第一节 导数的概念

第二节 求导法则和基本初等函数求导公式

第三节 高阶导数

第一节 导数的概念

第二节 求导法则和基本初等函数求导公式

第三节 高阶导数

第三节	高阶导数
3.1	高阶导数的定义
3.2	高阶导数的求法
3.3	小结　思考

高阶导数的定义

问题（变速直线运动的加速度.）　设 $s = f(t)$，则瞬时速度为 $v(t) = f'(t)$。因为加速度 a 是速度v对时间 t 的变化率，因此

$$a(t) = v'(t) = \left[f'(t)\right]'$$

定义　如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点x处可导,即

$$\left(f'(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数，记作

$$f''(x), y'', \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ 或 } \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

高阶导数的定义

类似地，我们可以定义：

- 二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.
- 三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$.
- 一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数. 相应地, $f(x)$ 称为零阶导数 ; $f'(x)$ 称为一阶导数.

第三节	高阶导数
3.1	高阶导数的定义
3.2	高阶导数的求法
3.3	小结　思考

高阶导数的求法主要有

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.
2. 间接法：利用已知的高阶导数公式，通过四则运算，变量代换等方法，求出n阶导数.

例 1 设 $y = \arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解 易知

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \; y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2},$$

$$y'' = \left(\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)' = \frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

因此

$$f''(0) = \left.\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right|_{x=0} = 0; f'''(0) = \left.\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\right|_{x=0} = -2.$$

例 2　设 $y = x^{\alpha}(\alpha \in R)$, 求 $y^{(n)}$.

解　$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$
$$y''' = \left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (n \geq 1)$$

若 α 为自然数 n, 则

$$y^{(n)} = \left(x^n\right)^{(n)} = n!, \quad y^{(n+1)} = (n!)' = 0$$

求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(可用数学归纳法证明)

例 3　设 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$y' = \frac{1}{1+x}, \quad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''' = \frac{2!}{(1+x)^3}, \quad y^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad (n \geq 1, 0! = 1)$$

例 4　设 $y=\sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解　$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得　$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

直接法

例 5 设 $y = e^{ax}\sin bx(a, b$ 为常数), 求 $y^{(n)}$.

解 由条件知

$$y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$$

$$= e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$= a^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)\ \left(\varphi = \arctan\frac{b}{a}\right)$$

$$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left[ae^{ax}\sin(bx+\varphi) + be^{ax}\cos(bx+\varphi)\right]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$$y^{(n)} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\sin(bx+n\varphi)\quad\left(\varphi = \arctan\frac{b}{a}\right)$$

设函数u和v具有n阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$
3. $$\begin{aligned}(u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} \\ &+ \cdots + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\end{aligned}$$

莱布尼茨公式

例 6　设 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解　设 $u = e^{2x}, v = x^2$, 则由莱布尼兹公式知

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{(20)} \cdot x^2 + 20\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{(19)} \cdot \left(x^2\right)' \\ &+ \frac{20(20-1)}{2!}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{(18)} \cdot \left(x^2\right)'' + 0 \\ &= 2^{20}\mathrm{e}^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19}\mathrm{e}^{2x} \cdot 2x \\ &+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18}\mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \\ &= 2^{20}\mathrm{e}^{2x}\left(x^2 + 20x + 95\right) \end{aligned}$$

常用高阶导数公式

(1) $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a (a > 0)$ $\quad$ $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

(4) $\left(x^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

例 7　设 $y = \frac{1}{x^2-1}$, 求 $y^{(5)}$.

解

由

$$y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

得

$$y^{(5)} = \frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6} - \frac{-5!}{(x+1)^6}\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{(x+1)^6} - \frac{1}{(x-1)^6}\right]$$

例 8　设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$.

解　由条件可得

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3 \\
&= \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right) \\
&= \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x \\
&= 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} \\
&= \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x
\end{aligned}
$$

于是$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos\left(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

第三节	高阶导数
3.1	高阶导数的定义
3.2	高阶导数的求法
3.3	小结　思考

小结

- 高阶导数的定义及物理意义
- 高阶导数的运算法则(莱布尼兹公式);
- 高阶导数的求法
  - 直接法
  - 间接法

思考 设$g'(x)$连续，且$f(x)=(x-a)^2g(x)$, 求$f''(a)$.

解 由$g(x)$可导，可得

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x).$$

又$g''(x)$不一定存在，故$f''(a)$需用定义求。

$$\begin{aligned} f''(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[2g(x)+(x-a)g'(x)\right] = 2g(a) \end{aligned}$$