

—— 高等数学 B--微积分 (一) ——

第二章 · 极限与连续

—— 2021 年 3 月 18 日 ——

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

第一节

数列的极限

第二节

函数的极限

第三节

无穷小与无穷大

第四节

极限运算法则

第五节

极限存在准则、两个重要极限

第一节

数列的极限

1.1

引例

1.2

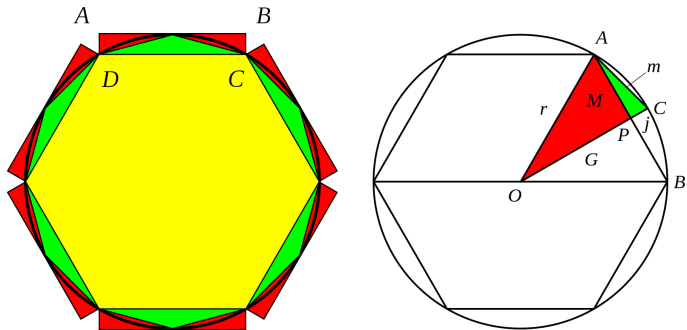
数列的有关概念

1.3

数列极限的定义

1.4

收敛数列的性质



记内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边型的面积为 A_n , 则 $n \rightarrow \infty$ 时, 正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小.

“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

...

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1.$$

第一节

数列的极限

1.1

引例

1.2

数列的有关概念

1.3

数列极限的定义

1.4

收敛数列的性质

数列的定义

定义 1 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ 排列的一列数称为数列, 通常用 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 表示, 其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为**通项**或一般项.

例子 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

例子 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

例子 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

定义 2 对数列 x_n , 若存在正数 M , 使得一切正整数 n , 恒有 $|x_n| \leq M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则, 称为无界.

例子 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 有界.

例子 $x_n = 2^n$ 无界.

小注: 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

若存在实数 A , 对一切 n 都满足 $x_n \geq A$, 称 $\{x_n\}$ 为下有界, A 是 $\{x_n\}$ 的下界;

同样, 若存在 B , 对一切 n 都满足 $x_n \leq B$, 称 $\{x_n\}$ 为上有界, B 是 $\{x_n\}$ 的上界.

若数列 $\{x_n\}$ 满足:

1 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 称数列 $\{x_n\}$ 为单调增数列;

2 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为单调减数列.

单调增数列和单调减数列统称为单调数列.

定义 3 将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下, 任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列, 简称子列.

例子 $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}$

例子 $x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}$

小注: 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中, 一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项, 显然, $n_k \geq k$.

第一节

数列的极限

1.1

引例

1.2

数列的有关概念

1.3

数列极限的定义

1.4

收敛数列的性质

数列极限的定义

问题 随着 n 的增大, x_n 也跟着变化. 当 n 趋于无穷大时, x_n 是否会无限接近一个确定的数?

- | | | |
|---|--------------------------|--|
| 1 | $x_n = 3$ | $3, 3, 3, 3, \dots \longrightarrow 3$ |
| 2 | $x_n = \frac{1}{2^n}$ | $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \longrightarrow 0$ |
| 3 | $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ | $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \longrightarrow 0$ |
| 4 | $x_n = 2^n$ | $2, 4, 8, 16, \dots \times$ |
| 5 | $x_n = (-1)^n$ | $-1, 1, -1, 1, \dots \times$ |

定义 4 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, 如果存在常数 A , 对任何 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**等于 A , 或者称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 A , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

小注: 1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;
2. 一般情况下, N 与任意给定的正数 ϵ 有关.

为了表达方便, 引入符号

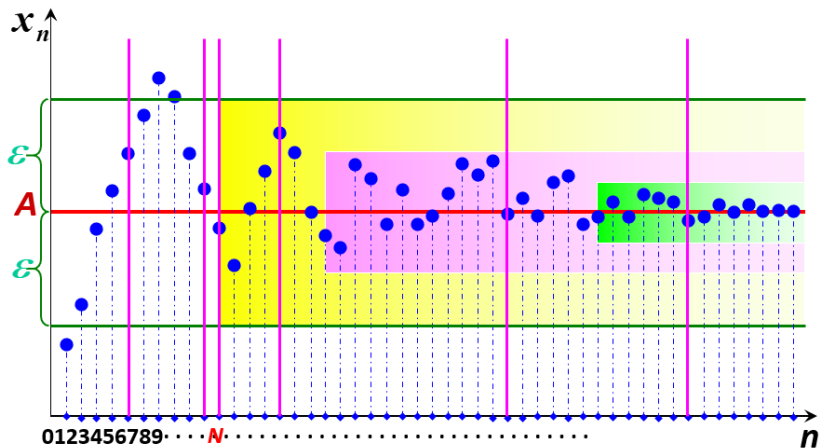
- \forall 任意给定的.
- \exists 存在.

使用 $\epsilon - N$ 语言, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 可以表示为:

$\forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \epsilon$.

小注: 数列极限的定义未给出求极限的方法.

数列极限的几何解释



数列极限的基本公式

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C = C$$

$$2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad (k > 0)$$

$$3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0, \quad (k > 0)$$

$$4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad (|q| < 1)$$

例子 设 $x_n = C$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = 1$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例子 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例子 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例子 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明 任给 $\epsilon > 0$, 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$.

若 $0 < |q| < 1$, $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$, 要使 $n \ln |q| < \ln \epsilon$, 只需要 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$, 故取 $N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln |q|} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^n - 0| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

例子 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明 任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有,

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$

发散的数列至少有这两种可能：

- 1 无界型的：比如 $x_n = 2^n$ ；
- 2 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$.

第一节

数列的极限

1.1

引例

1.2

数列的有关概念

1.3

数列极限的定义

1.4

收敛数列的性质

收敛数列的性质

性质 1 (极限的唯一性) 收敛数列的极限必唯一.

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$ 由定义可知:

$\forall \epsilon > 0, \exists N_1, N_2$, 使得:

当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$;

当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$.

取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$, 则当 $n > N$ 时有

$$|a - b| = |(x_n - b) - (x_n - a)|$$

$$\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b - a|.$$

这是不可能的, 故收敛数列不可能有两个极限.

收敛数列的性质

性质 2 (有界性) 设 $\{x_n\}$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leq M$.

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leq |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |A|\}$, 则对任何 n 都有 $|x_n| \leq M$.

推论 无界数列必定发散.

性质3 (保号性) 设数列收敛于 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

证明 取 $\epsilon = A/2$, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $x_n > A/2 > 0$.

小注: 这个定理表明, 若数列的极限为正 (或负), 则该数列从某一项开始以后所有项也为正 (或负).

定理 (保号性) 设数列 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则有 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

推论 如果 $x_n \geq y_n$, 而且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则有 $A \geq B$.

思考 若将上面的等号去掉, 结论如何?

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A .

小注： 这个定理表明：若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的.

- 数列：研究其变化规律；
- 数列极限：极限思想、精确定义、几何意义；
- 收敛数列的性质：唯一性、有界性、保号性、子数列的收敛性。

选择 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, 则该数列()

(A) 收敛且有界

(B) 收敛且无界

(C) 发散且有界

(D) 发散且无界

第一节

数列的极限

第二节

函数的极限

第三节

无穷小与无穷大

第四节

极限运算法则

第五节

极限存在准则、两个重要极限

第二节

函数的极限

2.1

函数极限的定义

2.2

函数极限的性质

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中**函数的极限**。我们主要研究以下两种情形：

- 1 自变量 x 任意接近于有限值 $x_0 (x \rightarrow x_0)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形；
- 2 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 ($x \rightarrow \infty$) 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形；

函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 对应函数的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A .

问题 如何用数学的语言刻画"无限接近"?

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \rightarrow x_0$ 的过程.

函数的极限 ($x \rightarrow x_0$)

定义 1 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

“ $\epsilon - \delta$ ” 定义: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

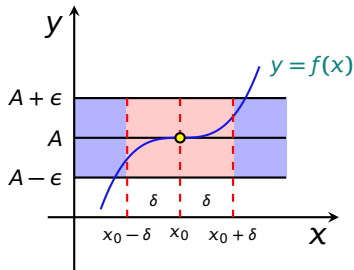
$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

极限的几何解释

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时,
函数 $y = f(x)$ 图形完全落在
以直线

$$y = A$$

为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区
域内.



小注: 一般情况下, δ 与 ϵ 有关.

小注: 函数极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

函数极限的例子

1 $y = C$

■ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow C$

2 $y = x$

■ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow x_0$

3 $y = 2x + 1$

■ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow 2x_0 + 1$

4 $y = \sqrt{x}$

■ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow \sqrt{x_0}$

函数极限的例子

例子 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C, (C \text{ 为常数})$.

证明 任给 $\epsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$

函数极限的例子

例子 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

函数极限的例子

例子 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ ($x_0 > 0$).

证明 $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\epsilon\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| &= \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\sqrt{x_0}\epsilon}{\sqrt{x_0}} = \epsilon \end{aligned}$$

函数的极限 ($x \rightarrow x_0$)

注记 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 仍可能存在.

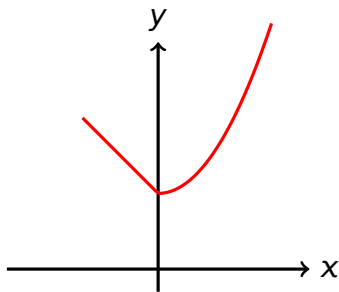
例 2 函数极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

函数的单侧极限

设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0; \\ x^2 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.



分 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情况分别讨论:

1 x 从左侧无限趋近 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0^-$;

2 x 从右侧无限趋近 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0^+$;

左极限和右极限

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

单侧极限与极限的关系

注意到

$$\begin{aligned} & \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\} \\ &= \{x | 0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x | -\delta < x - x_0 < 0\} \end{aligned}$$

于是我们有

定理 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

例子 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。

例子 设 $f(x) = |x|$, 研究函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

例子 设 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

注记 研究当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限, 不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

练习 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < 0 \\ e^x, & 0 < x < 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$; 判断极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

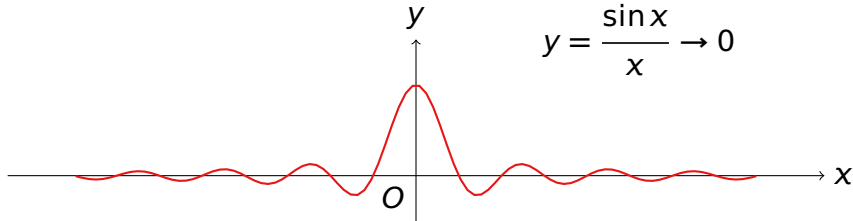
和 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在, 若存在求出该极限.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

函数的极限 ($x \rightarrow \infty$)

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.

$$y = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$$



函数的极限 ($x \rightarrow \infty$)

函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A .

通过上面演示实验的观察: 当 x 无限增大时, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题 如何用数学语言刻画函数“无限接近”.

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $|x| > X$ 表示 $x \rightarrow \infty$ 的过程.

函数的极限 ($x \rightarrow \infty$)

定义 2 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义, 如果存在常数 A , 对任何 $\epsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**, 记为

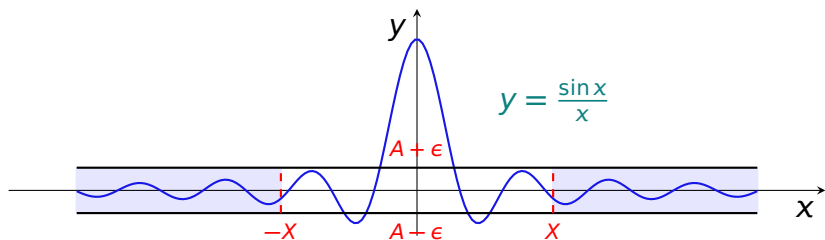
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

思考 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的 ϵ 语言定义.

注记 $x \rightarrow \infty$ 有两种方向, 即 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$. 类似地可以定义 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

定理 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

极限的几何解释



当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区域内.

函数的极限 ($x \rightarrow \infty$)

例子 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

证明

由条件可知:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{x} = \epsilon,$$

故对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \epsilon,$$

即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

函数的极限 ($x \rightarrow \infty$)

例子 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 由数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 知道, 存在正整数 $N_1 > 0$ 使得当 $n > N_1$ 时有 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. 取 $X = N_1 + 1$, 则当 $x > X$ 时有 $[x] > N_1$, 从而

$$\left| \frac{1}{2^x} - 0 \right| = \frac{1}{2^x} \leq \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

函数极限的基本公式 I

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C = C$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \text{ 为正整数})$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = 0 \quad (b > 1)$$

第二节

函数的极限

2.1

函数极限的定义

2.2

函数极限的性质

性质 1 (唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.

证明 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 由定义可知:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2$, 使得:

当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;

当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;

取 $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$\begin{aligned}|A - B| &= |(f(x) - A) - (f(x) - B)| \\ &\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|.\end{aligned}$$

这是不可能的, 故收敛数列不可能有两个极限.

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leq M$.

证明 取 $\epsilon = 1$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\ &\leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|\end{aligned}$$

取 $M = 1 + |A|$, 就得到函数极限的局部有界性.

例子 设 $f(x) = 1/x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 此时当 $0 < |x - 1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \leq 2$.

性质3 (局部保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ (或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$).

证明 取 $\epsilon = A/2$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例子 设 $f(x) = 2x - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 > 0$, 此时当 $0 < |x - 1| < 1/4$ 时, 有 $f(x) > 1/2 > 0$.

函数极限的性质

定理 (保号性) 设 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

推论 如果函数 $g(x) \geq h(x)$, 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = B$, 则有 $A \geq B$.

极限的性质, 对于其它形式的极限也成立.

- 极限的定义：定义、几何意义；
- 极限的性质：唯一性、局部保号性、局部有界性.

第一节

数列的极限

第二节

函数的极限

第三节

无穷小与无穷大

第四节

极限运算法则

第五节

极限存在准则、两个重要极限

第三节

无穷小与无穷大

3.1

无穷小

3.2

无穷大

3.3

小结 思考

定义 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 就称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的**无穷小**.

小注: $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \epsilon$

小注: 类似地, 可以定义 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷小.

无穷小

例子 0 、 x 、 x^2 、 $\sin x$ 、 $1 - \cos x$ 、 $\sqrt{1+x} - 1$ 和 $e^x - 1$ 都是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

例子 函数 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{2}{1+x}$ 和 $\frac{x}{x^2+1}$ 都是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

小注：无穷小是变量，不能与很小的数混淆.

小注：零是可以作为无穷小的唯一的数

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

定理的意义:

- 1 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
- 2 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

无穷小与函数极限的关系

证明 必要性: 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 所以对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令 $\alpha(x) = f(x) - A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) = A + \alpha(x)$.

充分性: 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|\alpha(x)| < \epsilon, \text{ 即 } |f(x) - A| < \epsilon,$$

也即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

无穷小的运算

定理 两个 (有限个) 无穷小的和差还是无穷小.

证明 设 α 及 β 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的两个无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists X_1 > 0, X_2 > 0$, 使得当 $|x| > X_1$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

当 $|x| > X_2$ 时恒有

$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max \{X_1, X_2\}$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有

$$|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$.

无穷小的运算

问题 无穷多个无穷小的和是不是无穷小？

答案 不是，例如

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \end{array}$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \rightarrow 1(n \rightarrow \infty)$$

无穷小的运算

定理 1 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明 设函数 u 在 $\dot{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 则 $\exists M > 0, \delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时恒有 $|u| \leq M$.

又设 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|u \cdot \alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u \cdot \alpha$ 为无穷小.

推论 常数与无穷小的积是无穷小.

推论 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

无穷小的运算

问题 无穷多个无穷小的积是不是无穷小？

答案 不是，例如：

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\ 1 & 2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\ 1 & 1 & 3^2 & 1/4 & 1/5 & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \rightarrow 0(n \rightarrow \infty) \end{array}$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \rightarrow 1(n \rightarrow \infty)$$

例子 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x})$.

练习 求下列函数极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$; 0

第三节

无穷小与无穷大

3.1

无穷小

3.2

无穷大

3.3

小结 思考

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷大, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

小注: 类似地, 可以定义 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大.

小注: 特殊情况: 正无穷大, 负无穷大

- 1 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
- 3 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例:
 $\frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$).

例子 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

证: $\forall M > 0$, 要使 $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$, 只需要 $|x-1| < \frac{1}{M}$. 取 $\delta = \frac{1}{M}$, 当 $0 < |x-1| < \delta = \frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

定义 1 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

练习 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{x+1}{x^2}$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大.

练习 $\frac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的无穷大.

定理 2 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$, 即 $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon$. 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小

续 反之, 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$. 则 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \frac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$. 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

小注: 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{2x^2 + 1} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x + 1} = \infty.$

第三节

无穷小与无穷大

3.1

无穷小

3.2

无穷大

3.3

小结 思考

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

- 1 无穷小（大）是变量, 不能与很小（大）的数混淆, 零是唯一的无穷小的数;
- 2 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
- 3 无界变量未必是无穷大.

在自变量的同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小: 反之, 无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案 不一定.

0 是无穷小, 但其倒数不存在.

所以课本上表示为“非零的无穷小的倒数是无穷大”.

第二节

函数的极限

第三节

无穷小与无穷大

第四节

极限运算法则

第五节

极限存在准则、两个重要极限

第六节

无穷小的比较

第四节

极限运算法则

4.1

极限运算法则

4.2

求极限方法举例

定理 1 如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 那么

1 $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

2 $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

3 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$ (要求分母不为零)

四则运算法则※

证明 因为 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$ 所以

$$f(x) = A + \alpha, g(x) = B + \beta. \text{ 其中 } \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0.$$

由无穷小运算法则, 得

$$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned}[f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) &= (A + \alpha)(B + \beta) - AB \\ &= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \rightarrow 0.\end{aligned}$$

四则运算法则*

续

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B + \beta)},$$

因为 $B\alpha - A\beta \rightarrow 0$ 又因为 $\beta \rightarrow 0, B \neq 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|\beta| < \frac{|B|}{2}$, 所以

$$|B + \beta| \geq |B| - |\beta| > |B| - \frac{1}{2}|B| = \frac{1}{2}|B|.$$

所以

$$|B(B + \beta)| > \frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left| \frac{1}{B(B + \beta)} \right| < \frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

推论 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim [cf(x)] = c \lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

第四节

极限运算法则

4.1

极限运算法则

4.2

求极限方法举例

1 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a_0 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n + a_1 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0)\end{aligned}$$

2 设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

注意：若 $Q(x_0) = 0$, 则商的法则不能应用。

3 如果基本初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

例子 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$.

解 原式 $= 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1$
 $= 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$

求极限方法举例

例子 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\&= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\&= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \neq 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3}$$

求极限方法举例 ($\frac{0}{0}$ 型)

例子 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+1}{3+3} = \frac{2}{3}$$

求极限方法举例 ($\frac{0}{0}$ 型)

例子 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

求极限方法举例 ($\frac{0}{0}$ 型)

例子 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} = 2$, 求 a 、 b .

解 $x \rightarrow 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在. 则

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1 + a)(x - 1)}{(x + 3)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1 + a}{x + 3} = \frac{2 + a}{4} = 2.\end{aligned}$$

故 $a = 6, b = -7$.

求极限方法举例 ($\infty - \infty$ 型)

例子 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x}$$
$$= - \frac{1}{1+1} = - \frac{1}{2}$$

求极限方法举例 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

例子 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1}$.

解 先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}}{7 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

求极限方法举例 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{3x + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{3x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x + 1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例子 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x + 1} + ax + b \right) = 2$, 求 ab .

解

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 + ax(x + 1) + b(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + a)x^2 + (a + b)x + 2 + b}{x + 1}\end{aligned}$$

若商的极限存在, 则必须 $1 + a = 0$, $a + b = 2$ 解得

$$a = -1, b = 3.$$

求极限方法举例

例子 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$

解 $n \rightarrow \infty$ 时, 是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

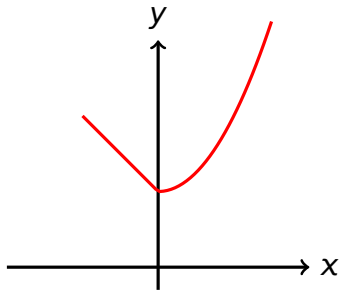
$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

求极限方法举例

设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0; \\ x^2 + 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



解 易知

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = 1 - 0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = 1 + 0 = 1,$$

左右极限相等, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

练习 求下列函数极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2 \ln(1 + x) + e^x + 2); \dots\dots\dots 3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\sqrt{x} - 1}; \dots\dots\dots 4$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}. \dots\dots\dots \frac{5}{4}$$

复合函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$$

$$\dot{U}(x_0, \delta)$$

$$\downarrow g$$

$$U(u_0, \eta)$$

 \neq

$$\dot{U}(u_0, \eta)$$

$$\downarrow f$$

$$U(A, \epsilon)$$

$$\dot{U}(x_0, \delta)$$

$$\downarrow$$

$$\times f \circ g$$

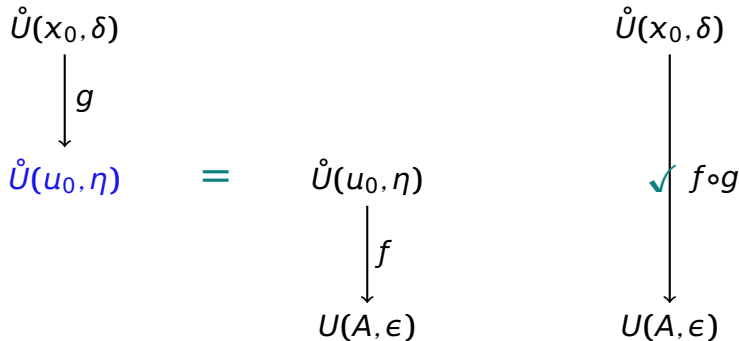
$$\downarrow$$

$$U(A, \epsilon)$$

复合函数的极限

$$\begin{aligned} x &\in \mathring{U}(x_0, \delta_0) \\ g(x) &\neq u_0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$$



复合函数的极限

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$$

$$\mathring{U}(x_0, \delta)$$

$$\downarrow g$$

$$U(u_0, \eta)$$

=

$$U(u_0, \eta)$$

$$\downarrow f$$

$$U(A, \epsilon)$$

$$\mathring{U}(x_0, \delta)$$

$$\downarrow$$



$$f \circ g$$

$$U(A, \epsilon)$$

复合函数的极限

定理 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A.$$

定理 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(u_0).$$

例子

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

- 1 极限的四则运算法则及其推论;
- 2 极限求法;
 - 多项式与分式函数代入法求极限;
 - 消去零因子法求极限;
 - 无穷小因子分出法求极限;
 - 利用无穷小运算性质求极限;
 - 利用左右极限求分段函数极限.
- 3 复合函数的极限运算法则

问题 在某个过程中, 若 $f(x)$ 有极限, $g(x)$ 无极限, 那么 $f(x) + g(x)$ 是否有极限? 为什么?

解 没有极限, 使用反证法易证.

第三节

无穷小与无穷大

第四节

极限运算法则

第五节

极限存在准则、两个重要极限

第六节

无穷小的比较

第七节

函数的连续性

本节基本内容

极限存在准则 I



重要极限 I

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

极限存在准则 II



重要极限 II

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

第五节

极限存在准则、两个重要极限

5.1

夹逼准则

5.2

重要极限 II

5.3

连续复利

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 而且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$.

例子 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$

注记 在上述定理中, 如果不等式 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立, 结论不变.

极限存在准则 I

证明 $\because y_n \rightarrow a, \quad z_n \rightarrow a,$

\therefore 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, \quad N_2 > 0$, 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \varepsilon$,

当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 上两式同时成立, 即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

当 $n > N$ 时, 恒有

$$a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I') 如果 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$.

注记 若将 $x \rightarrow x_0$ 全部改为 $x \rightarrow \infty$, 定理仍成立.

注记 在上述定理中, 如果不等式 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立, 结论不变.

准则 I 和准则 I' 称为**夹逼准则**或者**两面夹准则**

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 $y_n (f(x))$ 与 $z_n (h(x))$, 并且 $y_n (f(x))$ 与 $z_n (h(x))$ 的极限是容易求的.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

一般地, 如果当 $x \rightarrow 0$ 时, $\phi(x) \rightarrow 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \phi(x)}{\phi(x)} = 1$$

重要极限 I

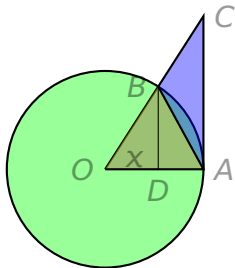
证明

如图所示, 设单位圆 O , 圆心角 $\angle AOB = x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) 作单位圆的切线, 得 $\triangle ACO$. 设扇形 OAB 的圆心角为 x , $\triangle OAB$ 的高为 BD , 则有 $\sin x = BD$, $x = \text{弧 } AB$, $\tan x = AC$, 所以

$$\sin x < x < \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



重要极限 I

证明续 上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0, \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

例子 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right)$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \times 1 = 3$$

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$.

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \right)$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x}$$
$$= \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}$$

练习 求下列函数极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

解

$$(1) \frac{5}{4}$$

$$(2) \frac{2}{3}$$

练习 1 求下列函数极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{x}$$

例子 求 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$.

解 令 $t = x - \pi$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1\end{aligned}$$

重要极限 I

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$.

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

第五节

极限存在准则、两个重要极限

5.1

夹逼准则

5.2

重要极限 II

5.3

连续复利

定理 (极限存在准则 II) 单调且有界的数列必定收敛.

1 单调**增加**且有**上界**的数列必定收敛.

2 单调**减少**且有**下界**的数列必定收敛.

注记 若数列是某一项开始单调变化, 结论仍然成立.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

\Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

证明 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 则

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\&= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\&\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

显然 $x_{n+1} > x_n$, $\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的;

证明续 又因为

$$\begin{aligned}x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\&= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,\end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界的由单调收敛准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
e ($e = 2.71828 \cdots$)

可以证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \xrightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

一般地, 如果当 $x \rightarrow a$ 时, $\psi(x) \rightarrow 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = e$$

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2$$

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x$

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}} \right]^{-\frac{1}{3}} = e^{-1/3}$$

练习2 求函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^x \dots\dots\dots e^{-4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{3x}} \dots\dots\dots e^{-\frac{2}{3}}$$

定理 若 $\lim_{x \rightarrow \square} u(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow \square} v(x) = B$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow \square} u(x)^{v(x)} = A^B.$$

例子 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2x}{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^2.$$

练习 求函数极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{4x}} \dots\dots\dots e^{\frac{1}{4}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{x+1} \dots\dots\dots e^{-1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x-3} \dots\dots\dots e^4$$

例子 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 由条件知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

例子 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

解 令 $e^x - 1 = u$, 即 $x = \ln(1 + u)$. 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $u \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1 + u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} = 1$$

例子 证明数列 $x_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{3}}}}$ (n 重根式) 的极限存在.

证明 显然 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{3 + x_k} < \sqrt{3 + 3} < 3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

证明续 由 $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$ 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + x_n}$$

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = A$, 则有

$$A = \sqrt{3 + A}.$$

$$\text{解得 } A = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, A = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ (舍去)}$$

第五节

极限存在准则、两个重要极限

5.1

夹逼准则

5.2

重要极限 II

5.3

连续复利

例子 复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

■ 粗略： $M(1 + 0.5\%) = M \times 1.005$

■ 正常： $M\left(1 + \frac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$

■ 极端： $M\left(1 + \frac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实 常数 e 反映了连续增长的规律.

设一笔贷款 A_0 (称为本金), 年利率为 r , 则

- 一年后本利和

$$A_1 = A_0(1 + r)$$

- 两年后本利和

$$A_2 = A_1(1 + r) = A_0(1 + r)^2$$

- k 年后本利和

$$A_k = A_0(1 + r)^k$$

如果一年分 n 期计息, 年利率仍为 r , 则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

k 年后本利和 $A_k = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk}$

如果计息期数 $n \rightarrow \infty$ ，即每时每刻计算复利 (称为连续复利)，则 k 年后的本利和

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rk} \\ &= A_0 e^{rk} \end{aligned}$$

两个重要极限

复习 1 求函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin x)^{\frac{1}{3x}} \dots\dots\dots e^{-\frac{2}{3}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x \sin x} \dots\dots\dots 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^{3x+1} \dots\dots\dots e^{-3}$$

1 两个准则

- 两面夹 (夹逼) 准则
- 单调有界准则

2 两个重要极限

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$

例子 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x$ 不是无穷小, 所以不能用重要极限 II 公式来计算.

实际上, 这个函数是初等函数, 且在 0 的邻域有定义, 所以其极限为 $(1 + 1)^1 = 2$.

例子 设数列 $x_n = \frac{n!}{n^n}$, 研究数列的极限.

例子 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{2}$, 且当 $n \geq 1$ 时有 $x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

解 先说明数列收敛, 再根据数列的递归关系求出其极限.

第四节

极限运算法则

第五节

极限存在准则、两个重要极限

第六节

无穷小的比较

第七节

函数的连续性

第八节

闭区间上连续函数的性质

第六节

无穷小的比较

6.1

无穷小的阶

6.2

等价无穷小代换

6.3

小结与思考

无穷小的比较

例子 比较 $x \rightarrow 0$ 时的三个无穷小 x , $2x$, x^2 .

x	1	0.1	0.01	0.001	\dots	\rightarrow	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	\dots	\rightarrow	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	\dots	\rightarrow	0

定义 设 α 、 β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 记为 $\beta = o(\alpha)$, 则称 β 是比 α **高阶**的无穷小.

2 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α **低阶**的无穷小.

3 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是 **同阶**的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 和 α 是 **等价**无穷小, 记为 $\beta \sim \alpha$.

4 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

例子 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 x^2 比 x 高阶.

例子 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 x^2 比 x^3 低阶.

例子 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例子 在 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

练习 1 易知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

- (1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶?
- (2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶?
- (3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶?
- (4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价?

常用的等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有如下这些常用的等价无穷小:

$$(1) \quad \sin x \sim x$$

$$(5) \quad \ln(1+x) \sim x$$

$$(2) \quad \tan x \sim x$$

$$(6) \quad e^x - 1 \sim x$$

$$(3) \quad \arcsin x \sim x$$

$$(7) \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$(4) \quad \arctan x \sim x$$

$$(8) \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$$

意义: 用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

等价无穷小的充要条件

定理 β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$. 称 α 是 β 的主要部分.

证明 必要性 设 $\alpha \sim \beta$,

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$
$$\therefore \beta - \alpha = o(\alpha), \quad \text{即 } \beta = \alpha + o(\alpha)$$

充分性 设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) = 1$$
$$\therefore \alpha \sim \beta$$

第六节

无穷小的比较

6.1

无穷小的阶

6.2

等价无穷小代换

6.3

小结与思考

定理 设 $\alpha \sim \alpha'$ 、 $\beta \sim \beta'$ ，且 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则有 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 。

证明

$$\begin{aligned}\lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \\ &= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}\end{aligned}$$

例子 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \cos x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$ 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8$$

等价无穷小代换

例子 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积, 则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换, 而不会改变原式的极限.

等价无穷小代换

例子 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{(2x)^3} = 0. \quad \times$$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x \sim 2x$, $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3} = \frac{1}{16}. \quad \checkmark$$

注记 只能分别代换乘除项, 不能分别代换加减项.

等价无穷小代换

注记 当 $\alpha_1 \sim \beta_1$ 、 $\alpha_2 \sim \beta_2$ 时，下列等式总是成立：

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \sim \beta_1 \cdot \beta_2$$

但下列等式未必成立：

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \not\sim \beta_1 \pm \beta_2$$

例子 当 $x \rightarrow 0$ 时，有

<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; display: inline-block;">$\begin{aligned}x + x^2 &\sim x + x^3 \\x &\sim x\end{aligned}$</div>	$\xrightarrow{\text{两边同时相减}}$	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; display: inline-block;">$x^2 \not\sim x^3$</div>
--	-------------------------------	---

练习 2 求下列函数极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\arcsin 2x}; \dots\dots\dots \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{(e^{2x} - 1) \ln(1 - 2x)} \cdot \dots\dots\dots -\frac{9}{8}$$

第六节

无穷小的比较

6.1

无穷小的阶

6.2

等价无穷小代换

6.3

小结与思考

- 1 无穷小的比较：反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较。
 - 高(低)阶无穷小；
 - 等价无穷小；
 - 无穷小的阶.
- 2 等价无穷小的代换：求极限的另一种方法，注意适用条件.

思考 任何两个无穷小都可以比较吗？

解 不能. 例如当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ 都是无穷小量, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 不存在且不为无穷大. 故当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不能比较.

第四节

极限运算法则

第五节

极限存在准则、两个重要极限

第六节

无穷小的比较

第七节

函数的连续性

第八节

闭区间上连续函数的性质

第七节

函数的连续性

7.1

函数的连续性的概念

7.2

函数的间断点

7.3

初等函数的连续性

7.4

小结 思考

例子 自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1 当时间变化很微小时, 气温的变化也很微小.

2 当边长变化很微小时, 正方形的面积变化很微小.

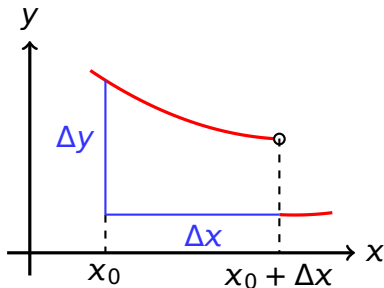
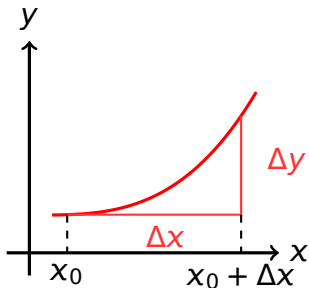
对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0 , 如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后, y 的相应改变量 Δy 也很微小, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续的概念

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, 当 x 在 $U(x_0, \delta)$ 内由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 的增量; 相应地, 函数 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.



定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.



定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

ε - δ 定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

从定义我们可以看出, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 必须满足以下三个条件:

1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义

2 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续等价于函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (极限存在):

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in \dot{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

.....

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (连续):

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$$

例子 试证函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$$\text{又 } f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

由定义知, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

例子 证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明 任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

因为 $\left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 1$, 故

$$|\Delta y| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

对任意的 α , 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $|\sin \alpha| < \alpha$, 故 $|\Delta y| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| < |\Delta x|$, \therefore 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$. 即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

定义 若函数 $f(x)$ 在 $(a, x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, b)$ 内有定义, 且 $f(x_0^+) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

例子 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 0, \\ x - 2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2 = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2) = -2 \neq f(0)$$

函数右连续但不左连续, 故函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续:

- 函数在开区间 (a, b) 内连续;
- 在左端点 $x = a$ 处右连续;
- 在右端点 $x = b$ 处左连续.

注记 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

性质 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

例子 判断函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的连续性:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin x}{x}, & x < 0 \\ 2, & x = 0. \\ \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \end{cases}$$

练习 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$, 判断它在 $x = 0$ 处的连续性.

解 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

第七节

函数的连续性

7.1

函数的连续性的概念

7.2

函数的间断点

7.3

初等函数的连续性

7.4

小结 思考

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称它在点 x_0 **间断**, 或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的**间断点**.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

- 1 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
- 3 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

可去间断点

定义 1 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点.

例子 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 可去间断点

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限都存在, 但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子 $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ 跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点: 函数在该点左、右极限都存在.

- 1 左右极限相等, 则为可去间断点;
- 2 左右极限不相等, 则为跳跃间断点.

第二类间断点

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

例子 $f(x) = \frac{1}{x}$ **无穷间断点**

例子 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ **振荡间断点**

函数的间断点

注记 间断点常见位置：(1) 分母为零；(2) 分段点.

例子 求函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

例子 求 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \leq 1, x \neq 0 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & x > 1, x \neq 2 \end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

在定义域 R 内每一点处都间断, 且都是第二类间断点.

例子 $f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ -x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$ 仅在 $x = 0$ 处连续, 其余各点处处间断.

第七节

函数的连续性

7.1

函数的连续性的概念

7.2

函数的间断点

7.3

初等函数的连续性

7.4

小结 思考

连续函数的四则运算

定理 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例子 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

定理 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

例子 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续故

$$y = \arcsin x$$

在 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 也连续.

例子 因为 $u = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续,

$y = \sin u$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,

故 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续

定理 初等函数在其**定义区间**内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例子 $y = \sqrt{\cos x - 1}$, $D: x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例子 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \sqrt{e^x - 1}$

解 原式 $= \sin \sqrt{e^1 - 1} = \sin \sqrt{e - 1}$.

第七节

函数的连续性

7.1

函数的连续性的概念

7.2

函数的间断点

7.3

初等函数的连续性

7.4

小结 思考

1 函数在一点连续需要满足的三个条件.

2 区间上的连续函数

3 间断点的分类

- 第一类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点: $f(x_0^-) = f(x_0^+)$

- 跳跃间断点: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$

- 第二类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在

- 无穷间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大

- 振荡间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大

4 初等函数的连续性

思考 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 连续, $f(x)$ 在 x_0 是否连续?

解 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续, $\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 且

$$0 \leq ||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] = f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

但反之不成立. 例 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x_0 = 0$ 不连续, 但 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 $x_0 = 0$ 连续.

第四节

极限运算法则

第五节

极限存在准则、两个重要极限

第六节

无穷小的比较

第七节

函数的连续性

第八节

闭区间上连续函数的性质

1 最值定理

2 零点定理

3 介值定理

第八节

闭区间上连续函数的性质

8.1

最大值和最小值定理

8.2

零点定理与介值定理

8.3

均衡价格的存在性

8.4

小结 思考

定义 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

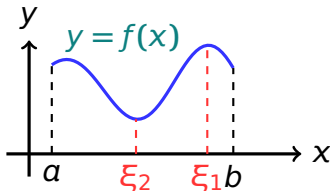
$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

最值定理

定理 (最值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m .

若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, 使得 $\forall x \in [a, b]$ 时, 有
 $f(\xi_1) \geq f(x), f(\xi_2) \leq f(x)$.



1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

例子 函数 $y = \tan x$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是连续的, 但在这个开区间上它是无界的, 而且也没有最大值和最小值.

例子 函数
$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

在区间 $[0, 2]$ 虽然有界, 但既无最大值也无最小值.

第八节

闭区间上连续函数的性质

8.1

最大值和最小值定理

8.2

零点定理与介值定理

8.3

均衡价格的存在性

8.4

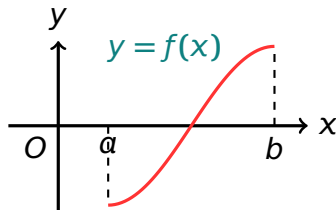
小结 思考

零点定理

定义 如果 x_0 使 $f(x_0) = 0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 (零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.

几何解释: 连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧, 则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



例子 证明方程 $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ 内各有一个实根.

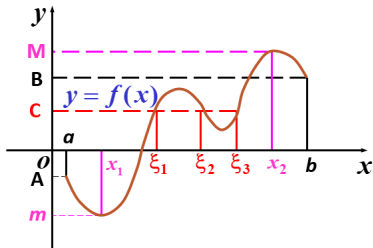
例子 证明方程 $2 \sin x = x + 1$ 有实数解.

介值定理

定理 (介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$ 和 $f(b) = B$ 不相等, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C , 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

证明 令 $g(x) = f(x) - C$. 则由零值定理可以得到结论.

几何意义: 在 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y = f(x)$ 与水平直线 $y = C$ (C 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间) 至少相交一点.



推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

证明 设 $f(x_1) = M, f(x_2) = m$, 在区间 $[x_1, x_2]$ (或者 $[x_2, x_1]$) 上运用介值定理可得结论

例子 证明方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明 令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 又 $f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0$, 由零点定理, $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

\therefore 方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 上至少有一根 ξ

介值定理

例子 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, x_1, x_2, \dots, x_n 为 $[a, b]$ 上的 n 个点, 证明: 在 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 与最小值 m , 显然有

$$m \leq f(x_i) \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

于是

$$nm \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq nM \Rightarrow m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M$$

介值定理

证明续

(i) 若 $f(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ 或 $f(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$, 则可取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$.

(ii) 若 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ 与 $f(a), f(b)$ 不同, 由介值定理可知, 在 (a, b) 至少存在一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

综合 (i), (ii) 可知, 原命题得证.

不动点定理

例子 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且对于任意的 $x \in [a, b]$ 都有 $a \leq f(x) \leq b$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中有不动点, 即存在 $x^* \in [a, b]$, 使 $f(x^*) = x^*$.

证明 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由于 $a \leq f(x) \leq b$, 故

$$g(a) \geq 0, \quad g(b) \leq 0.$$

若 $g(a) = 0$, 可取 $x^* = a$.

若 $g(b) = 0$, 可取 $x^* = b$.

若 $g(a) > 0, g(b) < 0$, 则由介值定理知, 存在 $x^* \in (a, b)$, 使 $g(x^*) = 0$, 即有 $f(x^*) = x^*$

例子 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < a, f(b) > b$.
证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$

证明 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而

$$F(a) = f(a) - a < 0, F(b) = f(b) - b > 0,$$

由零点定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$F(\xi) = f(\xi) - \xi = 0,$$

即 $f(\xi) = \xi$

第八节

闭区间上连续函数的性质

8.1

最大值和最小值定理

8.2

零点定理与介值定理

8.3

均衡价格的存在性

8.4

小结 思考

假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数. 如果生产某种商品的资源十分昂贵, 则价格为零时供给必为零, 即 $S(0) = 0$; 再假定 $D(0) > 0$, 即消费者有消费欲望. 令

$$Z(P) = D(P) - S(P); \text{ 于是 } Z(0) = D(0) - S(0) > 0.$$

另外, 当价格涨到某个充分大的值 $P = P^*$ 时, 公司会发现生产该产品利润丰厚, 而顾客会感到价格过高, 这样必然导致供过于求, 即 $D(P^*) < S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*) = D(P^*) - S(P^*) < 0.$$

又 $D = D(P)$ 和 $S = S(P)$ 都是区间 $[0, P^*]$ 上的连续函数, 所以 $Z(P) = D(P) - S(P)$ 也是区间 $[0, P^*]$ 上的连续函数, 于是由零点定理, 存在 $P_e \in (0, P^*)$, 使得

$$Z(P_e) = D(P_e) - S(P_e) = 0,$$

即

$$D(P_e) = S(P_e), \text{ 且 } P_e > 0.$$

定理 假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数，且满足：

- 1 价格为零时，需求超过供给，即 $D(0) > S(0)$;
- 2 存在某个价格 $P = P^* > 0$ ，使得在此价格下，供给超过需求，即 $S(P^*) > D(P^*)$.

则市场上一定存在一个正的均衡价格，即存在 $P_e > 0$ ，使得 $D(P_e) = S(P_e)$.

第八节

闭区间上连续函数的性质

8.1

最大值和最小值定理

8.2

零点定理与介值定理

8.3

均衡价格的存在性

8.4

小结 思考

■ 四个定理

- 1 最值定理
- 2 零点定理
- 3 介值定理
- 4 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

■ 解题思路

- 1 直接法：先利用最值定理, 再利用介值定理;
- 2 辅助函数法：先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理;

思考 假设有一个登山者头天上午 8 点从山脚开始上山, 晚上 6 点到达山顶, 第二天上午 8 点从山顶沿原路下山, 下午 6 点到达山脚. 问该登山者在上、下山过程中, 会同时经过同一地点吗? 为什么?

解 会.

不妨设山高为 h , 登山者头天登山的高度函数 $f_1(x), f_2(x)$ 在 $[8, 18]$ 上连续, 且

$$f_1(8) = 0, f_1(18) = h; f_2(8) = h, f_2(18) = 0$$

设

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

则 $f(x)$ 在 $[8, 18]$ 上连续, 且

$$f(8) = -h < 0, f(18) = h > 0.$$

由零点定理知存在一点 $\xi \in (8, 18)$, 使 $f(\xi) = 0$.

问题 证明方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

问题 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$