第四章　中值定理及导数的应用

一、单项选择题

1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加, 则必有（　）.

(A) $f'(x)<0$;　(B) $f'(x)>0$　(C) $f'(x)\geq 0$;　(D) A, B, C 都不对.

2. 函数 $y=f(x)$满足条件: $f(0)=1, f'(0)=0$, 当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)>0, f''(x)\begin{cases}<0\,, & x<0\\ >0\,, & x>0\end{cases}$,

它的图形是（　）.

3. 设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则使不等式 $\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$ 成立的条件是（　）.

(A) $0<a<b$;　(B) $\mathrm{e}<a<b$;　(C) $0<b<a$;　(D) $\mathrm{e}<b<a$.

4. 关于函数 $y=x-\ln x$ 的极值, 结论正确的是（　）.

(A) 有极小值 1;　(B) 有极大值 1;　(C) 无极值 $\mathrm{e}-1$;　(D) 有极小值 $\mathrm{e}-1$.

5. 关于函数 $y=2x-\ln(4x)^2$ 的极值, 结论正确的是（　）.

(A) 有极大值 $2-4\ln 2$;　(B) 有极小值 $2-4\ln 2$;

(C) 无极值;　(D) 有极小值 $\frac{1}{2}$.

6. 曲线 $y=3x^2-x^3$ 在（　）

(A) $(1,+\infty)$ 是凹的, $(-\infty,1)$ 是凸的;

(B) $(1,+\infty)$ 是凸的, $(-\infty,1)$ 是凹的;

(C) $(0,+\infty)$ 内是凸的, 在 $(-\infty,0)$ 是上凹的;

(D) $(0,+\infty)$ 内是上凹的, $(-\infty,0)$ 是上凸的;

7. 曲线 $y=x^2\ln x$ 在点 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^4},\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$ 近邻是（　）.

(A) 向上凸的;　(B) 向上凹的;

(C) 左侧近邻向上凸, 右侧近邻向上凹;　(D) 左侧近邻向上凹, 右侧的邻向上凸;

8. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的拐点情况是（　）.

(A) 没有拐点;　(B) 有一个拐点;　(C) 有两个拐点;　(D) 有三个拐点.

9. 若 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 为连续曲线 $y=f(x)$ 上的凹弧与凸弧分界点, 则（　）.

(A) $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 必为曲线的拐点; (B) $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 必定为曲线的驻点;

(C) x_0 为 $f(x)$ 的极值点; (D) x_0 必定不是 $f(x)$ 的极值点;

10. 曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} (a>0)$（　）.

(A) 有无穷多个拐点; (B) 有两个拐点;

(C) 无拐点; (D) 有一个拐点.

11. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点, 则必有（　）.

(A) $a=1,\ b=-3,\ c=1$; (B) a 任意, $b=0,\ c=1$;

(C) $a=1,\ b=0$, c 任意; (D) $b=-3a$, a 任意, $c=1$.

12. 关于曲线 $y=\ln x$ 的渐近线, 下述结论正确的是（　）.

(A) 只有水平渐近线;

(B) 只有铅直渐近线;

(C) 既有水平渐近线, 又有铅直渐近线;

(D) 既没有水平渐近线, 也没有铅直渐近线.

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)=$（　）

(A) $-5/3$; (B) -1; (C) 1; (D) $5/3$.

14. 在区间 $[0,8]$ 内, 对函数 $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$, 罗尔定理（　）.

(A) 不成立; (B) 成立, 并且 $f'(2)=0$;

(C) 成立, 并且 $f'(4)=0$; (D) 成立, 并且 $f'(8)=0$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 记 (I) $f(a)=f(b)$; (II) 在 (a,b) 内至少存在 ξ, 使 $f'(\xi)=0$, 则（　）.

(A)（I）是 (II) 的充分但非必要条件; (B)（I）是 (II) 的必要但非充分条件;

(C) (I) 是 (II) 的充要条件; (D) (I) 是 (II) 既非充分, 也非必要条件.

16. 设 $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, & 0\le|x|\le 1 \\ \dfrac{2}{x}, & 1<|x|\le 2 \end{cases}$, 则在区间内 $(0,2)$ 满足 $f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0)$ 的 ξ 值（　）.

(A) 只有一个; (B) 不存在; (C) 有两个; (D) 有三个.

17. 设 $a<b, ab<0, f(x)=\dfrac{1}{x}$, 则在 $a<x<b$ 内使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立的点 ξ（　）.

(A) 只有一点; (B) 有两点;

(C) 不存在; (D) 是否存在, 与 a,b 的具体数值有关.

18. 设 $f(x)$ 有直至 $n+1$ 阶导数, 则 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$ 式中拉格朗日型余项 $R_n(x)=$ ( ) (设 $0<\theta<1$)

(A) $\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$;　(B) $\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$;

(C) $\dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(\theta x)^{n+1}$;　(D) $\dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

19. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在点 $x=1$ 处取得极值 -2, 则 ( ) .

(A) $a=-3,\ b=0$ 且点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值;

(B) $a=0,\ b=-3$ 且点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值;

(C) $a=-3,\ b=0$ 且点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值;

(D) $a=0,\ b=-3$ 且点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

20. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)}$ 的所有渐近线有 ( ) 条

(A) 4;　(B) 3;　(C) 2;　(D) 1.

二、填空题

1. 曲线 $y=1-\sqrt[3]{x-2}$ 的拐点是________.

2. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且满足 $f'(x)\equiv 0$, 则在 (a,b) 内 $f(x)=$________________.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶导数, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=3$, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$______.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ 的值等于_______, $(b\neq 0)$..

5. 设 $a>0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{ax}}$ 的值等于______.

6. $f(x)=x^3$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$________.

7. 函数 $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[-1,\ 1]$ 上不具有罗尔定理的结论, 其原因是由于 $f(x)$ 不满足罗尔定理的一个条件________________________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{x^3}$ 的值等于______.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^a}=$________ $(a>0)$.

10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 3x-\sin x}$ 的值等于________.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1-x}{2x}$ 的值等于______.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ 的值等于______.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ 的值等于______.

14. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan nx}{\tan mx}$(其中 m, n 为正整数) 的值等于_______.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{x}-e^{-x}}$ 的值等于______.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$(其中 $k>0$) 的值等于______.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/x}=$______.

18. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}=$________.

19. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线为______________.

20. 曲线 $y=\dfrac{e^x}{x+1}$ 有______个拐点.

三、计算题

1. 判定函数 $f(x)=x+\cos x\,(0\le x\le 2\pi)$ 的单调性.

2. 求函数 $y=(x+1)^4+e^x$ 的图形的拋点及凹凸区间.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{e^{\sin 4x}-e^{\sin 8x}}$.

4. 设 $f(x)$ 有一阶导数, $f(0)=f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|\sin ax|}{\ln|\sin bx|}$ (a,b 都是不为 0 的常数).

6. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a, b, c, d, 使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线, $(1,-10)$ 为拐点, 且点 $(-2,\ 44)$ 在曲线上.

7. 求函数 $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值, 最小值.

四、综合与应用题

1. 用长度为 l 米（ $l>0$ ）的篱笆在直的河岸边围成三面是篱笆一面是河的矩形场地, 求矩形场地的最大面积.

2. 要做一个圆锥形漏斗, 其母线长 20 cm, 要使其体积最大, 问其高应为多少?

3. 设有一块边长为 a 的正方形铁皮, 从四个角截去同样的小方块, 做成一个无盖的方盒子, 问小方块的边长为多少才使盒子的容积最大?

4. 设某产品的销售量 Q 与价格 P 之间有关系式为 $Q=\dfrac{1-P}{P}$

(1) 求需求弹性;

(2) 售价为 0.5 时的需求弹性. 并给出经济解释.

5. 某厂生产某种商品, 其年销售量为 100 万件, 每批生产需增加准备费 1000 元, 而每件的库存费为 0.05 元. 如果年销售是均匀的, 且上批销售完后, 立即再生产下一批（此时商品库存量为批量的一半), 问分几批生产, 能使生产准备费及库存费之和最小？

6. 某商品的价格 P 与需求量 Q 的关系为 $P=10-\dfrac{Q}{5}$,

(1) 求需求量为 20 及 30 时的总收益 R、平均收益 $\overline{R}$ 及边际收益 R';

(2) Q 为多少时总收益最大？

7. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2, 试确定系数 a, b, 并求出 $y=f(x)$ 的所有极值点及拐点.

8. 在半径为 R 的球内, 求体积最大的内接圆柱体的高.

9. 由三块同一宽度的板做成一个梯形的排水槽 (无上盖), 问侧面与底的倾角 α 为多大时, 才使水槽的横断面积最大？

10. 将半径为 r 的圆铁片, 剪去一个扇形, 问其中心角 α 为多大时, 才能使余下部分围成的圆锥形容器的容积最大?

五、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上连续, 在 $(1,\mathrm{e})$ 内可导, 且 $f(1)=0, f(\mathrm{e})=1$, 证明方程 $xf'(x)=1$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 内至少有一实根.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^2\left[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\right].$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,\ 2)$ 内可导, 且 $f(2)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(1,2)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi\ln(\xi)}.$$

4. 设 $b>a>0$, 证明: $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

5. 证明当 $x\neq0$ 时, 有不等式 $\mathrm{e}^x>1+x$.