第二节 定积分的性质

定积分的性质

性质 1 设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2 （函数可加性）

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3　（区间可加性）设 $a < c < b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 1　即使 c 不在 a 和 b 之间，上述性质依然是成立的.

性质 4

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

推论　$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

例 1 比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

练习 1 比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_1^2 x\,dx$ 和 $\int_1^2 x^2\,dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

性质 6 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

例 2 估计下面的积分值：

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

性质 7 （积分中值定理）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

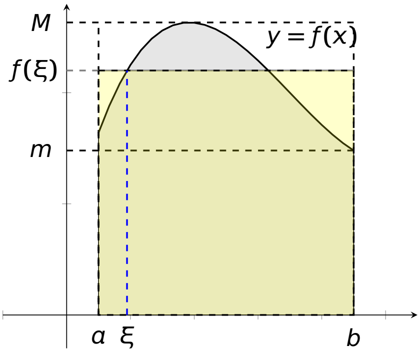
注记 2 上述性质也是说，存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

说明连续函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值是可以取到的.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$



定积分的保号性

题 1 设在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续，$f(x) \geq 0$，且 $f(x)$ 不恒为零，证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

定积分的保号性

解　设 $f(c)>0$，则由极限的保号性，存在 $\delta>0$，使得当 $c-\delta<x<c+\delta$ 时，总有 $f(x)>f(c)/2$．从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(c)/2\,\mathrm{d}x = \delta\cdot f(c) > 0$$