第一节	微分中值定理
第二节	洛必达法则
第三节	导数的应用
第四节	函数的最大值和最小值及其在经济中的应用

第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

第三节 导数的应用

第四节 函数的最大值和最小值及其在经济中的应用

第四节	函数的最大值和最小值及其在经济中的应用
4.1	函数的最大值与最小值
4.2	经济应用问题举例

函数最值的定义

定义 1 (函数的最值)　设函数$f(x)$在区间I上有定义。如果有$x_0 \in I$，使得对所有$x \in I$都有$f(x) \leq f(x_0)$（或$f(x) \geq f(x_0)$），则称$f(x_0)$是函数$f(x)$ 在区间I上的最大值（或最小值）。

经济问题中，经常有这样的问题，怎样才能使“产品最多”、“用料最少”、“成本最低”、“效益最高”等等．这样的问题在数学中有时可归结为求某一函数(称为目标函数)的最大值或最小值问题．

根据自变量的取值范围，可以分以下两种情况讨论：

1. 目标函数在闭区间连续
2. 目标函数在开区间连续

函数最值的求法：目标函数在闭区间连续

设目标函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，而且在除有限个点外都可导．则可按照下面步骤求出函数的最值：

(1) 求出函数所有的驻点，不可导点，和区间端点一起列出来作为最值可疑点．

(2) 求出函数在这些点的取值并比较，最大（小）者就为函数的最大（小）值．

例 2　求以下函数在指定区间上的最值。

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$在区间$[-2, 3]$上.

练习 1　求以下函数在指定区间上的最值。

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$在区间$[-2, 3]$上.

函数最值的求法：目标函数在开区间连续

开区间的连续函数不一定有最大、最小值．即使有最大值、最小值，也不能用上述方法求出．若函数满足下列两个条件：

1. $f(x)$ 在开区间有且仅有最大（小）值;
2. $f(x)$ 在开区间只有一个可能取得极值的点

则可以断定这个极值点一定是函数的最大（小）值点.

例 3 将边长为a的一块正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒。问截掉的小正方形的长为多少时，所得方盒的容积最大？

练习 2 一房地产公司有50套公寓要出租．当月租定为2000元时，公寓会全部租出去．当月租每增加100 元，就会多剩一套公寓租不出去．而租出去的每套公寓每月需要花费200 元的维修费用．问房租定为多少时可获得最大收入？

第四节	函数的最大值和最小值及其在经济中的应用
4.1	函数的最大值与最小值
4.2	经济应用问题举例

最大利润问题

在经济学中，总收入和总成本都可以表示为产量 Q 的函数，分别记为 $R(Q)$ 和 $C(Q)$, 则总利润 $L(Q)$ 可表示为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$ 为使总利润最大，须令其一阶导数等于零, 即

$$\frac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}[R(Q)-C(Q)]}{\mathrm{d}Q}=0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}R(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q},$$

即取得最大利润的必要条件为:

$$\text{边际收益}=\text{际成本}.$$

最大利润问题

显然，为使总利润达到最大，还应有

$$\frac{d^2[R(Q)-C(Q)]}{dQ^2}<0,$$

即

$$R''(Q)<C''(Q),$$

也即

$$\text{边际收益的变化率} < \text{边际成本的变化率}.$$

最大利润问题

例 4　某厂每批生产 A 商品 X 台的费用为 $C(X) = 5X + 200$ (万元)，得到的收入为 $R(X) = 10X - 0.01X^2$ (万元)，问每批生产多少台，才能使利润最大?

解　设利润为 $L(X)$, 则

$$L(X) = R(X) - C(X) = 5X - 0.01X^2 - 200$$

$$L'(X) = 5 - 0.02X$$

令 $L'(X) = 0$, 解得 $X = 250($ 台)，由于

$$L''(X) = -0.02 < 0$$

所以$L(250) = 425$(万元)为极大值，也就是最大值.

练习 3　设某厂的成本函数为 $C(Q) = aQ^2 + bQ + c$, 需求函数为 $Q = (d - P)/e$, 其中 $C(Q)$ 为成本, Q 为需求量产量, P 为价格, a, b, c, d, e 均为正常数, 且 $d > b$, 求利润最大时的产量及最大利润.

解　由 $Q = (d - p)/e$, 得 $P = d - eQ$, 故得收益函数

$$R(Q) = Q \cdot P = Q(d - eQ)$$

利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q) &= R(Q) - C(Q) \\ &= (d - b)Q - (e + a)Q^2 - c \end{aligned}$$

于是

$$L'(Q) = (d - b) - 2(e + a)Q.$$

令$L'(Q) = 0$ 得唯一驻点 $Q_0 = (d - b)/2(e + a)$.

又 $L'' = -2(e + a) < 0$, 故

$$Q = Q_0 = (d - b)/2(e + a)$$

时利润最大,最大值为

$$L(Q_0) = L[(a - b)/2(e + a)]$$

$$= \left[(d - b)^2/4(e + a)\right] - c$$

例 5　最大收益问题某商品的需求函数为 $Q = Q(P) = 75 - P^2$, 问 P 为多少时，总收益最大?

解　总收益为

$$R(P) = QP = \left(75 - P^2\right)P$$

令

$$R'(P) = 75 - 3P^2 = 0$$

得唯一驻点 $P = 5$, 又

$$R''(P)\Big|_{P=5} = -30 < 0,$$

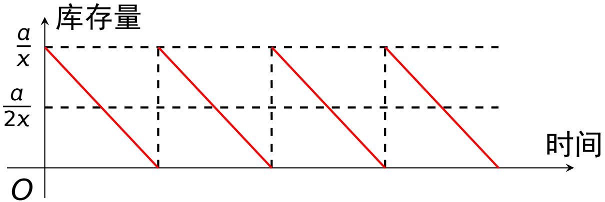
故 $P = 5$时收益最大.

所谓经济批量问题就是确定合理的采购进货的批量，使库存费用和采购费用之和最小.

例 6　某商场每年销售某商品 a 件,分为 x 批采购进货. 已知每批采购费用为 b 元, 而未售商品的库存费用为 c 元/(年·件). 设销售商品是均匀的,问分多少批进货时,才能使以上两种费用的总和为最省? (a, b, c 为常数且 $a, b, c > 0$.)

解　显然,采购进货的费用

$$W_1(x) = bx$$



因为销售均匀,所以平均库存的商品数应为每批进货的商品数 $\frac{a}{x}$ 的一半 $\frac{a}{2x}$, 因而商品的库存费用

$$W_2(x) = \frac{ac}{2x}$$

解 (续)　总费用　$W(x)=W_1(x)+W_2(x)=bx+\dfrac{ac}{2x}\ (x>0).$

令

$$W'(x)=b-\frac{ac}{2x^2}=0$$

得 $x=\sqrt{\frac{ac}{2b}}$. 又

$$W''(x)=\frac{ac}{x^3}>0$$

所以 $W\left(\sqrt{\frac{ac}{2b}}\right)$ 为 $W(x)$ 的一个最小值. 从而当批数 x 取一个最接近于 $\sqrt{\frac{ac}{2b}}$ 的自然数时,才能使采购与库存费用之和最省.

经济批量问题

例 7　某厂生产某种产品，其年销售量为100万件，每批生产需要增加准备费1000元，而每件的一年库存费为0.05元.如果年销售率为平均的，且上批售完后立即生产出下批(此时商品的库存数为批量的一半)，问应分为几批生产，能使采购费用及库存费之和最小？

解 设批数为N, 则每批产量为 $x = a/N = \dfrac{10^6}{N}$, 一年生产准备费为 $bN = 1000N$. 库存量为 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1000000}{2N}$, 库存费为 $\dfrac{10^6}{2N} \cdot 0.05$ 于是总费用为

$$\begin{aligned} E(N) &= 1000N + \frac{10^6}{2N} \cdot 0.05 \\ &= 1000N + \frac{25000}{N}, N \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

令$E'(N) = 1000 - \dfrac{25000}{N^2} = 0$ 得$N = 5$或$N = -5$(舍去). 又 $E''(N) = \dfrac{50000}{N^3} > 0$, 故 $N = 5$ 时总费用最小. 即分5批生产，能使总费用最小.

最大税收问题

设企业某件商品的产量为x，征税后的总成本为 $C_t(x)$, 每件商品征税为 t, 则

$$C_t(x) = C(x) + tx$$

征税后的利润为

$$L_t(x) = R(x) - C_t(x) = R(x) - C_t(x) - tx$$

当 $L_t'(x) = 0$ 且 $L_t''(x) < 0$ 时，有最大值，此时可解出对应的产量 $x = x(t)$。

此时，政府得到的总税收为$T = tx = t \cdot x(t)$.

最大税收问题仍为一元函数的最值问题.

例 8　某种商品的平均成本 $\overline{C}(x) = 2$, 价格函数为 $P(x) = 20 - 4x$ (x 为商品数量)，国家向企业每件商品征税为 t.

(1) 生产多少商品时,利润最大?

(2) 在企业取得最大利润的情况下, t 为何值时才能使总税收最大?

解　(1) 总成本为： $C(x) = x\overline{C}(x) = 2x$,

总收益为：$R(x) = xP(x) = 20x - 4x^2$,

总税收为：$T(x) = tx$,

故总利润为： $L(x) = R(x) - C(x) - T(x) = (18 - t)x - 4x^2$.

解 (续)　令 $L'(x)=18-t-8x=0$, 得 $x=\dfrac{18-t}{8}$. 又

$$L''(x)=-8<0$$

所以 $L\left(\dfrac{18-t}{8}\right)=\dfrac{(18-t)^2}{16}$ 为最大利润.

(2) 取得最大利润时的税收为:

$$T=tx=\frac{t(18-t)}{8}=\frac{18t-t^2}{8}\quad (x>0)$$

令

$$T'=\frac{9-t}{4}=0$$

得 $t=9$.

解 (续)　又

$$T'' = -\frac{1}{4} < 0,$$

所以当 $t = 9$ 时,总税收取得最大值

$$T(9) = \frac{9(18-9)}{8} = \frac{81}{8},$$

此时的总利润为

$$L = \frac{(18-9)^2}{16} = \frac{81}{16}.$$

小结

本节基本概念: 函数的极大值与极小值

1. 当目标函数在闭区间连续时
2. 当目标函数在开区间连续时

极值的经济应用:

1. 最大利润问题
2. 最大收益问题
3. 经济批量问题
4. 最大税收问题

思考题

某工厂要在一年内以相等批量分批生产2400件产品，产品的单位成本为6元，但每生产一批产品需要调整机器费用为160元.在生产过程中，在制品占用资金的银行年利率为10%.若全年所需费用等于全年所需机器调整费用与在制品占用资金利息的总和，问批量多大时才能使全年所需费用最小？

思考题

解　设全年所需费用为 $P(x)$，批量为 x，则全年批生产的批数为 $\dfrac{2400}{x}$ 所需调整机器费用为 $160\cdot\dfrac{2400}{x}$ 元. 因为批量相同，所以全年商品所占资金的利息为 $6x\times 10\%$ 元，因此

$$P(x) = 6x\times 10\% + 160\times\frac{2400}{x}$$

$$= 0.6x + \frac{16\times 24\times 10^3}{x}$$

$$P' = 0.6 - \frac{16\times 24\times 10^3}{x^2}$$

令 $P'(x)=0$，则 $x^2 = 640000 \therefore P(x)$ 有最小值 . 即全年分 3批生产，每批批量 800件.