第六节	无穷小的比较
6.1	无穷小的阶
6.2	等价无穷小代换
6.3	小结与思考

例子　比较$x \to 0$时的三个无穷小x，$2x$，x^2。

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

无穷小的阶

定义　设α、β是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为$\beta = o(\alpha)$, 则称$\beta$是比$\alpha$ 高阶的无穷小.
2. 若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称$\beta$是比$\alpha$ 低阶的无穷小.
3. 若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称$\beta$和$\alpha$是 同阶的无穷小.

★ 若$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称$\beta$和$\alpha$是 等价无穷小，记为$\beta \sim \alpha$.

4. 若$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 则$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小。

例子　在$x \to 0$时，无穷小x^2比x高阶。

例子　在$x \to 0$时，无穷小x^2比x^3低阶。

例子　在$x \to 0$时，无穷小x^2和$5x^2$同阶。

例子　在$x \to 0$时，无穷小x^2和$x^2 + 2x^3$等价。

练习 1　易知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \to 0$ 时的无穷小。

(1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶？

(2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶？

(3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶？

(4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价？

常用的等价无穷小

当$x \to 0$时，有如下这些常用的等价无穷小：

(1) $\sin x \sim x$

(2) $\tan x \sim x$

(3) $\arcsin x \sim x$

(4) $\arctan x \sim x$

(5) $\ln(1+x) \sim x$

(6) $e^x - 1 \sim x$

(7) $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

(8) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

意义：用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

定理 β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.
称 α 是 β 的主要部分.

证明.

必要性 设 $\alpha \sim \beta$,

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$

$\therefore \quad \beta - \alpha = o(\alpha),$ 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

充分性 设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1$$

$\therefore \quad \alpha \sim \beta$

第六节	无穷小的比较
6.1	无穷小的阶
6.2	等价无穷小代换
6.3	小结与思考

定理 设$\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，且$\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在, 则有 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证明.

$$
\begin{aligned}
\lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \\
&= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}
\end{aligned}
$$

例子 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当 $x \to 0$ 时, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$ 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8$$

例子 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解 当 $x\to 0$ 时, $\sin x\sim x$, $\arcsin x\sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例子 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解 当 $x\to 0$, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

$$\text{原式} =\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0. \qquad ✗$$

解 当 $x\to 0$时, $\sin 2x\sim 2x$, $\tan x - \sin x=\tan x(1-\cos x)\sim \frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式} =\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}. \qquad ✓$$

注记 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项。

注记 当$\alpha_1 \sim \beta_1$、$\alpha_2 \sim \beta_2$时，下列等式总是成立：

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \overset{\checkmark}{\sim} \beta_1 \cdot \beta_2$$

但下列等式未必成立：

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \overset{\times}{\sim} \beta_1 \pm \beta_2$$

例子 当$x \to 0$时，有

$$\boxed{\begin{array}{c} x + x^2 \sim x + x^3 \\ x \sim x \end{array}} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \boxed{x^2 \overset{\times}{\sim} x^3}$$

练习 2 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$； $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$。 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $-\dfrac{9}{8}$

第六节	无穷小的比较
6.1	无穷小的阶
6.2	等价无穷小代换
6.3	小结与思考

小结

1. 无穷小的比较：反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.
   - 高(低)阶无穷小;
   - 等价无穷小;
   - 无穷小的阶.
2. 等价无穷小的代换：求极限的又一种方法，注意适用条件.

思考题

思考　任何两个无穷小都可以比较吗?

解　不能. 例如当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ 都是无穷小量, 但 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ 不存在且不为无穷大. 故当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不能比较.