注意：文件只列出了部分要点，没有提到的内容不代表不会考察.

5 大数定律和中心极限定理

主要内容：切比雪夫不等式, 大数定律, 中心极限定理

5.1 大数定律

切比雪夫不等式：设随机变量X有期望和方差, 则对于任给的$\varepsilon > 0$, 有

$$P(|X-E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2},$$

即

$$P(|X-E(X)| < \varepsilon) \geq 1-\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

定义 1. 设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是一个随机变量序列, a 是一个常数,若对任何正数 ε,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

则称序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 依概率收敛于 a, 记为 $Y_n \xrightarrow{P} a$

依概率收敛的序列有如下性质:

- 设 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$, 又设 $g(x,y)$ 在点 (a,b) 连续,则

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b)$$

定理 1 (伯努利大数定律)**.** 设试验 E 是可重复进行的,事件 A 在每次试验中出现的概率 $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$, 将试验独立地进行n次,用 n_A 表示其中事件 A 出现的次数,则对于任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

或者

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

定理 2 (切比雪夫大数定律的特殊情况)**.** 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,且具有相同的数学期望和方差: $E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2(k=1,2,\cdots)$ 作前 n 个随机变量的算术平均 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ 则对于任意正数 ε, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\{\overline{X}-\mu\mid<\varepsilon\}\\
=&\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|<\varepsilon\right\}=1
\end{aligned}$$

定理 3 (辛钦大数定律)**.** 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,服从同一分布, 具有数学期望 $E(X_k)=\mu(k=1,2,\cdots)$, 则对于任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

5.2 中心极限定理

中心极限定理

常用结论：大量的同分布随机变量的和、平均值近似地服从正态分布.

定理 4 (独立同分布情形的中心极限定理)**.** 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,服从同一分布 ,且具有数学期望和方差 : $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2>0(i=1,2,\cdots)$, 则随机变量之和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \Phi(x)$$

> 该定理表明：n很大时，Y_n近似服从标准正态分布。

定理 5 (棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理)**.** 设随机变量 $\eta_n(n = 1, 2, \cdots)$ 服从参数为 $n, p(0 < p < 1)$ 的二项分布,则对于任意 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x \right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \Phi(x)$$

当 n 充分大时,对任意 $a < b$,有

$$\begin{aligned} P\{a \leqslant \eta_n \leqslant b\} &= P\left\{ \frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{\eta_u - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \end{aligned}$$