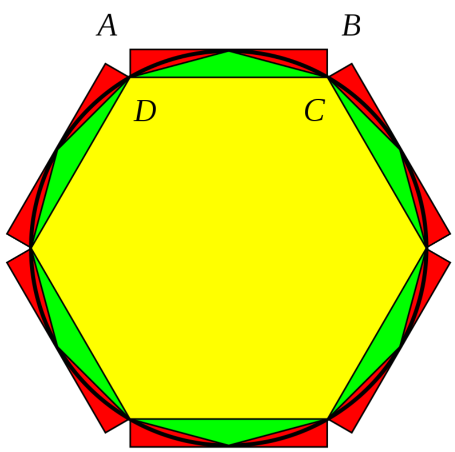
Part II

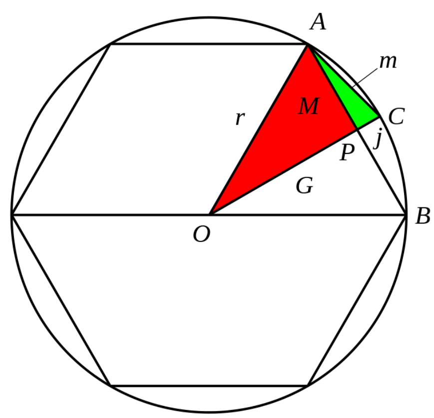
第二章

1 数列的极限

1.1 引例

刘辉割圆术





记内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边型的面积为 A_n, 则 $n\to\infty$ 时，正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小.

截杖问题

"一尺之棰，日取其半，万世不竭."

第一天截下的木棒长为 $X_1=\dfrac{1}{2}$; 第二天截下的木棒长总和为 $X_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第 n 天截下的木棒长总和为 $X_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

1.2 数列的有关概念

数列的定义

定义 **1.** 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$ 排列的一列数称为数列, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示，其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为通项或一般项.

例子. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

例子. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$

例子. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

有界性

定义 **2.** 对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \le M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子. $x_n = \frac{n}{n+1}$ ············ 有界.

例子. $x_n = 2^n$ ············ 无界.

小注： 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

有界性

若存在实数 A, 对一切 n 都满足 $x_n \geq A$, 称 $\{x_n\}$ 为下有界，A 是 $\{x_n\}$ 的下界;

同样, 若存在 B, 对一切 n 都满足 $x_n \leq B$, 称 $\{x_n\}$ 为上有界，B 是 $\{x_n\}$ 的上界.

单调性

若数列 $\{x_n\}$ 满足：

1. $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 称数列 $\{x_n\}$ 为单调增数列;
2. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 单调减数列.

单调增数列和单调减数列统称为单调数列.

子数列

定义 **3.** 将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

例子**.** $x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}$

例子**.** $x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}$

小注： 在子数列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然, $n_k \geq k$.

1.3 数列极限的定义

数列极限的定义

问题. 随着 n 的增大，x_n 也跟着变化. 当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数?

1. $x_n = 3$ $\quad$ $3, 3, 3, 3, \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad$ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$ $\quad$ $2, 4, 8, 16, \cdots \times$
5. $x_n = (-1)^n$ $\quad$ $-1, 1, -1, 1, \cdots \times$

数列的极限

定义 4. 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在正整数 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A \ (n \to \infty).$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

小注：1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;
2. 一般情况下，N 与任意给定的正数 ϵ 有关.

$\epsilon - N$ 语言

为了表达方便，引入符号

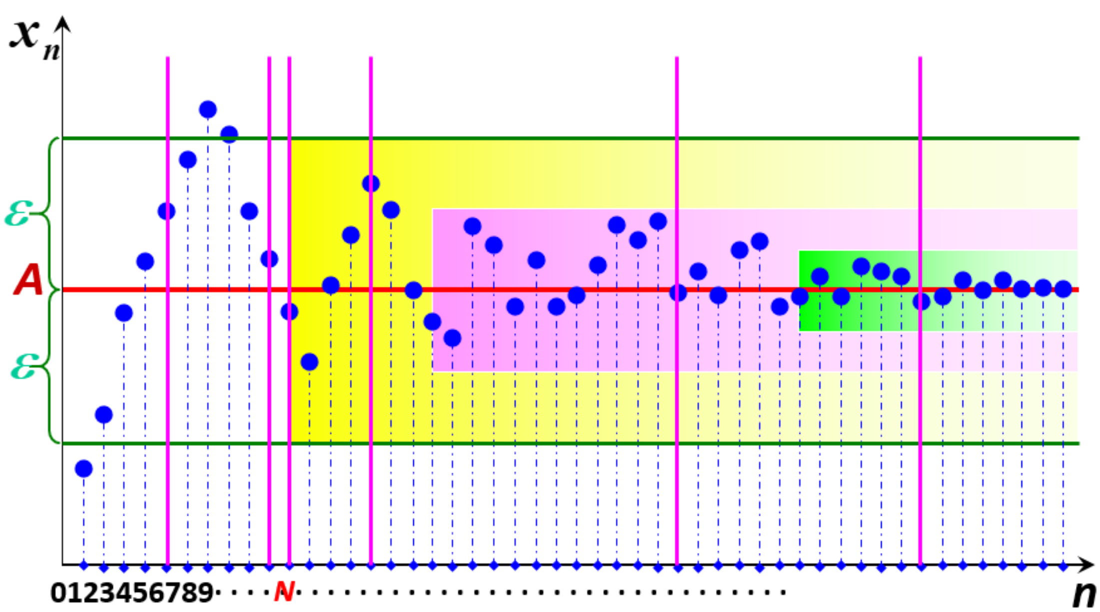
- $\forall$ ··任意给定的.
- $\exists$ ··存在.

使用 $\epsilon - N$ 语言，$\lim_{n\to\infty} x_n = A$ 可以表示为：

$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$.

小注： 数列极限的定义未给出求极限的方法.

数列极限的几何解释



数列极限的基本公式

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，（$|q| < 1$）

数列极限

例子. 设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证明. $\forall\epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

数列的极限

例子. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明. $\forall\epsilon > 0$，取 $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

数列极限

例子. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

证明. $\forall\epsilon>0$，取 $N=[\dfrac{1}{\epsilon}]+1$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\tfrac{(-1)^n}{n}-0\right|=\tfrac{1}{n}<\epsilon.$$

数列的极限

例子. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, 其中 $|q|<1$.

证明. 任给 $\epsilon>0$, 若 $q=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$. 若 $0<|q|<1$, $|x_n-0|=|q^n|<\epsilon$, 要使$n\ln|q|<\ln\epsilon$，只需要 $n>\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$, 故取 $N=\left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时，就有

$$|q^n-0|<\epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0$$

数列的极限

例子. 设 $x_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}.$$

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists\ N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有，

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

发散数列

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$.

1.4 收敛数列的性质

收敛数列的性质

性质 **1** (极限的唯一性)**.** 收敛数列的极限必唯一.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$ 由定义可知：$\forall\epsilon > 0, \exists\ N_1, N_2$, 使得：当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$; 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$，则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}|a-b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\ &\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b-a|.\end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

收敛数列的性质

性质 2 (有界性)**.** 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M>0$ 使得 $|x_n|\le M$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon=1$，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-A|<\epsilon=1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n-A)+A| \le |x_n-A|+|A| < 1+|A|$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|A|\}$，则对任何 n 都有 $|x_n|\le M$.

推论. 无界数列必定发散.

收敛数列的性质

性质 3 (保号性)**.** 设数列收敛于 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

证明. 取 $\epsilon=A/2$，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-A|<\epsilon=A/2$. 此时 $x_n>A/2>0$.

小注： 这个定理表明, 若数列的极限为正（或负），则该数列从某一项开始以后所有项也为正（或负）.

收敛数列的性质

定理 (保号性)**.** 设数列 $x_n\ge 0$（或 $x_n\le 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）.

推论. 如果 $x_n\ge y_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有 $A\ge B$.

思考. 若将上面的等号去掉，结论如何？

收敛数列的性质

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A.

小注： 这个定理表明: 若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的.

小结

- 数列: 研究其变化规律;
- 数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;
- 收敛数列的性质: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收签性.

复习与提高

选择**.** 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$，则该数列 . . . . *(　　)*

(A) 收敛且有界　　*(B)* 收敛且无界

(C) 发散且有界　　*(D)* 发散且无界

2 函数的极限

2.1 函数极限的定义

函数极限的定义

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中函数的极限．我们主要研究以下两种情形:

1. 自变量 x 任意接近于有限值 $x_0(x \to x_0)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;
2. 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x \to \infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

函数的极限 **$(x \to x_0)$**

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中, 对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A.

问题**.** 如何用数学的语言刻画" 无限接近"?

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小；
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.

函数的极限 **$(x \to x_0)$**

定义 **1.** 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \to A(\text{当 } x \to x_0)$$

$$\text{“}\epsilon - \delta\text{” 定义：} \lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \text{ 使得当} 0 < |x - x_0| < \delta \text{时, 恒有}$$

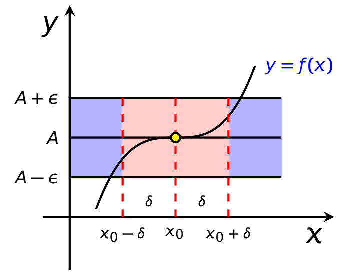
$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

极限的几何解释

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y = A$$

为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区域内.



小注： 一般情况下, δ 与 ϵ 有关. 小注： 函数极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

函数极限的例子

1. $y = C$
   - 当 $x \to x_0$ 时， $y \to C$
2. $y = x$
   - 当 $x \to x_0$ 时， $y \to x_0$
3. $y = 2x + 1$
   - 当 $x \to x_0$ 时， $y \to 2x_0 + 1$
4. $y = \sqrt{x}$
   - 当 $x \to x_0$ 时， $y \to \sqrt{x_0}$

函数极限的例子

例子. 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C, (C$ 为常数 $)$.

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| <$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

函数极限的例子

例子. 证明 $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

证明. $\forall \epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$$

所以 $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

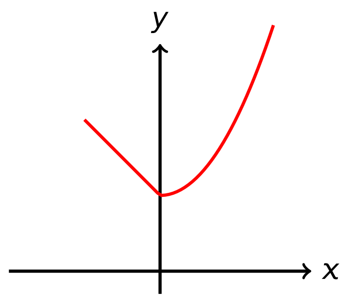
函数极限的例子

例子. 证明 $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$（$x_0 > 0$）.

证明. $\forall \epsilon > 0$，取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\,\epsilon\}$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| &= \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \\ &\le \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\sqrt{x_0}\,\epsilon}{\sqrt{x_0}} = \epsilon \end{aligned}$$

函数的极限 **($x \to x_0$)**



注记. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 **1.** 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1;\\ 3, & x=1.\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

注记. 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 **2.** 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

函数的单侧极限

设函数

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. 分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论:

1. x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^-$;
2. x 从右侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^+$;

左极限和右极限

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

定义. 设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

单侧极限与极限的关系

注意到

$$\begin{aligned} & \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\} \\ = & \{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x \mid -\delta < x - x_0 < 0\} \end{aligned}$$

于是我们有

定理. 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

例子. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

单侧极限

例子. 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim_{x\to 0} f(x)$.

例子. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-x+2, & x>1 \end{cases}$，求 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

注记. 研究当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

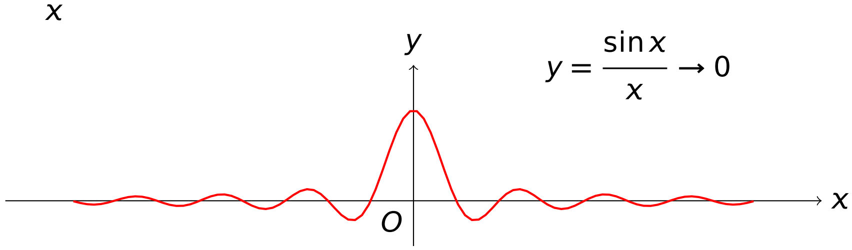
左极限和右极限

练习. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ e^x, & 0<x<1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$；判断极限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，若存在求出该极限.

解. $\lim_{x\to 0} f(x)$ 存在，$\lim_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

函数的极限 **($x\to\infty$)**

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的变化趋势.



函数的极限 **($x\to\infty$)**

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察: 当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题. 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

函数的极限 **($x \to \infty$)**

定义 2. 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

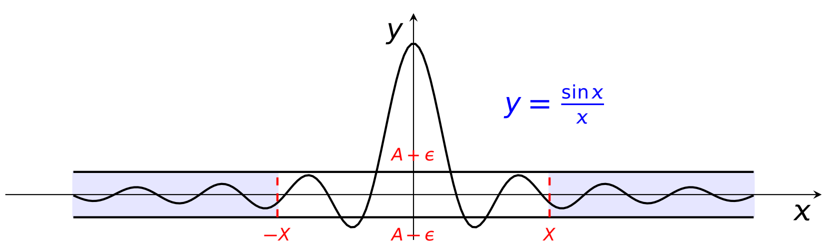
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

思考. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的 ϵ 语言定义.

注记. $x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

定理. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

极限的几何解释



当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线，宽为 2ϵ 的带形区域内.

函数的极限 ($x \to \infty$)

例子**.** 证明 $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

证明. 由条件可知：

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{x} = \epsilon,$$

故对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \epsilon,$$

即 $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

函数的极限 ($x \to \infty$)

例子**.** 证明 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0.$

证明. $\forall \epsilon > 0$，由数列极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 知道，存在正整数 $N_1 > 0$ 使得当 $n > N_1$ 时有 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. 取 $X = N_1 + 1$，则当 $x > X$ 时有 $[x] > N_1$，从而

$$\left|\frac{1}{2^x} - 0\right| = \frac{1}{2^x} \leq \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

函数极限的基本公式 I

$$\lim_{x\to\infty} C = C \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{为正整数}) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b > 1) \tag{4}$$

2.2 函数极限的性质

函数极限的性质

性质 1 (唯一性)**.** 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则这个极限唯一.

证明. 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 又 $\lim_{x\to x_0} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 由定义可知: $\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_1, \delta_2$, 使得: 当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$; 当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$; 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$\begin{aligned} |A - B| &= |(f(x) - A) - (f(x) - B)| \\ &\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|. \end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性)**.** 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leq M$.

证明. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\ &\leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| \end{aligned}$$

取 $M=1+|A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子. 设 $f(x)=1/x$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$，此时当 $0<|x-1|<1/2$ 时有 $|f(x)|\le 2$.

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性)**.** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>\frac{A}{2}>0$（或 $f(x)<\frac{A}{2}<0$）.

证明. 取 $\epsilon=A/2$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon=A/2$. 此时 $f(x)>A/2>0$.

例子. 设 $f(x)=2x-1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1>0$，此时当 $0<|x-1|<1/4$ 时，有 $f(x)>1/2>0$.

函数极限的性质

定理 (保号性)**.** 设 $f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）.

推论. 如果函数 $g(x)\ge h(x)$，而且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=B$，则有 $A\ge B$.

> 极限的性质，对于其它形式的极限也成立.

小结

- 极限的定义：定义、几何意义；
- 极限的性质：唯一性、局部保号性、局部有界性.

3　无穷小与无穷大

3.1　无穷小

无穷小

定义. 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

小注： $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\epsilon$

小注： 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷小.

无穷小

例子. 0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小.

例子. 函数 $\frac{1}{x}$、$\frac{2}{1+x}$ 和 $\frac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小.

小注： 无穷小是变量，不能与很小的数混淆. 小注： 零是可以作为无穷小的唯一的数

无穷小与函数极限的关系

定理. $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

定理的意义：

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x)\approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

无穷小与函数极限的关系

证明. 必要性: 因 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 所以对 $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令 $\alpha(x) = f(x) - A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) = A + \alpha(x)$. 充分性: 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 , 有

$$|\alpha(x)| < \epsilon, \text{ 即 } |f(x) - A| < \epsilon,$$

也即 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

无穷小的运算

定理. 两个 (有限个) 无穷小的和差还是无穷小.

证明. 设 α 及 β 是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小, 则对 $\forall\epsilon > 0$, $\exists\ X_1 > 0, X_2 > 0$, 使得 当 $|x| > X_1$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

当 $|x| > X_2$ 时恒有

$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \to 1(n\to\infty)
\end{array}
$$

无穷小的运算

问题. 无穷多个无穷小的和是不是无穷小？

答案. 不是，例如

无穷小的运算

定理 1. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明. 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M>0,\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有 $|u|\le M$. 又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 则对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时恒有

$$|\alpha|<\frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\epsilon.$$

所以当 $x\to x_0$ 时, $u\cdot\alpha$ 为无穷小.

无穷小的运算

推论. 常数与无穷小的积是无穷小.

$$\begin{array}{ccccccl}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
1 & 2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
1 & 1 & 3^2 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \to 1(n\to\infty)
\end{array}$$

推论. 有限个无穷小的积是无穷小.

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小.

无穷小的运算

问题. 无穷多个无穷小的积是不是无穷小？

答案. 不是，例如：

无穷小

例子. 求函数极限 $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$.

练习. 求下列函数极限：

(1) $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$; 0

3.2 无穷大

无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义. 如果对任何给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

小注： 类似地，可以定义 $x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷大.

小注： 特殊情况：正无穷大，负无穷大

无穷大

1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.
3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大 (例：$\dfrac{1}{x}\sin(\dfrac{1}{x})$).

无穷大

例子. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

证：$\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$, 只需要 $|x-1|<\frac{1}{M}$. 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义 **1.** 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

无穷大

练习. $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大.

练习. $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \to 1$ 时的无穷大.

无穷小与无穷大的关系

定理 2. 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 则对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| > \dfrac{1}{\epsilon}$, 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \epsilon$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小

无穷小与无穷大的关系

续. 反之, 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$. 则 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

小注： 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{2x^2+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{3x+1} = \infty.$

3.3 小结 思考

小结

主要内容: 两个定义; 四个定理; 三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量, 不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

思考

在自变量的同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小：反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案**.** 不一定. *0* 是无穷小，但其倒数不存在. 所以课本上表示为“非零的无穷小的倒数是无穷大”.

4 极限运算法则

4.1 极限运算法则

四则运算法则

定理 **1.** 如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

四则运算法则*

证明. 因为 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$ 所以

$$f(x)=A+\alpha,\ g(x)=B+\beta.\ 其中\ \alpha\to 0,\beta\to 0.$$

由无穷小运算法则, 得

$$[f(x)\pm g(x)]-(A\pm B)=\alpha\pm\beta\to 0.$$

$$\begin{aligned}[f(x)\cdot g(x)]-(A\cdot B)&=(A+\alpha)(B+\beta)-AB\\&=(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta\to 0.\end{aligned}$$

四则运算法则*

续.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为 $B\alpha-A\beta\to 0$ 又因为 $\beta\to 0,B\neq 0,\ \exists\delta>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|\beta|<\frac{|B|}{2}$, 所以

$$|B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|.$$

所以

$$|B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

四则运算法则

推论. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论. 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

4.2 求极限方法举例

函数极限的基本公式

1. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n + a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0)\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

注意：若 $Q(x_0) = 0$，则商的法则不能应用.

函数极限的基本公式

3. 如果基本初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

求极限方法举例

例子. 求函数极限 $\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$.

解. 原式 $= 3\lim_{x\to 1}x^2 - 2\lim_{x\to 1}x + \lim_{x\to 1}1$

$= 3\times 1^2 - 2\times 1 + 1 = 2$

求极限方法举例

例子. 求 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

解. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right) &= \lim_{x\to 2}x^2 - \lim_{x\to 2}3x + \lim_{x\to 2}5\\ &= \left(\lim_{x\to 2}x\right)^2 - 3\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}5\\ &= 2^2 - 3\cdot 2 + 5 = 3 \neq 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5} = \frac{\lim_{x\to 2}x^3 - \lim_{x\to 2}1}{\lim_{x\to 2}(x^2-3x+5)} = \frac{2^3-1}{3} = \frac{7}{3}$$

求极限方法举例 ($\frac{0}{0}$ 型)

例子. 求函数极限 $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解. 原式 $= \lim_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$= \lim_{x\to 3}\dfrac{3+1}{3+3} = \dfrac{2}{3}$

求极限方法举例 **($\frac{0}{0}$ 型)**

例子. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解. 原式

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

求极限方法举例 **($\frac{0}{0}$ 型)**

例子. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、b.

解. $x\to 1$ 时, 分母的极限是零, 而商的极限存在. 则

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3} = \frac{2+a}{4} = 2.
\end{aligned}
$$

故 $a=6, b=-7.$

求极限方法举例 **($\infty-\infty$ 型)**

例子. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解. 原式 $= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$
$$= -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

求极限方法举例 **($\frac{\infty}{\infty}$ 型)**

例子. 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解. 先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

求极限方法举例 **($\frac{\infty}{\infty}$ 型)**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1} = \frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m} = \begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

求极限方法举例

例子. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 ab.

解.

$$\begin{aligned}
左边 &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2+ax(x+1)+b(x+1)}{x+1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(a+b)x+2+b}{x+1}
\end{aligned}$$

若商的极限存在，则必须 $1+a=0$，$a+b=2$ 解得

$$a=-1,\ b=3.$$

求极限方法举例

例子. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

解. $n\to\infty$ 时, 是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

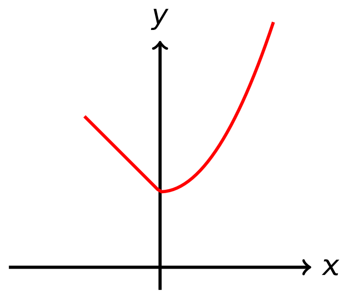
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

求极限方法举例

设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x,\ x<0;\\ x^2+1,\ x\geq 0;\end{cases}$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.



解. 易知

$$\lim_{x\to 0^-} = 1-0 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} = 1+0 = 1,$$

左右极限相等，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

求极限方法举例

练习. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2\ln(1+x)+e^x+2)$；…… 3

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$；…… 4

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$. …… $\dfrac{5}{4}$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "\times\ f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & \neq & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \overset{\boxed{\begin{array}{c} x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)\\ g(x)\neq u_0\end{array}}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "\checkmark\ f\circ g"] \\
\mathring{U}(u_0,\eta) & = & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\boxed{\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \implies \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] \\
U(u_0,\eta)
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] \\
U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "\checkmark\ f\circ g"] \\
U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

定理. 如果 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim_{u\to u_0} f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$$

定理. 若 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\Big[\lim_{x\to x_0} g(x)\Big]=f(u_0).$$

例子. $\lim_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

小结　思考

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
    - 多项式与分式函数代入法求极限;
    - 消去零因子法求极限;
    - 无穷小因子分出法求极限;
    - 利用无穷小运算性质求极限;
    - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

思考题

问题. 在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，那么 $f(x)+g(x)$ 是否有极限？为什么？

解. 没有极限，使用反证法易证.

5　极限存在准则、两个重要极限

本节基本内容

极限存在准则 I	极限存在准则 II
$\Downarrow$	$\Downarrow$
重要极限 I	重要极限 II
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

5.1 夹逼准则

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)**.** 如果数列 $x_n \le y_n \le z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

例子**.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

注记**.** 在上述定理中，如果不等式 $x_n \le y_n \le z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

极限存在准则 I

证明. $\because y_n \to a,\quad z_n \to a,\ \therefore$ 对$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0,\quad N_2 > 0$, 使得 当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \varepsilon$, 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$， 上两式同时成立, 即

$$a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$$

当 $n > N$ 时，恒有

$$a-\varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a+\varepsilon$$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立， $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I')**.** 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记**.** 若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

注记**.** 在上述定理中，如果不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

准则 I 和准则 I′ 称为夹逼准则或者两面夹准则

注意：利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n $(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$，并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

重要极限 I

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

一般地，如果当 $x\to 0$ 时，$\phi(x)\to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\phi(x)}{\phi(x)}=1}$$

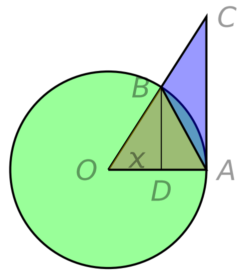
重要极限 I

证明. 如图所示, 设单位圆 O, 圆心角 $\angle AOB=x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 作单位圆的切线, 得 $\triangle ACO$. 设扇形 OAB 的圆心角为 x, $\triangle OAB$ 的高为 BD, 则有 $\sin x=BD$, $\quad x=$ 弧 AB, $\quad \tan x=AC$, 所以

$$\sin x<x<\tan x,$$

即

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$



重要极限 I

证明续. 上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0, \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

重要极限 I

例子. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解. 原式 $= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

重要极限 I

例子. 求 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解.

$$\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2$$
$$= \frac{1}{2}$$

重要极限 I

例子. 求极限 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

解. 原式 $= \lim_{x \to 0} \left(3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right)$

$= 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \times 1 = 3$

重要极限 I

例子. 求极限 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$.

解. 原式 $= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{1}{4}\times 1\times 1 = \frac{1}{4}$$

重要极限 I

练习. 求下列函数极限：

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$　　　　*(2)* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

解. *(1)* $\frac{5}{4}$　　　　*(2)* $\frac{2}{3}$

重要极限 I

练习 **1.** 求下列函数极限：

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$

(3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}}{x}$

重要极限 I

例子. 求 $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$.

解. 令 $t=x-\pi$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}&=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1\end{aligned}$$

重要极限 **I**

例子. 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$.

例子. 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$.

例子. 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

5.2 重要极限 II

极限存在准则 **II**

定理 (极限存在准则 II). 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记. 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

重要极限 II

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}}$$

重要极限 II

证明. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 则

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

显然 $x_{n+1}>x_n$, $\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的;

重要极限 **II**

证明续. 又因为

$$
\begin{aligned}
x_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3,
\end{aligned}
$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界的由单调收敛准则, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \quad (\mathrm{e}=2.71828\cdots)$

重要极限 **II**

可以证明

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \xRightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}}$$

—

般地，如果当 $x\to a$ 时，$\psi(x)\to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \mathrm{e}}$$

简单情形

例子. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = \mathrm{e}^2$$

简单情形

例子. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

解. 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot(-\frac{1}{3})}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{-1/3}$$

练习 **2.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$ .... e^{-4}

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$ .... $\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$

幂指函数的极限

定理. 若 $\lim\limits_{x\to\square} u(x) = A > 0$，$\lim\limits_{x\to\square} v(x) = B$，则有

$$\lim_{x\to\square} u(x)^{v(x)} = A^B.$$

幂指情形

例子. 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

解. 原式 $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{2x}{x-1}} = \mathrm{e}^2.$$

练习. 求函数极限：

(1) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$ .... $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+1}$ .... e^{-1}

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3}$ .... e^4

例子. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解. 由条件知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\\ &= \ln \mathrm{e} = 1\end{aligned}$$

变量替换

例子. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

解. 令 $e^x-1=u$, 即 $x=\ln(1+u)$. 则当 $x\to 0$ 时, 有 $u\to 0$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}}=1$$

单调有界收敛准则

例子. 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$($n$ 重根式) 的极限存在.

证明. 显然 $x_{n+1}>x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, 则

$$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

单调有界收敛准则

证明续. 由 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ 得

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3+x_n}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=A$, 则有

$$A=\sqrt{3+A}.$$

解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

5.3 连续复利

常数 e 的意义

例子. 复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实．常数 e 反映了连续增长的规律．

连续复利

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r, 则

- 一年后本利和 $A_1 = A_0(1+r)$
- 两年后本利和 $A_2 = A_1(1+r) = A_0(1+r)^2$
- k 年后本利和 $A_k = A_0(1+r)^k$

如果一年分 n 期计息，年利率仍为 r ，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

连续复利

k 年后本利和 $A_k = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk}$

如果计息期数 $n \to \infty$ ，即每时每刻计算复利 (称为连续复利)，则 k 年后的本利和

$$A_k = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rk}$$

$$= A_0 e^{rk}$$

两个重要极限

复习 **1.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$ ··· $e^{-\frac{2}{3}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$ ··· 1

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$ ··· e^{-3}

小结

1. 两个准则
   - 两面夹 (夹逼) 准则
   - 单调有界准则
2. 两个重要极限
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.
   - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

复习与提高

例子**.** 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解**.** 因为当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小，所以不能用重要极限 *II* 公式来计算.

实际上，这个函数是初等函数，且在 0 的邻域有定义，所以其极限为 $(1+1)^1=2$.

复习与提高

例子. 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例子. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geq 1$ 时有 $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

解. 先说明数列收敛，再根据数列的递归关系求出其极限.

6 无穷小的比较

6.1 无穷小的阶

无穷小的比较

例子. 比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小 x，$2x$，x^2.

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

无穷小的阶

定义. 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小.
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 和 α 是 同阶的无穷小.

★ 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 和 α 是 等价无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$.

4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, $k > 0$, 则 β 是 α 的 k 阶无穷小.

无穷小的阶

例子. 在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x 高阶.

例子. 在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 比 x^3 低阶.

例子. 在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例子. 在 $x \to 0$ 时，无穷小 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

无穷小的阶

练习 **1.** 易知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \to 0$ 时的无穷小.

(1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶？

(2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶？

(3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶？

(4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价？

常用的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小：

(1) $\sin x \sim x$	(5) $\ln(1+x) \sim x$
(2) $\tan x \sim x$	(6) $e^x - 1 \sim x$
(3) $\arcsin x \sim x$	(7) $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$
(4) $\arctan x \sim x$	(8) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

意义：用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

等价无穷小的充要条件

定理. β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$. 称 α 是 β 的主要部分.

证明. 必要性　设 $\alpha \sim \beta$,

$$\lim \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$
$$\therefore \quad \beta - \alpha = o(\alpha), \quad \text{即}\beta = \alpha + o(\alpha)$$

充分性　设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim\left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1$$
$$\therefore \quad \alpha \sim \beta$$

6.2 等价无穷小代换

等价无穷小代换

定理. 设 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则有 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证明.

$$
\begin{aligned}
\lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \\
&= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}
\end{aligned}
$$

等价无穷小代换

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解. 当 $x \to 0$ 时, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$ 因此

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8
$$

等价无穷小代换

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解. 当 $x \to 0$ 时 ,$\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$.

$$
\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1
$$

若分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

等价无穷小代换

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$.

解. 当 $x \to 0$，$\tan x \sim x$， $\sin x \sim x$.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{(2x)^3} = 0. \qquad ✗$$

解. 当 $x \to 0$ 时, $\sin 2x \sim 2x$, $\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3} = \frac{1}{16}. \qquad ✓$$

注记. 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

等价无穷小代换

注记. 当 $\alpha_1 \sim \beta_1$、$\alpha_2 \sim \beta_2$ 时，下列等式总是成立：

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \overset{\checkmark}{\sim} \beta_1 \cdot \beta_2$$

但下列等式未必成立：

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \overset{\times}{\sim} \beta_1 \pm \beta_2$$

例子. 当 $x \to 0$ 时，有

$$\boxed{\begin{array}{c} x + x^2 \sim x + x^3 \\ x \sim x \end{array}} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \boxed{x^2 \overset{\times}{\sim} x^3}$$

等价无穷小代换

练习 **2.** 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$； .... $\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$. .... $-\dfrac{9}{8}$

6.3 小结与思考

小结

1. 无穷小的比较：反映了同一过程中, 两无穷小趋于零的速度快慢, 但并不是所有的无穷小都可进行比较.
    - 高 (低) 阶无穷小;
    - 等价无穷小;
    - 无穷小的阶.
2. 等价无穷小的代换：求极限的又一种方法, 注意适用条件.

思考题

思考. 任何两个无穷小都可以比较吗？

解. 不能. 例如当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ 都是无穷小量, 但 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ 不存在且不为无穷大. 故当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不能比较.

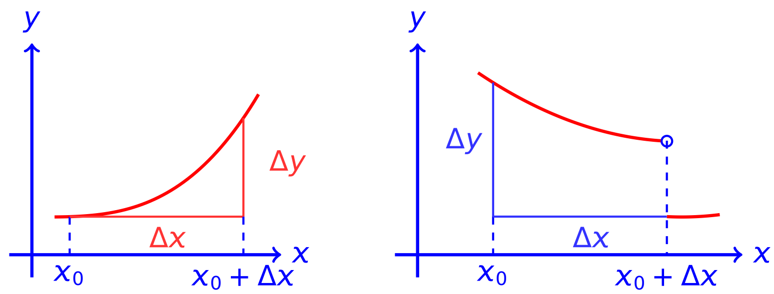
7 函数的连续性

7.1 函数的连续性的概念

连续的概念

例子. 自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.



2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0，如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后，y 的相应改变量 Δy 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续的概念

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, 当 x 在 $U(x_0, \delta)$ 内由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 的增量; 相应地, 函数 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.

连续的概念

定义. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\Updownarrow$

定义. 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$\varepsilon-\delta$ 定义: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

连续的概念

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 即
$$f(x_0^-)=f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

函数在某点连续等价于函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

极限与连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（极限存在）:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in\mathring{U}(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(A,\epsilon)$$

. . . .

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（连续）:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$$

函数的连续性

例子. 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在$x=0$ 处连续.

解. $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$$\text{又} f(0)=0, \quad \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

由定义知, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

函数的连续性

例子. 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证明. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leq 1$, 故

$$|\Delta y|\leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha\neq 0$ 时, 有 $\sin\alpha|<\alpha$, 故 $|\Delta y|\leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|$, $\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时 ,$\Delta y\to 0$. 即函数 $y=\sin x$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

单侧连续

定义. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义, 且 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义, 且 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)=f(x_0)}$$

单侧连续

例子. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$

函数右连续但不左连续，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

连续函数

定义. 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记. 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

函数的连续性

性质. $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$.

例子. 判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x-1, & x\geq 0 \end{cases}$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x}{x}, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \end{cases}$.

函数的连续性

练习 **1.** 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$，判断它在 $x = 0$ 处的连续性.

解**.** $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

7.2 函数的间断点

函数的间断点

定义**.** 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 间断，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

x_0 为 $f(x)$ 的间断点, 有以下三种情形:

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 但
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

可去间断点

定义 **1.** 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$, 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子**.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点.

例子**.** $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .... 可去间断点

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

跳跃间断点

定义**.** 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子**.** $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ .... 跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

第二类间断点

定义**.** 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点**.**

例子. $f(x)=\frac{1}{x}$ .... 无穷间断点

例子. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ .... 振荡间断点

函数的间断点

注记. 间断点常见位置:(*1*)分母为零;(*2*)分段点.

例子. 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点,并判断类型.

例子. 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\leq 1, x\neq 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$ 的间断点,并判断其类型.

函数的间断点

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子. 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当} x \text{ 是有理数时},\\ 0, \text{当} x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

在定义域 R 内每一点处都间断, 且都是第二类间断点.

例子. $f(x)=\begin{cases}x, \text{当} x \text{ 是有理数时},\\ -x, \text{当} x \text{ 是无理数时}\end{cases}$ 仅在 $x=0$ 处连续, 其余各点处处间断.

7.3 初等函数的连续性

连续函数的四则运算

定理. 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例子. $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 在其定义域内连续.

反函数的连续性

定理. 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数.

例子. $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y = \arcsin x$$

在 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

复合函数的连续性

定理. 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 也连续.

例子. 因为 $u = \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续,

$y = \sin u$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内连续,

故$y = \sin \frac{1}{x}$ 在$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续

初等函数的连续性

定理. 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例子. $y=\sqrt{\cos x-1}$, $\quad D: x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义.

初等函数的连续性

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad \left(x_0\in \text{ 定义区间}\right)$$

例子. 求 $\lim_{x\to 1}\sin\sqrt{e^x-1}$

解. 原式 $=\sin\sqrt{e^1-1}=\sin\sqrt{e-1}$.

7.4 小结 思考

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件.
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
    - 第一类间断点: $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在
        - 可去间断点: $f(x_0^-)=f(x_0^+)$
        - 跳跃间断点: $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$

- 第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在
  - 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
  - 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大

4. 初等函数的连续性

思考

思考. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 x_0 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、$f^2(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 是否连续?

解. 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 且

$$0 \le \Big||f(x)|-|f(x_0)|\Big| \le |f(x)-f(x_0)|$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

思考

但反之不成立．例 $f(x)=\begin{cases} -1, & x\ge 0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不连续，但 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 $x_0=0$ 连续.

8 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数

1. 最值定理

2. 零点定理

3. 介值定理

8.1 最大值和最小值定理

最大值最小值

定义. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

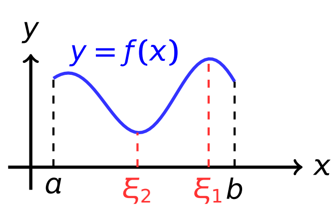
则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大 (小) 值.

最值定理

定理 (最值定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$, 使得 $\forall x \in [a,b]$ 时, 有

$$f(\xi_1) \ge f(x),\ f(\xi_2) \le f(x).$$



1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

最值定理

例子. 函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值.

例子. 函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\\ -x+3, & 1<x\le 2\end{cases}$

在区间 $[0,2]$ 虽然有界，但既无最大值也无最小值.

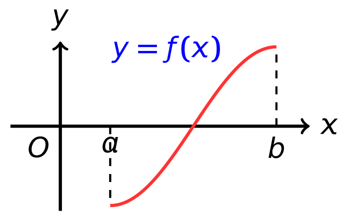
8.2 零点定理与介值定理

零点定理

定义. 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 (零点定理). 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

几何解释: 连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧, 则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



零点定理

例子. 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

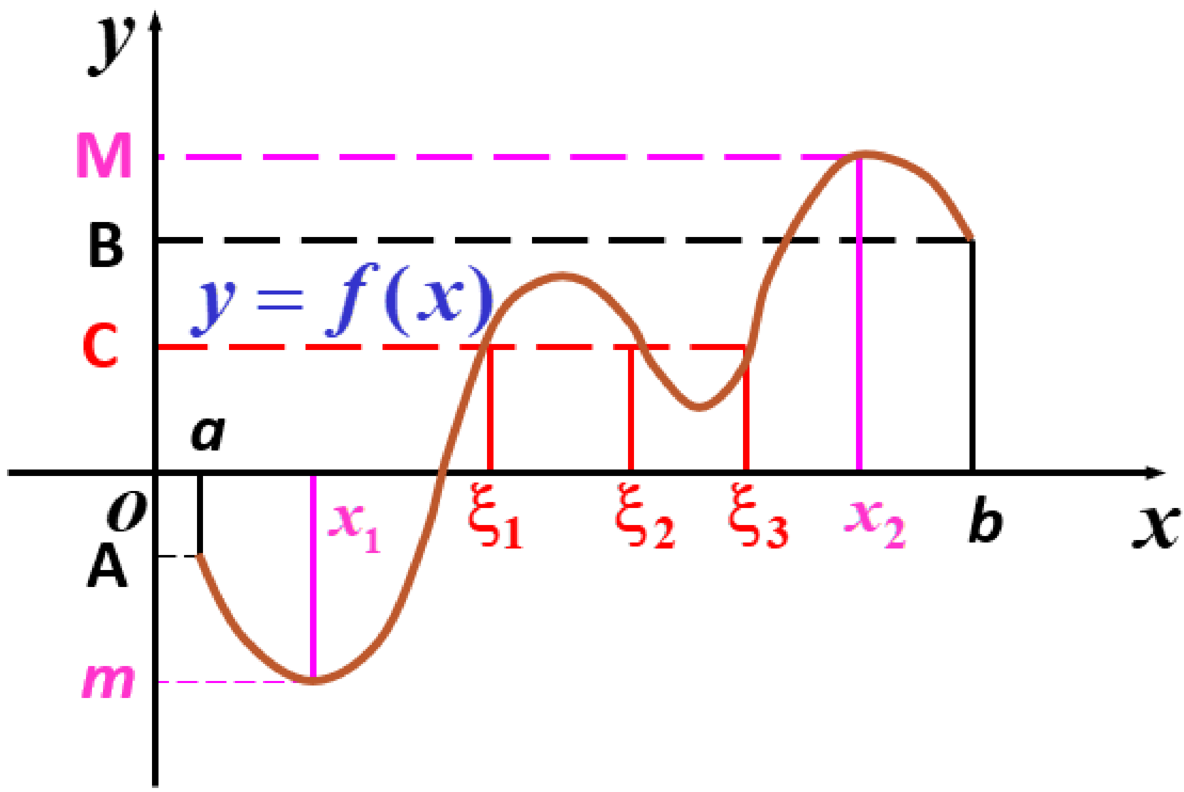
例子. 证明方程 $2\sin x=x+1$ 有实数解.

介值定理

定理 (介值定理)**.** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

证明. 令 $g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可以得到结论.

几何意义：在 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ (C 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间) 至少相交一点.



介值定理

推论. 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

证明. 设 $f(x_1)=M, f(x_2)=m$, 在区间 $[x_1,x_2]$(或者 $[x_2,x_1]$) 上运用介值定理可得结论

介值定理

例子. 证明方程 $x^5-3x+1=0$ 在开区间 *(0,1)* 内至少有一个实根.

证明. 令 $f(x)=x^5-3x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=1>0, f(1)=-1<0$, 由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^5-3\xi+1=0$$

$\therefore$ 方程$x^5-3x+1=0$ 在$(0,1)$ 上至少有一根ξ

介值定理

例子. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 n 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

证明. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m, 显然有

$$m\le f(x_i)\le M,\quad i=1,2,\cdots n$$

于是

$$nm\le\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le nM\Rightarrow m\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le M$$

介值定理

证明续. (i) 若 $f(a)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$ 或 $f(b)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$, 则可取 $\xi=a$ 或 $\xi=b$.

(ii) 若 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$ 与 $f(a),f(b)$ 不同，由介值定理可知，在 (a,b) 至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

综合（i),（ii）可知，原命题得证.

不动点定理

例子. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $a\le f(x)\le b$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^*\in[a,b]$, 使 $f(x^*)=x^*$.

证明. 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由于 $a\le f(x)\le b$, 故

$$g(a)\ge 0,\ g(b)\le 0.$$

若 $g(a)=0$, 可取 $x^*=a$.

若 $g(b)=0$, 可取 $x^*=b$.

若 $g(a)>0,g(b)<0$, 则由介值定理知，存在 $x^*\in(a,b)$, 使 $g(x^*)=0$, 即有 $f(x^*)=x^*$

介值定理

例子. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$, $f(b)>b$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$

证明. 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 而

$$F(a)=f(a)-a<0,\ F(b)=f(b)-b>0,$$

由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$, 使

$$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0,$$

即 $f(\xi)=\xi$

8.3 均衡价格的存在性

均衡价格的存在性

假设需求函数 $D=D(P)$ 和供给函数 $S=S(P)$ 都是连续函数. 如果生产某种商品的资源十分昂贵，则价格为零时供给必为零，即 $S(0)=0$; 再假定 $D(0)>0$, 即消费者有消费欲望. 令

$$Z(P)=D(P)-S(P);\ \text{于是}\ Z(0)=D(0)-S(0)>0.$$

另外，当价格涨到某个充分大的值 $P=P^*$ 时，公司会发现生产该产品利润丰厚，而顾客会感到价格过高，这样必然导致供过于求，即 $D(P^*)<S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*)=D(P^*)-S(P^*)<0.$$

均衡价格的存在性

又 $D=D(P)$ 和 $S=S(P)$ 都是区间 $[0,P^*]$ 上的连续函数，所以 $Z(P)=D(P)-S(P)$ 也是区间 $[0,P^*]$ 上的连续函数，于是由零点定理，存在 $P_e\in(0,P^*)$, 使得

$$Z(P_e)=D(P_e)-S(P_e)=0,$$

即

$$D(P_e)=S(P_e),\ \text{且}\ P_e>0.$$

均衡价格的存在性

定理. 假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数，且满足:

1. 价格为零吋，需求超过供给，即 $D(0) > S(0)$;
2. 存在某个价格 $P = P^* > 0$, 使得在此价格下，供给超过需求，即 $S(P^*) > D(P^*)$.

则市场上一定存在一个正的均衡价格，即存在 $P_e > 0$, 使得 $D(P_e) = S(P_e)$.

8.4 小结 思考

小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

  注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法: 先利用最值定理, 再利用介值定理;
  2. 辅助函数法: 先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理;

思考题

思考. 假设有一个登山者头天上午 *8* 点从山脚开始上山，晚上 *6* 点到达山顶，第二天上午 *8* 点从山顶沿原路下山，下午 *6* 点到达山脚. 问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什么？

思考题解答

解. 会.

不妨设山高为 h, 登山者头天登山的高度函数 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 在 $[8,18]$ 上连续，且

$$f_1(8)=0,\ f_1(18)=h;\ f_2(8)=h,\ f_2(18)=0$$

设

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),$$

则 $f(x)$ 在 $[8,18]$ 上连续, 且

$$f(8)=-h<0,\ f(18)=h>0.$$

由零点定理知存在一点 $\xi\in(8,18)$, 使 $f(\xi)=0$.

练习题

问题. 证明方程 $x=a\sin x+b$, 其中 $a>0,b>0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

问题. 若 $f(x)$ 在 $[\,a,b\,]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在 $[x_1,x_n]$ 上必有 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots\ldots+f(x_n)}{n}$$