函数为

$$f(x;\ \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k).$$

则样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$在观测值$x_1,x_2,\cdots,x_n$处的联合概率密度为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\ \theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta_1,\cdots,\theta_k).$$

此时$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$被看做固定但是未知的参数.

如果将观测值$x_1,x_2,\cdots,x_n$看成固定的, 将

$$L(x_1,\cdots,x_n;\ \theta_1,\cdots,\theta_k)$$

看做$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$的函数, 则该函数被称为似然函数.

如果似然函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

在

$$(\theta_1^*,\theta_2^*,\cdots,\theta_k^*)$$

处达到最大值, 则称上述参数为未知参数的极大似然估计.

求极大似然估计的一般方法:

1. 写出似然函数L；
2. 求似然函数的对数$\ln L$；
3. 对$\ln L$求导（偏导）并令导数等于零, 得到似然方程组；
4. 解方程组得到$\ln L$的驻点, 判断该驻点是否最大值点；
5. 将最大值点表达式中的x_i换为X_i, 就得到参数的极大似然估计.

7.2 估计量的评选标准

估计量的评选标准：

- 无偏性, 即 $E(\hat{\theta}) = \theta$
- 有效性, 即方差越小的估计量越有效
- 相合性, 即$\hat{\theta}$依概率收敛于θ