2016–2017学年第一学期期末试题

一、单项选择题（共5题，每题3分，共计15分）

1. 矩阵A、B可以做减法运算的必要条件是 (　　) .

(A) 矩阵 A 、 B 有相同的行数　　(B) 矩阵 A 、 B 有相同的列数

(C) 矩阵 A 、 B 元素的个数相同　　(D) 拒阵 A、 B 为同型矩阵

2. 设 A 为可逆矩阵, 则 A^* 的逆矩阵为 (　　) .

(A) $|A|^{-1}A$　　(B) $|A|A$　　(C) $|A|^{-1}A^{-1}$　　(D) $|A|A^{-1}$

3. m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n(n\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 (　　) .

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中至少有一个零向量

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中任意两个向量成比例

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中至少有一个向量可由其余的向量线性表示

(D) $m<n$

4. 已知矩阵 A 的行列式值为3, 以下说法错误的是 (　　) .

(A) A 是满秩矩阵　　(B) A 是方阵　　(C) A 是可逆矩阵　　(D) A 的秩为 3

5. 设 A 、 B 为 n 阶方阵, 且 $AB=0$, $B\neq 0$, 则必有 (　　)

(A) $A=0$　　(B) $|A|=0$

(C) $|B|\neq 0$　　(D) $(A+B)^2=A^2+B^2$

二、填空题（共5题，每题3分，共计15分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}=$ ________.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 正整数 $n\geq 2$, 则 $A^n-2A^{n-1}=$________.

3. 设向量$\alpha_1=(1,2,3)$, $\alpha_2=(4,5,6)$, $\alpha_3=(3,3,3)$与向量组β_1,β_2,β_3等价, 则 β_1,β_2,β_3 的秩为________.

4. 设 A 为 3×3 矩阵, 已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $\widetilde{A}=(A\ b)$ 经初等行变换化为 $\widetilde{A}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a \end{pmatrix}$, 若此方程组无解, 则 a 的取值为________.

5. 设 A 为 4×5 矩阵, η_1,η_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解析, 则 $r(A)=$________.

三、**判断题**（共5题，每题2分，共计10分）

1. 设 A,B 为同阶方阵, 则 $|A+B|=|A|+|B|$.······························[ ]

2. 设 A,B 为同阶对称矩阵, 则 AB 也是对称矩阵.··························[ ]

3. 设矩阵 A,B 的乘积 $AB=E$, 则 $BA=E$.································[ ]

4. 如果 $r(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)$, 则向量 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性表示.··[ ]

5. 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件是其对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解.··[ ]

四、**解答题**（共4题，每题12分，共计48分.解答应写出推理，演算步骤）

1. 用克莱姆法则求线性方程组 $\begin{cases} 2x-5y+4z=4 \\ x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \end{cases}$ 中 y 的值.

2. 已知 $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X.

3. 设向量组：$\alpha_1=(-2,1,0,3)$, $\alpha_2=(1,-3,2,4)$, $\alpha_3=(3,0,2,-1)$, $\alpha_4=(0,-1,4,9)$.

(1) 求该向量组的秩及一个极大线性无关向量组;

(2) 将其它向量用该极大线性无关向量组表示.

4. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-px_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=t \end{cases}$, 当 p,t 取何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷多解; 并在方程组有无穷多解的情况下, 求出其通解.

五、综合题（本题12分，解答应写出推理步骤）

1. (1) 设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 若 $\beta_k=\alpha_k+t\alpha_4(k=1,2,3)$, 证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 对任意 t 都线性无关.

(2)设 n 维向是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{4}k\alpha_k=0,\beta_k=\alpha_k+k\lambda_k\xi(k=1,2,3,4)$, 问 $\lambda_k(k=1,2,3,4)$ 满足什么条件时, 对任意 n 维向量 ξ, 向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 总线性相关.