6 定积分

定积分的性质

性质 1. 设k为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2. （函数可加性）

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3. （区间可加性）设$a<c<b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 1. 即使c不在a和b之间，上述性质依然是成立的.

性质 4.

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

性质 5. 设在区间$[a,b]$上$f(x)\geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

推论. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$

性质 6. 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值分别为M和m，则有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

性质 7 (积分中值定理)**.** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$中至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

积分上限的函数及其导数

定义 1. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，令$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为积分上限的函数或变上限积分.

定理 1.

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

定理 2. 对于更一般的变限积分，我们有下面求导公式： *(必考点)*

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

原函数存在定理

定理 3 (原函存在定理)**.** 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数。

微积分基本公式

定理 4. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

它称为微积分基本公式或牛顿一莱布尼茨公式。

定积分的换元公式

定积分换元公式：令$x=\phi(t)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

其中，当 $x=a$ 时，$t=\alpha$；当 $x=b$ 时，$t=\beta$。

换元公数注意事项**(一)**

(1) 用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量时，积分限也相应的改变.

(2) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数$\Phi(t)$ 后，不必象计算不定积分那样再要把$\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只要把新变量的上、下限分别代入$\Phi(t)$然后相减就行了.

(3) 用第一类换元法即奏微分法解定积分时可以不换元，当然也就不存在换上下限的问题了.

换元公数注意事项**(二)**

(1) 用换元法解题时，要注意看换元积分公式的内容;

考察 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 令 $x=\frac{1}{t}$..(×)

(2) 对分段函数和含绝对值号的积分，计算时必须分区间进行;

(3) 对被积函数进行适当变形时, 要注意符号问题。

定理. *(1) 若$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0.$*

(2) 若$f(x)$为偶函数，则$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x.$

定理. $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续，以 T 为周期则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \ (a \text{ 为任意实数})$$

定积分的分部积分公式

设函数$u(x)$ 、$v(x)$ 在区间$[a,b]$上具有连续导数，则有 .

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

反常积分

反常积分有两种类型：

1. 无限区间上的积分：无穷限的反常积分
2. 对无界函数的积分：无界函数的反常积分

无限区间上的积分

定义 2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,如果

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (b>a)$$

存在, 就称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分,记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续,如果

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (b > a)$$

存在,就称此极限为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分,记作

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，如果反常积分

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 上述两个反常积分之和为 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的反常积分，即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

否则称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

无界函数的反常积分

定义 5. 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，且 $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, 如果极限 $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x(\varepsilon > 0)$ 存在, 就称此极限为无界函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上的反常积分,记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

定义 6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续，且 $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$, 如果极限 $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x(\varepsilon >$

0) 存在,就定义反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除 $x=c(a<c<b)$ 外连续，且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$,如果两个反常积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛,就定义反常积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

Γ函数

定义 8. $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ $(r>0)$为 Γ函数.

性质 8. Γ函数有如下公式

1. $\Gamma(1)=1$
2. $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!$
3. 余元公式 $\Gamma(r)\Gamma(1-r)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi r)}$ $(0<r<1)$.
4. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

定义 9. 对任何实数$x>-1$，定义其阶乘为

$$x! = \Gamma(x+1).$$

平面图形的面积

1. 由曲线 $y=f(x)$, x轴，直线$x=a$ 以及直线 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

2. 由 $y=f_1(x)$,$y=f_2(x)$, $x=a$,$x=b$所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x$$

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到
4. 计算积分结果

1. 由曲线 $x=\varphi(y)$, y轴，直线$y=a$ 以及直线 $y=b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y$$

2. 由曲线 $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$，直线$y=a$ 以及直线 $y=b$ 所围成的图形的面积为

$$S=\int_a^b |\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|\,\mathrm{d}y$$

旋转体的体积

由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$, $x=b$ 及x轴所围成的平面图形，绕x轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x=\int_a^b \pi y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

由曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$, $y=d$ 及y轴所围成的平面图形，绕y轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y=\int_c^d \pi x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2\,\mathrm{d}y$$

注记. 如果旋转体是由连续曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a, x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$\boxed{V_y=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx}$$