第四章　中值定理及导数的应用

一、单项选择题

1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加, 则必有 (D) .

(A) $f'(x)<0$; (B) $f'(x)>0$ (C) $f'(x)\geq 0$; (D) A, B, C 都不对.

2. 函数 $y=f(x)$ 满足条件: $f(0)=1, f'(0)=0$, 当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)>0, f''(x)\begin{cases}<0, & x<0\\ >0, & x>0\end{cases}$, 它的图形是 (B) .

3. 设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则使不等式 $\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$ 成立的条件是 (B) .

(A) $0<a<b$; (B) $\mathrm{e}<a<b$; (C) $0<b<a$; (D) $\mathrm{e}<b<a$.

4. 关于函数 $y=x-\ln x$ 的极值, 结论正确的是 (A) .

(A) 有极小值 1; (B) 有极大值 1; (C) 无极值 $\mathrm{e}-1$; (D) 有极小值 $\mathrm{e}-1$.

5. 关于函数 $y=2x-\ln(4x)^2$ 的极值, 结论正确的是 (B) .

(A) 有极大值 $2-4\ln 2$; (B) 有极小值 $2-4\ln 2$;

(C) 无极值; (D) 有极小值 $\frac{1}{2}$.

6. 曲线 $y=3x^2-x^3$ 在 (B)

(A) $(1,+\infty)$ 是凹的, $(-\infty,1)$ 是凸的;

(B) $(1,+\infty)$ 是凸的, $(-\infty,1)$ 是凹的;

(C) $(0,+\infty)$ 内是凸的, 在 $(-\infty,0)$ 是上凹的;

(D) $(0,+\infty)$ 内是上凹的, $(-\infty,0)$ 是上凸的;

7. 曲线 $y=x^2\ln x$ 在点 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^4},\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$ 近邻是 (A) .

(A) 向上凸的; (B) 向上凹的;

(C) 左侧近邻向上凸, 右侧近邻向上凹; (D) 左侧近邻向上凹, 右侧的邻向上凸;

8. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的拐点情况是 (C) .

(A) 没有拐点; (B) 有一个拐点; (C) 有两个拐点; (D) 有三个拐点.

9. 若 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 为连续曲线 $y=f(x)$ 上的凹弧与凸弧分界点, 则 (A) .

(A) $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 必为曲线的拐点;
(B) $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 必定为曲线的驻点;
(C) x_0 为 $f(x)$ 的极值点;
(D) x_0 必定不是 $f(x)$ 的极值点;

10. 曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(a>0)$ (C) .

(A) 有无穷多个拐点;
(B) 有两个拐点;
(C) 无拐点;
(D) 有一个拐点.

11. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点, 则必有 (B) .

(A) $a=1,\ b=-3,\ c=1$;
(B) a 任意, $b=0,\ c=1$;
(C) $a=1,\ b=0,\ c$ 任意;
(D) $b=-3a,\ a$ 任意, $c=1$.

12. 关于曲线 $y=\ln x$ 的渐近线, 下述结论正确的是 (B) .

(A) 只有水平渐近线;
(B) 只有铅直渐近线;
(C) 既有水平渐近线, 又有铅直渐近线;
(D) 既没有水平渐近线, 也没有铅直渐近线.

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)=$ (A)

(A) $-5/3$;
(B) -1;
(C) 1;
(D) $5/3$.

14. 在区间 $[0,8]$ 内, 对函数 $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$, 罗尔定理 (C) .

(A) 不成立;
(B) 成立, 并且 $f'(2)=0$;
(C) 成立, 并且 $f'(4)=0$;
(D) 成立, 并且 $f'(8)=0$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 记 (I) $f(a)=f(b)$; (II) 在 (a,b) 内至少存在 ξ, 使 $f'(\xi)=0$, 则 (A) .

(A) (I) 是 (II) 的充分但非必要条件;
(B) (I) 是 (II) 的必要但非充分条件;
(C) (I) 是 (II) 的充要条件;
(D) (I) 是 (II) 既非充分, 也非必要条件.

16. 设 $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, & 0\le |x|\le 1 \\ \dfrac{2}{x}, & 1<|x|\le 2 \end{cases}$, 则在区间内 $(0,2)$ 满足 $f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0)$ 的 ξ 值 (C) .

(A) 只有一个;
(B) 不存在;
(C) 有两个;
(D) 有三个.

17. 设 $a<b, ab<0, f(x)=\dfrac{1}{x}$, 则在 $a<x<b$ 内使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立的点 ξ (C) .

(A) 只有一点;
(B) 有两点;
(C) 不存在;
(D) 是否存在, 与 a,b 的具体数值有关.

18. 设 $f(x)$ 有直至 $n+1$ 阶导数, 则 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$ 式中拉格朗日型余项 $R_n(x)=$ (B) (设 $0<\theta<1$)

(A) $\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$; (B) $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$;

(C) $\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(\theta x)^{n+1}$; (D) $\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

19. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在点 $x=1$ 处取得极值 -2, 则 (B) .

(A) $a=-3,\ b=0$ 且点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值;

(B) $a=0,\ b=-3$ 且点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值;

(C) $a=-3,\ b=0$ 且点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值;

(D) $a=0,\ b=-3$ 且点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

20. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)}$ 的所有渐近线有 (B) 条

(A) 4; (B) 3; (C) 2; (D) 1.

二、填空题

1. 曲线 $y=1-\sqrt[3]{x-2}$ 的拐点是 $(2,1)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且满足 $f'(x)\equiv 0$, 则在 (a,b) 内 $f(x)=$ C, C 为常数 .

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶导数, 且 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=3$, 则极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=$ $\frac{3}{2}$.

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ 的值等于 $\frac{a^2}{b^2}$. , $(b\neq 0)$..

5. 设 $a>0$, 则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{ax}}$ 的值等于 0 .

6. $f(x)=x^3$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. 函数 $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[-1,\ 1]$ 上不具有罗尔定理的结论, 其原因是由于 $f(x)$ 不满足罗尔定理的一个条件 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导 .

8. $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}$ 的值等于 $\frac{9}{2}$.

9. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=$ $+\infty$ $(a>0)$.

10. $\lim_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 3x-\sin x}$ 的值等于 $\underline{\frac{1}{2}e^{\pi}}$.

11. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1-x}{2x}$ 的值等于 $\underline{\ 1\ }$.

12. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ 的值等于 $\underline{\frac{3}{2}}$.

13. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ 的值等于 $\underline{\frac{1}{2}}$.

14. $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\tan nx}{\tan mx}$ (其中 m, n 为正整数) 的值等于 $\underline{\frac{n}{m}}$.

15. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{x}-e^{-x}}$ 的值等于 $\underline{\frac{1}{2}}$.

16. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^{k}}{e^{x}}$ (其中 $k>0$) 的值等于 $\underline{\ 0\ }$.

17. $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/x}=\underline{\ 1\ }$.

18. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}=\underline{-\frac{1}{x^2}}$.

19. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线为 $\underline{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$.

20. 曲线 $y=\dfrac{e^{x}}{x+1}$ 有 <u>零</u> 个拐点.

三、计算题

1. 判定函数 $f(x)=x+\cos x\,(0\le x\le 2\pi)$ 的单调性.

解. 由条件知:

$$f'(x)=1-\sin x\ge 0,\ x\in[0,2\pi],$$

且在 $(0,2\pi)$ 内使 $f'(x)=1-\sin x=0$ 的点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是孤立的. 故 $f(0)=x+\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上单调增加.

2. 求函数 $y=(x+1)^4+e^{x}$ 的图形的拋点及凹凸区间.

解. 函数的定义域为 R, $y'=4(x+1)^3+e^{x}$, 因为

$$y''=12(x+1)^2+e^{x}>0$$

所以 y 在 R 上都是凹的, 无拐点.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\mathrm{e}^{\sin 4x}-\mathrm{e}^{\sin 8x}}$.

解. 原式等于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin 2x}{\mathrm{e}^{\sin 4x}\cdot 4\cos 4x-8\mathrm{e}^{8\sin x}\cdot\cos 8x}=\frac{1}{6}.$$

4. 设 $f(x)$ 有一阶导数, $f(0)=f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$

解. 有洛必达法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)\cdot\cos x}{f'(x)/f(x)}=\frac{f'(0)\cdot\cos 0}{f'(0)/f(0)}=1.$$

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^x-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$

解. 原式等于

$$\lim_{x\to 0}\frac{12^x\ln 12+3\cdot 5^{-3x}\ln 5}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}=\ln 12+3\ln 5.$$

6. 求极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan\ln(3x-2)}{\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^{x^2+1}}$$

解. 原式等于

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sec^2\ln(3x-2)\cdot\dfrac{3}{3x-2}}{\mathrm{e}^{x+1}-2x\mathrm{e}^{x^2+1}}=-\frac{3}{\mathrm{e}^2}.$$

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|\sin ax|}{\ln|\sin bx|}$ (a,b 都是不为 0 的常数).

解. 原式等于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos x}{\sin bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin ax}\cdot\frac{\sin bx}{\mathrm{bx}}\cdot\frac{\cos ax}{\cos bx}=1.$$

8. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a, b, c, d, 使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线, (1,−10) 为拐点, 且点 (−2, 44) 在曲线上.

解. 由题设可知, 驻点与拐点都在曲线上, 从而有

$$-8a+4b-2c+d=44, \tag{4.1}$$

$$a+b+c+d=-10, \tag{4.2}$$

$$y'=3ax^2+2bx+c,$$

$$y''=6ax+2b.$$

由驻点和拐点的条件可得

$$12a-4b+c=0, \tag{4.3}$$

$$6a+2b=0. \tag{4.4}$$

联立(4.1)-(4.4)解得

$$a=1,\ b=-3,\ c=-24,\ d=16.$$

9. 求函数 $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值, 最小值.

解. 由条件可得:

$$y'=5x^2(x-1)(x-3)$$

函数在 $[-1,2]$ 上的驻点为: $x_1=0, x_2=1$, 而

$$y(0)=1, y(1)=2, \tag{4.5}$$

$$y(-1)=-10, y(2)=-7. \tag{4.6}$$

所以

$$y_{\max}=y(1)=2, y_{\min}=y(-1)=-10.$$

10. 求曲线 $y=\dfrac{e^x}{1+x}$ 的渐近线

解. 因为

$$\lim_{x\to-1}\frac{e^x}{1+x}=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{e^{-x}}=0.$$

所以 $x=-1$ 是垂直渐近线, $y=0$ 是水平渐近线.

四、综合与应用题

1. 用长度为 l 米（ $l>0$ ）的篱笆在直的河岸边围成三面是篱笆一面是河的矩形场地, 求矩形场地的最大面积.

解. 如图, 设靠河的篱笆长为 x, 则矩形场地的面积为

$$S=x(l-2x),$$

则

$$S'=l-4x$$

, 得唯一驻点 $x=\dfrac{l}{4}$. 显然存在最大面积, 所以

$$S_{\max}=S\left(\frac{l}{4}\right)=\frac{l^2}{8}.$$

2. 要做一个圆锥形漏斗, 其母线长 20 cm, 要使其体积最大, 问其高应为多少?

解. 设圆锥形漏斗的高为 Hcm, 则圆锥底面半径为

$$R=\sqrt{400-H^2}$$

漏斗的体积为

$$V=\frac{\pi}{3}\left(400-H^2\right)H,\ 0<H<20,$$

又因为

$$V'=\frac{\pi}{3}\left(400-3H^2\right),$$

所以体积函数 V 在 $(0,20)$ 内有唯一驻点

$$H=\frac{20\sqrt{3}}{3},$$

又因为

$$V''=-2\pi H<0,$$

因此唯一驻点 $H=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ 也是极大值点, 由实际问题可知, 此时漏斗体积最大.

3. 设有一块边长为 a 的正方形铁皮, 从四个角截去同样的小方块, 做成一个无盖的方盒子, 问小方块的边长为多少才使盒子的容积最大?

解. 设小方块的边长为 x, 则盒子的容积为

$$V=x(a-2x)^2=a^2x+4x^3-4ax^2,\quad 0<x<\frac{a}{2},$$

其导数为

$$V'=a^2+12x^2-8ax$$

唯一驻点 $x=\dfrac{a}{6}$. 又

$$V''\Big|_{x=\frac{a}{6}}=\ (24x-8a)|_{x=\frac{a}{6}}=-4a<0,$$

即 $x=\dfrac{a}{6}$ 为极大值点, 也是最大值, 所以小方块边长为 $\dfrac{a}{6}$ 时, 盒子的容积最大.

4. 设某产品的销售量 Q 与价格 P 之间有关系式为 $Q=\dfrac{1-P}{P}$

(1) 求需求弹性;

(2) 售价为 0.5 时的需求弹性. 并给出经济解释.

解. (1)

$$\eta=-Q'(P)\frac{P}{Q(P)}=\frac{1}{P^2}\frac{P}{\frac{1-P}{P}}=\frac{1}{1-P}$$

(2)

$$\eta(0.5)=\ \frac{1}{1-P}\bigg|_{P=0.5}=2$$

其经济意义为: 在售价为 0.5 时的水平上, 若价格上涨 1%, 需求量下降 2%.

5. 某厂生产某种商品, 其年销售量为 100 万件, 每批生产需增加准备费 1000 元, 而每件的库存费为 0.05 元. 如果年销售是均匀的, 且上批销售完后, 立即再生产下一批（此时商品库存量为批量的一半), 问分几批生产, 能使生产准备费及库存费之和最小？

解. 设每批生产 x 件, 则有

$$y=1000\times\frac{1000000}{x}-\frac{x}{2}\times 0.05,$$

其导数为:

$$y'=\frac{10^9}{x^2}-0.025$$

令 $y'=0$, 得 $x=200000$ (件)(舍去负根).

$$y''=\frac{2\times 10^9}{x^3},\ y''(200000)>0,$$

即批量 200000(件), 批次为 5 时总费用最小.

6. 某商品的价格 P 与需求量 Q 的关系为 $P=10-\dfrac{Q}{5}$,

(1) 求需求量为 20 及 30 时的总收益 R、平均收益 $\overline{R}$ 及边际收益 R';

(2) Q 为多少时总收益最大?

解. 由条件知

$$R=R(Q)=QP(Q)=10Q-\frac{Q^2}{5}$$

$$\overline{R}(Q)=P(Q)$$

$$R'(Q)=10-\frac{2Q}{5}$$

(1) 由条件知:

$$R(20)=120,R(30)=120,\overline{R}(20)=6,$$

$$\overline{R}(30)=4,R'(20)=2,R'(30)=-2.$$

(2) 令 $R'(Q)=0$, 得 $Q=25$, 又

$$R''(Q)=-\frac{2}{5}<0,$$

所以 $Q=25$ 时总收益最大.

7. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2, 试确定系数 a, b, 并求出 $y=f(x)$ 的所有极值点及拐点.

解. 由题意知

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

由于 $f(x)$ 在点 $x=1$ 有极值 -2, 所以

$$f(1)=1+a+b=-2,\ f'(1)=3+2a+b=0\Rightarrow a=0,b=-3,$$

因此

$$f(x)=x^3-3x,f'(x)=3x^2-3,f''(x)=6x.$$

所以极值点为 $x=1$ 和 $x=-1$, 拐点为 $(0,0)$.

8. 在半径为 R 的球内, 求体积最大的内接圆柱体的高.

解. 设内接圆柱体的高为 h , 则圆柱体的底面半径

$$r=\sqrt{R^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2},$$

其体积为

$$V=\pi h\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right),\quad 0<h<2R,$$

其导函数为

$$V'=\pi\left(R^2-\frac{3}{4}h^2\right)$$

故其有唯一驻点

$$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}R,$$

又因为

$$V''=-\frac{3}{2}\pi h<0,$$

故 $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$ 时, 圆柱体体积最大.

9. 由三块同一宽度的板做成一个梯形的排水槽 (无上盖), 问侧面与底的倾角 α 为多大时, 才使水槽的横断面积最大?

解. 设板宽为 a, 侧面与底面的倾角为 α 则横断面面积为

$$S=\frac{1}{2}(2a+2a\cos\alpha)a\sin\alpha=a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

其导数为

$$S'=a^2\left(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\right)$$

该函数的唯一驻点 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

又因为

$$S''=-a^2(2\sin 2\alpha+\sin\alpha),\qquad S''\Big|_{\alpha=\frac{\pi}{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2<0$$

所以当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 横断面面积最大.

10. 将半径为 r 的圆铁片, 剪去一个扇形, 问其中心角 α 为多大时, 才能使余下部分围成的圆锥形容器的容积最大?

解. 设圆雉形容器半径为 R, 高为 h, 容积为 V, 则

$$R^2+h^2=r^2, V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{\pi}{3}\left(r^2-h^2\right)h$$

令

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}=\frac{\pi}{3}\left(r^2-3h^2\right)=0,$$

求得的唯一驻点为

$$h=\frac{r}{\sqrt{3}},$$

此时 $R=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathrm{r}$. 依问题的实际意义, V 存在最大值. 故 $R=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$ 为所求, 但

$$2\pi R=(2\pi-\alpha)\,r,$$

解得

$$\alpha=\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cdot 2.$$

即

$$\alpha=1-\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 2$$

时所求容积最大.

五、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上连续, 在 $(1,\mathrm{e})$ 内可导, 且 $f(1)=0, f(\mathrm{e})=1$, 证明方程 $xf'(x)=1$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 内至少有一实根.

解. 证明: 令 $F(x)=f(x)-\ln x$, 则 $F(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上连续, 在 $(1,\mathrm{e})$ 内可导. 因 $f(1)=0, f(\mathrm{e})=1$, 则 $F(1)=F(\mathrm{e})=0$, 即 $F(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上满足罗尔定理的条件, 则至少存在 $\xi\in(1,\mathrm{e})$, 使 $F'(\xi)=0$, 而

$$F'(x)=f'(x)-\frac{1}{x},$$

即

$$f'(\xi)-\frac{1}{\xi}=0,\quad \xi\in(1,\mathrm{e})$$

即

$$\xi f'(\xi)=1.$$

故 $xf'(x)=1$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 内至少有一个实根.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=\xi^2\big[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\big].$$

解. 证明: 令 $F(x)=x^3f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 利用拉格朗日中值定理, 则至少存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),$$

即

$$b^3f(b)-a^3f(a)=\big[3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)\big](b-a),$$

即

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^3 & a^3 \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=\xi^2\left[3f(\xi)+\xi f'(\xi)\right].$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导, 且 $f(2)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(1,2)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi\ln(\xi)}.$$

解. 证明: 令 $F(x)=f(x)\ln x$, 则 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导, 且

$$F(1)=f(1)\ln 1=0,\quad F(2)=f(2)\ln 2=0.$$

即 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上满足罗尔定理的条件, 则至少存在 $\xi\in(1,2)$ 使 $F'(\xi)=0$, 而

$$F'(x)=f'(x)\ln x+f(x)\cdot\frac{1}{x}$$

即有

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi\ln(\xi)}.$$

4. 设 $b>a>0$, 证明: $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$.

解. 证明: 令 $f(x)=(a+x)(\ln x-\ln a)-2(x-a)$, 则

$$f(a)=0, f'(x)=\ln x\ln a+(a+x)\frac{1}{x}-2,$$

即

$$f'(x)=\ln x-\ln a+\frac{a}{x}-1$$

故 $f'(a)=0$. 又因为

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}>0\quad(x>a),$$

所以 $f''(x)$ 单调递增, $f'(x)>f(a)=0$, 所以函数 $f(x)$ 单调递增, 于是当 $x>a$ 时 $f(x)>f(a)=0$, 令 $x=b$, 则 $f(b)>f(a)=0$, 即

$$(a+b)(\ln b-\ln a)-2(b-a)>0,$$

亦即

$$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}.$$

5. 证明当 $x\neq 0$ 时, 有不等式 $\mathrm{e}^x>1+x$.

解. 证明: 令

$$f(x)=\mathrm{e}^x-x-1,$$

它在 $(-\infty,+\infty)$ 连续. 易知

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-1,\ f''(x)=\mathrm{e}^x>0.\ f'(0)=0, f''(0)>0,$$

所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值也是最小值, 当 $x \neq 0$ 时, 得

$$f(x) > f(0),$$

故 $x \neq 0$ 时,

$$\mathrm{e}^x > 1 + x.$$