第三节　微积分基本公式

变速直线运动中位置函数与速度函数的联系

例子　设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时 $v(t) \geq 0$,
求物体在这段时间内所经过的路程.

变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$.

另一方面这段路程可表示为

$$s(T_2) - s(T_1) \Longrightarrow \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1).$$

其中 $s'(t) = v(t)$

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $p(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为积分上限的函数或变上限积分.

定理 1

$$p'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

注记 1 上述定理说明，对于闭区间上的连续函数，它的原函数总是存在的.

定理 2 对于更一般的变限积分，我们有下面求导公式：

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

特别地，我们有

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$$

$$\left(\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$

例 1　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} e^t\,\mathrm{d}t}{x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}(e^t-1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

练习 1　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}\cos^2 t\,\mathrm{d}t}{x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{0}\arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

定理 3 (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

注记 (原函数存在定理的意义)

1. 肯定了连续函数的原函数是存在的.
2. 初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

定理 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

若记 $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$，则上式又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

它称为微积分基本公式或牛顿一莱布尼茨公式.

例 2　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ 5, 1 < x \le 2 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

答案：(1) $\dfrac{1}{3}$, (2) 6.

练习 2　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$

(3) $\int_{-1}^{2} |2x| \,\mathrm{d}x$

小结

本节主要内容

1. 积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
2. 积分上限函数的导数 $\Phi'(x)=f(x)$
3. 微积分基本公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

牛顿--莱布尼茨公式架起了微分学与积分学之间的桥梁.