第六节	边际与弹性
6.1	边际的概念
6.2	经济学中常见的边际函数
6.3	弹性的概念
6.4	经济学中常见的弹性函数
6.5	小结　思考

定义 设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数. $f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为边际函数值.

> 当 $x=x_0$ 时， x 改变一个单位， y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

例 1 设函数 $y=2x^2$, 试求 y 在 $x=5$ 时的边际函数值.

解 因为 $y'=4x$, 所以 $y'|_{x=5}=20$.

该值表明: 当 $x=5$ 时， x 改变 1 个单位 (增加或减少 1 个单位), y 改变 20 个单位（增加或减少 20 个单位).

经济学中常见的边际函数

1. 边际成本
2. 边际收益
3. 边际利润

1 边际成本：总成本函数 $C(Q)$的导数，记为$MC(Q) = C'(Q)$。

> 边际成本的含义：假定已经生产了Q件产品，再生产一件产品所增加的成本.

注记　当边际成本小于平均成本$\frac{C(Q)}{Q}$时，应增加产量，反之，应减小产量。

例 2　设某产品生产 Q 单位的总成本为

$$C(Q) = 1100 + \frac{Q^2}{1200}$$

求：

(1) 生产 900 个单位的总成本和平均成本;

(2) 生产 900 个单位到 1000 个单位时的总成本的平均变化率；

(3) 生产 900 个单位的边际成本，并解释其给济意义.

解　(1)生产900个单位时的总成本为

$$C(Q)|_{Q=900} = 1100 + \frac{900^2}{1200} = 1775$$

解 (续)　平均成本为

$$\overline{C}(Q)\Big|_{Q=900} = \frac{1775}{900} = 1.99.$$

(2) 生产900个单位到1000个单位时总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q} = \frac{C(1000) - C(900)}{1000 - 900} = \frac{1993 - 1775}{100} = 1.58.$$

(3)边际成本函数

$$C'(Q) = \frac{2Q}{1200} = \frac{Q}{600},$$

当 $Q = 900$ 时的边际成本为 $C'(Q)|_{Q=900} = 1.5.$

2 边际收益：总收益函数$R(Q)$的导数，记为$MR(Q)=R'(Q)$。

假定已经销售了Q件产品，再销售一个件产品所增加的总收益.

注记　若价格P为Q的函数，则

$$R(Q)=P(Q)Q \Longrightarrow R'(Q)=P(Q)+QP'(Q).$$

例 3　设某产品的需求函数为 $P=20-\dfrac{Q}{5}$，其中 P 为价格， Q 为销售量，求销售量为15个单位时的总收益，平均收益与边际收益。并求销售量从15个单位增加到20个单位时收益的平均变化率。

解　总收益为

$$R=QP(Q)=20Q-\frac{Q^2}{5}.$$

销售15个单位时总收益为

$$R|_{Q=15}=\left(20Q-\frac{Q^2}{5}\right)\Bigg|_{Q=15}=255.$$

边际收益

解 (续)　平均收益为

$$\bar{R}\,|_{Q=15} = \left.\frac{R(Q)}{Q}\right|_{Q=15} = \frac{255}{15} = 17.$$

边际收益为

$$R(Q)|_{Q-15} = \left.\left(20 - \frac{2}{5}Q\right)\right|_{Q=15} = 14.$$

当销售量从15个单位增加到20个单位时收益的平均变化率为

$$\frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{R(20)-R(15)}{20-15} = \frac{320-255}{5} = 13.$$

3 边际利润：总利润函数$L(Q)$的导数.

> 若已生产了Q件产品，再生产一件产品增加的总利润.

注记 $L(Q)=R(Q)-C(Q)\Longrightarrow L'(Q)=R'(Q)-C'(Q).$

$$R'(Q)\begin{cases} >C'(Q) \\ =C'(Q) \\ <C'(Q) \end{cases} \text{时，}\quad L'(Q)\begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$$

边际收益大于边际成本时，边际利润增加；反之，边际利润减小.

边际利润

例 4　某工厂对其产品的销售情况进行大量统计后分析后，得出总利润 $L(Q)$ (元) 与每月产量 Q (吨)的关系为 $L = L(Q) = 250Q - 5Q^2$, 试确定每月生产 20 吨，25 吨，35 吨的边际利润，并做出经济解释.

解　边际利润为 $L'(Q) = 250 - 10Q$, 则

$$L'(Q)|_{Q=20} = L'(20) = 50,$$
$$L'(Q)|_{Q=25} = L'(25) = 0,$$
$$L'(Q)|_{Q=35} = L'(35) = -100.$$

上述结果表明当生产量为每月20吨时，再增加一吨，利润将增加50元，当产量为每月25吨时，再增加一吨，利润不变；当产量为35吨时，再增加一吨，利润将减少100．此处说明，对厂家来说，并非生产的产品越多，利润越高.

第六节	边际与弹性
6.1	边际的概念
6.2	经济学中常见的边际函数
6.3	弹性的概念
6.4	经济学中常见的弹性函数
6.5	小结　思考

例 5　函数 $y = x^2$, 当x 从8到10时, 相应的y从64 增加到100，即自变量x 的绝对增量 $\Delta x = 2$, 函数 y 绝对增量 $\Delta y = 36$ 又

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2}{8} = 25\%, \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{36}{64} = 56.25$$

即当 $x = 8$ 增加到 $x = 1$ 时， x 增加了 25%时, y 也相应的增加了56.25%。这里 $\dfrac{\Delta x}{x}, \dfrac{\Delta y}{y}$为自变量和函数的相对改变量(或相对增量).

在本例中，再引入以下公式

$$\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x} = \frac{56.25\%}{25\%} = 2.25.$$

该式表示在开区间 $(8, 10)$ 内，从 $x = 8$ 时起，x 每增加1%，则相应的 y 便平均改变2.25%，这里称之为 $x = 8$ 增加到 $x = 10$ 时，函数 $y = x^2$ 的平均相对变化率.

于是又有以下定义 .

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $x_0\neq 0$, 称函数的相对改变量

$$\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$$

与自变量的相对改变量 $\dfrac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 为函数从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 两点间的平均相对变化率，或称为 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 两点间的弹性或弧弹性.

点弹性

当 $\Delta x \to 0$ 时，若 $\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 的极限存在，则该极限称为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的相对变化率，也就是相对导数，或称为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的点弹性. 记作 $\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{E}{Ex}f(x_0)$ 即

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$

点弹性

当 x_0 为定值时，$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 为定值，且当 $|\Delta x|$ 很小时，

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0} \approx \frac{\Delta y}{y_0} \Big/ \frac{\Delta x}{x_0} \ (=\text{弧弹性}).$$

定义 (弹性函数的定义)　一般地，若函数 $y=f(x)$ 在区间内 (a,b) 可导，且 $f(x)\neq 0$，则称

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} = y'\cdot\frac{x}{y}$$

为函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的点弹性函数，简称弹性函数.

弹性的性质

函数的弹性(点弹性或弧弹性)与量纲无关, 函数 $f(x)$ 在点 x 处的弹性 $\frac{E}{Ex}f(x)$ 反映了 x 的变化幅度 $\dfrac{\Delta x}{x}$ 对 $f(x)$ 变化幅度 $\frac{\Delta y}{y}$ 的大小影响，也就是 $f(x)$ 对 x 变化反应的强烈程度或灵敏度．由弹性的定义可知:

$$\frac{Ey}{Ex} = y' \cdot \frac{x}{y} = \frac{y'}{\frac{y}{x}} = \left(\frac{\text{边际函数}}{\text{平均函数}}\right)$$

这样，弹性在经济学上又可理解为边际函数与平均函数之比.

例 6　求函数 $y = x^{\alpha}$(α 为常数) 的弹性函数.

解　直接计算得到所求的弹性函数为

$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{y}{x}y' = \frac{x}{x^{\alpha}}\left(x^{\alpha}\right)' = \frac{x}{x^{\alpha}}\alpha x^{\alpha-1} = \alpha$$

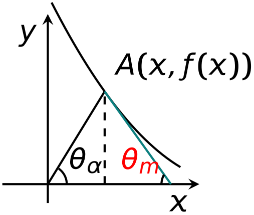
由此例知，幂函数的弹性函数为常数，因此称为不变弹性函数。

函数弹性的图解方法

边际函数 $y = f(x)$ 的几何意义为所示曲线上各点的切线斜率，即

$$\tan(\pi - \theta_m) = -\tan\theta_m.$$

又平均函数为 $\frac{f(x)}{x} = \tan\theta_\alpha$



因而 $\frac{Ey}{Ex} = -\frac{\tan\theta_m}{\tan\theta_\alpha}$. 若考虑弹性的绝对值, 则 $\left|\frac{Ey}{Ex}\right| = \frac{\tan\theta_m}{\tan\theta_\alpha}$.

如果我们知道了一条函数 $y = f(x)$ 所示的曲线，则在曲线上任一点 A 处对应的弹性，通过 A 作曲线 AB 的切线和线段 OA, 就可得夹角 θ_m 和 θ_α, 进而就可得 $\left|\frac{Ey}{Ex}\right|$.

第六节	边际与弹性
6.1	边际的概念
6.2	经济学中常见的边际函数
6.3	弹性的概念
6.4	经济学中常见的弹性函数
6.5	小结　思考

当弹性定义中的 y 被定义为需求量时就是需求弹性．所谓需求的价格弹性是指当价格变化一定的百分比以后引起的需求量的反应程度．设需求函数 $Q_d = Q(P)$ 可导，则需求的价格弹性可用公式表示为

$$E_d = \frac{EQ}{EP} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \cdot \frac{P}{Q}$$

而$\dfrac{\Delta Q}{Q} \Big/ \dfrac{\Delta P}{P}$称为该商品在$P$与$P + \Delta P$ 两点间的需求价格弹性或弧弹性．

例 7 某需求曲线为: $Q = -100P + 3000$，求当 $P = 20$ 时的弹性.

解 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = -100$ 当 $P = 20$ 时, $Q = 1000$ 所以

$$E_d = -100 \times \frac{20}{1000} = -2.$$

需求的价格弹性

一般来说，需求函数是价格的单调减函数，故需求函数的弧弹性为负值，从而当 $\Delta x \to 0$ 时，其极限值 E_d 总是小于或等于零，并且实际中一般取负值．有时为讨论方便，将其取绝对值，也称之为需求的价格弹性，并记为 η, 即

$$\eta = \eta(P) = |E_d| = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

需求的价格弹性

$$\eta = \eta(P) = |E_d| = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

1. 若 $\eta = |E_d| = 1$ ，此时商品需求量变动的百分比与价格变动的百分比相等，称为单位弹性或单一弹性.
2. 若 $\eta = |E_d| < 1$ 即，此时商品需求量变动的百分比低于价格变动的百分比，价格的变动对需求量的影响不大，称为缺之弹性或低弹性.
3. 若 $\eta = |E_d| > 1$，此时商品需求量的变动的百分比高于价格变动的百分比，价格的变动对需求量的影响较大，称之为富于弹性或高弹性.

例 8　设某产品的需求函数为 $Q = 100 - 2P, 0 \le P \le 50$ ，其中 P 为价格，Q为需求量.

(1) 当 $P = 10$ ，且价格上涨 1%时，需求量Q 是增加还是减少，变化百分之几?

(2) 讨论商品价格变化时，需求量变化的情况.

解　(1) 由条件知

$$\eta(P) = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} = -\frac{P}{100-2P} \cdot (-2) = \frac{P}{50-P},$$

故 $\eta(10) = 0.25$. 由于 P 和 Q 是按相反方向变化的，在 $P = 10$ ，且价格上涨 1%时，需求量Q 减少 $\eta\% = 0.25\%$ (注意: 价格上涨1%，需求量减少 $\eta\%$ ，因此不能误认为减少 $0.25 = 25\%$).

解 (续)

1. 当 $0 < \eta < 1$, 即 $0 < \frac{P}{50-P} < 1$时, 即 $0 < P < 25$时, 价格上涨 (下降) 1%时，需求量减少 (增加) η%，小于价格上涨（下降）的百分比（因 $\eta < 1$);
2. 当 $\eta = 1$, 即 $\frac{P}{50-P} = 1$, 得 $P = 25$, 这表明当 $P = 25$ 时, 需求量的变动与价格变动按相同的百分比进行;
3. 当 $\eta > 1$, 即 $\frac{P}{50-P} > 1$时，得 $P > 25$, 于是当 $25 < P < 50$ 且价格 P 上涨 (下降) 1% 时，需求量减少 (增加) η% ，大于价格上涨（下降）的百分比（因 $\eta > 1$).

需求弹性与总收益（市场销售总额）的关系

在市场经济中，商品经营者关心的是提价 $(\Delta P > 0)$ 或降价 $(\Delta P < 0)$ 对总收益的影响. 利用需求弹性的概念，可以分析价格变动是如何影响销售收益的.

总收益 R 是商品价格 P 与销售量 Q的乘积，即

$$R = P \cdot Q = PQ(P)$$

边际总收益

$$R' = PQ'(P) + Q(P) = Q(P)\left[1 + Q'(P) \cdot \frac{P}{Q(P)}\right]$$
$$= Q(P)\left[1 - |E_d|\right] = Q(P)(1 - \eta)$$

1. 若 $\eta < 1$ ，表示需求变动的幅度小于价格变动的幅度．此时 $R' > 0$,即边际收益大于 0, 价格上涨，总收益增加; 价格下跌，总收益减少．商品的价格和厂商的销售收入呈同方向变动.
2. 若 $\eta > 1$ ，表示需求变动的幅度大小于价格变动的枯度．此时 $R' < 0$,即价格上涨，总收益减少; 价格下跌，总收益增加．商品的价格和厂商的销售收入呈反方向变动.
3. 若 $\eta = 1$ ，表示需求变动的幅度等于价格变动的幅度。降低价格或提高价格对厂商销售收益都没有影响.

综上所述，总收益的变化受需求弹性的制约，随商品需求弹性的变化而变化.

定义 供给弹性，通常指的是供给的价格弹性. 设供给函数 $Q_S = Q(P)$ 可导，则供给弹性

$$E_S = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \times \frac{P}{Q}$$

式中 E_S 为供给的价格弹性.

例 9　设某产品的供给函数为 $Q = 2\mathrm{e}^P$, 求供给的价格弹性函数及当 $P = 1$ 时的供给的价格弹性.

解　供给的价格弹性函数为

$$E_s(P) = \frac{P}{2\mathrm{e}^P}\left(2\mathrm{e}^P\right)' = \frac{P}{2\mathrm{e}^P}2\mathrm{e}^P = P,$$

由此有当 $P = 1$ 时

$$E_s(P) = 1.$$

这表明当 $P = 1$ 时价格如果上涨 1%, 供给量也相应增加 1%.

例 10 某商品的供给函数 $Q=2+3P$ 求供给弹性函数及当 $P=3$ 时供给弹性。

解 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=3$, 故

$$E_s=\frac{dQ}{\mathrm{d}P}\times\frac{P}{Q}=\frac{3P}{2+3P}$$

当 $P=$ 3时,

$$E_s=\frac{3\times 3}{2+3\times 3}=\frac{9}{11}$$

例 11　观察下列供纳函数: (a) $P = 3Q$,　(b) $P = -2+5Q$;　(c) $P = 3 + 4Q$ 试判断其供给弹性 E_s 大于，等于或小于 1.

收益弹性

$$\frac{ER}{EP} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} \times \frac{P}{R}, \quad \frac{ER}{EQ} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} \times \frac{Q}{R}$$

式中:

$\frac{ER}{EP}$ – 收益的价格弹性；

$\frac{ER}{EQ}$ – 收益的销售弹性.

例 12 设 P 、 Q 、 R 分别为商品价格，销售量，销售总收益，

(1) 试分别找出收益的价格弹性 $\frac{ER}{EP}$, 收益的销售弹性 $\frac{ER}{EQ}$ 与需求的价格弹性 η 的关系.

(2) 试分别解出关于价格 P 的边际收益 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$, 关于需求 Q 的边际收益 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$ 与需求价格弹性η的关系.

收益弹性

解　(1) 设 $Q=f(P)$,　$R=PQ$, 故

$$\frac{ER}{EP}=\frac{E(PQ)}{EP}=\frac{P}{PQ}\cdot\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}P}=\frac{1}{Q}\left(Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)$$

$$=1+\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=1-\left(-\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=1-\eta,$$

$$\frac{ER}{EQ}=\frac{E(PQ)}{EQ}=\frac{Q}{PQ}\cdot\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}Q}=\frac{1}{P}\cdot\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}Q}$$

$$=\frac{1}{P}\left(P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}\right)=1-\left(\frac{1}{-\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}}\right)=1-\frac{1}{\eta}.$$

解　(2)由(1)知 $\frac{ER}{EP}=1-\eta$, 故

$$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=\frac{P}{PQ}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=1-\eta,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-\eta)=f(P)(1-\eta).$$

又由(1) $\frac{ER}{EQ}=1-\frac{1}{\eta}$, 故

$$\frac{ER}{EQ}=\frac{Q}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\frac{Q}{PQ}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=1-\frac{1}{\eta},$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=P\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

例 13 假设某产品的需求函数 $P = 100\sqrt{X}$ ，其中 X 为产量(假定等于需求量)，P为价格，求收益的价格弹性.

解

第六节	边际与弹性
6.1	边际的概念
6.2	经济学中常见的边际函数
6.3	弹性的概念
6.4	经济学中常见的弹性函数
6.5	小结　思考

小结

- 边际的基本概念　边际函数的计算
  1. 边际成本
  2. 边际收益
  3. 边际利润
  4. 边际需求
- 弹性的基本概念　弹性函数的计算
  1. 需求弹性
  2. 供给弹性
  3. 收益弹性

思考　设某产品的需求函数为 $Q = Q(P)$, 收益函数为 $R = PQ, Q(P)$ 为单调减少函数. 如果当价格 P_0 时产量为 Q_0, 边际收益 $\left.\frac{dR}{dQ}\right|_{Q=Q_0} = a > 0$, 收益对价格的边际效应为 $\left.\frac{dR}{dP}\right|_{P=P_0} = c < 0$, 需求对价格的弹性 $\eta = b > 1$, 求 P_0 与 Q_0

解 按照需求对价格的弹性定义，分别将 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$, $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$ 表示为

$$\eta = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

的函数得到

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}(PQ) = P + Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q} = P - \left[\frac{P}{-\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}}\right]$$

$$= P\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = P\left(1 - \frac{1}{b}\right),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0} = \left.P\left(1 - \frac{1}{b}\right)\right|_{Q=Q_0} = p_0\left(1 - \frac{1}{b}\right) = a.$$

解 (续) 故 $P_0 = \dfrac{ab}{b-1}$, 又

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q + P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = Q - \frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(-Q) = Q(1-\eta)$$

$$= Q(1-b),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0} = Q(1-b)|_{p=p_0} = Q_0(1-b) = c.$$

故 $Q_0 = \frac{c}{1-b}$.