2015–2016学年第一学期期末试题

一、选择题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分）

1. 设 A 为 3×3 矩阵, 且 $|A|=-2$, 把 A 按列分块为 $A=(A_1,A_2,A_3)$, 其中 $A_j(j=1,2,3)$ 为 A 的第 j 列, 则行列式 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|=$ (　　) .

(A) -6　　(B) -12　　(C) 6　　(D) 12

2. 设方阵 A 可逆, 且 $AB=BA$, 则下列等式未必成立的是 (　　) .

(A) $A^2B=BA^2$　　(B) $A^TB=BA^T$　　(C) $A^{-1}B=BA^{-1}$　　(D) $A^*B=BA^*$

3. 向量组线性无关的充分必要条件是 (　　) .

(A) 向量组中至少有一个部分组（非向量组本身）线性无关

(B) 向量组中的任何一个部分组（非向量组本身）均线性无关

(C) 向量组中至少有一个向量不能由其余的向量线性表示

(D) 向量组中的任何一个向量均不能由其余的向量线性表示

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以相互线性表示, 且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r_1$, $r\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_2$, 　$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_3$, 则 (　　) .

(A) $r_1=r_2=r_3$　　(B) $r_1=r_2<r_3$　　(C) $r_1+r_2=r_3$　　(D) $r_1+r_2<r_3$

5. 如果 $m\times n$ 非齐次线性方程组 $AX=b$ 有唯一解, 则 (　　) .

(A) $r(A)=m$　　(B) $r(A)<m$　　(C) $r(A)=n$　　(D) $r(A)<n$

二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分, 把答案填在题中的横线上）

1. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix}-1&0&-1&1\\1&1&x&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}$, 则 D 中 x 的系数是________.

2. 设方阵 A 满足 $A^2-A-3E=0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A+E)^{-1}=$ __________.

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,1)$, $\alpha_2=(2,3,1)$, $\alpha_3=(a,b,0)$ 线性相关, 则实数 a,b 满足的关系式为 ____________.

4. 设 A 是 n 阶方阵, 且 $r(A)=n-1$, 若 A 中每行元素之和均为 0, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 ________________________________.

5. 设 A 是秩为 3 的 5×4 矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个不同的解, 若 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=(2,0,0,0)^T$, $3\alpha_1+\alpha_2=(2,4,6,8)^T$, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解是 ____.

三、解答题（本大题共 5 小题, 每题 12 分, 共 60 分. 解答应写出推理, 演算步骤）

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ 的值。

2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 2 & 6 & -21 & -4 \\ -1 & -3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $AX+E=X+A^3$, 求矩阵 X 。

4. 设向量组: $\alpha_1=(-1,1,-1,3)$, $\alpha_2=(5,-2,8,-9)$, $\alpha_3=(1,1,3,1)$, $\alpha_4=(-1,3,1,7)$

   (1) 求该向量组的秩及一个极大线性无关向量组;

   (2) 将其余向量用该极大线性无关向量组线性表示。

5. 当 a 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=30 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ 4x_1+3x_2-4x_3+2x_4-2x_5=5 \end{cases}$$

   无解或有解; 并在有解的情况下, 求出其通解。

四、证明题（本大题 10 分, 解答应写出推理步骤）

1. 设 n 阶方阵 A 、 B 及 $A+B$ 均可逆, 证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆矩阵。