高等数学--微积分 (二)

第六章 · 定积分

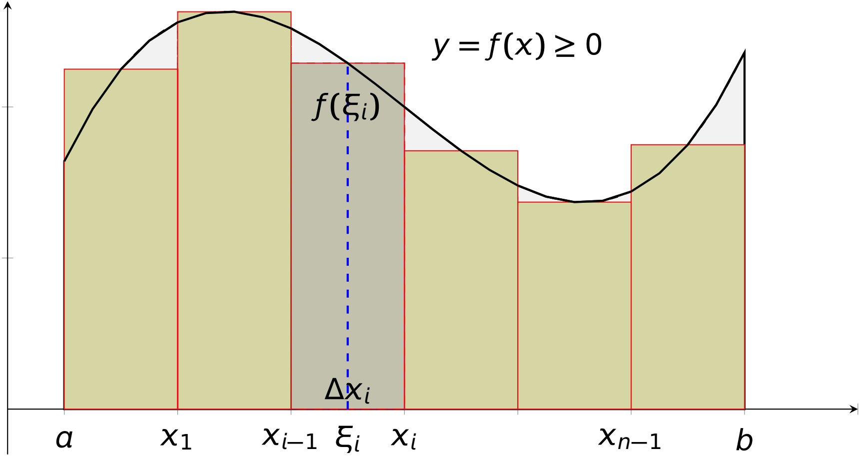
2021 年 3 月 7 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

第一节 定积分的概念

例 1　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

曲边梯形的面积



$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积

例子　计算由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1. 将区间 $[a,b]$ 分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1\le i\le n$.
2. 在每小段区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到面积的近似值为 $S\approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
3. 令 $\Delta x = \max\limits_i\{\Delta x_i\}$, 则当 $\Delta x\to 0$ 时就得到面积的实际值为 $S = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1. 将时间段 $[a, b]$ 分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.
2. 在每小段区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到位移的近似值为 $s \approx \sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.
3. 令 $\Delta t = \max\limits_{i}\{\Delta t_i\}$, 则当 $\Delta t \to 0$ 时就得到位移的实际值为 $s = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x=\max\limits_{i}\{\Delta x_i\}$，如果对 $[a,b]$ 的任意分法，对在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 x_i 的任意取法，当 $\Delta x\to 0$ 时，近似和的极限总趋于同一个数 I，我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是**可积的**，并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记为

$$I=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式
- a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间

注记 1 定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关．即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注记 2 (存在定理) 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续函数（或者是只有有限个间断点的有界函数），则它在 $[a,b]$ 上是可积的．

注记 3　如果 $a > b$，我们规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

特别地，如果 $a = b$，我们可以得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

注记 4 (几何意义)　设由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

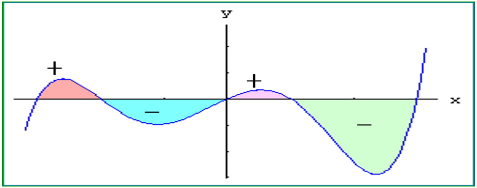
- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq 0$，则定积分

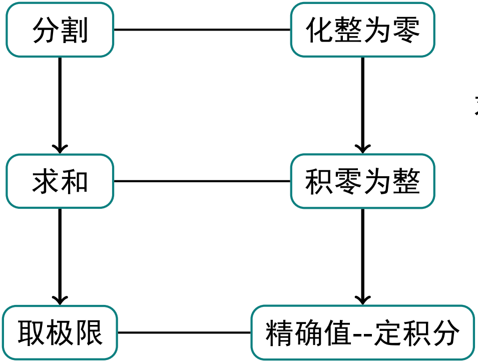
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -S.$$

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负，则定积分为各部分面积的代数和.



小结

1. 定积分的实质：特殊和式的极限.
2. 定积分的思想方法



求近似，以直代曲