高等数学–微积分(一)

第一章·数集与函数

2020 年 12 月 23 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

第一节 集合

第一节	集合
1.1	集合的概念
1.2	集合的运算
1.3	区间和邻域
1.4	小结　思考题

概念:

- 集合是具有确定性质的对象的总体;
- 构成集合的每一个对象, 称为集合的元素.

例子:

1. 太阳系的九大行星.
2. 教室里的所有同学.

如果a是集合A中的元素, 记为$a \in A$; 否则记为$a \notin A$.

分类:

1. 由有限个元素组成的几何称为有限集.
2. 由无限个元素组成的几何称为无限集.

表示方法:

1. 列举法 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
2. 描述法 $B = \{x \,|\, x \text{ 所具有的特征}\}$

子集

如果$x \in A$, 必有$x \in B$, 则称A是B的子集, 记为$A \subset B$或$B \supset A$.

如果$A \subset B$, 且$B \subset A$, 则称A与B相等, 记为$A = B$.

例如: 若$A = \{1, 2\}$, $C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 则$A = C$.

不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$.

例如: $\{x | x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

小注: 空集是任何集合的子集.

数集

元素为数的集合称为数集，人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集**N**
- 整数集**Z**
- 有理数集**Q**
- 实数集**R** $\longleftarrow$ 微积分的研究对象
- 复数集**C**

小注： $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

第一节 集合

1.1 集合的概念

1.2 集合的运算

1.3 区间和邻域

1.4 小结 思考题

集合的运算

1. 交集：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
2. 并集：$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
3. 差集：$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
4. 补集(余集)：$A^c = I \backslash A = \{x \mid x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$, 其中$I$为研究对象的全体(全集).

集合运算律

1. 交换律
   - $A \cap B = B \cap A$
   - $A \cup B = B \cup A$
2. 结合律
   - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律
   - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
   - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. 对偶律
   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

设有集合A和B. 对任意的$x \in A$, $y \in B$, 则称集合

$$\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

为A与B的笛卡尔乘积(或直积), 记为$A \times B$.

例如: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$即为$xOy$平面上全体点的集合, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$常记为$\mathbf{R}^2$.

第一节 集合

1.1 集合的概念

1.2 集合的运算

1.3 区间和邻域

1.4 小结　思考题

有限区间

区间是指介于两个实数之间的全体实数．这两个实数叫做区间的端点.

区间可分为有限区间和无限区间.

有限区间:

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$ 开区间

$$[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\}$$ 闭区间

$$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}$$ 左开右闭区间

$$[a,b)=\{x \mid a\le x<b\}$$ 左闭右开区间

例子　用区间表示下列数集:

(1) $\{x \mid 1<x<3\}$　　(2) $\{x \mid -5\le x<0\}$

无限区间

无限区间有如下五种:

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \qquad (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \qquad [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$$

例子　用区间表示下列数集:

(1) $\{x \mid x < 3\}$　　(2) $\{x \mid x \geq 2\}$

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

设 a与δ是两个实数，且$\delta > 0$，

- a的 δ邻域 $U(a,\delta)$：

$$\left\{x \,\middle|\, |x-a| < \delta\right\} = (a-\delta, a+\delta)$$

其中a称为邻域的中心，δ称为邻域的半径.

- a的去心δ邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$：

$$\left\{x \,\middle|\, 0 < |x-a| < \delta\right\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

- a的左δ邻域：$(a-\delta, a)$
- a的右δ邻域：$(a, a+\delta)$

第一节 集合

1.1 集合的概念

1.2 集合的运算

1.3 区间和邻域

1.4 小结 思考题

小结

1. 集合的有关概念: 集合、元素、子集、全集、空集、交集、并集、补集、直积、区间、邻域.
2. 集合的运算: 交集、并集、补集、直积的求法.
3. 区间和邻域: 连续的点组成的集合的表示方法.

思考题

经调查，有彩电的家庭占96%，有冰箱的家庭占87%，有音响的家庭占78%，有空调的家庭占69%，试估计四种电器都有的家庭占多少？

思考题解答

没有彩电的家庭占4%，没有冰箱的家庭占13%, 没有音响的家庭占22%，没有空调的家庭占31%, 所以四种电器都有的至少占

$$1-(4\%+13\%+22\%+31\%)=30\%$$

根据交集是任意集合的子集可知：四种电器都有的最多占69%，所以四种电器都有的至少占30%, 最多占69%.