注意：文件只列出了部分要点，没有提到的内容不代表不会考察.

3 多维随机变量及其分布

3.1 随机向量的联合分布

二维随机向量的联合分布

定义：设(X,Y)为二维随机向量，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

为(X,Y)的联合分布函数. 联合分布函数的性质：

1. $F(x,y)$对每个自变量都是广义单增的；
2. $0\le F(x,y)\le 1$；
3. $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$；

二维离散型随机向量(X,Y)的联合概率分布 $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$ 满足

1. $p_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$
2. $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$；

二维连续型随机向量(X,Y)的联合概率密度 $f(x,y)$ 满足

1. $f(x,y)\ge 0,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$；
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$；

二维连续型随机向量

二维连续型随机向量(X,Y)的联合分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s,$$

若联合概率密度$f(x,y)$在点(x,y)处连续, 则有

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

对任意的平面区域D, 有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_{(x,y)\in D}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3.2 随机向量的边缘分布

边缘分布

二维随机向量 (X,Y) 作为一个整体, 有联合分布函数$F(x,y)$, 其分量X 与Y 都是随机变量, 有各自的分布函数, 分别记成$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 称为X和Y的边缘分布函数. 边缘分布由联合分布完全确定：

$$F_X(x)=F(x,+\infty),\qquad F_Y(y)=F(+\infty,y).$$

二维离散型随机向量(X,Y)的边缘概率分布为

$$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij},\qquad i=1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij},\qquad j=1,2,\cdots$$

二维连续型随机向量(X,Y)的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

3.3 随机向量的条件分布

二维离散型随机向量的条件分布

当$p_{\cdot j}>0$时，$Y=y_j$时X的条件概率分布为

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots$$

当$p_{i\cdot}>0$时，$X=x_i$时Y的条件概率分布为

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots$$

若$f_Y(y)>0$，在$Y=y$条件下，X的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad x\in\mathbb{R}.$$

若$f_X(x)>0$，在$X=x$条件下，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad x\in\mathbb{R}.$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义. 若$f_Y(y)>0$, 则称

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(s|y)\,\mathrm{d}s.$$

为$Y=y$条件下, X的条件分布函数.

定义. $f_X(x)>0$, 则称

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t|x)\,\mathrm{d}t.$$

为$X=x$条件下Y的条件分布函数.

3.4 随机变量的独立性

二维随机向量的独立性

二维离散型随机向量(X,Y)相互独立的充要条件为

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$$

对所有的i,j都成立.

二维连续型随机向量(X,Y)相互独立的充要条件为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

对几乎所有的实数x,y成立.

3.5 随机向量函数的分布

二维离散型随机向量函数的分布

设离散型随机变量(X, Y)的联合分布为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

令$Z = g(X, Y)$, 则Z也是一个离散型随机变量, 其分布可按如下步骤求得

1. 根据函数关系列出Z的所有可能值；
2. 对Z的每个可能值z, $P\{Z = z\}$等于所有满足$g(x_i, y_j) = z$的p_{ij}之和.

二维连续型随机向量函数的分布

对连续型随机变量(X, Y), 求$Z = g(X, Y)$的密度函数的基本方法是

1. 根据函数关系先求Z的分布函数
$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X, Y) \le z\}$$
2. 然后对$F_Z(z)$求导可得Z的概率密度.

3.6 常用的随机向量

连续型·均匀分布

定义：设D是平面上的有界区域, 其面积为d, 若二维随机向量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{d} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

则称(X, Y)服从D上的均匀分布.

连续型·均匀分布

若(X,Y)服从D上的均匀分布, 则 (X,Y)落在某一区域A内的概率

$$P\{(X,Y)\in A\}=\iint_A f(x,y)dxdy$$
$$=\iint_{A\cap D}\frac{1}{d}dxdy$$
$$=\frac{S}{d}$$

其中S为$A\cap D$的面积.

连续型·正态分布

定理：若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立, 且

$$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2),\ \ i=1,2,\cdots,n$$

则对不全为零的数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,

$$a_1X_1+\cdots+a_nX_n\sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2\right).$$

定理：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $aX+b\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$.