概率论与数理统计

第一章 · 随机事件的概率

上海立信会计金融学院

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类:

1. 确定性现象: 在一定条件下必然发生的现象;
2. 不确定性现象: 在一定条件下可能发生也可能不发生的现象.
   1. 个别现象 不能重复试验
   2. 随机现象: 可以重复试验, 并且结果呈现某种规律

- 太阳东升西落 (确定)
- 明天是否是晴天 (不确定)
- 抛一枚均匀的硬币, 正面是否向上 (不确定)

概率论与数理统计就是研究随机现象量的规律性的数学学科.

第一节　随机事件

1.1 随机试验与样本空间

试验

产生观测结果的行为或过程称为试验.

E1 掷一颗骰子，观察所掷的点数是几;

E2 将一枚硬币抛两次，观察正面 H 出现的次数;

E3 将一枚硬币抛两次，观察正面 H，反面 T 出现的情况;

E4 观察某产品的使用寿命;

E5 观察某地明天的天气是雨天还是非雨天.

随机试验

一个试验被称为随机试验，如果它满足条件：

1. 可能结果不止一个，结果明确；
2. 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

小注：可以在相同的条件下重复进行的随机试验称为可重复的随机试验 (E1–E4)，否则称为不可重复的随机试验 (E5).

在不引起混淆的情况下，我们将用随机试验或试验指代可重复的随机试验.

样本空间

随机试验的每个可能结果称为一个样本点，全体样本点组成的集合称为样本空间.

习惯上分别用 ω 和 Ω 表示样本点与样本空间.

样本空间

例： 求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币，观察正、反面出现的情况；

$$\{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$$

(2) 记录某地的最低与最高气温.

$$\{(x, y) | a \le x \le y \le b\}$$

其中 a, b 分别为该地气温的下界和上界.

1.2 随机事件

随机事件

样本空间 Ω 的任意一个子集称为一个随机事件，简称事件.

事件常用大写字母 A, B, C 等表示.

设 A 是一个事件，当试验中出现的样本点 $\omega \in A$ 时，称事件 A 发生.

随机事件

随机事件的分类：

1. 只含一个样本点的事件称为基本事件
2. 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
3. Ω：必然事件
4. $\varnothing$：不可能事件

1.3　事件的关系与运算

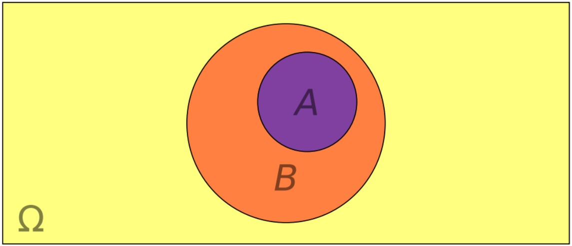
事件的关系与运算

事件是一个集合，因此事件间的关系和运算可以按照集合之间的关系和运算来规定.

设试验 E 的样本空间为 $\Omega, A, B, C, A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ 为 Ω 的子集.

事件的关系

若 $A \subset B$ (或 $B \supset A$)，则称事件 A 是事件 B 的子事件（或事件 B 包含 事件 A）.

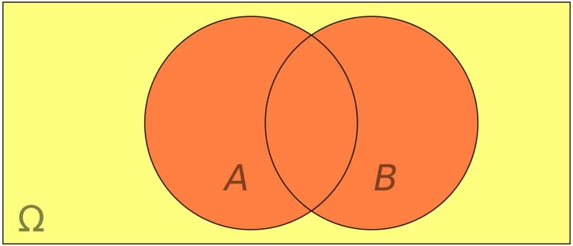


含义：若事件 A 发生时，事件 B 一定发生.

小注：对任意事件 A，有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$
若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$, 则称事件 A 与 B 相等.

事件的运算

称事件 $A \cup B$ 为事件 A 与 B 的和事件，其中
$A \cup B = \{\omega | \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$.



含义： 事件 A、B 至少有一个发生.

事件的运算

事件的和可以推广到多个的情形：如 n 个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \ldots, A_n \text{ 至少有一个发生”}$$

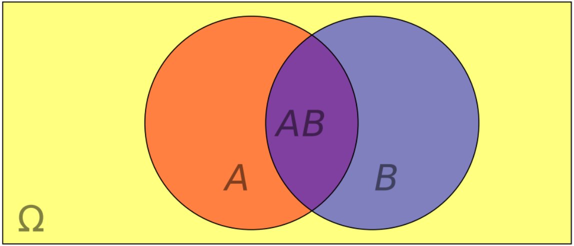
可数个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2 \ldots, \text{ 至少有一个发生”}$$

事件的运算

称事件 $A \cap B$ (简记为 AB) 为事件 A 与 B 的积事件，其中

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A 且 \omega \in B\}.$$



含义：事件 A 和 B 同时发生.

事件的运算

事件的积可以推广到多个的情形：如 n 个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \ldots, A_n \text{ 全都发生”}$$

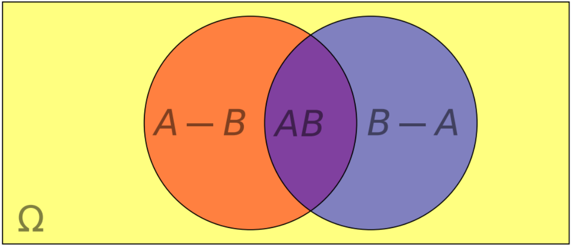
可数个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2 \ldots, \text{ 全都发生”}$$

事件的运算

称事件 $A-B$ 为事件 A 与 B 的差事件，其中

$$A-B=\{\omega|\omega\in A且\omega\notin B\}.$$

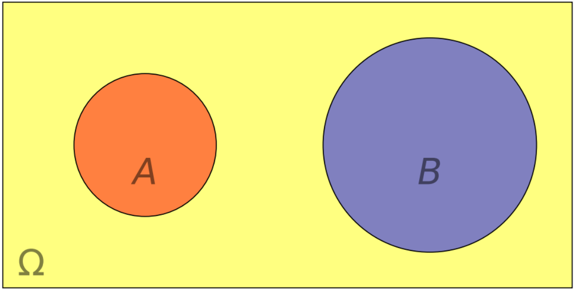


含义： 事件 A 发生，但 B 不发生.

性质： 对任意两个事件 A 和 B, 总有 $A-B=A-A\cap B$.

事件的关系

若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).

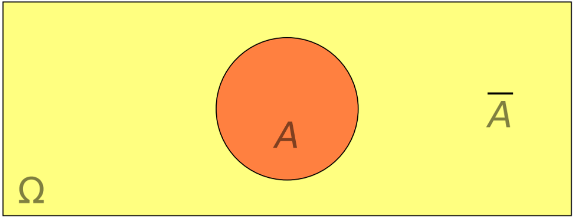


含义：事件 A 与 B 不可能同时发生.

事件的运算

称 $\varnothing - A$ 为事件 A 的对立事件(或逆事件)，记为 $\overline{A}$.

含义：事件 A 不发生.



性质：

1. 由差事件与对立事件的定义，显然 $A - B = A \cap B$.
2. 事件 A、B 对立当且仅当 A、B 互斥且 $A \cup B = \Omega$.

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算:

1. 交换律: $A \cap B = B \cap A A \cup B = B \cup A$
2. 结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
4. 对偶律: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

例 1　一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标 $(i=1,2,3)$. 试用事件的运算符号表示下列事件：

(1) 三次射击至少有一次击中目标；

(2) 三次射击恰有两次击中目标；

(3) 三次射击至多有一次击中目标.

解:　有条件可得

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(2) $A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3$.

(3) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

第二节　随机事件的概率

随机事件的概率

事件的概率：刻画试验中随机事件发生的可能性大小的度量.

在概率论的发展历史上，曾有过多种概率定义方法：

1. 概率的古典定义
2. 概率的统计定义
3. 概率的公理化定义

2.1 事件的频率

事件的频率

定义 1　设在 n 次试验中，事件 A 发生了 m 次，则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的频率 (frequency).

事件的频率

历史上的掷硬币试验：

试验者	投掷次数	正面次数	频率
德摩根	2048	1061	0.5181
浦丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

概率的统计定义

在相同条件下重复进行的试验中，若随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近，则称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A) = p$.

也就是说：概率是频率的稳定值.

意义：实际应用中常将大量重复试验中事件的频率作为概率的近似估计.

事件的频率

频率的性质：

1. $0 \leq f_n(A) \leq 1$；
2. $f_n(\Omega) = 1$, $f_n(\varnothing) = 0$；
3. 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 两两互斥，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

概率的公理化定义

定义 2 设 Ω 是样本空间，对每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应．若函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件：

1. 非负性：对任意事件 A，均有 $P(A) \geq 0$；
2. 规范性：$P(\Omega) = 1$；
3. 可列加性：若事件序列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 两两互斥，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_n(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率 (probability).

2.2 概率的性质

概率的性质

由概率的定义，不难得出概率的一些性质：

性质 1 $P(\varnothing) = 0.$

证明： 因为 $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \cdots$, 且 $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$,

由规范性及可列可加性得

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing \cup \cdots) = P(\Omega) + P(\varnothing) + \cdots$$

由概率的非负性可得 $P(\varnothing) = 0.$

性质 2(有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

概率的性质

性质 3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则

$$P(B-A)=P(B)-P(A), P(B) \geq P(A).$$

证明: 证明: 易知 $B=A \cup (B-A)$, 且 $A \cup (B-A)=\varnothing$.

由概率的可列可加性可知

$$P(B)=P(A \cup (B-A))=P(A)+P(B-A),$$

移项可得

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由概率的非负性可得 $P(B-A) \geq 0$, 即

$$P(B) \geq P(A).$$

推论: 对任意事件 A, B, 有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

概率的性质

性质 4 对任一事件 A, $P(A) \leq 1$.

证明: 因为 $A \subset \Omega$, 由性质 3可得.

性质 5对任一事件 A, 有 $P(A) = 1 - P(A)$.

证明:　因为 $A \cup A = \Omega$, 且 $A \cap A = \varnothing$, 由有限可加性可得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A) = P(A) + P(A),$$

也即

$$P(A) = 1 - P(A).$$

概率的性质

性质 6: (加法公式) 对任意两个事件 A, B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明： 因为

$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$

且

$$A(B - AB) = \emptyset,\ AB \subset B,$$

由性质 2 和性质 3 可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

概率概率的性质

推论 1 对任意三个事件 A_1,A_2,A_3，有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)$$
$$+P(A_1A_2A_3)$$

推论 2 对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P\left(A_iA_j\right)$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P\left(A_iA_jA_k\right)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

概率的性质

例 1 设 A, B 为两事件, $P(A)=0.3$, $P(A\cup B)=0.6$, 求 $P(AB)$.

解: 易知

$$AB = A(\Omega - B) = A - AB,$$

故

$$P(AB) = P(A - AB) = P(A) - P(AB).$$

又因为

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

所以

$$P(A) - P(AB) = P(A\cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3.$$

概率的性质

例 2　设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，求证 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$

证明：　由对偶率易知 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，故

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A\cup B}) \\
&= 1-P(A\cup B) \\
&= 1-[P(A)+P(B)-P(AB)] \\
&= 1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)\right] \\
&= P(AB).
\end{aligned}
$$

2.3 等可能概型 (古典概型)

古典概型

对某些特殊类型的随机试验，要确定事件发生的概率，并不需要作重复试验，而是根据人类长期积累的关于"对称性"的实际经验，提出数学模型，直接计算出来，从而给出概率相应的定义．这类试验称为等可能概率模型或古典概型．

古典概型

定义 3　如果一个随机试验具有以下特点:

1. 样本空间只含有限多个元素 (样本点);
2. 基本事件发生的可能性相同,

则称此随机试验是等可能概型或古典概型. 此时对每个事件 $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{A\ \text{包含的基本事件数}}{\Omega\ \text{中基本事件总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件 A 的古典概率.

古典概型

例 3　将一枚硬币抛两次，

(1) 设事件 A_1 为" 恰好出现一次正面”，求 $P(A_1)$;

(2) 设事件 A_2 为" 至少出现一次正面"，求 $P(A_2)$.

解: 易知试验的样本空间为

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

故

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = 0.5,\ P(A_2) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

计数原理

加法原理： 设完成一件事有 k 类方式，每类方式分别有 $n_1, \ldots, n_k$ 种方法，则完成这件事一共有

$$n_1 + \cdots + n_k$$

种方法.

特点： 一步完成.

乘法原理： 设完成一件事有 k 个步骤，每一步需要 $n_1, \ldots, n_k$ 种方法，则完成这件事一共有

$$n_1 n_2 \cdots nk$$

种方法.

特点： 多步完成.

计数原理

排列数： 从 n 个元素中取 k 个不同元素排成一列的所有个数，记为 A_n^k.

排列数公式：

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

组合数： 从 n 个不同元素中，取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，记为 C_n^k 或 $\binom{n}{k}$.

组合数公式：

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

古典概型

例 4 (无放回抽样)　设袋中有只 4 白球和 2 只黑球，现从袋中无放回地依次摸出 2 只球 (即取出的球不放回). 试求

(1) 取到到的两只球都是白球的概率;

(2) 取到的两只球颜色相同的概率;

(3) 到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解: 记 $A=\{$取到到的两只球都是白球$\}$

$B=\{$取到到的两只球都是黑球$\}$

$C=\{$取到到的两只球至少有一白球$\}$

$D=\{$取到到的两只球颜色相同$\}$

(1) 由古典概率模型:

$$P(A)=\frac{A_4^2}{A_6^2}=\frac{2}{5},\quad P(B)=\frac{A_2^2}{A_6^2}=\frac{1}{15}.$$

(2) 因为 $D=AB$ 且 $AB=\varnothing$, 故由概率有限可加性,

$$P(D)=P(AB)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15}$$

因为 $C=\overline{B}$, 故 $P(C)=P(B)=1-P(B)=\frac{14}{15}$

例 5　将 n 个球随机地放入 $N(N \geq n)$ 个盒子中去, 盒子的容量不限，试求

(1) 每个盒子至多有一只球的概率;

(2) n 个盒子中各有一球的概率.

解: 由条件知，这是一个古典概型问题，每一种放法是一个基本事件．因为每个球有 N 种放法，由乘法原理，共有 N^n 种放法.

(1) 每个盒子中至多只有一只球, 共有

$$N(N-1)\cdot(N-n+1)$$

种放法，故所求概率为

$$p=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

(2) n 个盒子的选法有 C_N^n 种方法，对选定的 n 个盒子，每个盒子各有一个球的放法有 $n!$ 种. 由乘法原理, 共有 $n!C_N^n$ 种放法，因此所求概率为

$$p=\frac{n!C_N^n}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

古典概型

例 6 (抽签的公平性)　袋中有 a 个红球和 b 个白球，每次从袋中任取一个球且不放回．用事件 A_n 表示第 n 次取到红球，$1 \le n \le a+b$，试证明

$$P(A_n) = \frac{a}{a+b},$$

即 A_n 发生的概率与 n 无关.

解: 考虑到取球顺序，从 $a+b$ 个球中选取 n 个球共有 A_{a+b}^{n} 种取法，即

$$n(\Omega)=A_{a+b}^{n}=(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1).$$

在第 n 次取到红球共有 a 种取法，而前面 $n-1$ 次共 A_{a+b-1}^{n-1} 种取法，即

$$n(A_n)=A_{a+b-1}^{n-1}\cdot a=(a+b-1)\cdots(a+b-n+1)\cdot a.$$

由古典概率模型，所求的概率为

$$P(A_n)=\frac{n(A_n)}{n(\Omega)}=\frac{a}{a+b}.$$

古典概型

实际推断原理： 概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不会发生.

例 7 一位常饮奶茶的女士称：她能从一杯冲好的奶茶中辨别出该奶茶是先放牛奶还是先放茶. 做了 10 次测试，结果是她都正确地辨别出来了. 问该女士的说法是否可信？

古典概型

解: 假设该女士的说法不可信，即纯粹是靠运气猜对的. 在此假设下，每次试验的两个可能结果为:

$$奶 + 茶 \text{ 或 } 茶 + 奶$$

且它们是等可能的，因此是一个古典概型问题. 10 次试验一共有 2^{10} 个等可能的结果, 10 次都猜对的概率为:

$$p = \frac{1}{2^{10}} = 0.009766$$

由实际推断原理，该女士的说法可信.

2.4 几何概型

几何概型

古典概型是关于试验的结果为有限个，且每个结果出现的可能性相同的概率模型．一个直接的推广是：保留等可能性，而允许试验具有无限多个结果的．

定义： 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积或度数）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型．

几何概型中，事件 A 的概率：

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

几何概型

例 8 (会面问题)　甲乙两人相约在早上 8 点到 9 点在某地会面，先到者等候另一人 20 分种，过时则离开. 假设两人可以在指定时间内任意时刻到达，试计算两人会面的概率.

解:　记 8 点为计算时刻的 0 时刻, 以分钟为时间单位, 以 x, y 分别表示甲、乙到达的时刻，则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 60,\ 0 \leq y \leq 60\}.$$

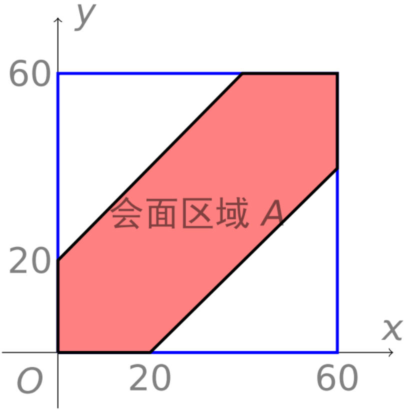
甲、乙能够会面的充要条件为

$$|x - y| \leq 20,\ (x, y) \in \Omega.$$

古典概型

样本空间及事件的几何表示如图所示，由几何概型的计算公式得

$$p = S(A)/S(\Omega) = \frac{5}{9}.$$



第三节　条件概率

3.1 条件概率

条件概率

设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$, 在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率, 称为条件概率, 记为 $P(B|A)$.

有时为了强调区别，也称 $P(B)$ 为无条件概率.

例 1　一个家庭中有两个小孩，已知其中一个是女孩, 问另一个也是女孩的概率是多少？（假定生男生女是等可能的）

条件概率

解: 由题意，样本空间为

$$\Omega=\{(男，男),(男，女)\,(女,男),(女，女)\}.$$

A 表示事件“至少有一个是女孩”, B 表示事件“两个都是女孩”，则有

$$A=\{(男，男),(男，女)\,(女,男)\},$$

$$B=\{(女，女)\}.$$

由于事件已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件包含的基本事件只占其中的一种，所以有

$$P(B|A)=\frac{1}{3}$$

条件概率

在这个例子中，若不知道事件已经发生的信息，那么事件发生的概率为

$$P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B|A).$$

原因：事件 A 的发生改变了样本空间.

注意到

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(AB) = \frac{1}{4}$$

于是

$$P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率

定义 1 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$，称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 A 发生条件下，事件 B 的条件概率.

小注： 条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率 (满足三个条件).

计算： 根据具体的情况，可选用下列两种方法之一来计算条件概率 $P(B|A)$

1. 在缩减后的样本空间 Ω_A 中计算;
2. 在原来的样本空间 Ω 中，直接由定义计算.

例 2　一袋中有 10 个球，其中 3 个黑球，7 个白球，依次从袋中不放回取两球.

(1) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；

(2) 已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率.

解: 记 $A_i = \{第\ i\ 次取到黑球\}(i = 1, 2)$.

(1) 第一次取到黑球, 则第二次取到黑球的方法有两种, 所有可取的球有 9 个. 故

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$$

(2) 因为

$$P(A_1A_2) = \frac{3 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{15}, \quad P(A_2) = \frac{3}{10},$$

所以

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{2}{9}.$$

条件概率

例 3　保险公司按年向车主收取保险费，并承担交通事故的赔偿费用．假设车主一年内发生事故的概率为 0.2，连续两年发生事故的概率是 0.08．试解释保险公司的车险浮动费率规则的合理性：

(1) 若第一年内发生了事故，则上调第二年的保险费；

(2) 若第一年内未发生事故，则下调第二年的保险费．

条件概率

解:　用事件 A 表示第一年发生了事故，事件 B 表示第二年发生了事故，则有

$$P(A)=P(B)=0.2,\ P(AB)=0.08.$$

若第一年内发生了事故，则第二年发生事故的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.08}{0.2}=0.4>P(A)$$

若第一年内未发生事故，则第二年发生事故的概率为

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.15<P(A)$$

3.2 乘法公式

乘法公式

定理 1 (乘法公式)　由条件概率的定义，得到

1. 如果 P(A) > 0，则有 P(AB) = P(B|A)P(A).
2. 如果 P(B) > 0，则有 P(AB) = P(A|B)P(B).

推论： 如果 $P(A_1A_2) > 0$，则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

更一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n1}) > 0$，则有乘法公式

$$P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\cdots P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1$$

乘法公式

例 4　一袋中有 a 个白球和 b 个红球．现依次不放回地从袋中取两球．试求两次均取到白球的概率．

解:　记

$$A_i = \{第\ i\ 次取到白球\}(i = 1, 2),$$

要求 $P(A_1A_2)$．显然

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b},\ P(A_2|A_1) = \frac{a-1}{a+b-1},$$

因此

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

乘法公式

例 5　某厂产品的废品率为 4%, 而合格品在中有 75% 是一等品, 求一等品率.

解:　记 A：合格品；B：一等品，由题意知

$$P(A) = 14\% = 96\%,\ P(B|A) = 75\%$$

因为 $B \subset A$, 故 $B = BA$, 所以

$$P(B) = P(BA) = P(B|A)P(A) = 0.960.75 = 0.72.$$

3.3 全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式与贝叶斯公式

定义 2　设 Ω 为某试验的样本空间，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为一组事件．如果以下条件成立：

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 两两互斥，
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$

则称 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分．

例子：对任意事件 A，A 与 $\overline{A}$ 为样本空间的一个划分．

全概率公式

定理 2 (全概率公式) 设试验 E 的样本空间为 Ω, A 为 E 的事件，如果 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是 Ω 的一个划分，且 $P(B_i) > 0, (i = 1, \ldots, n)$，则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \quad + P(A|B_n)P(B_n).$$

应用: 利用全概率公式，可以把复杂事件概率的计算问题，化为若干互不相容的简单情形，分别求概率然后求和.

全概率公式

证明: 因为 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是 Ω 的一个划分, 所以

$$A = A \cap \Omega = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$$

$$(AB_i)\left(AB_j\right) = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i = 1, \ldots, n$$

由概率的可加性及乘法公式, 有

$$P(A) = (AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n)$$

$$= P(AB_1) + \cdots + P(AB_n)$$

$$= P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

全概率公式

例 6　两个车间生产同型号的家电．第 1 车间的次品率为 0.15，第 2 车间的次品率为 0.12．两个车间生产的成品混放在一起，假设第 1,2 车间生产的成品比例为 2 : 3．在仓库中随机地取一件成品, 求它是次品的概率;

解:　记 $A = \{$从仓库种取到的是次品$\}$,

$B_i = \{$产品是第 i 车间生产的$\}$;

易知 B_1, B_2 是样本空间的一个划分，由全概率公式得:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_1)P(B_2)$$

$$= 0.15 \times \frac{2}{5} + 0.12 \times \frac{3}{5} = 0.132$$

例 7　假设在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率．经分析，该时期内利率下调的概率为 60%，利率不变的概率为 40%．根据经验，在利率下调时某支股票上涨的概率为 80%，在利率不变时，这支股票上涨的概率为 40%．求这支股票上涨的概率．

解:　设 B_1, B_2 表示事件 “利率上调” 和 “利率不变”, A 表示事件" 股票上涨"，易知 $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B1B2 = \varnothing$, 由全概率公式:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$

$$= 80\% \times 60\% + 40\% \times 40\%$$

$$= 64\%$$

贝叶斯公式

定理 3 如果 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, A 是一个事件，且 $P(B_i) > 0P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}, i = 1, \cdots, n.$$

证明: 由乘法公式可知

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

又由全概率公式可得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \quad + P(A|B_n)P(B_n).$$

故结论成立.

贝叶斯公式

贝叶斯公式于 1763 年由贝叶斯 (Bayes) 给出．它是在观察到事件 A 已发生的条件下，寻找导致 A 发生的每个原因 B_i 的概率.

在贝叶斯公式中，$P(B_i)$ 和 $P(B_i|A)$ 分别称为原因 B_i 的先验概率和后验概率.

先验概率常常根据等可能的假设或者以往的数据积累来确定．是在没有进一步信息（不知道事件 A 是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识.

而在得到进一步的信息之后（知道事件 A 已经发生），我们得以对各个可能原因发生的概率重新加以修正

例 8　由医学统计数据分析可知，人群中患由某种病菌引起的疾病占总人数的 0.5%．一种血液化验以 95% 的概率将患有此疾病的人检查出呈阳性，但也以 1% 的概率误将不患此疾病的人检验出呈阳性．现设某人检查出呈阳性反应，问他确患有此疾病的概率是多少？

解:　记“检出阳性”为事件 A, " 被检者患病" 和“被检者不患病”分别为事件 B_1, B_2, 则

$$P(B_1) = 0.005, P(B_2) = 0.995$$

$$P(A|B_1) = 0.95, P(A|B_2) = 0.01$$

由贝叶斯公式可得:

$$P(B_1|A) = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.01} \approx 0.323.$$

例 9　玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 012 只残次品的概率相应地为 0.80.1 和 0.1. 一顾客欲买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随机地查看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回．试求：

(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率 α ；

(2) 在顾客买下的一箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率 β.

解:　记" 顾客买下该箱玻璃杯" 为事件 A，“箱中有 i 只残次品 $(i=0,1,2)$” 为事件 B_i 显然 B_0,B_1,B_2 为的一个划分，由题意:

$$P(B_0)=0.8, P(B_1)=0.1, P(B_2)=0.1, P(A|B_0)=1.$$

$$P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}, P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

解： (1) 由全概率公式，有：

$$\alpha = P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A|B_i)P(B_i)$$

$$= 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} \approx 0.94$$

(2) 由贝叶斯公式，有：

$$\beta = P(B_0|A) = \frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)} \approx \frac{0.8}{0.94} \approx 0.85$$

第四节　事件的独立性

两个事件的独立性

设有两个事件 A, B, 一般来说, $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 是有差异的，但有时事件 A 的发生与否并不影响事件 B 发生的概率，即 $P(B|A) = P(B)$.

例 1 袋中有 6 个白球，2 个黑球，从中有放回地抽取两次，每次取一球，记 A = 第一次取到白球，B = 第二次取到白球，则有

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \qquad P(B) = \frac{8\times 6}{8^2} = \frac{3}{4}$$
$$P(AB) = \frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}, \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{4}$$

因此 $P(B|A) = P(B)$. 同理可得 $P(B|A) = 3/4 = P(B)$.

小注: 这就是说, 已知事件 A 发生, 并不影响事件 B 发生的概率, 这时称事件 A, B 独立.

两个事件的独立性

由乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A),$$

当事件 A, B 独立时，有

(1) $$P(AB) = P(A)P(B).$$

当 $P(A) = 0$ 时，由

$$0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$$

可知 $P(AB) = 0$, (1) 式仍然成立.

注意: $P(A) = 0$ 时，$P(B|A)$ 没有意义.

两个事件的独立性

定义 1　若两事件 A, B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A, B 独立，或称 A, B 相互独立.

小注: 用

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

刻划独立性, 比用

$$P(A|B) = P(A) \text{ 或 } P(B|A) = P(B)$$

更好, 它不受 $P(B) > 0$ 或 $P(A) > 0$ 的制约, 且体现对称性.

事件的独立性

在实际应用中，往往根据问题的实际情况去假设事件间的独立性．如

- 投掷硬币（或骰子），我们相信每次的结果都不受以前结果的影响；
- 在相同条件下做实验，一般假定每次的实验误差相互独立；
- 一般假定生产中不同的流程（机器、人）也是相互独立的．

两个事件的独立性

例 2　甲乙二人独立地对目标各射击一次，设甲射中目标的概率为 0.5，乙射中目标的概率为 0.6，求目标被击中的概率.

解:　假设 A, B 分别表示甲乙击中目标, 则 $A \cup B$ 表示目标被击中, 由于 A, B 独立,

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\
&= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\
&= 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.6 \\
&= 0.8.
\end{aligned}
$$

两个事件的独立性

定理 1　若事件 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别独立.

证明:　　因为 $P(AB)=P(A)P(B)$, 所以

$$P(A\overline{B})=P(A(\Omega-B))=P(A-AB)$$

$$=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)[1-P(B)]$$

$$=P(A)P(\overline{B})$$

由对称性知, $\overline{A}$ 与 B 相互独立. 利用第一条结论, 可得 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

互斥与独立的关系

“两个事件互斥”和“两个事件相互独立”是不同的概念：

- 互斥 $\Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 独立 $\Longrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

但两者也有关系：如果 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$，则两者不可能既是互斥的又是独立的.

两个事件的独立性

小注: 若 A 与 B 相互独立，且 B 与 C 相互独立，则 A 与 C 未必相互独立.

例子　从全体有两个孩子的家庭中随机选择一个家庭，并考虑下面三个事件:

1. A 为 "第一个孩子是男孩",
2. B 为 "两个孩子不同性别",
3. C 为 "第一个孩子是女孩".

容易验证 A 与 B 相互独立，B 与 C 相互独立，但是 A 与 C 不独立.

三个事件的独立性

定义 2

设 A_1, A_2, A_3 是三个事件, 如果

1. 两两独立 $\begin{cases} P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) \end{cases}$
2. $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立.

多个事件的独立性

定义　称 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，如果对任意一组指标

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \quad (k \geq 2)$$

都有

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

多个事件的独立性

性质　设 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, ..., A_n$ 相互独立，则

1. 其中任意 $k(k \geq 2)$ 个事件也是相互独立的.
2. 将若干个 A_i 用 $\overline{A}_i$ 替换后，得到的新事件集也相互独立.
3. 特别地，我们有

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdots P\left(\overline{A}_n\right)$$

$$= 1 - \prod_{1}^{n} [1 - P(A_i)]$$

例 3 (保险赔付)　设有 n 个人向保险公司购买人身意外保险（保险期为 1 年），假定投保人在一年内发生意外的概率为 0.01. 求

(1) 保险公司赔付的概率;

(2) 当 n 为多大时，使得以上赔付的概率超过 1/2.

小注:每个人是否发生意外可以看作是相互独立的.

解: 记 $A_i=\{$第 i 个投保人出现意外$\}(i=1,2,\ldots,n)$,

$$A=\{\text{保险公司赔付}\}$$

(1) 因为 $A_1,\ldots,A_n$ 相互独立, 且 $A=\cup_{i=1}^{n}A_i$, 我们有

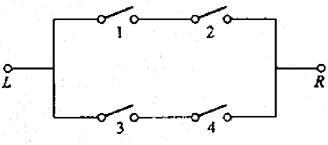
$$P(A)=1-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P\left(\overline{A}_i\right)=1-(0.99)^n.$$

(2) 注意到 $P(A)\geq 0.5$ 等价于 $(0.99)^n\leq 0.5$, 我们有

$$n\geqslant\frac{\lg 2}{2-\lg 99}\approx 68.416$$

即当投保人数大于等于 69 人时, 赔付的概率超过 1/2.

例 4　设有电路如下图所示，其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点，设各继电器接点闭合与否是相互独立的，且每一继电器接点闭合的概率均为 p，求 L 至 R 为通路的概率.



解:　设 $A = \{$第 i 个继电器闭合$\}$,

$A = \{L$ 至 R 是通路$\}$,

由 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$ 及 A_1, A_2, A_3, A_4 的独立性可得

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4)$$

$$- P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= 2p^2 - p^4$$

例 5　据以往记录的数据分析，某船只运输某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2% (记这一事件为 A_1), 损坏 10% (记这一事件为 A_2)，损坏 90% (记这一事件为 A_3). 且 $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05.$

设物品件数很多，取出一件后不影响后一件取的是否为

好品的概率，现从已被运输的物品中随机地取 3 件，发

现这三件都是好的（记这一事件为 B ），试求 $P(A_1|B)$.

解: 在被运输的物品中，随机取 3 件，相当于在物品中抽取 3 次，每次取一件，作不放回抽样．由于抽取一件后，不影响取后一件是否为好品的概率，已知当 A_1 发生时，一件产品是好品的概率为 $12\% = 98\%$．由独立性可知，随机取 3 件，它们都是好品的概率为

$$P(B|A_1) = 0.98^3.$$

同理可得

$$P(B|A_2) = 0.9^3, P(B|A_3) = 0.1^3.$$

由条件知 $P(A_1)=0.8, P(A_2)=0.15$, $P(A_3)=0.05, A_iA_j=\varnothing(i\neq j, i,j=1,2,3)$ 且

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$$

由贝叶斯公式可得:

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}$$

$$=\frac{(0.98)^3\times 0.8}{0.8624}=0.8731$$