第一节 集合

第二节 映射与函数

第一节 集合

第二节 映射与函数

第二节	映射与函数
2.1	映射的概念
2.2	逆映射与复合映射
2.3	函数的概念
2.4	函数的性质
2.5	小结　　思考题

设X与Y是两个非空集合，若对X中的每一个元素x,均可以找到Y中唯一确定的元素y与之对应, 则称这个对应是集合X到Y的一个映射, 记为f, 或者更详细地写为：

$$f : X \to Y.$$

将x的对应元素y记为

$$f(x) : x \mapsto y = f(x).$$

y称为映射f下x的像，x称为映射f下y的原像(或逆像)．集合X称为映射f的定义域, 记为$D_f = X$; X的所有元素的像$f(x)$的集合

$$\{y | y \in Y, y = f(x), x \in X\}$$

称为映射f的值域, 记为R_f(或$f(X)$).

例 1 设 $A = \{$商场中的所有商品$\}$, $B = \{$商场中商品九月份的销量$\}$, 则

$$f: A \to B$$

$$x \mapsto y \ (y\text{是商品}x\text{九月份的销量})$$

是一个映射, $D_f = A, \quad R_f = B$

映射举例

例 2　设$A=\{1,2,3\}, B=\{4,5,6,7\}$, 则

$$f : A \to B$$
$$f(1)=4, f(2)=5, f(3)=6$$

是一个映射, $D_f = A, R_f = \{4,5,6\} \subset B$

映射的三个基本要素

概括起来, 构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

1. 集合X, 即定义域$D_f = X$.
2. 集合Y, 即限制值域的范围$R_f \subset Y$.
3. 对应法则f, 使每个$x \in X$, 有唯一确定的$y = f(x)$与之对应.

注记 1

1. 映射要求元素的像必须是唯一的.
2. 映射并不要求元素的原像也是唯一的.

设 f 是集合X 到集合Y的一个映射, 若

1. 对任意的$x_1 \neq x_2$, 都有$f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称f为单射.
2. $R_f = Y$, 则称f为满射.
3. f既是单射又是满射, 则称f为双射(或一一映射).

注记 2　单射$\Leftrightarrow$ 原像唯一.

第二节	映射与函数
2.1	映射的概念
2.2	逆映射与复合映射
2.3	函数的概念
2.4	函数的性质
2.5	小结　思考题

逆映射

如果映射 f是单射, 则对任一 $y \in R_f \subset Y$, 它的原像 $x \in X$ (即满足方程 $f(x) = y$ 的 x) 是唯一确定的, 于是, 对应关系

$$\begin{aligned} g : R_f &\to X \\ y &\mapsto x \ (f(x) = y) \end{aligned}$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射, 称之为 f 的逆映射,记为 f^{-1},其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$,值域为 $R_{f^{-1}} = X$

逆映射举例

例 3　设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$, 则

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y = x + 3$$

既是单射，又是满射，存在逆映射

$$f^{-1} : B \to A$$

$$x \to y = x - 3$$

例 4　设 $A = [0, \pi]$, $B = [-1, 1]$, 则

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y = \cos x$$

既是单射，又是满射，存在逆映射

$$f^{-1} : B \to A$$

$$x \mapsto y = \arccos x$$

复合映射

现设有如下两个映射

$$g : X \to U_1$$

$$x \mapsto u = g(x)$$

和

$$f : U_2 \to Y$$

$$u \mapsto y = f(u),$$

如果 $R_g \subset U_2 = D_f$, 那就可以构造出一个新的对应关系

$$f \circ g : X \to Y$$

$$x \mapsto y = f[g(x)]$$

也是一个映射, 称之为 f 和 g 的 复合映射.

例 5

$$g: \quad R \to R \qquad\qquad f: \quad R^+ \to R$$
$$x \mapsto u = 1 - x^2 \qquad u \mapsto y = \sqrt{u}$$

则 $R_g = (-\infty, 1]$, 它不是D_f的子集, 因此不能构成复合映射 $f \circ g$. 但若将 g 的定义域缩小，就有可能构成复合映射．比如令 $g^*: [-1, 1] \to R$

$$x \mapsto u = 1 - x^2$$

则可以构成复合映射 $f \circ g^*: [-1, 1] \to R$

$$x \to y = \sqrt{1 - x^2}$$

第二节	映射与函数
2.1	映射的概念
2.2	逆映射与复合映射
2.3	函数的概念
2.4	函数的性质
2.5	小结　　思考题

定义　设非空数集$D \subset \mathbf{R}$, 则称映射$f : D \to \mathbf{R}$为定义在D上的函数, 简记为

$$y = f(x),\ x \in D.$$

- x称为自变量;
- y称为因变量;
- D称为定义域;
- 函数值的全体构成的数集$R_f = \left\{ y \,\middle|\, y = f(x), x \in D \right\}$称为值域.

例 6 研究$y=x$和$y=\dfrac{x^2}{x}$是不是相同的函数.

例 7 研究$y=x$和$y=\sqrt{x^2}$是不是相同的函数.

注记 3 两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应法则都相同.

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域.

例如

(1) $y=\sqrt{x}$的定义域为$D=[0,+\infty)$,

(2) $y=\log_a x$的定义域为$D=(0,+\infty)$,

(3) $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为$D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

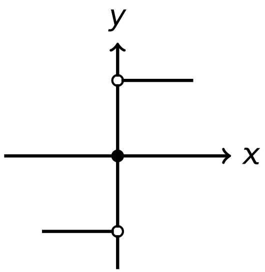
(1) 根号里面要求大于等于零;

(2) 对数里面要求大于零;

(3) 分母要求不能等于零.

(1) 符号函数:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & 当 x > 0, \\ 0, & 当 x = 0, \\ -1 & 当 x < 0. \end{cases}$$

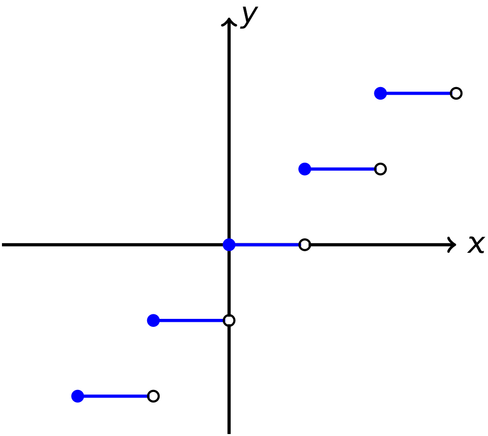


$$x = \operatorname{sgn} x |x|$$

(2) 取整函数: $y = [x]$, 其中$[x]$表示不超过x的最大整数.

显然

$$x - 1 < [x] \le x$$



(3) 狄利克雷函数:

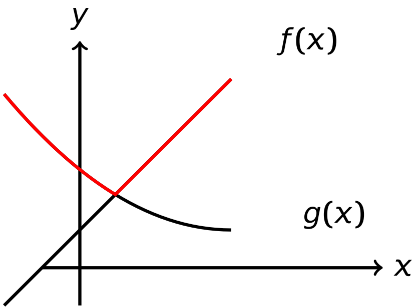
$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时.} \end{cases}$$

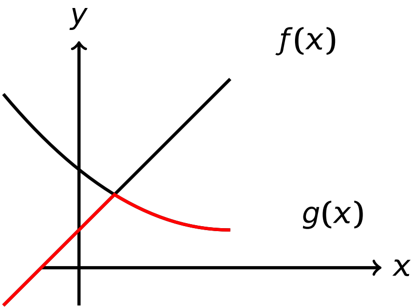
几个特殊函数

(4) 取最值函数

$$y = \max\{f(x, g(x)\}$$

$$y = \min\{f(x, g(x)\}$$





分段函数

如果一个函数在定义域的不同部分用不同的公式来表达，则称该函数为分段函数.

例子

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0,\\ x^2-1, & x\le 0.\end{cases}$$

给定函数$y=f(x)$, 设其定义域D关于原点对称,

1. 若$\forall x\in D$, 总有$f(-x)=f(x)$, 则称$f(x)$为偶函数.
2. 若$\forall x\in D$, 总有$f(-x)=-f(x)$, 则称$f(x)$为奇函数.

例子　$x, x^3, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^3}, \sin x, \tan x$ 为奇函数.

例子　$x^2, x^4, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x^4}, \cos x$ 为偶函数.

小注: 奇函数关于原点对称; 偶函数关于y轴对称.

函数的周期性

设函数$y = f(x)$的定义域为D，如果存在一个不为零的常数l，使得对任意的$x \in D$，有$(x \pm l) \in D$，且

$$f(x+l) = f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为周期函数；l称为$f(x)$的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例子　$y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 以 2π 为周期.

例子　$y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 以 π 为周期.

例 8 设函数 $y=f(x), x\in R$ 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$ 均对称，证明 $y=f(x)$ 是周期函数，并求周期.

证明.

由条件知:$f(a+x)=f(a-x)$, $f(b+x)=f(b-x)$,于是

$$
\begin{aligned}
f(x)&=f(a+(x-a))=f(a-(x-a))\\
&=f(2a-x)\\
&=f(b-(b+x-2a))=f(b+(b+x-2a))\\
&=f(x+2(b-a))
\end{aligned}
$$

故 $f(x)$ 是周期函数，且$2(b-a)$ 是它的一个周期.

定义 设函数$y = f(x)$的定义域为D, 区间$I \subset D$, x_1, x_2为区间I上的任意两个数,

(1) 若当$x_1 < x_2$时, 恒有$f(x_1) < f(x_2)$, 则称$f(x)$在区间I上单调增加或递增;

(2) 若当$x_1 < x_2$时, 恒有$f(x_1) > f(x_2)$, 则称$f(x)$在区间I上单调减少或递减;

函数的单调性

例子　$y = x$在$(-\infty, +\infty)$上是单调增加的.

例子　$y = \ln x$在$(0, +\infty)$上是单调增加的.

例子　$y = 1/x$在$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$上单调减少.

例子　$y = x^2$在$(-\infty, 0]$上单调减少, 在$[0, +\infty)$上单调增加.

定义 设函数$y = f(x)$在数集I上有定义，如果存在一个正数M，对于所有$x \in I$，恒有$|f(x)| \leq M$，则称函数$f(x)$是在I上的有界函数.若不存在这样的M，则称$f(x)$是在I上的无界函数.

例子 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 是有界函数.

例子 $y = x^2$, $y = \tan x$, $y = x \cos x$ 是无界函数.

第二节	映射与函数
2.1	映射的概念
2.2	逆映射与复合映射
2.3	函数的概念
2.4	函数的性质
2.5	小结　思考题

小结

1. 映射的有关概念: 映射、逆映射、复合映射.
2. 函数的有关概念: 函数、定义域、值域.
3. 函数的几种特性: 奇偶性、周期性、单调性、有界性.

思考 已知$f(x)$ 是一个偶函数，且满足 $f(a+x)=f(a-x)$，则$f(x)$是不是一个周期函数？若是，请说明它的一个周期，若不是，请说明理由.

解 若$a \neq 0$ 则为周期函数，且周期为$2a$(见例 8); 若$a=0$, 则不一定为周期函数.