

## Part I

# 第一章

## 1 集合

### 1.1 集合的概念

集合的概念

概念：

- 集合是具有确定性质的对象的总体；
- 构成集合的每一个对象, 称为集合的元素.

例子：

1. 太阳系的九大行星.
2. 教室里的所有同学.

如果  $a$  是集合  $A$  中的元素, 记为  $a \in A$ ; 否则记为  $a \notin A$ .

集合的表示法

分类：

1. 由有限个元素组成的几何称为有限集.
2. 由无限个元素组成的几何称为无限集.

表示方法:

1. 列举法  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
2. 描述法  $B = \{x | x \text{ 所具有的特征}\}$

子集

如果  $x \in A$ , 必有  $x \in B$ , 则称  $A$  是  $B$  的子集, 记为  $A \subset B$  或  $B \supset A$ .

如果  $A \subset B$ , 且  $B \subset A$ , 则称  $A$  与  $B$  相等, 记为  $A = B$ .

例如: 若  $A = \{1, 2\}$ ,  $C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ , 则  $A = C$ .

不含任何元素的集合称为空集, 记为  $\emptyset$ .

例如:  $\{x | x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$ .

小注: 空集是任何集合的子集.

数集

元素为数的集合称为数集, 人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集  $\mathbf{N}$
- 整数集  $\mathbf{Z}$
- 有理数集  $\mathbf{Q}$
- 实数集  $\mathbf{R}$   $\longleftarrow$  微积分的研究对象
- 复数集  $\mathbf{C}$

小注:  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

## 1.2 集合的运算

### 集合的运算

1. 交集:  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
2. 并集:  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
3. 差集:  $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
4. 补集 (余集):  $A^c = I \setminus A = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$ , 其中  $I$  为研究对象的全体 (全集).

### 集合运算律

#### 1. 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

#### 2. 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

#### 3. 分配律

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

#### 4. 对偶律

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

## 笛卡尔 (Descartes) 乘积

设有集合  $A$  和  $B$ . 对任意的  $x \in A, y \in B$ , 则称集合

$$\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

为  $A$  与  $B$  的笛卡尔乘积 (或直积), 记为  $A \times B$ . 例如:  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$  即为  $xOy$  平面上全体点的集合,  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  常记为  $\mathbf{R}^2$ .

## 1.3 区间和邻域

### 有限区间

区间是指介于两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

区间可分为有限区间和无限区间.

有限区间:

$$(a, b) = \{x | a < x < b\} \quad \text{开区间}$$

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\} \quad \text{闭区间}$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\} \quad \text{左开右闭区间}$$

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\} \quad \text{左闭右开区间}$$

例 1. 用区间表示下列数集:

$$(1) \{x | 1 < x < 3\}$$

$$(2) \{x | -5 \leq x < 0\}$$

### 无限区间

无限区间有如下五种:

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \quad (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \quad [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$$

例 2. 用区间表示下列数集:

$$(1) \{x \mid x < 3\}$$

$$(2) \{x \mid x \geq 2\}$$

两端点间的距离 (线段的长度) 称为区间的长度.

邻域

设  $a$  与  $\delta$  是两个实数, 且  $\delta > 0$ ,

- $a$  的  $\delta$  邻域  $U(a, \delta)$ :

$$\{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

其中  $a$  称为邻域的中心,  $\delta$  称为邻域的半径.

- $a$  的去心  $\delta$  邻域  $\dot{U}(a, \delta)$ :

$$\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

- $a$  的左  $\delta$  邻域:  $(a - \delta, a)$

- $a$  的右  $\delta$  邻域:  $(a, a + \delta)$

## 1.4 小结 思考题

小结

1. 集合的有关概念: 集合、元素、子集、全集、空集、交集、并集、补集、直积、区间、邻域.
2. 集合的运算: 交集、并集、补集、直积的求法.
3. 区间和邻域: 连续的点组成的集合的表示方法.

### 思考题

经调查, 有彩电的家庭占 96%, 有冰箱的家庭占 87%, 有音响的家庭占 78%, 有空调的家庭占 69%, 试估计四种电器都有的家庭占多少?

### 思考题解答

没有彩电的家庭占 4%, 没有冰箱的家庭占 13%, 没有音响的家庭占 22%, 没有空调的家庭占 31%, 所以四种电器都有的至少占

$$1 - (4\% + 13\% + 22\% + 31\%) = 30\%$$

根据交集是任意集合的子集可知: 四种电器都有的最多占 69%, 所以四种电器都有的至少占 30%, 最多占 69%.

## 2 映射与函数

### 2.1 映射的概念

#### 映射的概念

设  $X$  与  $Y$  是两个非空集合, 若对  $X$  中的每一个元素  $x$ , 均可以找到  $Y$  中唯一确定的元素  $y$  与之对应, 则称这个对应是集合  $X$  到  $Y$  的一个映射, 记为  $f$ , 或者更详细地写为:

$$f: X \rightarrow Y.$$

将  $x$  的对应元素  $y$  记为

$$f(x) : x \mapsto y = f(x).$$

$y$  称为映射  $f$  下  $x$  的像,  $x$  称为映射  $f$  下  $y$  的原像 (或逆像). 集合  $X$  称为映射  $f$  的定义域, 记为  $D_f = X$ ;  $X$  的所有元素的像  $f(x)$  的集合

$$\{y | y \in Y, y = f(x), x \in X\}$$

称为映射  $f$  的值域, 记为  $R_f$  (或  $f(X)$ ).

映射举例

例 1. 设  $A = \{\text{商场中的所有商品}\}$ ,  $B = \{\text{商场中商品九月份的销量}\}$ , 则

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y \text{ (} y \text{ 是商品 } x \text{ 九月份的销量)}$$

是一个映射,  $D_f = A$ ,  $R_f = B$

映射举例

例 2. 设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ , 则

$$f : A \rightarrow B$$

$$f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$$

是一个映射,  $D_f = A$ ,  $R_f = \{4, 5, 6\} \subset B$

映射的三个基本要素

概括起来, 构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

1. 集合  $X$ , 即定义域  $D_f = X$ .

2. 集合  $Y$ , 即限制值域的范围  $R_f \subset Y$ .

3. 对应法则  $f$ , 使每个  $x \in X$ , 有唯一确定的  $y = f(x)$  与之对应.

注记 1. 1. 映射要求元素的像必须是唯一的.

2. 映射并不要求元素的原像也是唯一的.

### 单射和满射

设  $f$  是集合  $X$  到集合  $Y$  的一个映射, 若

1. 对任意的  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称  $f$  为单射.

2.  $R_f = Y$ , 则称  $f$  为满射.

3.  $f$  既是单射又是满射, 则称  $f$  为双射 (或一一映射).

注记 2. 单射  $\Leftrightarrow$  原像唯一.

## 2.2 逆映射与复合映射

### 逆映射

如果映射  $f$  是单射, 则对任一  $y \in R_f \subset Y$ , 它的原像  $x \in X$  (即满足方程  $f(x) = y$  的  $x$ ) 是唯一确定的, 于是, 对应关系

$$\begin{aligned} g: R_f &\rightarrow X \\ y &\mapsto x (f(x) = y) \end{aligned}$$

构成了  $R_f$  到  $X$  上的一个映射, 称之为  $f$  的逆映射, 记为  $f^{-1}$ , 其定义域为  $D_{f^{-1}} = R_f$ , 值域为  $R_{f^{-1}} = X$



### 逆映射举例

例 3. 设  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ , 则

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = x + 3$$

既是单射, 又是满射, 存在逆映射

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$x \mapsto y = x - 3$$

### 逆映射举例

例 4. 设  $A = [0, \pi], B = [-1, 1]$ , 则

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = \cos x$$

既是单射, 又是满射, 存在逆映射

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$x \mapsto y = \arccos x$$

### 复合映射

现设有如下两个映射

$$g: X \rightarrow U_1$$

$$x \mapsto u = g(x)$$

和

$$f: U_2 \rightarrow Y$$

$$u \mapsto y = f(u),$$

如果  $R_g \subset U_2 = D_f$ , 那就可以构造出一个新的对应关系

$$f \circ g: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f[g(x)]$$

也是一个映射, 称之为  $f$  和  $g$  的 **复合映射**.

复合映射举例

例 5.

$$\begin{aligned} g: R &\rightarrow R & f: R^+ &\rightarrow R \\ x &\mapsto u = 1 - x^2 & u &\mapsto y = \sqrt{u} \end{aligned}$$

则  $R_g = (-\infty, 1]$ , 它不是  $D_f$  的子集, 因此不能构成复合映射  $f \circ g$ . 但若将  $g$  的定义域缩小, 就有可能构成复合映射. 比如令  $g^*: [-1, 1] \rightarrow R$

$$x \mapsto u = 1 - x^2$$

则可以构成复合映射  $f \circ g^*: [-1, 1] \rightarrow R$

$$x \mapsto y = \sqrt{1 - x^2}$$

## 2.3 函数的概念

函数的定义

定义. 设非空数集  $D \subset \mathbf{R}$ , 则称映射  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  为定义在  $D$  上的**函数**, 简记为

$$y = f(x), x \in D.$$

- $x$  称为**自变量**;
- $y$  称为**因变量**;
- $D$  称为**定义域**;
- 函数值的全体构成的数集  $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$  称为**值域**.

## 函数的两要素

例 6. 研究  $y = x$  和  $y = \frac{x^2}{x}$  是不是相同的函数.

例 7. 研究  $y = x$  和  $y = \sqrt{x^2}$  是不是相同的函数.

注记 3. 两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应法则都相同.

## 自然定义域

对未指明定义域的函数, 通常根据函数表达式确定它的自然定义域. 例如

(1)  $y = \sqrt{x}$  的定义域为  $D = [0, +\infty)$ ,

(2)  $y = \log_a x$  的定义域为  $D = (0, +\infty)$ ,

(3)  $y = \frac{1}{x}$  的定义域为  $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

求函数的自然定义域时有三个基本要求:

(1) 根号里面要求大于等于零;

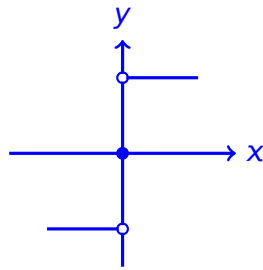
(2) 对数里面要求大于零;

(3) 分母要求不能等于零.

## 几个特殊函数

(1) 符号函数:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$



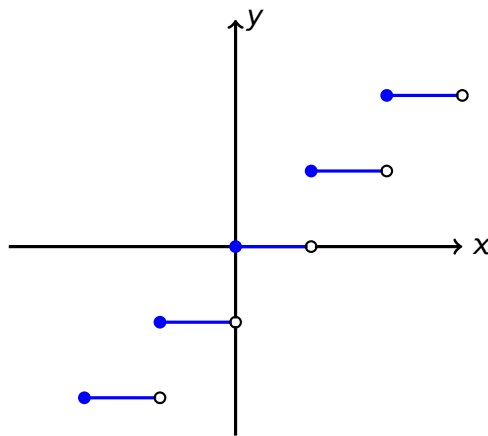
$$x = \operatorname{sgn} x |x|$$

几个特殊函数

(2) 取整函数:  $y = [x]$ , 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数.

显然

$$x - 1 < [x] \leq x$$



几个特殊函数

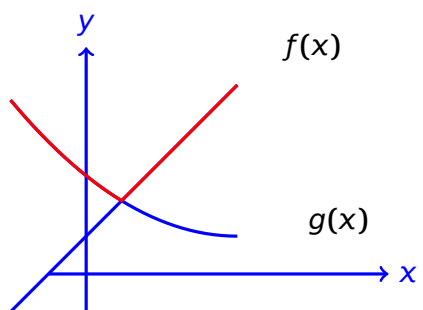
(3) 狄利克雷函数:

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时.} \end{cases}$$

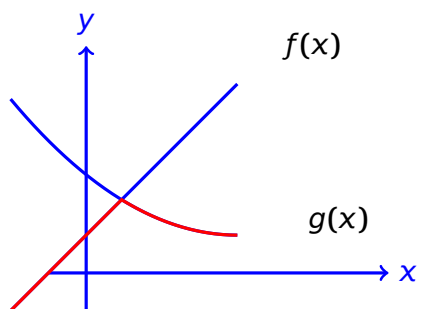
几个特殊函数

(4) 取最值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\}$$



$$y = \min\{f(x), g(x)\}$$



分段函数

如果一个函数在定义域的不同部分用不同的公式来表达, 则称该函数为分段函数.

例子.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0, \\ x^2 - 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

## 2.4 函数的性质

函数的奇偶性

给定函数  $y = f(x)$ , 设其定义域  $D$  关于原点对称,

1. 若  $\forall x \in D$ , 总有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数.
2. 若  $\forall x \in D$ , 总有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数.

例子.  $x, x^3, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, \sin x, \tan x$  为奇函数.

例子.  $x^2, x^4, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^4}, \cos x$  为偶函数.

小注: 奇函数关于原点对称; 偶函数关于  $y$  轴对称.

函数的周期性

设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个不为零的常数  $l$ , 使得对任意的  $x \in D$ , 有  $(x \pm l) \in D$ , 且

$$f(x + l) = f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数;  $l$  称为  $f(x)$  的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例子.  $y = \sin x$  和  $y = \cos x$  以  $2\pi$  为周期.

例子.  $y = \tan x$  和  $y = \cot x$  以  $\pi$  为周期.

### 函数的周期性

例 8. 设函数  $y = f(x), x \in R$  的图形关于直线  $x = a$  与  $x = b (a < b)$  均对称, 证明  $y = f(x)$  是周期函数, 并求周期.

证明. 由条件知:  $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$ , 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a + (x - a)) = f(a - (x - a)) \\ &= f(2a - x) \\ &= f(b - (b + x - 2a)) = f(b + (b + x - 2a)) \\ &= f(x + 2(b - a)) \end{aligned}$$

故  $f(x)$  是周期函数, 且  $2(b - a)$  是它的一个周期.

### 函数的单调性

定义. 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subset D$ ,  $x_1, x_2$  为区间  $I$  上的任意两个数,

(1) 若当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在区间  $I$  上单调增加或递增;

(2) 若当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在区间  $I$  上单调减少或递减;

### 函数的单调性

例子.  $y = x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是单调增加的.

例子.  $y = \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上是单调增加的.

例子.  $y = 1/x$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  上单调减少.

例子.  $y = x^2$  在  $(-\infty, 0]$  上单调减少, 在  $[0, +\infty)$  上单调增加.

## 函数的有界性

定义. 设函数  $y = f(x)$  在数集  $I$  上有定义, 如果存在一个正数  $M$ , 对于所有  $x \in I$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称函数  $f(x)$  是在  $I$  上的有界函数. 若不存在这样的  $M$ , 则称  $f(x)$  是在  $I$  上的无界函数.

例子.  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  是有界函数.

例子.  $y = x^2$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = x \cos x$  是无界函数.

## 2.5 小结 思考题

### 小结

1. 映射的有关概念: 映射、逆映射、复合映射.
2. 函数的有关概念: 函数、定义域、值域.
3. 函数的几种特性: 奇偶性、周期性、单调性、有界性.

### 思考题

思考. 已知  $f(x)$  是一个偶函数, 且满足  $f(a+x) = f(a-x)$ , 则  $f(x)$  是不是一个周期函数? 若是, 请说明它的一个周期, 若不是, 请说明理由.

解. 若  $a \neq 0$  则为周期函数, 且周期为  $2a$ (见例 8); 若  $a = 0$ , 则不一定为周期函数.



### 3 复合函数与反函数 初等函数

#### 3.1 复合函数

复合函数

定义. 设  $f$  和  $g$  为两个函数, 且  $D_f \cap R_g \neq \emptyset$ , 则称定义在

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

上的函数  $f \circ g$  为  $f$  和  $g$  的复合函数, 其中

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

对于复合函数  $f \circ g$ , 称  $x$  为自变量,  $u$  为中间变量,  $y$  为因变量.

例子. 两个函数  $y = \sqrt{u}$  和  $u = 1 - x^2$  的复合函数是  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

复合函数

注记 1. 1. 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例子.  $y = \arcsin u, u = 2 + x^2; y \neq \arcsin(2 + x^2)$ .

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例子.  $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}, y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2}$ .

#### 3.2 反函数

反函数

定义. 设函数  $f: D \rightarrow f(D)$  是单射, 则它存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \rightarrow D,$$

称此映射  $f^{-1}$  为函数  $f$  的 **反函数**.

注记 2. 1. 反函数  $f^{-1}$  由函数  $f$  确定.

2. 函数与反函数的图像关于  $y = x$  对称.

## 反函数

例 1. 求函数  $y = \sqrt{e^x + 1}$  的反函数.

解. 由  $e^x = y^2 - 1$  可得

$$x = \ln(y^2 - 1).$$

又  $y = \sqrt{e^x + 1} > 1$ , 即原函数的值域为  $(1, +\infty)$ , 因此反函数为

$$y = \ln(x^2 - 1),$$

反函数的定义域为:

$$D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$$

## 反函数

定理 (反函数存在定理). 单调函数  $f$  必存在单调的反函数, 且此反函数与  $f$  具有相同的单调性.

## 3.3 函数的运算

### 函数的运算

设函数  $f(x), g(x)$  的定义域分别是  $D_1, D_2$ ,  $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

1. 函数的和 (差):

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D;$$

2. 函数的积:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D;$$

3. 函数的商:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}.$$

函数的运算

例子. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $(-l, l)$ , 证明必定存在  $(-l, l)$  上的偶函数  $g(x)$  及奇函数  $h(x)$  使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

解: 假设存在  $g(x)$  和  $h(x)$  满足条件, 则有

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{cases}$$

易知,  $g(x), h(x)$  满足条件.

### 3.4 初等函数

初等函数

下面这五种函数, 统称为基本初等函数:

1. 幂函数  $y = x^\mu$ ;
2. 指数函数  $y = a^x$ ;
3. 对数函数  $y = \log_a x$ ;
4. 三角函数  $y = \sin x, y = \cos x$ , 等;
5. 反三角函数  $y = \arcsin x, y = \arccos x$ , 等.

由五种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的函数, 称为初等函数.

### 初等函数的分解

练习. 将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1)  $y = (1 + \ln x)^5$  .....  $y = u^5, u = 1 + \ln x$ .

(2)  $y = \sin^2(3x + 1)$  .....  $y = u^2, u = \sin v, v = 3x + 1$ .

## 3.5 小结 思考题

### 小结

1. 复合函数: 复合函数的形成与复合过程的分解.
2. 反函数: 反函数的基本求法.
3. 函数的运算: 简单函数的四则运算.
4. 初等函数: 基本初等函数的复合.

### 思考题

思考. 已知  $f(\tan x) = \sec^2 x + 1$ , 求  $f(x)$ .

解. 易知  $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ , 因此

$$f(\tan x) = (\tan^2 x + 1) + 1,$$

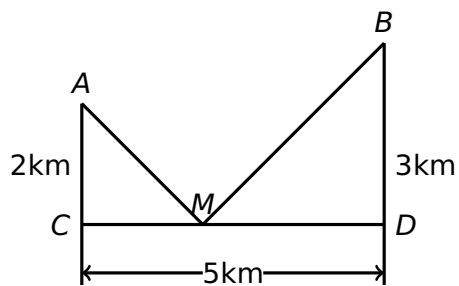
所以

$$f(x) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2.$$

## 4 函数关系的建立

### 函数关系的建立

例 1. 在一条直线公路的一侧有  $A$ 、 $B$  两村, 其位置如图所示, 公共汽车公司欲在公路上建立汽车站  $M$ .  $A$ 、 $B$  两村各修一条直线大道通往汽车站, 设  $CM = x(\text{km})$ , 试把  $A$ 、 $B$  两村通往  $M$  的大道总长  $y(\text{km})$  表示为  $x$  的函数.



### 函数关系的建立

解. 根据题意和图示知

$$CM = x, DM = 5 - x.$$

在直角三角形  $ACM$  中,

$$AM = \sqrt{x^2 + 4},$$

在直角三角形  $BDM$  中,

$$BM = \sqrt{(5-x)^2 + 9}.$$

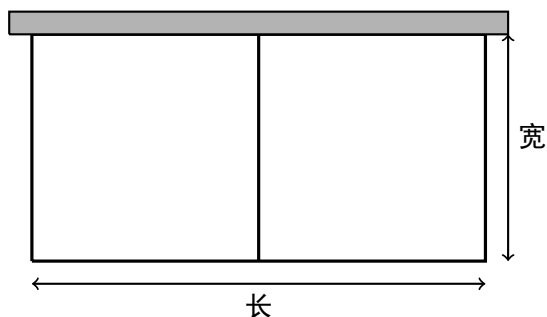
所以

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(5-x)^2 + 9},$$

此函数的定义域为  $D = [0, 5]$ .

函数关系的建立

**例 2.** 如图, 以墙为一边用篱笆围成长方形的场地, 并用平行于宽的篱笆隔开. 已知篱笆总长为 60 米. 把场地面积  $S(m^2)$  表示为场地宽  $x(m)$  的函数, 并指出函数的定义域.



函数关系的建立

解. 设篱笆的宽为  $x$ , 则

$$\text{长} = 60 - 3x$$

因此

$$S = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x,$$

其定义域为  $\{x|0 < x < 20\}$ .

函数关系的建立

**例 3.** 某工厂每年需某种原料  $a$  吨, 拟分若干批购进, 每批进货的费用为  $b$  元. 设该厂使用这种原料是均匀的, 即平均库存量为批量的一半. 每吨原料的库存费用每年为  $c$  元. 试求出一年中库存费用与进货费用之和与进货批量的函数关系.

函数关系的建立

解. 设进货批量为  $x$  吨, 进货费用与库存费用之和为  $p(x)$ . 因年进货量为  $a$ , 故每年进货批数为  $\frac{a}{x}$ , 则进货费用为

$$b \frac{a}{x}.$$

因为使用这种原料是均匀的, 即平均库存为  $\frac{x}{2}$ , 故每年的库存费为  $c \cdot \frac{x}{2}$ , 所以

$$p(x) = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2} \cdot x,$$

其定义域为  $(0, a]$

函数关系的建立

**例 4.** 某人从美国到加拿大去度假, 已知把美元转换成加拿大元时, 币面数值增加 12%, 而把加拿大元转换成美元时, 币面数值减少 12%. 请证明经过这样一来一回的兑换后, 他亏损了多少钱.

## 函数关系的建立

解. 设  $f_1(x)$  为将  $x$  美元兑换成的加拿大元数,  $f_2(x)$  为将  $x$  加拿大元兑成的美元数, 则

$$f_1(x) = x + x \cdot 12\% = 1.12x, x \geq 0$$

$$f_2(x) = x - x \cdot 12\% = 0.88x, x \geq 0$$

$$f_2(f_1(x)) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x$$

故  $f_1(x), f_2(x)$  不互为反函数, 经过一来一回的兑换后,  $x$  美元变成  $0.9856x$  美元, 即发生了亏损.

例如: 1000 美元经过这样的来回兑换, 将亏损 14.4 美元.

## 练习题

(1) 设生产与销售某种商品的总收入函数  $R$  是产量  $x$  的二次函数, 经统计得知当产量分别为 0, 2, 4 时, 总收入  $R$  为 0, 6, 8, 试确定  $R$  关于  $x$  的函数式. (2) 某商店年销售某种产品 800 件, 均匀销售, 分批进货. 若每批订货费为 60 元, 每件每月库存费 0.2 元. 试列出库存费与进货费之和  $P$  与批量  $x$  之间的函数关系.

## 练习题

(3) 某企业对某产品制定如下销售策略: 购买 20 公斤以下 (包括 20 公斤) 部分, 每公斤价 10 元; 购买量小于等于 200 公斤时, 其中超出 20 公斤的部分, 每公斤 7 元; 购买超过 200 公斤的部分, 每公斤价 5 元, 试写出购买量  $x$  公斤的费用函数  $C(x)$ . (4) 某车间设计最大生产能力为每月 100 台机床, 至少要完成 40 台方可保本, 当生产  $x$  台时的总成本函数为  $C(x) = x^2 + 10x$  (百元). 按市场规律, 价格为  $P = 250 - 5x$  ( $x$  为需求量), 可以销售完, 试写出月利润函数.



## 练习题答案

$$(1) R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x; (2) P = 1.2x + \frac{48000}{x}; (3) C(x) = \begin{cases} 10x, 0 \leq x \leq 20 \\ 60 + 7x, 20 < x \leq 200 \\ 5x + 460, x > 200 \end{cases};$$
$$(4) L(x) = 240x - 6x^2 (40 \leq x \leq 100).$$

## 5 经济学中的常用函数

### 5.1 需求函数

#### 需求函数

需求量：某一商品关于一定的价格水平，在一定的时间内，消费者愿意而且有支付能力购买的商品量。

如果价格是决定需求量的最主要因素，可以认为需求量  $Q_d$  是  $P$  的函数，称为需求函数，记作

$$Q_d = Q_d(P).$$

常见需求函数有：

1. 线性函数  $Q_d = -aP + b$ , 其中  $a > 0$ ;
2. 幂函数  $Q_d = kP^{-a}$ , 其中  $k > 0, a > 0$ ;
3. 指数函数  $Q_d = ae^{-bp}$ , 其中  $a, b > 0$ .

#### 需求函数

例 1. 设某商品的需求函数为

$$Q = -aP + b \quad (a, b > 0)$$

讨论  $P = 0$  时的需求量和  $Q = 0$  时的价格.

解.  $P = 0$  时  $Q = b$ , 它表示价格为零时的需求量为  $b$ , 称为饱和需求量;  $Q = 0$  时  $P = \frac{b}{a}$ , 它表示价格为  $\frac{b}{a}$  时无人愿意购买此商品.

## 5.2 供给函数

供给函数

供给量: 在一定的价格条件下, 在一定时期内生产者愿意并可供出售的商品量. 如果价格是决定供给量的最主要因素, 可以认为供给量  $Q_s$  是  $P$  的函数, 称为供给函数, 记作

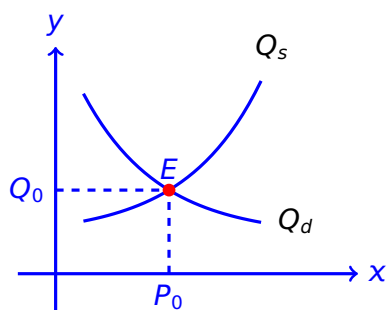
$$Q_s = Q_s(P).$$

常见供给函数有:

1. 线性函数  $Q_s = aP + b$ , 其中  $a > 0$ ;
2. 幂函数  $Q_s = kP^a$ , 其中  $k > 0, a > 0$ ;
3. 指数函数  $Q_s = ae^{bP}$ , 其中  $a, b > 0$ .

供需平衡点

在同一个坐标系中作出需求函数  $Q_d$  和供给函数  $Q_s$ , 两条曲线的交点称为供需平衡点 ( $E$ ), 该点的横坐标称为均衡价格 ( $P_0$ ), 该点的纵坐标称为均衡数量 ( $Q_0$ ).



当  $P \neq P_0$  时, 市场力量会推动  $P$  趋向  $P_0$ . 寻求  $P_0$  是金融经济学的主要问题之一.

供需平衡点

例 2. 考虑下列线性需求函数和供给函数:

$$D(P) = a - bP, \quad b > 0; \quad S(P) = c + eP, \quad e > 0$$

试问  $a, c$  满足什么条件时, 存在正的均衡价格 (即  $P_e > 0$ )?

解. 由  $D(P) = S(P)$  得:  $a - bP = c + eP$ , 由此可得均衡价格为

$$P_e = \frac{a - c}{b + e}.$$

因此  $P_e > 0$  的必要充分条件是  $a > c$ .

### 5.3 总成本函数、总收益函数、总利润函数

总成本函数

总成本: 生产和经营一定数量产品所需要的总投入.

在不计市场的其他次要影响因素的情况下, 它可以简单地看成是产量  $Q$  的函数, 称为总成本函数, 记为  $C(Q)$ .

通常总成本由固定成本和可变成本两部分组成.

$$C(Q) = C_{\text{固定}}(Q) + C_{\text{可变}}(Q).$$

称

$$\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_{\text{固定}}(Q)}{Q} + \frac{C_{\text{可变}}(Q)}{Q},$$

为平均成本.

总成本函数

例 3. 已知某种产品的总成本函数为  $C(Q) = 1000 + \frac{Q^2}{8}$  求当生产 100 个该产品时的总成本 and 平均成本.

解. 由题意, 产量为 100 时的总成本为

$$C(100) = 1000 + \frac{100^2}{8} = 2250$$

$$\text{所以平均成本为 } \bar{C}(100) = \frac{2250}{100} = 22.5$$

总收益函数

总收益: 出售一定数量产品所得到的全部收入, 它可以简单地看成是销量  $Q$  的函数, 称为总收益函数, 记为  $R(Q)$ . 称  $\bar{R}(Q) = \frac{R(Q)}{Q}$  为平均收益. 如果产品价格  $P$  保持不变, 则

$$R(Q) = PQ, \bar{R} = P.$$

总收益函数

例 4. 设某商品的需求关系是  $3Q + 4P = 100$ , 求总收益和平均收益.

解. 由条件知, 价格函数为

$$P = \frac{100 - 3Q}{4},$$

所以总收益为

$$R(Q) = P \cdot Q = \frac{100Q - 3Q^2}{4},$$

平均收益为

$$\bar{R}(Q) = P(Q) = \frac{100 - 3Q}{4}.$$

总利润函数

总利润: 总收益减去总成本和上缴税金后的余额 (为简单起见, 一般不计上缴税金).

在不计市场的其他次要影响因素的情况下, 它可以简单地看  $Q$  的函数, 称为总利润函数, 记为

$$L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

称  $\bar{L}(Q) = \frac{L(Q)}{Q}$  为平均利润.

总利润函数

例 5. 设某种商品的总成本为  $C(Q) = 20 + 2Q + 0.5Q^2$  若每售出一件该商品的收入是 20 万元, 求生产 10 件的总利润.

解. 由题意知  $P = 20$  (万元), 总收益为  $R(Q) = P \cdot Q = 20Q$ . 所以

$$\begin{aligned} L(Q) &= R(Q) - C(Q) \\ &= 20Q - (20 + 2Q + 0.5Q^2) \\ &= -20 + 18Q - 0.5Q^2 \end{aligned}$$

因此  $L(10) = (-20 + 18 \times 10 - 0.5 \times 10^2) = 110$  (万元)

## 5.4 库存函数

### 库存函数

设某企业在计划期  $T$  内, 对某种物品总需求量为  $Q$ , 由于库存费用及资金占用等因素, 显然一次进货是不划算的, 考虑均匀的分  $n$  次进货, 每次进货批量为  $q = \frac{Q}{n}$ , 进货周期为  $t = \frac{T}{n}$ . 假定每件物品的贮存单位时间费用为  $C_1$ , 每次进货费用为  $C_2$ , 每次进货量相同, 进货间隔时间不变, 以匀速消耗贮存物品, 则平均库存为  $\frac{q}{2}$ , 在时间  $T$  内的总费用  $E$  为

$$E = \frac{1}{2}C_1Tq + C_2\frac{Q}{q}$$

其中  $\frac{1}{2}C_1Tq$  是贮存费,  $C_2\frac{Q}{q}$  是进货费用.

### 习题

1. 设需求函数由  $P+Q=1$  给出, (1) 求总收益函数  $P$ ; (2) 若售出  $1/3$  单位, 求其总收益.
2. 某工厂对棉花的需求函数由  $PQ^{1.4}=0.11$  给出, (1) 求其总收益函数  $R$ ; (2)  $P(12), R(10), R(12), R(15), P(15), P(20)$ .
3. 若工厂生产某种商品, 固定成本 200,000 元, 每生产一单位产品, 成本增加 1000 元, 求总成本函数.

### 习题

4. 某厂生产一批元器件, 设计能力为日产 100 件, 每日的固定成本为 150 元, 每件的可变成本为 10 元, (1) 试求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数; (2) 若每件售价 14 元, 试写出总收入函数; (3) 试写出总利润函数.
5. 某产品之需求函数为  $Q_d = 20 - 3P$ , 供给函数为  $Q_s = 5P - 1$ , 求该商品的均衡价格.

习题答案

$$1. R = Q - Q^2, R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9}.$$

$$2. R = 0.11Q^{-0.4}, P(15) = 0.0025, P(12) = 0.0034, P(20) = 0.0017, R(10) = 0.044, R(12) = 0.041, \\ R(15) = 0.037$$

$$3. C = C(Q) = 200000 + 1000Q$$

$$4. (1) C(X) = 150 + 10X(\text{元}) (0 < X \leq 100)$$

$$\bar{C}(X) = \frac{150}{X} + 10 (0 < X \leq 100)$$

$$(2) R(X) = 14X(\text{元}) (0 < X \leq 100)$$

$$(3) L(X) = -150 + 4X(\text{元}) (0 < X \leq 100)$$

习题答案

$$5. R = \begin{cases} 250x, 0 \leq x \leq 600 \\ 250 \times 600 + (250 - 20)(x - 600), 600 < x \leq 800 \\ 250 \times 600 + 230 \times 200, x > 800 \end{cases}$$