8 多元函数

邻域

设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2,\delta$ 为某一正数,在 $\mathbb{R}^2$ 中与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域,记作 $U(P_0,\delta)$, 即

$$\begin{aligned}U(P_0,\delta)&=\left\{P\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,|P_0P|<\delta\right\}\\&=\left\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.\end{aligned}$$

在几何上, $U(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心,以 δ 为半径的圆盘(不包括圆周).

二元函数的极限：定义

定义 1. 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点$P_0(x_0,y_0)$的 δ邻域，记为$U(P_0,\delta)$。

定义 2. 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\middle|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点$P_0(x_0,y_0)$的 去心δ邻域，记为$\mathring{U}(P_0,\delta)$。

定义 3. 设二元函数$f(P)=f(x,y)$的定义域为D, $P(x_0,y_0)$是D的聚点。如果存在常数A，对任意给定$\epsilon>0$，总存在一个$\delta>0$，只要$(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$，就有

$$|f(x,y)-A|<\epsilon,$$

则称当(x,y)趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$以A为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$$

注记. *1.* 二元函数的极限也叫二重极限.

2. 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

二元函数的极限：解释

注记. 函数极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$成立等价于当$(x,y)$ 以任意方式趋于(x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋于A。

确定极限不存在的方法

1. 令$P(x,y)$沿 $y = kx$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ ，若极限值与 k 有关，则可断言极限不存在;
2. 找两种不同趋近方式, 使$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在, 但两者不相等，此时也可断言 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.

多元函数的连续性

定义 4. 设二元函数 $f(P) = f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点, 且 $P_0(x_0,y_0) \in D$, 若 $f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称$f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.如果 $f(x,y)$ 在 D 的每一点处都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

多元初等函数：由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数。

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

注记. 二元函数有和一元函数类似的性质:

1. 二元初等函数在定义区域上总是连续的。

2. 若二元函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则它在D上必能取得最大值和最小值(从而有界)。

3. 若二元函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则它在D上必能取得介于最大值和最小值之间的任何值。

偏导数的定义

定义 5. 设函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)某邻域内有定义，如果极限

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ z_x(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \text{或}\ f_x(x_0,y_0)$$

类似地定义函数在点(x_0,y_0)处对y的偏导数为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

偏导数的求法

实际求$z=f(x,y)$的偏导数时，因为始终只有一个自变量在变动，另一个自变量可看作常量，所以仍旧用一元函数的微分方法求解.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Longrightarrow\boxed{\text{把}y\text{暂时看作常量而对}x\text{求导数}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Longrightarrow\boxed{\text{把}x\text{ 暂时看作常量而对}y\text{求导数}}$$

有关偏导数的几点说明:

1. 偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 是一个整体记号，不能拆分;
2. 求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求;
3. 多元函数在某点偏导数存在$\overset{\times}{\Longrightarrow}$连续.

高阶偏导数

对$z=f(x,y)$的偏导数z_x和z_y再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$ .... 纯偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$ .... 纯偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$ .... 混合偏导
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$ .... 混合偏导

定义：二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

定理 1. 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

偏导数在经济分析中的应用：两种商品之间的关系、交叉弹性。

全微分

定义. 对于二元函数$z=f(x,y)$，如果

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中A，B与Δx，Δy无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数可微，并称它的全微分为

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

定理. 如果函数$z=f(x,y)$可微，则$A=f_x(x,y)$，$B=f_y(x,y)$. 即有

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\,\mathrm{d}x+f_y(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

其中$\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=\Delta y$.

定理. 如果多元函数的各个偏导数都连续，则全微分存在.

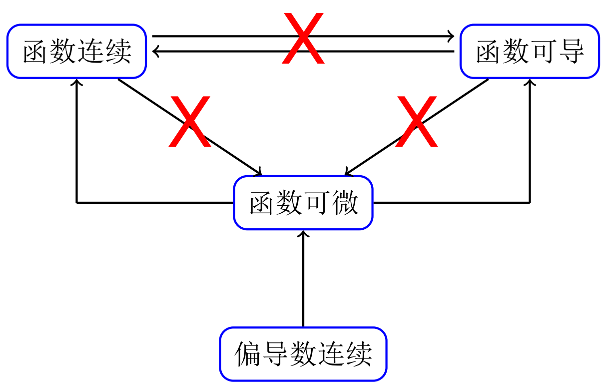
设$z = f(x, y)$，则全微分为

$$\mathrm{d}z = f_x(x, y)\mathrm{d}x + f_y(x, y)\mathrm{d}y$$

设$u = f(x, y, z)$，则全微分为

$$\mathrm{d}u = f_x(x, y, z)\mathrm{d}x + f_y(x, y, z)\mathrm{d}y + f_z(x, y, z)\mathrm{d}z$$

连续、可导、可微之间的关系



复合函数求导：情形**1**

设$z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$，则我们得到复合函数$z = f(\phi(t), \psi(t))$。此时我们有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

复合函数求导：情形**2**

设$z=f(u,v)$, $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则我们得到复合函数$z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$。此时我们有偏导数

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2)\end{aligned}}$$

例 **1.** 设$z=uv$，$u=3x^2+y^2$, $v=2x+y$，求偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

隐函数的导数**1**

定理 **2.** 设方程$F(x,y)=0$确定了隐函数$y=f(x)$，且$F(x,y)$有连续偏导数，则有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.}$$

例 **2.** 设方程$y-xe^y+x=0$确定了隐函数$y=f(x)$，求导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

隐函数的导数**2**

定理 **3.** 设方程$F(x,y,z)=0$确定了隐函数$z=f(x,y)$，且$F(x,y,z)$有连续偏导数，则有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}$$

例 **3.** 设方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$确定了隐函数$z=f(x,y)$，求偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

多元函数极值

定理 4 (极值的必要条件)**.** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零: $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

定理 5 (极值的充分条件)**.** 如果函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)某邻域有连续的二阶偏导数，且(x_0,y_0)是它的驻点。设 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $AC-B^2>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值。

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $AC-B^2<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值。

(3) 如果 $AC-B^2=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另外判定。

注记.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC-B^2.$$

条件极值与拉格朗日乘数法

问题. 求函数$u=f(x,y)$在约束条件$g(x,y)=0$下的极值。

解法. 令$L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$，由

$$\begin{cases} L_x(x,y)=0 \\ L_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

消去λ，解得的(x,y)即为极值可疑点。