

## Part I

# 随机事件的概率

### 随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

1. **确定性现象**：在一定条件下必然发生的现象；
2. **不确定性现象**：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。

(a) **个别现象** 不能重复试验

(b) **随机现象**：可以重复试验，并且结果呈现某种规律

- 太阳东升西落 (**确定**)
- 明天是否是晴天 (**不确定**)
- 抛一枚均匀的硬币，正面是否向上 (**不确定**)

概率论与数理统计就是研究随机现象量的规律性的数学学科。

## 1 随机事件

### 1.1 随机试验与样本空间

#### 试验

产生观测结果的行为或过程称为**试验**。

E1 掷一颗骰子，观察所掷的点数是几；

- E2 将一枚硬币抛两次, 观察正面 H 出现的次数;
- E3 将一枚硬币抛两次, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况;
- E4 观察某产品的使用寿命;
- E5 观察某地明天的天气是雨天还是非雨天.

## 随机试验

一个试验被称为随机试验, 如果它满足条件:

1. 可能结果不止一个, 结果明确;
2. 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

**小注:** 可以在相同的条件下重复进行的随机试验称为可重复的随机试验 (E1-E4), 否则称为不可重复的随机试验 (E5).

在不引起混淆的情况下, 我们将用随机试验或试验指代可重复的随机试验.

## 样本空间

随机试验的每个可能结果称为一个样本点, 全体样本点组成的集合称为样本空间.

习惯上分别用  $\omega$  和  $\Omega$  表示样本点与样本空间.

## 样本空间

**例 1.** 求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币, 观察正、反面出现的情况;

$$\{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$$

(2) 记录某地的最低与最高气温.

$$\{(x, y) | a \leq x \leq y \leq b\}$$

其中  $a, b$  分别为该地气温的下界和上界.

## 1.2 随机事件

### 随机事件

样本空间  $\Omega$  的任意一个子集称为一个随机事件, 简称事件.

事件常用大写字母  $A, B, C$  等表示.

设  $A$  是一个事件, 当试验中出现的样本点  $\omega \in A$  时, 称事件  $A$  发生.

### 随机事件

随机事件的分类:

1. 只含一个样本点的事件称为基本事件
2. 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
3.  $\Omega$ : 必然事件
4.  $\emptyset$ : 不可能事件

### 1.3 事件的关系与运算

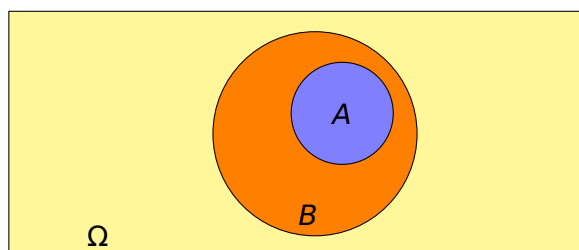
#### 事件的关系与运算

事件是一个集合, 因此事件间的关系和运算可以按照集合之间的关系和运算来规定. 设试验  $E$  的样本空间为  $\Omega$ ,  $A, B, C, A_k (k = 1, 2, 3, \dots)$

为  $\Omega$  的子集.

#### 事件的关系

若  $A \subset B$  (或  $B \supset A$ ), 则称事件  $A$  是事件  $B$  的子事件  
(或事件  $B$  包含事件  $A$ ).



**含义:** 若事件  $A$  发生时, 事件  $B$  一定发生.

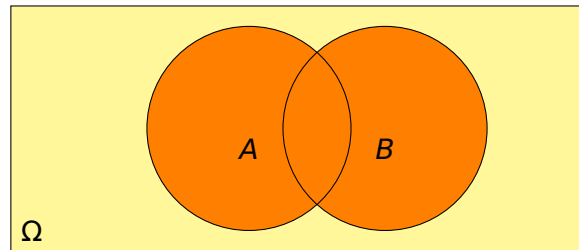
**小注:** 对任意事件  $A$ , 有  $\emptyset \subset A \subset \Omega$ .

若  $A \subset B$  且  $B \subset A$ , 即  $A = B$ , 则称事件  $A$  与  $B$  相等.

#### 事件的运算

称事件  $A \cup B$  为事件  $A$  与  $B$  的和事件, 其中

$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$



含义：事件  $A$ 、 $B$  至少有一个发生。

## 事件的运算

事件的和可以推广到多个的情形：如  $n$  个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \text{“事件 } A_1, \dots, A_n \text{ 至少有一个发生”}$$

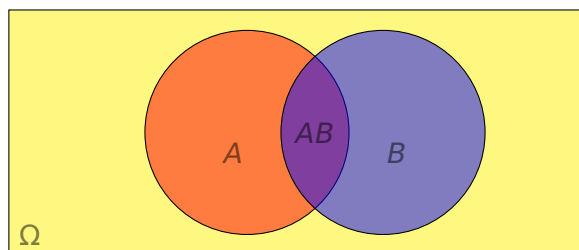
可数个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \dots, \text{ 至少有一个发生”}$$

## 事件的运算

称事件  $A \cap B$  (简记为  $AB$ ) 为事件  $A$  与  $B$  的积事件, 其中

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$



含义：事件  $A$  和  $B$  同时发生.

## 事件的运算

事件的积可以推广到多个的情形：如  $n$  个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \text{“事件 } A_1, \dots, A_n \text{ 全都发生”}$$

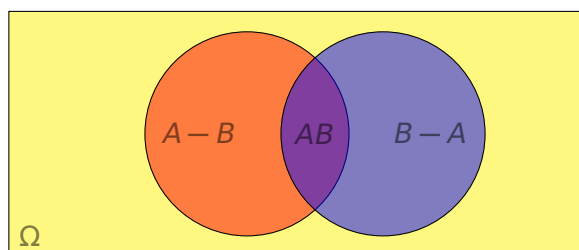
可数个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \dots, \text{ 全都发生”}$$

## 事件的运算

称事件  $A - B$  为事件  $A$  与  $B$  的差事件, 其中

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.$$

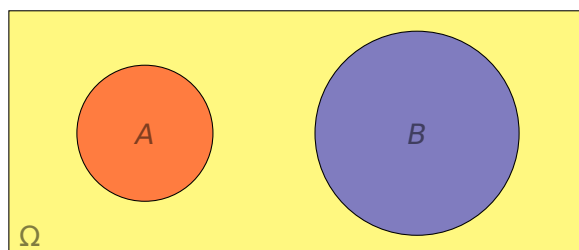


含义：事件  $A$  发生, 但  $B$  不发生.

性质：对任意两个事件  $A$  和  $B$ , 总有  $A - B = A - A \cap B$ .

## 事件的关系

若  $A \cap B = \emptyset$ , 则称事件  $A$  与  $B$  互不相容(或互斥).

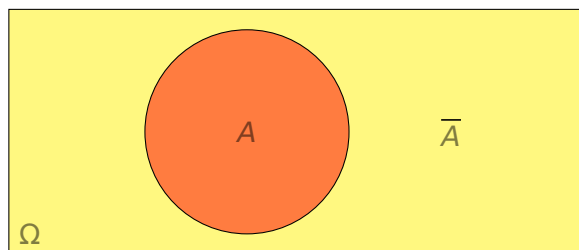


含义：事件  $A$  与  $B$  不可能同时发生.

## 事件的运算

称  $\Omega - A$  为事件  $A$  的对立事件(或逆事件), 记为  $\bar{A}$ .

含义：事件  $A$  不发生.



性质：

1. 由差事件与对立事件的定义, 显然  $A - B = A \cap \bar{B}$ .
2. 事件  $A$ 、 $B$  对立当且仅当  $A$ 、 $B$  互斥且  $A \cup B = \Omega$ .

## 事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律:  $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

2. 结合律:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. 分配律:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. 对偶律:  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

例 2. 一名射手连续向某个目标射击三次, 事件  $A_i$  表示该射手第  $i$  次射击时击中目标 ( $i = 1, 2, 3$ ). 试用事件的运算符号表示下列事件:

(1) 三次射击至少有一次击中目标;

(2) 三次射击恰有两次击中目标;

(3) 三次射击至多有一次击中目标.

解. 有条件可得

(1)  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ .

(2)  $A_1 A_2 \overline{A_3} \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup \overline{A_1} A_2 A_3$ .

(3)  $\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \cup A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$ .

## 2 随机事件的概率

### 随机事件的概率

事件的概率: 刻画试验中随机事件发生的可能性大小的度量.

在概率论的发展历史上, 曾有过多种概率定义方法:



| 试验者    | 投掷次数  | 正面次数  | 频率     |
|--------|-------|-------|--------|
| 德摩根    | 2048  | 1061  | 0.5181 |
| 浦丰     | 4040  | 2048  | 0.5069 |
| 皮尔逊    | 12000 | 6019  | 0.5016 |
| 皮尔逊    | 24000 | 12012 | 0.5005 |
| 罗曼诺夫斯基 | 80640 | 39699 | 0.4923 |

1. 概率的古典定义
2. 概率的统计定义
3. 概率的公理化定义

## 2.1 事件的频率

### 事件的频率

**定义 1.** 设在  $n$  次试验中, 事件  $A$  发生了  $m$  次, 则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件  $A$  发生的频率 (*frequency*).

### 事件的频率

历史上的掷硬币试验:

### 概率的统计定义

在相同条件下重复进行的试验中, 若随着试验次数  $n$  的增加, 事件  $A$  发生的频率稳定在某一常数  $p$  附近, 则称  $p$  为事件  $A$  的**概率**, 记作  $P(A) = p$ .

也就是说: **概率是频率的稳定值**. **意义**: 实际应用中常将大量重复试验中事件的频率作为概率的近似估计.

## 事件的频率

**频率的性质:**

1.  $0 \leq f_n(A) \leq 1$ ;
2.  $f_n(\Omega) = 1, f_n(\emptyset) = 0$ ;
3. 若事件  $A_1, A_2, \dots, A_k$  两两互斥, 则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

## 概率的公理化定义

**定义 2.** 设  $\Omega$  是样本空间, 对每个事件  $A$  定义一个实数  $P(A)$  与之对应. 若函数  $P(\cdot)$  满足以下条件:

1. **非负性**: 对任意事件  $A$ , 均有  $P(A) \geq 0$ ;
2. **规范性**:  $P(\Omega) = 1$ ;
3. **可列加性**: 若事件序列  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  两两互斥, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称  $P(A)$  为事件  $A$  的**概率 (probability)**.

## 2.2 概率的性质

### 概率的性质

由概率的定义, 不难得出概率的一些性质:

**性质 1**  $P(\emptyset) = 0$ .

证明. 因为  $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \dots$ , 且  $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ ,

由规范性及可列可加性得

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \dots) = P(\Omega) + P(\emptyset) + \dots$$

由概率的非负性可得  $P(\emptyset) = 0$ .

**性质 2(有限可加性)** 若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

### 概率的性质

**性质 3** 若事件  $A, B$  满足  $A \subset B$ , 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A).$$

证明. 易知  $B = A \cup (B - A)$ , 且  $A \cap (B - A) = \emptyset$ .

由概率的可列可加性可知

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A),$$

移项可得

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

由概率的非负性可得  $P(B - A) \geq 0$ , 即

$$P(B) \geq P(A).$$

**推论:** 对任意事件  $A, B$ , 有  $P(B - A) = P(B) - P(AB)$ .

## 概率的性质

性质 4 对任一事件  $A$ ,  $P(A) \leq 1$ .

证明: 因为  $A \subset \Omega$ , 由性质 3 可得. 性质 5 对任一事件  $A$ , 有  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

证明. 因为  $A \cup \bar{A} = \Omega$ , 且  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , 由有限可加性可得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

也即

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

## 概率的性质

性质 6: (加法公式) 对任意两个事件  $A, B$ , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明: 因为

$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$

且

$$A(B - AB) = \emptyset, AB \subset B,$$

由性质 2 和性质 3 可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

## 概率概率的性质

推论 1 对任意三个事件  $A_1, A_2, A_3$ , 有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) \\ & + P(A_1 A_2 A_3) \end{aligned}$$

推论 2 对任意  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = & \sum_{k=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n). \end{aligned}$$

概率的性质

例 1. 设  $A, B$  为两事件,  $P(A) = 0.3$ ,  $P(A \cup B) = 0.6$ ,

求  $P(\overline{AB})$ .

解. 易知

$$\overline{AB} = A(\Omega - B) = A - AB,$$

故

$$P(\overline{AB}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB).$$

又因为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

所以

$$P(A) - P(AB) = P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3.$$

概率的性质

例 2. 设  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ , 求证  $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$

证明. 由对偶率易知  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ , 故

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] \\ &= 1 - \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(AB) \right] \\ &= P(AB). \end{aligned}$$

## 2.3 等可能概型 (古典概型)

### 古典概型

对某些特殊类型的随机试验, 要确定事件发生的概率, 并不需要作重复试验, 而是根据人类长期积累的关于 “对称性” 的实际经验, 提出数学模型, 直接计算出来, 从而给出概率相应的定义. 这类试验称为等可能概率模型或古典概型.

### 古典概型

定义 3. 如果一个随机试验具有以下特点:

1. 样本空间只含有限多个元素 (样本点);
2. 基本事件发生的可能性相同,

则称此随机试验是等可能概型或古典概型. 此时对每个事件  $A \subset \Omega$ ,

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件  $A$  的古典概率.

## 古典概型

例 3. 将一枚硬币抛两次,

(1) 设事件  $A_1$  为“恰好出现一次正面”, 求  $P(A_1)$ ;

(2) 设事件  $A_2$  为“至少出现一次正面”, 求  $P(A_2)$ .

解. 易知试验的样本空间为

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

故

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = 0.5, \quad P(A_2) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

## 计数原理

**加法原理:** 设完成一件事有  $k$  类方式, 每类方式分别有  $n_1, \dots, n_k$  种方法, 则完成这件事一共有

$$n_1 + \dots + n_k$$

种方法.

**特点:** 一步完成.

**乘法原理:** 设完成一件事有  $k$  个步骤, 每一步需要  $n_1, \dots, n_k$  种方法, 则完成这件事一共有

$$n_1 n_2 \cdots n_k$$

种方法.

**特点:** 多步完成.

## 计数原理

**排列数：** 从  $n$  个元素中取  $k$  个不同元素排成一列的所有个数, 记为  $A_n^k$ .

**排列数公式：**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

**组合数：** 从  $n$  个不同元素中, 取出  $m(m \leq n)$  个元素

的所有组合的个数, 记为  $C_n^k$  或  $\binom{n}{k}$ .

**组合数公式：**

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

## 古典概型

**例 4** (无放回抽样). 设袋中有只 4 白球和 2 只黑球, 现从袋中无放回地依次摸出 2 只球 (即取出的球不放回). 试求

- (1) 取到到的两只球都是白球的概率;
- (2) 取到的两只球颜色相同的概率;
- (3) 到的两只球中至少有一只是白球的概率.

**解.** 记  $A = \{\text{取到到的两只球都是白球}\}$        $B = \{\text{取到到的两只球都是黑球}\}$        $C = \{\text{取到到的两只球至少有一白球}\}$        $D = \{\text{取到到的两只球颜色相同}\}$  (1) 由古典概率模型:

$$P(A) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{15}.$$

(2) 因为  $D = A \cup B$  且  $AB = \emptyset$ , 故由概率有限可加性,



$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{15}$$

因为  $C = \overline{B}$ , 故  $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{14}{15}$

## 古典概型

**例 5.** 将  $n$  个球随机地放入  $N(N \geq n)$  个盒子中去, 盒子的容量不限, 试求

(1) 每个盒子至多有一只球的概率;

(2)  $n$  个盒子中各有一球的概率.

**解.** 由条件知, 这是一个古典概型问题, 每一种放法是一个基本事件. 因为每个球有  $N$  种放法, 由乘法原理, 共有  $N^n$  种放法.

(1) 每个盒子中至多只有一只球, 共有

$$N(N-1) \cdots (N-n+1)$$

种放法, 故所求概率为

$$p = \frac{N(N-1) \cdots (N-n+1)}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}.$$

(2)  $n$  个盒子的选法有  $C_N^n$  种方法, 对选定的  $n$  个盒子, 每个盒子各有一个球的放法有  $n!$  种. 由乘法原理,

共有  $n!C_N^n$  种放法, 因此所求概率为

$$p = \frac{n!C_N^n}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}.$$

## 古典概型

**例 6** (抽签的公平性). 袋中有  $a$  个红球和  $b$  个白球, 每次从袋中任取一个球且不放回. 用事件  $A_n$  表示第  $n$  次取到红球,  $1 \leq n \leq a+b$ , 试证明

$$P(A_n) = \frac{a}{a+b},$$

即  $A_n$  发生的概率与  $n$  无关.

**解.** 考虑到取球顺序, 从  $a+b$  个球中选取  $n$  个球共

有  $A_{a+b}^n$  种取法, 即

$$n(\Omega) = A_{a+b}^n = (a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1).$$

在第  $n$  次取到红球共有  $a$  种取法, 而前面  $n-1$  次共  $A_{a+b-1}^{n-1}$  种取法, 即

$$n(A_n) = A_{a+b-1}^{n-1} \cdot a = (a+b-1)\cdots(a+b-n+1) \cdot a.$$

由古典概率模型, 所求的概率为

$$P(A_n) = \frac{n(A_n)}{n(\Omega)} = \frac{a}{a+b}.$$

## 古典概型

**实际推断原理:** 概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不会发生.

**例 7.** 一位常饮奶茶的女士称: 她能从一杯冲好的奶茶中辨别出该奶茶是先放牛奶还是先放茶. 做了 10 次测试, 结果是她都正确地辨别出来了. 问该女士的说法是否可信?

## 古典概型

**解.** 假设该女士的说法不可信, 即纯粹是靠运气猜对的. 在此假设下, 每次试验的两个可能结果为:

奶 + 茶 或 茶 + 奶

且它们是等可能的, 因此是一个古典概型问题. 10 次

试验一共有  $2^{10}$  个等可能的结果, 10 次都猜对的概率为:

$$p = \frac{1}{2^{10}} = 0.0009766$$

由实际推断原理, 该女士的说法可信.

## 2.4 几何概型

### 几何概型

古典概型是关于试验的结果为有限个, 且每个结果出现的可能性相同的概率模型. 一个直接的推广是: 保留等可能性, 而允许试验具有无限多个结果的.

**定义:** 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度 (面积或体积或度数) 成比例, 则称这样的概率模型为几何概率模型.

几何概型中, 事件  $A$  的概率:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

### 几何概型

**例 8 (会面问题).** 甲乙两人相约在早上 8 点到 9 点在某地会面, 先到者等候另一人 20 分钟, 过时则离开. 假设两人可以在指定时间内任意时刻到达, 试计算两人会面的概率.

**解.** 记 8 点为计算时刻的 0 时刻, 以分钟为时间单位, 以  $x, y$  分别表示甲、乙到达的时刻, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}.$$

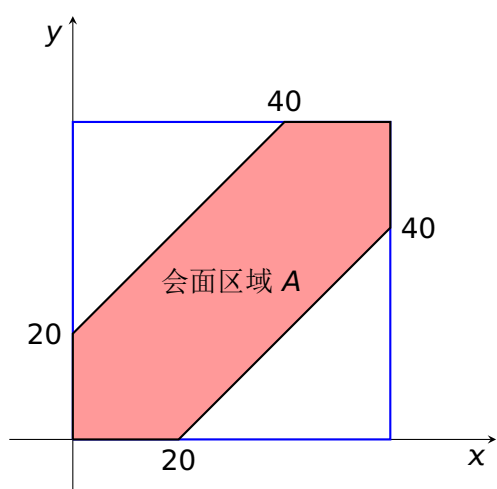
甲、乙能够会面的充要条件为

$$|x - y| \leq 20, (x, y) \in \Omega.$$

## 古典概型

样本空间及事件的几何表示如图所示, 由几何概型的计算公式得

$$p = S(A)/S(\Omega) = \frac{5}{9}.$$



## 3 条件概率

### 3.1 条件概率

条件概率

设  $A, B$  是两个事件, 且  $P(A) > 0$ , 在事件  $A$  发生的条件下, 事件  $B$  发生的概率, 称为条件概率, 记为  $P(B|A)$ .

有时为了强调区别, 也称  $P(B)$  为无条件概率.

例 1. 一个家庭中有两个小孩, 已知其中一个是女孩, 问另一个也是女孩的概率是多少? (假定生男生女是等可能的)

### 条件概率

解. 由题意, 样本空间为

$$\Omega = \{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}.$$

$A$  表示事件“至少有一个是女孩”,  $B$  表示事件“两个都是女孩”, 则有

$$A = \{(\text{女}, \text{女}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男})\},$$

$$B = \{(\text{女}, \text{女})\}.$$

由于事件  $A$  已经发生, 所以这时试验的所有可能结果只有三种, 而事件包含的基本事件只占其中的一种, 所以有

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

### 条件概率

在这个例子中, 若不知道事件已经发生的信息, 那么事件发生的概率为

$$P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B|A).$$

原因: 事件  $A$  的发生改变了样本空间.

注意到

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(AB) = \frac{1}{4}$$

于是

$$P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

## 条件概率

定义 1. 设  $A, B$  是两个事件, 且  $P(A) > 0$ , 称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件  $A$  发生条件下, 事件  $B$  的条件概率.

**小注:** 条件概率  $P(\cdot|A)$  是概率 (满足非负性、规范性、可列可加性三个条件).

**计算:** 根据具体的情况, 可选用下列两种方法之一来计算条件概率  $P(B|A)$

1. 在缩减后的样本空间  $\Omega_A$  中计算;
2. 在原来的样本空间  $\Omega$  中, 直接由定义计算.

## 条件概率

例 2. 一袋中有 10 个球, 其中 3 个黑球, 7 个白球, 依次从袋中不放回取两球.

- (1) 已知第一次取出的是黑球, 求第二次取出的仍是黑球的概率;
- (2) 已知第二次取出的是黑球, 求第一次取出的也是黑球的概率.

## 条件概率

解. 记  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到黑球}\} (i = 1, 2)$ .

(1) 第一次取到黑球, 则第二次取到黑球的方法有两种, 所有可取的球有 9 个. 故

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$$

(2) 因为

$$P(A_1A_2) = \frac{3 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{15}, \quad P(A_2) = \frac{3}{10},$$

所以

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{2}{9}.$$

### 条件概率

**例 3.** 保险公司按年向车主收取保险费, 并承担交通事故的赔偿费用. 假设车主一年内发生事故的的概率为 0.2, 连续两年发生事故的的概率是 0.08. 试解释保险公司的车险浮动费率规则的合理性:

(1) 若第一年内发生了事故, 则上调第二年的保险费;

(2) 若第一年内未发生事故, 则下调第二年的保险费.

### 条件概率

**解.** 用事件  $A$  表示第一年发生了事故, 事件  $B$  表示第二年发生了事故, 则有

$$P(A) = P(B) = 0.2, P(AB) = 0.08.$$

若第一年内发生了事故, 则第二年发生事故的的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4 > P(A)$$

若第一年内未发生事故, 则第二年发生事故的的概率为

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = 0.15 < P(A)$$

## 3.2 乘法公式

### 乘法公式

**定理 1 (乘法公式).** 由条件概率的定义, 得到

1. 如果  $P(A) > 0$ , 则有  $P(AB) = P(B|A)P(A)$ .

2. 如果  $P(B) > 0$ , 则有  $P(AB) = P(A|B)P(B)$ .

**推论:** 如果  $P(A_1A_2) > 0$ , 则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

更一般地, 若  $P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ , 则有乘法公式

$$= P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}) \cdots P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

## 乘法公式

**例 4.** 一袋中有  $a$  个白球和  $b$  个红球. 现依次不放回地从袋中取两球. 试求两次均取到白球的概率.

**解.** 记

$$A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到白球}\} (i = 1, 2),$$

要求  $P(A_1A_2)$ . 显然

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{a-1}{a+b-1},$$

因此

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

## 乘法公式

**例 5.** 某厂产品的废品率为 4%, 而合格品在中有 75%

是一等品, 求一等品率.



解. 记  $A$ : 合格品;  $B$ : 一等品, 由题意知

$$P(A) = 1 - 4\% = 96\%, P(B|A) = 75\%$$

因为  $B \subset A$ , 故  $B = BA$ , 所以

$$P(B) = P(BA) = P(B|A)P(A) = 0.96 \times 0.75 = 0.72.$$

### 3.3 全概率公式与贝叶斯公式

#### 全概率公式与贝叶斯公式

定义 2. 设  $\Omega$  为某试验的样本空间,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为一组事件. 如果以下条件成立:

1.  $B_1, B_2, \dots, B_n$  两两互斥,
2.  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

则称  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为样本空间  $\Omega$  的一个划分.

例子: 对任意事件  $A$ ,  $A$  与  $\bar{A}$  为样本空间的一个划分.

#### 全概率公式

定理 2 (全概率公式). 设试验  $E$  的样本空间为  $\Omega$ ,  $A$  为  $E$  的事件, 如果  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是  $\Omega$  的一个划分, 且  $P(B_i) > 0, (i = 1, \dots, n)$ , 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

应用: 利用全概率公式, 可以把复杂事件概率的计算问题, 化为若干互不相容的简单情形, 分别求概率然后求和.

## 全概率公式

证明. 因为  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是  $\Omega$  的一个划分, 所以

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n \\ (AB_i)(AB_j) &= \emptyset, \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

由概率的可加性及乘法公式, 有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n) \\ &= P(AB_1) + \dots + P(AB_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

## 全概率公式

**例 6.** 两个车间生产同型号的家电. 第 1 车间的次品率为 0.15, 第 2 车间的次品率为 0.12. 两个车间生产的成品混放在一起, 假设第 1, 2 车间生产的成品比例为 2 : 3. 在仓库中随机地取一件成品, 求它是次品的概率;

**解.** 记  $A = \{\text{从仓库中取到的是次品}\}$ ,  $B_i = \{\text{产品是第 } i \text{ 车间生产的}\}$ ; 易知  $B_1, B_2$  是样本空间的一个划分, 由全概率公式得:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 0.15 \times \frac{2}{5} + 0.12 \times \frac{3}{5} = 0.132 \end{aligned}$$

**例 7.** 假设在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率. 经分析, 该时期内利率下调的概率为 60%, 利率不变的概率为 40%. 根据经验, 在利率下调时某支股票上涨的概率为 80%, 在利率不变时, 这支股票上涨的概率为 40%. 求这支股票上涨的概率.

解. 设  $B_1, B_2$  表示事件“利率上调”和“利率不变”,  $A$  表示事件“股票上涨”, 易知  $B_1 \cup B_2 = \Omega$ ,  $B_1 B_2 = \emptyset$ , 由全概率公式:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 80\% \times 60\% + 40\% \times 40\% \\ &= 64\% \end{aligned}$$

## 贝叶斯公式

**定理 3.** 如果  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是样本空间  $\Omega$  的一个划分,  $A$  是一个事件, 且  $P(B_i) > 0, P(A) > 0$ , 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, i = 1, \dots, n.$$

证明. 由乘法公式可知

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(A B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

又由全概率公式可得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

故结论成立.

## 贝叶斯公式

贝叶斯公式于 1763 年由贝叶斯 (Bayes) 给出. 它是在观察到事件  $A$  已发生的条件下, 寻找导致  $A$  发生的每个原因  $B_i$  的概率.

在贝叶斯公式中,  $P(B_i)$  和  $P(B_i|A)$  分别称为原因  $B_i$  的[先验概率](#)和[后验概率](#).

先验概率常常根据等可能的假设或者以往的数据积累来确定. 是在没有进一步信息 (不知道事件  $A$  是否发生) 的情况下, 人们对诸事件发生可能性大小的认识.

而在得到进一步的信息之后（知道事件  $A$  已经发生），我们得以对各个可能原因发生的概率重新加以修正

**例 8.** 由医学统计分析可知，人群中患有某种病菌

引起的疾病占总人数的 0.5%。一种血液化验以 95%

的概率将患有此疾病的人检查出呈阳性，但也以 1%

的概率误将不患此疾病的人检查出呈阳性。现设某人

检查出呈阳性反应，问他确患有此疾病的概率是多少？

**解.** 记“检出阳性”为事件  $A$ ，“被检者患病”和“被检者不患病”分别为事件  $B_1, B_2$ ，则

$$P(B_1) = 0.005, P(B_2) = 0.995$$

$$P(A|B_1) = 0.95, P(A|B_2) = 0.01$$

由贝叶斯公式可得：

$$P(B_1|A) = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.01} \approx 0.323.$$

**例 9.** 玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率相应地为 0.8, 0.1 和 0.1。一顾客欲买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随机地查看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：

(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率  $\alpha$ ；

(2) 在顾客买下的一箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率  $\beta$ 。

**解.** 记“顾客买下该箱玻璃杯”为事件  $A$ ，“箱中有  $i$  只残次品 ( $i = 0, 1, 2$ )”为事件  $B_i$  显然  $B_0, B_1, B_2$  为

的一个划分，由题意：

$$P(B_0) = 0.8, P(B_1) = 0.1, P(B_2) = 0.1, P(A|B_0) = 1.$$

$$P(A|B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}, P(A|B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}$$

**解. (1)** 由全概率公式，有：

$$\begin{aligned} \alpha = P(A) &= \sum_{i=0}^2 P(A|B_i) P(B_i) \\ &= 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} \approx 0.94 \end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式, 有:

$$\beta = P(B_0|A) = \frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)} \approx \frac{0.8}{0.94} \approx 0.85$$

## 4 事件的独立性

### 两个事件的独立性

设有两个事件  $A, B$ , 一般来说,  $P(B|A)$  与  $P(B)$  是有差异的, 但有时事件  $A$  的发生与否并不影响事件  $B$  发生的概率, 即  $P(B|A) = P(B)$ .

**例 1.** 袋中有 6 个白球, 2 个黑球, 从中有放回地抽取两次, 每次取一球, 记  $A =$  第一次取到白球,  $B =$  第二次取到白球, 则有

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & P(B) &= \frac{8 \times 6}{8^2} = \frac{3}{4} \\ P(AB) &= \frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}, & P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

因此  $P(B|A) = P(B)$ . 同理可得  $P(B|A) = 3/4 = P(B)$ .

**小注:** 这就是说, 已知事件  $A$  发生, 并不影响事件  $B$  发生的概率, 这时称事件  $A, B$  独立.

### 两个事件的独立性

由乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A),$$

当事件  $A, B$  独立时, 有

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (1)$$

当  $P(A) = 0$  时, 由

$$0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$$

可知  $P(AB) = 0$ , (1) 式仍然成立.

**注意:**  $P(A) = 0$  时,  $P(B|A)$  没有意义.

## 两个事件的独立性

定义 1. 若两事件  $A, B$  满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称  $A, B$  独立, 或称  $A, B$  相互独立.

小注: 用

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

刻画独立性, 比用

$$P(A|B) = P(A) \text{ 或 } P(B|A) = P(B)$$

更好, 它不受  $P(B) > 0$  或  $P(A) > 0$  的制约, 且体现对称性.

## 事件的独立性

在实际应用中, 往往根据问题的实际情况去假设事件间的独立性. 如

- 投掷硬币 (或骰子), 我们相信每次的结果都不受以前结果的影响;
- 在相同条件下做实验, 一般假定每次的实验误差相互独立;
- 一般假定生产中不同的流程 (机器、人) 也是相互独立的.

## 两个事件的独立性

例 2. 甲乙二人独立地对目标各射击一次, 设甲射中目标的概率为 0.5, 乙射中目标的概率为 0.6, 求目标被击中的概率.

解. 假设  $A, B$  分别表示甲乙击中目标, 则  $A \cup B$  表示目标被击中, 由于  $A, B$  独立,

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\&= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\&= 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.6 \\&= 0.8.\end{aligned}$$

## 两个事件的独立性

定理 1. 若事件  $A$  与  $B$  独立, 则  $A$  与  $\bar{B}$ 、 $\bar{A}$  与  $B$ 、 $\bar{A}$  与  $\bar{B}$  也分别独立.

证明. 因为  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 所以

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}) &= P(A(\Omega - B)) = P(A - AB) \\&= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\&= P(A)[1 - P(B)] \\&= P(A)P(\bar{B})\end{aligned}$$

由对称性知,  $\bar{A}$  与  $B$  相互独立. 利用第一条结论, 可得  $\bar{A}$  与  $\bar{B}$  相互独立.

## 互斥与独立的关系

“两个事件互斥”和“两个事件相互独立”是不同的概念:

- 互斥  $\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- 独立  $\implies P(AB) = P(A)P(B)$ .

但两者也有关系: 如果  $P(A) > 0$  且  $P(B) > 0$ , 则两者不可能既是互斥的又是独立的.

## 两个事件的独立性

**小注:** 若  $A$  与  $B$  相互独立, 且  $B$  与  $C$  相互独立, 则

$A$  与  $C$  未必相互独立.

例子. 从全体有两个孩子的家庭中随机选择一个家庭, 并考虑下面三个事件:

1.  $A$  为“第一个孩子是男孩”,
2.  $B$  为“两个孩子不同性别”,
3.  $C$  为“第一个孩子是女孩”.

容易验证  $A$  与  $B$  相互独立,  $B$  与  $C$  相互独立, 但是  $A$

与  $C$  **不独立**.

## 三个事件的独立性

定义 2. 设  $A_1, A_2, A_3$  是三个事件, 如果

1. 两两独立 
$$\begin{cases} P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) \end{cases}$$
2.  $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

则称事件  $A_1, A_2, A_3$  **相互独立**.

## 多个事件的独立性

定义. 称  $n(n \geq 2)$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立, 如果对任意一组指标

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad (k \geq 2)$$

都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$



## 多个事件的独立性

性质. 设  $n(n \geq 2)$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立, 则

1. 其中任意  $k(k \geq 2)$  个事件也是相互独立的.
2. 将若干个  $A_i$  用  $\bar{A}_i$  替换后, 得到的新事件集也相互独立.
3. 特别地, 我们有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)] \end{aligned}$$

例 3 (保险赔付). 设有  $n$  个人向保险公司购买人身意外保险 (保险期为 1 年), 假定投保人在一年内发生意外的概率为 0.01. 求

- (1) 保险公司赔付的概率;
- (2) 当  $n$  为多大时, 使得以上赔付的概率超过  $1/2$ .

小注: 每个人是否发生意外可以看作是相互独立的.

解. 记  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个投保人出现意外}\} (i = 1, 2, \dots, n)$ ,

$$A = \{\text{保险公司赔付}\}$$

(1) 因为  $A_1, \dots, A_n$  相互独立, 且  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , 我们有

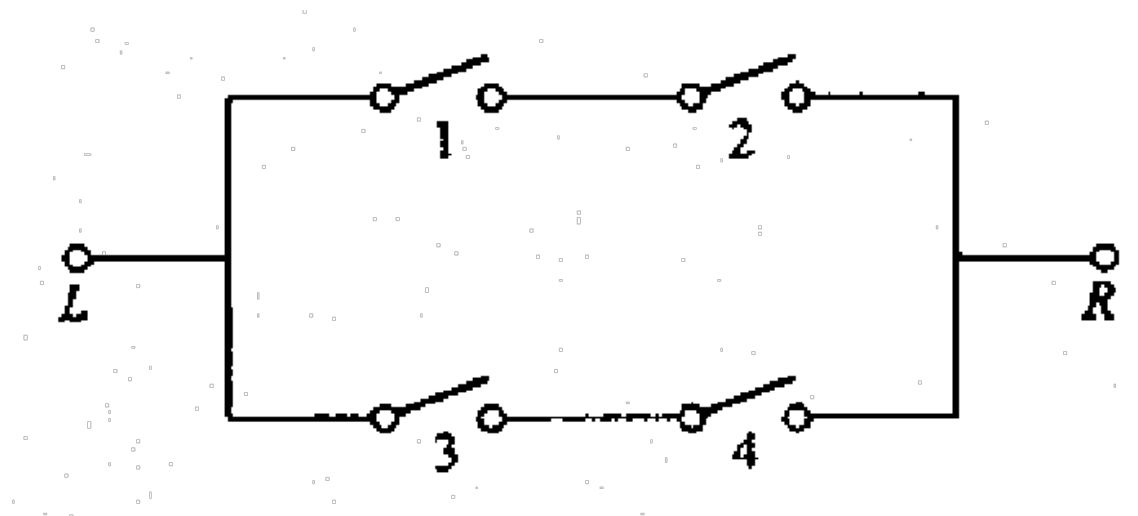
$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - (0.99)^n.$$

(2) 注意到  $P(A) \geq 0.5$  等价于  $(0.99)^n \leq 0.5$ , 我们有

$$n \geq \frac{\lg 2}{2 - \lg 99} \approx 68.416$$

即当投保人数大于等于 69 人时, 赔付的概率超过  $1/2$ .

例 4. 设有电路如右图所示, 其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点, 设各继电器接点闭合与否是相互独立的, 且每一继电器接点闭合的概率均为  $p$ , 求  $L$  至  $R$  为通路的概率.



解. 设  $A = \{\text{第 } i \text{ 个继电器闭合}\}$ ,  $A = \{L \text{ 至 } R \text{ 是通路}\}$ , 由  $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$  及  $A_1, A_2, A_3, A_4$  的独立性可得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) \\ &\quad - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= 2p^2 - p^4 \end{aligned}$$

例 5. 据以往记录的数据分析, 某船只运输某种物品损坏的情况共有三种: 损坏 2% (记这一事件为  $A_1$ ), 损坏 10% (记这一事件为  $A_2$ ), 损坏 90% (记这一事件为  $A_3$ ). 且  $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05$ . 设物品件数很多, 取出一件后不影响后一件取的是否为好品的概率, 现从已被运输的物品中随机地取 3 件, 发现这三件都是好的 (记这一事件为  $B$ ), 试求  $P(A_1|B)$ .

解. 在被运输的物品中, 随机取 3 件, 相当于在物品中抽取 3 次, 每次取一件, 作不放回抽样. 由于抽取一件后, 不影响取后一件是否为好品的概率, 已知当  $A_1$  发生时, 一件产品是好品的概率为  $1 - 2\% = 98\%$ . 由独立性可知, 随机取 3 件, 它们都是好品的概率为

$$P(B|A_1) = 0.98^3.$$

同理可得

$$P(B|A_2) = 0.9^3, P(B|A_3) = 0.1^3.$$

由条件知  $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05, A_i A_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, 3)$  且

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

由贝叶斯公式可得：

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B|A_i)P(A_i)} \\ &= \frac{(0.98)^3 \times 0.8}{0.8624} = 0.8731 \end{aligned}$$