概率论与数理统计

第二章·一维随机变量及其分布

2021 年 2 月 23 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

随机变量

随机试验的结果通常可以用数量来表示:

随机试验的结果通常可以用数量来表示：

- 扔一个硬币所得的结果；
- 掷一颗骰子所得的点数；
- 抽查样品时的废品个数；
- 广州每日的平均气温；
- 某电子管的使用寿命；

随机变量

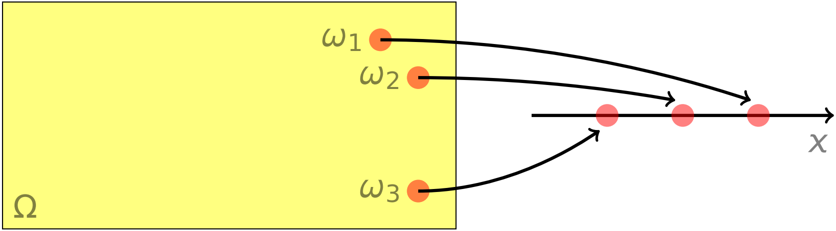
随机试验的结果通常可以用数量来表示：

- 扔一个硬币所得的结果；
- 掷一颗骰子所得的点数；
- 抽查样品时的废品个数；
- 广州每日的平均气温；
- 某电子管的使用寿命；

将试验结果数值化，就产生了随机变量的概念。

定义 1 设 $X = X(\Omega)$是定义在样本空间Ω上的实值函数，称$X = X(\Omega)$为随机变量.

下图给出样本点Ω与实数$X = X(\Omega)$对应的示意图.



随机变量一般用大写英文字母X、Y、Z或小写希腊字母ξ、η、γ来表示。

对实验结果ω本身就是一个数的随机试验，令

$$X = X(\Omega) = \omega,$$

则X就是一个随机变量.

随机变量

对实验结果ω本身就是一个数的随机试验，令

$$X = X(\Omega) = \omega,$$

则X就是一个随机变量.

1. 电视机的寿命T.
2. 掷一颗骰子，出现的点数X.
3. 每天进入某超市的顾客数Y.
4. $\cdots$

随机变量

对于样本点本身不是数的随机试验，这时可根据需要设计随机变量。

对于样本点本身不是数的随机试验，这时可根据需要设计随机变量。

例 2　检查一个产品,只考察其合格与否,则其样本空间为$\Omega=\{$合格产品, 不合格产品$\}$. 这时可以设计一个随机变量X如下

$$X=\begin{cases}1, & \omega=\text{合格产品};\\ 0, & \omega=\text{不合格产品}.\end{cases}$$

例 3　将一枚硬币抛掷两次，感兴趣的是投掷中出现 H 的总次数，而对出现 H, T 出现的顺序不关心. 例如，我们只关心出现 H 的总次数是 1，而不在乎出现的是 “HT” 还是 “TH” . 以X表示两次投掷出现H的总次数，对于样本空间 $\Omega\{\omega\} = \{HH, HT, TH, TT\}$ 中的每一个样本点，X 都有一个值与之对应，即有

样本点ω	HH	HT	TH	TT
X	2	1	1	0

这样设计出来的 X 也是一个随机变量.

随机变量的取值随试验的结果而定，而试验的各个结果出现有一定的概率，因而随机变量的取值有一定的概率.

随机变量

随机变量的取值随试验的结果而定，而试验的各个结果出现有一定的概率，因而随机变量的取值有一定的概率.

例如，在例 2 中，X的取值为1，记为$\{X = 1\}$，对应的样本点的集合为$A = \{HT, TH\}$，这是一个事件，事件A发生当且仅当$\{X = 1\}$发生. 我们称概率 $P(A) = P\{HT, TH\}$ 为$\{X = 1\}$的概率，即

$$P\{X = 1\} = P(A) = \frac{1}{2}.$$

随机变量

一般地，若I是一个实数集，$\{X \in I\}$记为事件B，即

$$B = \{\omega | X(\Omega) \in I\},$$

则

$$P\{X \in I\} = P(B) = P\{\omega | X(\Omega) \in I\}.$$

随机变量

一般地，若I是一个实数集，$\{X \in I\}$记为事件B，即

$$B = \{\omega | X(\Omega) \in I\},$$

则

$$P\{X \in I\} = P(B) = P\{\omega | X(\Omega) \in I\}.$$

按照随机变量可能取值的情况，可以把它们分为两类：离散型随机变量和非离散型随机变量，而非离散型随机变量中最重要的是连续型随机变量．本章主要研究离散型及连续型随机变量．

定义 4　如果随机变量的全部可能取的值只有有限个 或可列无限多个, 则称这种随机变量为离散型随机变量.

定义 4 如果随机变量的全部可能取的值只有有限个 或可列无限多个, 则称这种随机变量为离散型随机变量.

一般地, 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为x_k $(k = 1, 2, \ldots)$, X 取各个可能值的概率, 即事件$\{X = x_k\}$的概率为

$$P\{X = X_k\} = p_k, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

称(1)式为离散型随机变量X的分布律或概率分布.

分布律也可以用下面的表格来表示：

X	x_1	$x_2,$	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	$p_2,$	$\cdots$	p_n	$\cdots$

分布律也可以用下面的表格来表示:

X	x_1	$x_2,$	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	$p_2,$	$\cdots$	p_n	$\cdots$

由概率的定义, 式p_k应满足以下条件:

1. $p_k \geq 0, k = 1, 2 \ldots;$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

例 5　某系统有两台机器相互独立地运转. 设第一台与第二台机器发生故障的概率分别为0.1, 0.2, 以X 表示系统中发生故障的机器数, 求X的分布律.

分析: 求分布律需要求事件$\{X=x_k\}$的概率

$$P\{X=X_k\}=p_k,\ k=1,2,\ldots,$$

解: 设A_i表示事件“第i台机器发生故障”, $i=1,2.$ 则

$$P\{X=0\}=P\left(\overline{A}\,\overline{A}_2\right)=0.9\times 0.8=0.72$$

$$P\{X=1\}=P\left(A_1\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1A_2\right)$$

$$=0.1\times 0.8+0.9\times 0.2=0.26$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2)=0.1\times 0.2=0.02$$

故所求概率分布为:

X	0	0	2
p_k	0.72	0.26	0.02

第二节	离散型随机变量
2.1	$(0-1)$分布
2.2	伯努力试验与二项分布
2.3	泊松分布

$(0-1)$分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值, 它的分布律是

$$P\{X=k\}=p^k q^{1-k}, k=0,1, p+q=1(0<p<1)$$

则称 X 服从$(0-1)$分布或两点分布.

$(0-1)$分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值, 它的分布律是

$$P\{X=k\}=p^k q^{1-k}, k=0,1, p+q=1(0<p<1)$$

则称 X 服从$(0-1)$分布或两点分布.

$(0-1)$分布的分布律也可写成

X	0	1
p_k	q	p

(0 − 1)分布

对于一个随机试验, 如果它的样本空间只包含两个元素, 即ω_1, ω_2
们总能在Ω上定义一个服从(0 − 1) 分布的随机变量

$$X = \begin{cases} 0, & \omega = \omega_1; \\ 1, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果.

$(0-1)$分布

对于一个随机试验, 如果它的样本空间只包含两个元素, 即ω_1, ω_2
们总能在Ω上定义一个服从$(0-1)$ 分布的随机变量

$$X = \begin{cases} 0, & \omega = \omega_1; \\ 1, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果.

检查产品的质量是否合格, 对新生婴儿的性别进行登记, 检验种子是否发芽以及前面多次讨论过的“抛硬币”试验都可以用$(0-1)$分布的随机变量来描述.

伯努力试验

设试验E只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$, 则称为伯努利(Bernoulli)试验.

伯努力试验

设试验E只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$, 则称为伯努利(Bernoulli)试验.

设$P(A) = p,\ 0 < p < 1$, 则 $P(\overline{A}) = 1 - p$.

伯努力试验

设试验E只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$, 则称为伯努利(Bernoulli)试验.

设$P(A) = p,\ 0 < p < 1$, 则 $P(\overline{A}) = 1 - p$.

将伯努力试验独立重复地进行n次, 则称这一串重复的独立试验为 n重伯努利试验.

伯努力试验

设试验E只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$, 则称为伯努利(Bernoulli)试验.

设$P(A) = p,\ 0 < p < 1$, 则 $P(\overline{A}) = 1 - p$.

将伯努力试验独立重复地进行n次, 则称这一串重复的独立试验为 n重伯努利试验.

独立: 各次的的试验结果互不影响.

重复: 每次试验中$P(A) = p$保持不变.

伯努力试验

定理 (伯努利定理) 设一次试验中事件A发生的概率为$p(0 < p < 1)$, 则n重伯努利试验中, 事件A恰好发生$k(0 \le k \le n)$次的概率为

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

证明.

记n重伯努力试验中事件A正好出现k次这一事件为B_k, 以 A_i 表示第 i 次试验中出现事件A, 以 $\overline{A}_i$ 表示第i次试验中出现$\overline{A}$, 则

$$B_k = A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n \cup \cdots \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}\cdots A_n$$

右边的每一项表示某k次试验出现事件A,另外$n-k$次试验出现$\overline{A}$, 这种项共有 C_n^k 个, 而且两两互不相容.

伯努力试验

由试验的独立性得

$$\begin{aligned} & P\left(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n\right) \\ = & P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P\left(\overline{A}_{k+1}\right)\cdots P\left(\overline{A}_n\right) \\ = & p^k(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

同理可得, 右边各项所对应的概率均为$p^k(1-p)^{n-k}$, 利用概率的加法定理知

$$P(B_k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

二项分布

在n重伯努力试验中，若以X表示n重伯努力试验中事件A出现的次数，显然有

$$P\{X=k\}=P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

二项分布

在n重伯努力试验中，若以X表示n重伯努力试验中事件A出现的次数，显然有

$$P\{X=k\}=P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

定义　如果随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

其中$0<p<1$, $0\le k\le n$, 则称X服从参数为n, p的二项分布，记为$X\sim B(n,p)$。

二项分布

在n重伯努力试验中，若以X表示n重伯努力试验中事件A出现的次数，显然有

$$P\{X=k\}=P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

定义　如果随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

其中$0<p<1$, $0\le k\le n$，则称X服从参数为n, p的二项分布，记为$X\sim B(n,p)$。

小注: 非负性显然，规范性由二项式定理可得，即
$\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(p+1-p)^n=1$

二项分布

例 6　已知某类产品的次品率为0.2，现从一大批这类产品中随机地抽查20件，问恰好有$k(k = 0, 1, 2, \&, 20)$件次品的概率是多少？

二项分布

例 6　已知某类产品的次品率为0.2, 现从一大批这类产品中随机地抽查20件, 问恰好有$k(k = 0, 1, 2, \&, 20)$件次品的概率是多少？

小注: 在物品总数很大, 而抽取数目较小时, 不放回抽样可以看成放回抽样, 从而可按伯努利试验来处理。

例 6　已知某类产品的次品率为0.2，现从一大批这类产品中随机地抽查20件，问恰好有$k(k = 0, 1, 2, \&, 20)$件次品的概率是多少？

小注：在物品总数很大，而抽取数目较小时，不放回抽样可以看成放回抽样，从而可按伯努利试验来处理。

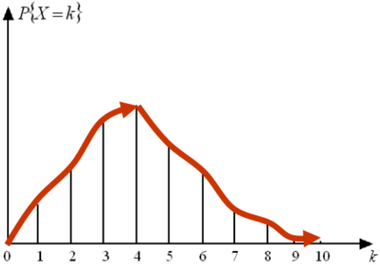
解：　我们将检查一件产品是否为次品看成是一次试验，检查20件产品相当于做20重伯努利试验．以X记抽出的20件产品中次品的件数，那么X 是一个随机变量，且$X \sim b(20, 0.2)$，则所求的概率为

$$P\{X = k\} = C_{20}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20-k}, k = 0, 1, \cdots, 20.$$

k	$P\{X=k\}$	k	$P\{X=k\}$
0	0.012	6	0.1
1	0.058	7	0.055
2	0.137	8	0.022
3	0.205	9	0.007
4	0.218	10	0.002
5	0.175	≥ 11	< 0.001

二项分布

作出上表的图形，如下图所示



从上图可以看出，概率 $P\{X=k\}$先是随着k增加而增加，直至达到最大值($k=4$)，随后单调减少． 一般地，对于固定的n及p，二项分布 $b(n,p)$都有类似的结果

二项分布

例 7 设某种鸭在正常情况下感染某种传染病的概率为20%.现新发明两种疫苗，疫苗A注射到9只健康鸭后无一只感染传染病，疫苗B注射到25只鸭后仅有一只感染，试问应如何评价这两种疫苗，能否初步估计哪种疫苗较为有效？

解: 若疫苗A完全无效, 则注射后鸭受感染的概率仍为 0.2, 故9只鸭中无一只感染的概率为

$$0.8^9 = 0.1342.$$

同理, 若疫苗B完全无效, 则25只鸭中至多有一只感染的概率为

$$0.8^{25} + C_{25}^{1}(0.2)^1(0.8)^{24} = 0.0274.$$

若B完全无效, 则25只健康鸭至多有一只感染的概率只有0.0274, 由实际推断原理, 小概率事件在一次试验中实际上几乎是不发生的, 但现在却发生了,有理由怀疑假设的正确性. 因此可以初步认为疫苗B是有效的, 且比A有效 (因为0.0274比0.1342小的多).

第二节	离散型随机变量
2.1	$(0-1)$分布
2.2	伯努力试验与二项分布
2.3	泊松分布

泊松分布

设随机变量X所有可能取值为$0, 1, 2, \ldots$, 而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2\cdots$$

其中$\lambda>0$为常数, 则称X服从参数为λ的泊松分布, 记为 $X\sim\pi(\lambda)$.

泊松分布

设随机变量X所有可能取值为$0, 1, 2, \ldots,$ 而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2\cdots$$

其中$\lambda>0$为常数, 则称X服从参数为λ的泊松分布, 记为 $X\sim\pi(\lambda)$.

显然, $P\{X=k\}\geq 0,\ k=0,1,2\cdots,$ 且

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1.$$

即$P\{X=k\}$满足分布律的两个条件.

泊松分布的应用

泊松分布常与单位时间（或单位面积、单位产品等）上的计数过程相联系：

- 某地区每天发生火灾的次数。
- 某地区每年发生暴雨的次数。
- 某种玻璃每平方米内的气泡数。
- 某医院每天前来就诊的人数。
- 某份杂志各期的错别字数目。

例 8　商店的历史销售记录表明，某种商品每月的销售量服从参数为$\lambda = 10$的泊松分布．为了以95%以上的概率保证该商品不脱销，问商店在月底至少应进该商品多少件？

例 8　商店的历史销售记录表明，某种商品每月的销售量服从参数为$\lambda = 10$的泊松分布．为了以95%以上的概率保证该商品不脱销，问商店在月底至少应进该商品多少件？

解:　设商店每月销售这种商品X件，月底的进货量为n件，按题意要求为

$$P\{X \le n\} \ge 0.95,$$

X服从$\lambda = 10$的泊松分布，则有 $\sum_{k=0}^{n} \frac{10^k}{k!} e^{-10} \ge 0.95$. 由附录的泊松分布表知

$$\sum_{k=0}^{14} \frac{10^k}{k!} \mathrm{e}^{-10} = 0.917 < 0.95$$
$$\sum_{k=0}^{15} \frac{10^k}{k!} \mathrm{e}^{-10} = 0.951 > 0.95$$

只要在月底进货15件(假定上个月没有存货)，就可以 95%的概率保证这种商品在下个月内不会脱销.

定理 (泊松定理) 在 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中发生概率为 p_n （注意这与实验的次数 n 有关），如果$n \to \infty$ 时, $np_n \to \lambda$ (λ为常数), 则对任意给定的非负整数 k, 有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

证明.

记 $np_n = \lambda_n$, 即$p_n = \lambda_n/n$, 于是

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.$$

泊松分布

对于固定的k,

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda,\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=\mathrm{e}^{-\lambda},\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=1$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

对于任意的非负整数k成立.

由于泊松定理是在$n \to \infty$条件下获得的，故在计算二项分布$b(n, p)$时，当 n 很大，p 很小，而乘积$\lambda = np$大小适中时，可以用泊松分布作近似，即

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

例 9　为保证设备正常工作，需要配备一些维修工.如果各台设备发生故障是相互独立的，且每台设备发生故障的概率都是 0.01. 试求在以下情况下，求设备发生故障而不能及时修理的概率.

(1) 一名维修工负责 20 台设备.

(2) 3 名维修工负责 90 台设备.

(3) 10 名维修工负责 500 台设备.

解: (1) 以 X_1表示 20 台设备中同时发生故障的台数, 则$X_1 \sim b(20, 0.01)$. 用参数为 $\lambda = np = 20 \times 0.01 = 0.2$ 的泊松分布作近似计算, 得所求概率为

$$P\{X_1 > 1\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{0.2^k}{k!} e^{-0.2} = 1 - 0.982 = 0.018.$$

解: (1) 以 X_1表示 20 台设备中同时发生故障的台数, 则$X_1 \sim b(20, 0.01)$. 用参数为 $\lambda = np = 20 \times 0.01 = 0.2$ 的泊松分布作近似计算, 得所求概率为

$$P\{X_1 > 1\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{0.2^k}{k!} e^{-0.2} = 1 - 0.982 = 0.018.$$

(2) 以 X_2表示 90 台设备中同时发生故障的台数, 则$X_2 \sim b(90, 0.01)$. 用参数为 $\lambda = np = 90 \times 0.01 = 0.9$ 的泊松分布作近似计算, 得所求概率为

$$P\{X_2 > 3\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{0.9^k}{k!} e^{-0.9} = 1 - 0.982 = 0.013.$$

注意: 此种情况下, 不但所求概率比(1)中有所降低, 而且3名维修工负责90台设备相当于每个维修工负责30台设备, 工作效率是(1)中的1.5倍.

注意: 此种情况下, 不但所求概率比(1)中有所降低, 而且3名维修工负责90台设备相当于每个维修工负责30台设备, 工作效率是(1)中的1.5倍.

(3) 以 X_3表示 500 台设备中同时发生故障的台数, 则$X_2 \sim b(500, 0.0$
用参数为 $\lambda = np = 500 \times 0.01 = 5$ 的泊松分布作近似计算, 得所求概率为

$$P\{X_3 > 10\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = 1 - 0.982 = 0.014.$$

注意: 此种情况下所求概率与(2)中基本上一样, 而10名维修工负责500台设备相当于每个维修工负责50台设备, 工作效率是(2)的1.67倍
是(1)中的2.5倍.

小注: 若干维修工共同负责大量设备的维修, 将提高工作的效率.

分布函数

定义 设X是一个随机变量，x是任意实数，函数

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

称为X的分布函数.

分布函数

定义　设X是一个随机变量，x是任意实数，函数

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

称为X的分布函数.

分布函数是一个普通的函数，其定义域是整个实数轴.

在几何上，它表示随机变量X的取值落在实数 x左边的概率.

分布函数

分布函数具有以下基本性质:

1. $0 \leqq F(x) \leq 1$.
2. $F(x)$是x的不减函数.
3. $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,
   $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
4. $F(x+0) = F(x)$ 即$F(x)$是右连续的.

例 10　设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
p_k	1/4	1/2	1/4

求X的分布函数, 并求$P(0 \le X \le 1)$.

分布函数

例 10　设随机变量X的分布律为

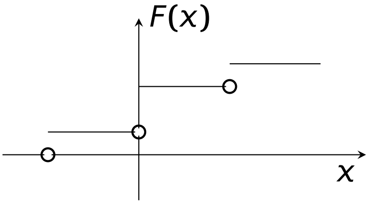
X	-1	0	1
p_k	1/4	1/2	1/4

求X的分布函数, 并求$P(0 \leq X \leq 1)$.

解:　(1) 由概率的有限可加性分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq x < 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

概率分布函数$F(x)$的图像为



$$P\{0 \leqslant X \leqslant 1\} = P\{0 < X \leqslant 1\} + P\{X = 0\}$$

$$= F(1) - F(0) + P\{X = 0\} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

分布函数

一般地，设离散型随机变量X的概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

则由概率的可列可加性可得X的分布函数为

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_k,$$

这里的和式是对所有满足$x_k \le x$的p_k求和。

分布函数

一般地, 设离散型随机变量X的概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots .$$

则由概率的可列可加性可得X的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k,$$

这里的和式是对所有满足$x_k \leq x$的p_k求和。

分布函数$F(x)$在$x = x_k(k = 1, 2, \ldots)$处由跳跃值, 其跳跃值

其跳跃值为$p_k = P\{X = x_k\}.$

例 11　在区间$[1,5]$上任意掷一个质点,用X表示这个质点与原点的距离,则X是一个随机变量.如果这个质点落在$[1,5]$上任一子区间内的概率与这个区间的长度成正比, 求X的分布函数

分布函数

解:

由题意知$\{1 \le x \le 5\}$是一个必然事件, 即

$$P\{1 \le x \le 5\} = 1$$

若$x < 1$, 则$\{X \le x\}$是不可能事件,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 0$$

若$1 \le x \le 5$, 则

$$P\{1 \le X \le x\} = k(x-1)$$

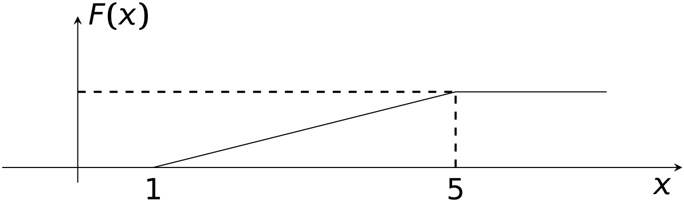
特别取$x = 5$由$P\{1 \le X \le 5\} = 1$可得$k = 1/4$, 从而

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{x < 1\} + P\{1 \le x \le x\} = \frac{1}{4}(x-1).$$

若$x > 5$, 则$\{X \le x\}$是必然事件, $F(x) = 1$. 综上, X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}(x-1), & 1 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

$F(x)$的图形如下图，它是一个定义在$-\infty, +\infty$上的一个连续函，在整个数轴上没有一个跳跃点.



概率密度函数

定义　对于随机变量X 的分布函数 $F(x)$ 如果存在非负函数 $f(x)$, 使对于任意实数有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}t$$

则X称为连续型随机变量, 其中函数 $f(x)$称为x的概率密度函数, 简称概率密度.

概率密度函数

由定义知道, 概率密度$f(x)$ □具有以下性质

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
3. 对于任意实数 $x_1, x_2, x_1 \leq x_2$, 有

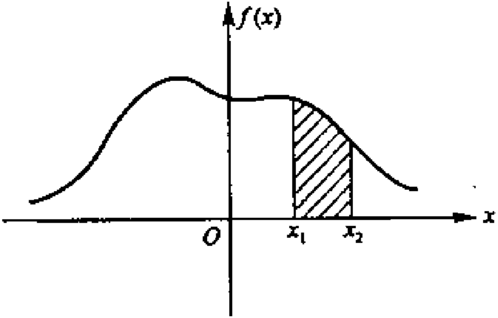
$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_i) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

4. 若$f(x)$在点x连续, 则$F\prime(x) = f(x)$.

小注: 性质 1 和性质 2 是概率密度函数的基本性质.

概率密度函数

由性质 3 可知, X落在区间$(x_1, x_2]$上的概率$P\{x_1 \leq x_2\}$等于区间$(x_1, x_2]$上曲线$f(x)$之下曲边梯形的面积.



由性质 4, 对于$f(x)$的连续点x, 有

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0^*} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P\{x < X \leqslant x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

这表明概率密度函数$f(x)$不是随机变量X取x的概率, 而是X在点x的概率的密集程度, $f(x)$的大小能反映出X取x附近的值的概率大小.

概率密度函数

例 12　设连续型随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx+1, & 0\leq x\leq 2 \\ 0, & \equiv\neq tt \end{cases}$$

(1)　确定常数k.

(2)　求X的分布函数$F(x)$.

(3)　求$P\{3/2<x\leq 5/2\}$.

概率密度函数

解: (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, 即 $\int_0^2 (kx+1)\mathrm{d}x = 1$ 解的 $k = -1/2$.

(2) X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 + x, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

$$(3)\ P\{3/2 < x \le 5/2\} = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 1 - 0.9375 = 0.0625$$

第四节	连续型随机变量 及其概率密度函数
4.1	均匀分布
4.2	指数分布
4.3	正态分布

均匀分布

设连续型随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & v\end{cases}$$

则称X在区间(a,b)上服从均匀分布，记为$X\sim U(a,b)$.

均匀分布

设连续型随机变量X具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & v \end{cases}$$

则称X在区间(a, b)上服从均匀分布, 记为$X \sim U(a, b)$.

易知 $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} dx = 1$. 满足概率密度函数的两个基本性质.

均匀分布

设连续型随机变量X具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & v \end{cases}$$

则称X在区间(a, b)上服从均匀分布，记为$X \sim U(a, b)$.

易知 $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} dx = 1.$ 满足概率密度函数的两个基本性质.

例子　均匀分布有如下这些例子：

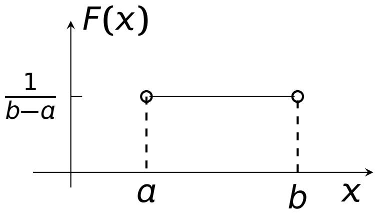
- 四舍五入时产生的误差。
- 查看当前时间时的分钟值。

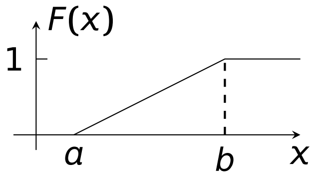
均匀分布

由均匀分布的概率密度函数容易求得其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}$$

其概率密度函数和分布函数的图像为





例 13　设随机变量 X 在$[2,5]$上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测。试求至少有两次测值大于 3 的概率.

例 13　设随机变量 X 在$[2,5]$上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测。试求至少有两次测值大于 3 的概率.

解:　依题意得：X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & ,2<x<5\\ 0 & ,其它\end{cases}$$

设Y表示三次独立观测其观测值大于3的次数

$$P(X>3)=\int_3^5 \tfrac{1}{3}\mathrm{d}x=\tfrac{2}{3}$$
$$P(Y\geq 2)=C_3^2\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\cdot\tfrac{1}{3}+C_3^3\left(\tfrac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$

第四节	连续型随机变量 及其概率密度函数
4.1	均匀分布
4.2	指数分布
4.3	正态分布

定义 如果随机变量X有以下概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

其中$\lambda>0$, 则称X服从参数为λ的指数分布, 记为

$$X\sim E(\lambda).$$

其分布函数为

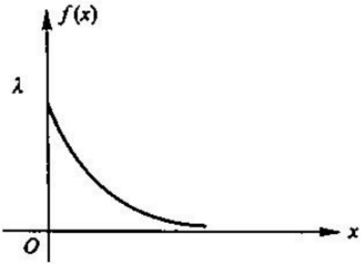
$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}.$$

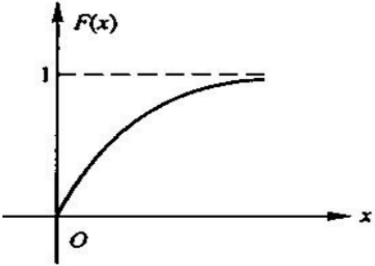
指数分布

易知 $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1$, 满足概率密度函数的两个基本性质.

易知 $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1$, 满足概率密度函数的两个基本性质.

指数分布的概率密度及分布函数分别如图所示:





指数分布

指数分布经常作为时间间隔或等待时间的分布：

- 婴儿出生的时间间隔
- 客户来电的时间间隔
- 商品销售的时间间隔
- 网站访问的时间间隔
- 取号排队的等待时间
- 电子产品的寿命长度

指数分布

例 14　已知某种电子元件寿命 (单位：h) 服从参数 $\lambda = 1/1000$ 的指数分布, 求 3 个这样的元件使用 1000 小时至少有一个已损坏的概率.

指数分布

例 14 已知某种电子元件寿命 (单位：h) 服从参数 $\lambda = 1/1000$ 的指数分布, 求 3 个这样的元件使用 1000 小时至少有一个已损坏的概率.

解: X的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{x}{1000}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

于是

$$P\{X > 1000\} = \int_{1000}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1}$$

各元件的寿命是否超过1000小时是独立的, 因此3个元件使用1000小时都未损坏的概率为 ，从e^{-3} 而至少有一个已损坏的概率为$1 - e^{-3}$.

第四节	连续型随机变量 及其概率密度函数
4.1	均匀分布
4.2	指数分布
4.3	正态分布

定义　如果随机变量X有以下概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

其中μ,σ为常数且$\sigma>0$, 则称X服从参数为μ,σ的正态分布, 简记为

$$X\sim N(\mu,\sigma^2).$$

定义 如果随机变量X有以下概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

其中μ,σ为常数且$\sigma>0$, 则称X服从参数为μ,σ的正态分布,
简记为

$$X\sim N(\mu,\sigma^2).$$

显然$f(x)\leq 0$, 下证$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)=1$.

令$\frac{x-\mu}{\sigma}=t$, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

利用

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

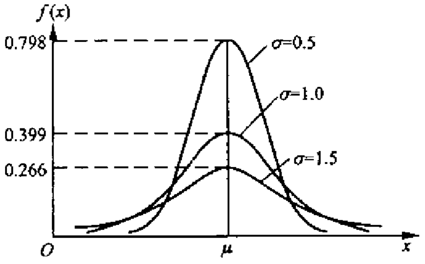
得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=1$$

正态分布的概率密度函数如图所示



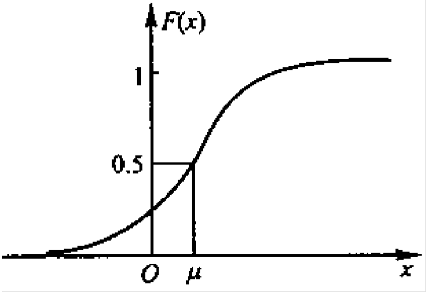
显然, 函数 $f(x)$ 的图形关于直线 $x = \mu$ 对称, $f(x)$ 在 $x = \mu$ 处达到最大. 当 μ 固定时, σ的值越小, $f(x)$的图形越尖。反之, σ的值越大, $f(x)$的图形就越平.

正态分布

X的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

其图像为



正态分布

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时，称X 服从标准正态分布，记为 $X \sim N(0,1)$.其概率密度和分布函数分别用为$\varphi(x)$和$\Phi(x)$ 表示，即有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

正态分布

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时，称X 服从标准正态分布，记为 $X \sim N(0,1)$.其概率密度和分布函数分别用为$\varphi(x)$和$\Phi(x)$ 表示，即有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

标准正态分布的分布函数的性质

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

正态分布

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时，称X 服从标准正态分布，记为 $X \sim N(0,1)$.其概率密度和分布函数分别用为$\varphi(x)$和$\Phi(x)$ 表示，即有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

标准正态分布的分布函数的性质

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

引理: 若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则$Y = \frac{X-u}{\sigma} \sim N(0,1)$.

正态分布

例 15　已知 $N \sim (8, 4^2)$ 求$P\{X \leq 16\}, P\{X \leq 0\}$及$P\{12 < X \leq 20\}$

例 15 已知 $N\sim(8,4^2)$ 求$P\{X\le 16\}$, $P\{X\le 0\}$及$P\{12<X\le 20\}$

解: 由引理及X的分布函数, 查表得

$$P\{x\le 16\}=P\left\{\frac{x-8}{4}\le\frac{16-8}{4}\right\}=\Phi(2)=0.9773,$$

$$P\{x\le 0\}=P\left\{\frac{x-8}{4}\le\frac{-8}{4}\right\}=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=0.0227,$$

$$P\{12<x\le 20\}=P\left\{\frac{12-8}{4}<\frac{x-8}{4}\le\frac{20-8}{4}\right\}$$

$$=\Phi(3)-\Phi(1)$$

$$=0.9987-0.8413=0.1574.$$

例 16　设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 求X落在区间$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$内的概率，$k = 1, 2, \ldots$.

例 16 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 求X落在区间$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$内的概率, $k = 1, 2, \ldots.$

解: 由引理可得

$$P\{|X-\mu| < k\sigma\} = P\{\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma\}$$

$$= \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$$

于是

$$P\{|X-\mu| < \sigma\} = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$
$$P\{|X-\mu| < 2\sigma\} = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$
$$P\{|X-\mu| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

则 $P\{|X-\mu| \geqslant 3\sigma\} = 1 - P\{|X-\mu| < 3\sigma\} = 0.0026 < 0.003.$

X落在$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$以外的概率小于0.003, 在实际问题中常认为它不会发生.

正态分布

设随机变量$X \sim N(0,1)$, 对给定的$\alpha \in (0,1)$, 称满足条件

$$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$$

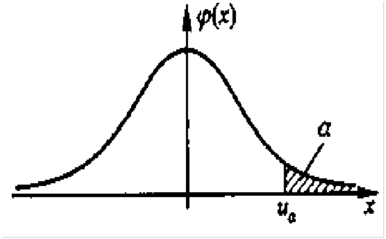
的点u_α为标准正态分布的上α分位点。

正态分布

设随机变量$X \sim N(0,1)$, 对给定的$\alpha \in (0,1)$, 称满足条件

$$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$$

的点u_α为标准正态分布的上α分位点。



易知, $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha.$

在实际问题中，有时我们关心的随机变量Y不容易直接测量，而是要测量另外一个随机变量X, 把Y表示为X的函数$Y = g(X)$。

随机变量函数的分布

在实际问题中，有时我们关心的随机变量Y不容易直接测量，而是要测量另外一个随机变量X，把Y表示为X的函数$Y = g(X)$。

由此引出的问题是：已知X的分布，如何求Y的分布？

随机变量函数的分布

在实际问题中，有时我们关心的随机变量Y不容易直接测量，而是要测量另外一个随机变量X，把Y表示为X的函数$Y = g(X)$。

由此引出的问题是：已知X的分布，如何求Y的分布？

例如：已知圆球直径D的分布，求圆球体积 $V = \dfrac{\pi D^3}{6}$的分布。

例 17　设随机变量 X 有如下概率分布：

X	-1	0	1	2
p_k	0.3	0.2	0.1	0.4

求 (1) $Y=2X$, (2) $Z=(X-1)^2$ 的分布律。

例 17　设随机变量 X 有如下概率分布：

X	-1	0	1	2
p_k	0.3	0.2	0.1	0.4

求 (1) $Y = 2X$, (2) $Z = (X-1)^2$ 的分布律。

解:　(1) Y的所有可能取值为$-2, 0, 2, 4$。由

$$P\{Y = 2X\} = P\{X = k\} = p_k$$

得Y的分布律为

X	-2	0	2	4
p_k	0.3	0.2	0.1	0.4

(2) Z的所有可能取值为0, 1, 4, 故

$$P\{z=0\}=P\left\{(X-1)^2=0\right\}=P\{X=1\}=0.1,$$

$$\begin{aligned}P\{Z=1\}&=P\left\{(X-1)^2=1\right\}\\&=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.6,\end{aligned}$$

$$P\{Z=4\}=P\left\{(X-1)^2=4\right\}=P\{X=-1\}=0.3.$$

故Z的分布律为

X	0	1	4
p_k	0.1	0.6	0.3

例 18　设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明X的线性函数$Y = aX + b$也服从正态分布.

随机变量函数的分布

例 18 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明X的线性函数$Y = aX + b$也服从正态分布.

解: 分别记 X, Y的概率密度函数为$f_X(x), f_Y(x)$, 分布函数为$F_X(x), F_Y(y)$. 不妨设$a > 0$, 则

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{aX + b \leq y\}$$

$$= P\left\{X \leq \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

对$F_Y(y)$关于y求导, 得$Y = aX + b$的概率密度函数为

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

而X的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

所以

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}, -\infty < x < +\infty.$$

若$a<0$,以同样的方法可以求得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(|a|\sigma)}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}},-\infty<x<+\infty.$$

故$Y\sim N\left(a\mu+b,(a\sigma)^2\right)$.

若$a<0$,以同样的方法可以求得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(|a|\sigma)}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}},-\infty<x<+\infty.$$

故$Y\sim N\left(a\mu+b,(a\sigma)^2\right)$.

小注: 取$a=1/\sigma$, $b=-\mu/\sigma$, 得

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

例 19　设随机变量X具有概率密度函数$f_X(x), -\infty < x < +\infty$, 求$Y = X^2$的概率密度函数.

例 19　设随机变量X具有概率密度函数$f_X(x), -\infty < x < +\infty$, 求$Y = X^2$的概率密度函数.

解:　分别记 X, Y的概率密度函数为$f_X(x), f_Y(x)$, 分布函数为$F_X(x), F_Y(y)$. 先求Y的分布函数$F_Y(y)$.
由于$Y = X^2 \geq 0$, 故当$y \leq 0$时, $F_Y(y) = 0$. 当$y > 0$时有

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\left\{X^2 \leqslant y\right| \\
&= P\{-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}| \\
&= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})
\end{aligned}
$$

对$F_Y(y)$关于y求导, 得Y的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right], & y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases}$$

特别地, 若$X \sim N(0,1)$, 其概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

则 $Y = X^2$的概率密度函数是

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases}$$

此时称Y服从自由度为1的χ^2分布

定理 20 设随机变量X具有概率密度$f_X(x), -\infty < x < +\infty$; 函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$) 则$Y = g(X)$是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot |h'(y)|, & y \in (\alpha, \beta) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中 $h(y)$是$g(x)$的反函数, $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \min(g(-\infty), g(+\infty))$.

证明.

先考虑$g'(x) > 0$的情况.此时$g(x)$在$(-\infty, +\infty)$严格单调递增, 它的反函数$h(y)$存在, 且在(α, β)严格单调递增. 分别记X, Y的概率密度函数为$f_X(x), f_Y(x)$, 分布函数为$F_X(x), F_Y(y)$. 先求Y的分布函数$F_Y(y)$.由于$Y = g(x)$在(α, β)取值, 故当$y < \alpha$时, $F_Y(y) = 0$; 当$Y \geq \beta$时, $F_Y(y) = 1$; 当$\alpha < y < \beta$时

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} \\ &= P\{X \leq h(y)\} = F_X[h(y)] \end{aligned}$$

对$F_Y(y)$关于y求导, 即得Y的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot h'(y), & y \in (\alpha, \beta) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

再考虑$g'(x) < 0$的情况, 同样的有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot [-h'(y)], & y \in (\alpha, \beta) \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

综合以上两种情况,命题得证.

再考虑$g'(x) < 0$的情况, 同样的有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot [-h'(y)], & y \in (\alpha, \beta) \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

综合以上两种情况,命题得证.

小注: 若$f_X(x)$在有限区间$[a, b]$以外等于零, 则只需假设在$[a, b]$间上恒有$g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$), 此时 $\alpha = \min(g(a), g(b$
$\beta = \min(g(a), g(b))$.

例 21　设随机变量X在$(-\pi/2,\pi/2)$内服从均匀分布 $Y=\sin X$，试求随机变量Y的概率密度函数.

例 21 设随机变量X在$(-\pi/2, \pi/2)$内服从均匀分布 $Y = \sin X$，试求随机变量Y的概率密度函数.

解: $Y = \sin X$对应的函数$y = g(x) = sin x$在$(-\pi/2, \pi/2)$ 上恒有$g'(x) = \cos x > 0$, 且有反函数

$$x = h(y) = \arcsin y, h'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

又X的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由前面结论得$Y = \sin X$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$