第三章　导数、微分、边际与弹性

一、单项选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+x)-f(1-x)}{x}=$ (C) .

(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 3

2. 函数 $f(x)=|x|^3$ 在 $x=0$ 处满足下列哪个结论 (D) .

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，不连续

(C) 连续，不可导　　(D) 可导

3. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续是 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导的 (B) .

(A) 充分但非必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

4. 设函数 $f(x)$ 可导，记 $g(x)=f(x)+f(-x)$，则导数 $g'(x)$ 为 (A) .

(A) 奇函数　　(B) 偶函数　　(C) 非奇非偶　　(D) 奇偶性不定

5. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处 (B) .

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导，且 $f'(0)=0$　　(D) 可导，且 $f'(0)=1$

6. 设 e^{2x} 为 $f(x)$ 的导函数，则 $f''(x)=$ (B) .

(A) e^{2x}　　(B) $2e^{2x}$　　(C) $4e^{2x}$　　(D) 0

7. 设 $f'(0)=2$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)-f(0)$ 是 x 的 (B) .

(A) 低阶无穷小量　　(B) 同阶无穷小量　　(C) 高阶无穷小量　　(D) 等价无穷小量

8. 设 $f(x)=x\ln 2x$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，则 $f(x_0)=$ (B) .

(A) 1　　(B) $\dfrac{e}{2}$　　(C) $\dfrac{2}{e}$　　(D) e^2

9. 曲线 $y=x\ln x-x$ 在 $x=e$ 处的切线方程是 (B) .

(A) $y=\mathrm{e}-x$　(B) $y=x-\mathrm{e}$　(C) $y=x-\mathrm{e}+1$　(D) $y=\mathrm{e}+x$

10. 设 $f(x)$ 可导且 $f'(-2)=2$，又 $y=f(-x^2)$，则 $\mathrm{d}y|_{x=\sqrt{2}}=$ (D).

(A) $2\,\mathrm{d}x$　(B) $-2\,\mathrm{d}x$　(C) $4\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$　(D) $-4\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

11. 设 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ (B).

(A) $f'(x)$　(B) $f'(0)$　(C) $f(0)$　(D) $\frac{1}{2}f(0)$

12. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则该函数在 $x=0$ 处 (D).

(A) 极限不存在　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　(D) 可导

13. 设 $y=f(x)$，已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+2x)}{6x}=3$，则 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=$ (A).

(A) $-9\,\mathrm{d}x$　(B) $18\,\mathrm{d}x$　(C) $-3\,\mathrm{d}x$　(D) $2\,\mathrm{d}x$

14. 设 $y=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，$y'|_{x=0}=$ (B).

(A) 0　(B) $-5!$　(C) -5　(D) -15

15. 设可微函数 $y=f(x)$，如果 $f'(x_0)=0.5$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 (B).

(A) Δx 的等价无穷小　(B) Δx 的同阶但不等价的无穷小

(C) Δx 的低阶无穷小　(D) Δx 的高阶无穷小

16. 下列函数中，在点 $x=0$ 处可导的是 (B).

(A) $f(x)=|x|$　(B) $f(x)=|x-1|$

(C) $f(x)=|\sin x|$　(D) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$

17. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为 (D).

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 0　(C) -1　(D) -2

18. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0 \\ x^2g(x) & x\le 0 \end{cases}$ 其中 $g'(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (D).

(A) 极限不存在　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导　(D) 可导

19. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\left(1/x^2\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (C).

(A) 极限不存在 (B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导 (D) 可导

20. 设 $F(x)=\max\left[f_1(x),f_2(x)\right]$，$0<x<2$，其中 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2$，则 (D).

(A) $F'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<0.5\\ 2x & 0.5<x<2\end{cases}$ (B) $F'(x)=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ 2x & 1<x<2\end{cases}$

(C) $F'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 2x & 1\le x<2\end{cases}$ (D) $F'(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 2x & 1<x<2\end{cases}$

二、填空题

1. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$ $\underline{e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{(-1)^n 2\cdot n!(1+x)^{-(n+1)}}$.

3. 设 (x_0,y_0) 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点，若在该点的切线过原点，则系数应满足的关系是 $\underline{ax_0^2=c，b\text{ 任意}}$.

4. 设 $y=f(x)$，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+2h)}{6h}=3$，则 $dy|_{x=x_0}=$ $\underline{-9\,dx}$.

5. 设 $f\left(\sqrt{x}\right)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $f''(x)|_{x=1}=$ $\underline{4}$.

6. 设 $f(x)$ 具有二导数，且 $f'(x)=\left[f(x)\right]^2$，则 $f''(x)=$ $\underline{2\left[f(x)\right]^3}$.

7. 设函数 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n)$（其中 n 为正整数），则 $f'(0)=$ $\underline{n!\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.

8. 曲线 $y=(1+x)e^x$ 在点 $x=0$ 处的切线方程为 $y=$ $\underline{2x+1}$.

9. 设 $f(x)=x^2$，则 $f'\left[f(x)\right]=$ $\underline{2x^2}$.

10. 某商品的需求量 Q 与价格 P 的关系为 $Q=P^5$，则需求量 Q 对价格 P 的弹性是 $\underline{5}$.

11. 设函数 $f(u)$ 二阶可导，且 $y=f(\ln x)$，则 $y''=$ $\underline{\frac{1}{x^2}\left[f''(\ln x)-f'(\ln x)\right]}$.

12. 设 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，则 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$ $\underline{\sqrt{3}\left(\ln 3-\dfrac{2}{3}\right)}$.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $y=f\left(x^{2006}\right)+\left[f(x)\right]^{2006}$，

则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{f'\left(x^{2006}\right)\cdot 2006\cdot x^{2005}+2006\cdot\left[f(x)\right]^{2005}\cdot f'(x)=2006\left\{x^{2005}f'\left(x^{2006}\right)+\left[f(x)\right]^{2005}f'(x)\right\}}$.

14. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{\dfrac{x+y}{x-y}}$.

15. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ $\underline{e^{-1}}$.

16. 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}|x|$ 在点 $x=0$ 处的导数 $f'(0)=$ $\underline{0}$.

17. 设 $y=2x+1$，则其反函数 $x=x(y)$ 的导数 $x'(y)=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

18. 设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ $\underline{\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}}$

19. 问自然数 n 至少多大，才能使 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处二阶可导

($f''(0)$ 存在)，并求其值. $\underline{n\geq 4}$ $\underline{f''(0)=0}$.

三、计算题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x\leq 0 \\ e^x+1, & x>0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

解. $f'(x)=\begin{cases} 3, & x<0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$, (在 $x=0$ 处不可导)

2. 设 $y=\dfrac{x\arctan x}{1+x}$，求 dy.

解. $dy=\dfrac{\arctan x+\frac{x^2+x}{1+x^2}}{(1+x)^2}dx.$

3. 设 $y=3^x+x^3+x^{\cos 3x}$, 求 y'.

解. $3^x\ln 3+3x^2+x^{\cos 3x}\left(-3\sin 3x\ln x+\dfrac{\cos 3x}{x}\right).$

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=f\left[x+g(y)\right]$. 所确定，其中 f 和 g 均可导，求 y'.

解. $\dfrac{f'\left[x+g\left(y\right)\right]}{1-f'\left[x+g(y)\right]\cdot g'(y)}$.

5. 设 $y=x\cdot\arctan\frac{1}{x}+\ln\sqrt{1+x^2}$，求 y'.

解. $\arctan\dfrac{1}{x}$.

6. 设 $y=\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$，求 y'.

解. $\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}\left[\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{4(x-2)}-\dfrac{2}{3(x+2)}\right]$.

7. 已知 $y^x=x^y$，求 y'.

解. $\dfrac{y(y-x\,ln\ y)}{x(x-y\,ln\ x)}$.

8. 由 $e^{x^2+y^2}+\sin\left(xy\right)=5$ 确定 y 是 x 的函数 $y(x)$，求 $y'(x)$.

解. $y'=-\dfrac{2xe^{x^2+y^2}+y\cos(xy)}{2ye^{x^2+y^2}+x\cos(xy)}$

9. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x-e^y-xy=0$ 确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

解. 对方程两边关于 x 求导，得

$$e^x-e^yy'-y-xy'=0,$$

两边关于 x 再求导，得

$$e^x-e^yy'^2-e^yy''-y'-y'-xy''=0$$

又当 $x=0$ 时，$y=0$，于是 $y'(0)=1$，故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-2$.

10. 设 $\begin{cases}x=2\sin3t\\ y=e^t+\ln2\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\dfrac{e^t(\cos3t+3\sin3t)}{36\cos^3 3t}$.

11. 设曲线方程为 $\begin{cases}x=t+\sin t+2\\ y=t+\cos t\end{cases}$，求此曲线在点 $x=2$ 处的切线方程，及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解. 当 $x=2$ 时，$t=0$，$y=1$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\sin t}{1+\cos t}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$，

切线方程：

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2);$$

二阶导数：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\sin t-\cos t-1}{(1+\cos t)^3}$$

12. 设 $f(x)$ 存在二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解. e^2.

13. 设曲线 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $y=f\left(\sin^2x\right)+f(\cos^2x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解. $y'=\left[f'(\sin^2x)-f'\left(\cos^2x\right)\right]\sin2x$

四、综合与应用题

1. 一人以 2m 每秒的速度通过一座高 20m 的桥，此人的正下方有一小船以 $\frac{4}{3}$ m 每秒的速度与桥垂直的方向前进，求第 5 秒末人与船相离的速率。

解. 设在时刻 t 人与船的距离为 s，则

$$s=\sqrt{20^2+(2t)^2+\left(\frac{4}{3}t\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{3600+52t^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{52}{3}\frac{t}{\sqrt{3600+5t^2}},\qquad \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=5}=\frac{26}{21}(\mathrm{m/s}).$$

答：第 5 秒末人与船相离的速率为 $\frac{26}{21}(\mathrm{m/s})$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}k+\ln(1+x) & x\geq0\\ e^{\sin x} & x<0\end{cases}$，当 k 为何值时，点 $x=0$ 处可导；此时求出 $f'(x)$.

解. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导；此时 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x} & x\geq0\\ \mathrm{e}^{\sin x}\cos x & x<0\end{cases}$.

3. 若 $y=f(x)$ 是奇函数且在点 $x=0$ 处可导，则点 $x=0$ 是函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 什么类型的间断点？说明理由.

解. 由 $f(x)$ 是奇函数，且在点 $x=0$ 处可导，知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，$f(0)=-f(0)$，则 $f(0)=0$，于是 $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 存在，故点 $x=0$ 是函数 $F(x)$ 第一类间断点 (可去).

4. 试确定常数 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases}2e^x+a & x<0\\ x^2+bx+1 & x\geq0\end{cases}$ 处处可导.

解. 为使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，必须

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0),$$

即

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=2+a,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1,$$

所以 $a=-1$.

为使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，必须 $f'_-(0)=f'_+(0)$，而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(e^x-1)}{x}=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+bx}{x}=b,$$

所以 $b=2$.

（导入时去掉了表格）

5. 已知某商品的需函数为 $Q=\dfrac{1200}{P}$，试求：

(1) 从 $P=30$ 到 $P=20,25,32,50$ 各点间的需求弹性；

(2) $P=30$ 时的需求弹性，并说明其经济意义。

解. $\eta(P)=-Q'(P)\dfrac{P}{Q(P)}=1\Rightarrow\eta(30)=1.$

P	20	25	30	32	50
Q	60	48	40	37.5	24
ΔP	-10	-5		2	20
ΔQ	20	8		-2.5	-16
$\dfrac{\Delta P}{P}$	-1/3	-1/6		1/15	2/3
$\dfrac{\Delta Q}{Q}$	0.5	0.2		-0.0625	-0.4
$\bar{\eta}$	1.5	1.2		15/16	0.6

经济意义：在 $P=30$ 时，价格上涨 1%，则需求减少 1%；而价格下跌 1%，则需求增加 1%.

6. 设 $f(x)$ 对任何 x 满足 $f(x+1)=2f(x)$, 且 $f(0)=1$，$f'(0)=C$ (常数)，求 $f'(1)$.

解. 注意题设 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 的导数存在. 故函数在其它点的导数应用导数定义求之.

令 $x=0$ 有 $f(1)=2f(0)=2$, 所以

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-2}{x}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=2f'(0)=2C$$

7. 试确定常数 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\cos 3x & x\le 0\\ be^{x}+a & x>0\end{cases}$, 在 $x=0$ 处可导.

解. 由

$$\lim_{x\to 0},f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}f(x)=f(0),$$

得 $a+b=1$.

又

$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\cos 3x-1}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{be^{x}+a-1}{x}=\frac{b(e^{x}-1)}{x}=b,$$

所以 $a=1$, $b=0$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ ax^{2}+bx+c & x>0\end{cases}$, 求 a,b,c 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导.

解. 首先在 $x=0$ 连续, 故

$$\lim_{x\to 0^{+}}f(x)=\lim_{x\to 0^{-}}f(x)=f(0),$$

得 $c=1$.

在 $x=0$ 处一阶可导, 故

$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\cos x-1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{ax^{2}+bx}{x}=b$$

得 $b=0$. 所以

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\le 0\\ 2ax, & x>0\end{cases}.$$

在 $x=0$ 处二阶可导

$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$
$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{2ax}{x}=2a.$$

得到 $2a=-1$, 即 $a=-\frac{1}{2}$.

五、分析与证明题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f\left(x+y\right)=f(x)+f\left(y\right)+xy$，且 $f'(0)=1$，证明 $f'(x)=1+x$

解. 取 $x=y=0$，得 $f(0)=0$；又取 $y=\Delta x$, 得

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(\Delta x)+x\Delta x.$$

故

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}+x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+x=f'(0)+x=1+x.$$

2. 设 $f(x)=g(x)\sin^{\alpha}(x-x_0)$ $(\alpha>1)$，其中 $g(x)$ 在 x_0 处连续，证明：$f(x)$ 在 x_0 处可导。

解. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)\sin^{\alpha}(x-x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\left\{\left[g(x)\sin^{\alpha-1}(x-x_0)\right]\cdot\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\right\}=\begin{cases}g(x_0) & \alpha=1\\ 0 & \alpha>1\end{cases}\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 处可导

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且在 $x=0$ 处连续，对任意的 x_1，x_2 均有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2).$$

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(2) 又设 $f'(0)=a$ (常数)，证明 $f(x)=ax$.

解. (1) 考虑 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$. 令 $x_1=0$, $x_2=0$，得 $f(0)=0$，又令 $x_1=x$，$x_2=\Delta x$，则

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x),$$

即

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(\Delta x),$$

而 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

(2) 考虑 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 令 $x_1=x$，$x_2=\Delta x$, 则

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x),$$

即

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(\Delta x)$$

所以

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = f'(0) = a,$$

得 $f(x) = ax + c$. 因为 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = ax$.

4. 设函数 $f(x)$ 对任何实数 x_1，x_2 有 $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. 且 $f'(0) = 1$, 证明：函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x) = 1$.

解. 由 $f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. 所以对任何实数 x 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{A x \to 0} \frac{f(x) + f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Lambda x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f'(0) = 1. \end{aligned}$$

5. 设函数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}$, 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，但右导数不存在.

解. 易知

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续.

又

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{1+x}+1)} \text{ 不存在},$$

故函数在 $x=0$ 处右导数不存在.