2013–2014学年第一学期期末试题

一、选择题（本大题共5小题, 每小题3分, 共15分）

1. 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$, 则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11}-2a_{12} & 4a_{13}-a_{11} \\ -3a_{21} & -9a_{21}+6a_{22} & -12a_{23}+a_{21} \\ a_{31} & 3a_{31}-2a_{32} & 4a_{33}-a_{31} \end{vmatrix}=$ (　　)

   (A) 12　　(B) 24　　(C) -24　　(D) -36

2. 设 A 、 B 均为 n 阶矩阵, 若 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 成立, 则 A 、 B 必须满足 (　　) .

   (A) $A=E$ 或 $B=E$　(B) $A=O$ 或 $B=O$　(C) $A=B$　(D) $AB=BA$

3. 下列矩阵不是初等矩阵的是 (　　) .

   (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 则下列各结论不正确的是 (　　) .

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都不是零向量
   (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意两个向量的对应分量不成比例
   (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示
   (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任一部分组线性无关

5. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似的矩阵是 (　　) .

   (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分，把答案填在题中的横线上）

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 9 & -3 \\ 5 & -15 & 5 \end{vmatrix}$，则 $M_{31}-M_{32}-M_{33}=$ ________.

2. 设 A 是四阶方阵，B 是五阶方阵，且 $|A|=2, |B|=-2$ 那么 $\left|-|A|B\right|=$ ________.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 ________.

4. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，且 $Ax=0$ 的基础解系中含有两个线性无关的解向量，则 a 与 b 的关系是 ________.

5. 设三阶矩阵 A 的三个特征值分别为 $1,2,4$，则 A^{-1} 的特征值依次为 ____________.

三、解答题（本大题共7小题，共60分，其中第3，7小题每题10分，其余各题每题8分.解答应写出推理，演算步骤）

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，求 $(AB)^T-A^TB^T$

3. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 的秩.

4. 已知 $\alpha_1=(1,-1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,1,-1)$，$\alpha_3=(-1,3,2,1)$，$\alpha_4=(-2,6,4,1)$. 讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 及向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

5. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-\ \ x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

6. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

四、证明题（本大题共2小题, 每小题5分, 共10分, 解答应写出推理步骤）

1. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3-A^2+2A-E=O$，证明 A 及 $E-A$ 均可逆, 并求 A^{-1} 和 $(E-A)^{-1}$.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量, 证明他们线性无关的充要条件是任一 n 维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.