概率论与数理统计

第四章·随机变量的数字特征

2021 年 2 月 24 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

离散型随机变量的期望

概念引入：某服装公司生产两种套装，一种是大众装，每件价格200元，每月生产 1 万件；另一种是高档装，每件1800元，每月生产100件。现在问该公司生产的套装平均价格是多少？

离散型随机变量的期望

概念引入：某服装公司生产两种套装，一种是大众装，每件价格200元，每月生产 1 万件；另一种是高档装，每件1800元，每月生产100件。现在问该公司生产的套装平均价格是多少？

……………………………………………216

定义 1 设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots .$$

若级数

$$\sum_k x_k p_k$$

绝对收敛，则称其和为随机变量X的**数学期望**，记为$E(X)$。

离散型随机变量的期望

两点分布	$X \sim B(1, p)$	$E(X) = p$
二项分布	$X \sim B(n, p)$	$E(X) = np$
泊松分布	$X \sim P(\lambda)$	$E(X) = \lambda$

例 2　某种产品次品率为0.1。检验员每天检验 4 次，每次随机抽取10件产品进行检验，如发现次品数大于 1，就调整设备。若各件产品是否为次品是相互独立的，求一天中调整设备次数的期望。

彩票派奖问题

例子　美国波士顿的“Cash WinFall”彩票，每注价格为 2 美元，从 1 – 46 中选择 6 个不重复号码。在连续多期无人中头奖时的派奖规则如下：

- 2个号码和开奖号码相同，奖金2美元。
- 3个号码和开奖号码相同，奖金50美元。
- 4个号码和开奖号码相同，奖金1500美元。
- 5个号码和开奖号码相同，奖金40000美元。
- 6个号码和开奖号码相同，奖金200万美元。

求购买每注彩票所得奖金X的数学期望$E(X)$。

彩票号码与开奖号码相同的个数为k的概率等于

$$p_k = \frac{C_6^k C_{40}^{6-k}}{C_{46}^6}, \quad k = 0, 1, \cdots, 6.$$

彩票号码与开奖号码相同的个数为k的概率等于

$$p_k = \frac{C_6^k C_{40}^{6-k}}{C_{46}^6}, \quad k = 0, 1, \cdots, 6.$$

k	X	P
0 or 1	0	0.831
2	2	0.146
3	50	0.0211
4	1500	0.001249
5	40000	0.00002562
6	2000000	0.0000001068

k	X	P
0 or 1	0	0.831
2	2	0.146
3	50	0.0211
4	1500	0.001249
5	40000	0.00002562
6	2000000	0.000001068

k	X	P
0 or 1	0	0.831
2	2	0.146
3	50	0.0211
4	1500	0.001249
5	40000	0.00002562
6	2000000	0.0000001068

每注彩票所得奖金X的数学期望

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 2p_2 + 50p_3 + 1500p_4 + 40000p_5 + 2000000p_6 \\
&= 0.292 + 1.055 + 1.8735 + 1.0248 + 0.2134 \\
&= 4.4587.
\end{aligned}
$$

连续型随机变量的期望

定义 3　设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛，则称此积分为随机变量X的数学期望，记为$E(X)$。

例 4　设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\qquad x\in\mathbb{R},$$

求X的数学期望$E(X)$。

解:　因为$xf(x)$是奇函数，所以$E(X)=0$.

连续型随机变量的期望

均匀分布	$X \sim U[a,b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$
指数分布	$X \sim EP(\lambda)$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$
正态分布	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$E(X) = \mu$

二维随机变量的数学期望

对二维随机变量(X, Y), 定义它们的数学期望为

$$E(X, Y) = (E(X), E(Y))$$

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P(X = x, Y = y) = p_{ij}, \ \ i, j = 1, 2, \ldots,$$

则

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_{i\cdot} = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} x_i p_{ij},$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{+\infty} y_j p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} y_j p_{ij}.$$

二维随机变量的数学期望

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$, 则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

随机变量函数的数学期望

问题：设随机变量X的分布已知，在实际问题中有时需要计算的量并非X的期望，而是X的某个函数$Y = g(X)$的期望。如何根据 X的分布计算$E(Y)$？

随机变量函数的数学期望

问题：设随机变量X的分布已知，在实际问题中有时需要计算的量并非X的期望，而是X的某个函数$Y = g(X)$的期望。如何根据 X的分布计算$E(Y)$？

直观思路：根据X的分布算出Y的分布，然后利用定义计算$E(Y)$。但求Y的分布的计算一般很麻烦。

定理 设X为随机变量，$Y=g(X)$，则

1. 若X为离散型随机变量，分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\qquad k=1,2,\cdots.$$

则

$$E(Y)=\sum_k g(x_k)p_k.$$

定理　设X为随机变量，$Y = g(X)$，则

1. 若X为离散型随机变量，分布律为
$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots .$$
则
$$E(Y) = \sum_k g(x_k) p_k.$$

2. 若X为连续型随机变量，概率密度为$f(x)$，则
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 5　设随机变量X的概率分布为

X	1	2	3
P	0.2	0.1	0.7

求随机变量函数$Y=X^2$的期望。

例 5　设随机变量X的概率分布为

X	1	2	3
P	0.2	0.1	0.7

求随机变量函数$Y = X^2$的期望。

例 6　设随机变量X在区间$[0, \pi]$上服从均匀分布，求随机变量函数$Y = \sin X$的数学期望。

例 7　设随机变量$X \sim N(0,1)$，求$E(X^2)$。

随机向量函数的数学期望

定理 设(X,Y)为随机向量，$Z=g(X,Y)$，则

1. 若(X,Y)为离散型随机向量，概率分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

则

$$E(Z)=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

定理 设(X,Y)为随机向量，$Z=g(X,Y)$，则

1. 若(X,Y)为离散型随机向量，概率分布为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots.$$

则

$$E(Z)=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

2. 若(X,Y)为连续型随机向量，概率密度为$f(x,y)$，则

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

数学期望的性质

设$X, X_1, X_2, \cdots, X_n$为随机变量，c, k为常数，则有

1. $E(c) = c$；
2. $E(kX) = kE(X)$；
3. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$；

数学期望的性质

设$X, X_1, X_2, \cdots, X_n$为随机变量，c, k为常数，则有

1. $E(c) = c$；
2. $E(kX) = kE(X)$；
3. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$；

推论：$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$。

数学期望的性质

4 若X_1, X_2相互独立，则有

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2).$$

数学期望的性质

4 若X_1, X_2相互独立，则有

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2).$$

推论：若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则有

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

4 若X_1, X_2相互独立，则有

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2).$$

推论：若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则有

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

注：如果没有相互独立这一条件，上式一般不成立！

例子 设在某试验中事件A的概率为p，将该试验独立地进行n次。记X为n次试验中事件A发生的总次数，X_i为第i次试验中事件A发生的次数，则

$X \sim B(n,p)$， $X_i \sim B(1,p), i = 1, 2, \cdots, n$，且

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

故

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np.$$

例 8　将n个球放入M个盒子中，设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数X的期望。

例 8　将n个球放入M个盒子中，设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数X的期望。

解:　令$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个盒子中有球;} \\ 0, & \text{第}i\text{个盒子中无球。} \end{cases}$

例 8　将n个球放入M个盒子中，设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数X的期望。

解:　令$X_i = \begin{cases} 1, & 第i个盒子中有球; \\ 0, & 第i个盒子中无球。\end{cases}$ 则有$X = X_1 + \cdots + X_M$。

例 8 将n个球放入M个盒子中，设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数X的期望。

解: 令$X_i = \begin{cases} 1, & 第i个盒子中有球; \\ 0, & 第i个盒子中无球。\end{cases}$ 则有$X = X_1 + \cdots + X_M$。于是$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_M)$。

例 8　将n个球放入M个盒子中，设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数X的期望。

解:　令$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个盒子中有球；} \\ 0, & \text{第}i\text{个盒子中无球。} \end{cases}$ 则有$X = X_1 + \cdots + X_M$。于是$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_M)$。

$$P\{X_i = 0\} = \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n,$$

$$P\{X_i = 1\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n,$$

例 8　将n个球放入M个盒子中，设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数X的期望。

解：令$X_i = \begin{cases} 1, & 第i个盒子中有球; \\ 0, & 第i个盒子中无球。\end{cases}$ 则有$X = X_1 + \cdots + X_M$。于是$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_M)$。

$$P\{X_i = 0\} = \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n,$$

$$P\{X_i = 1\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n,$$

从而$E(X) = M \cdot E(X_i) = M\left[1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^n\right]$。

方差的概念

在实际问题中，仅靠期望值不能完善地说明随机变量的分布特征。我们常常需要知道分布相对于期望值的离散程度。

方差的概念

在实际问题中，仅靠期望值不能完善地说明随机变量的分布特征。我们常常需要知道分布相对于期望值的离散程度。

定义 9　设 X是一随机变量，若$[X-E(X)]^2$的期望存在，则称该期望为X的方差(Variance)，记为 $Var(X)$（或$D(X)$），即

$$\mathrm{Var}(X) := E[X-E(X)]^2.$$

称$\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$为X的标准差(Standard deviation)，记为$\sigma(X)$。

方差

方差刻划了随机变量的取值相对于其数学期望的偏离程度。

1. 若X 的取值比较分散，则方差较大；
2. 若X 的取值比较集中，则方差较小；

特别地，$\mathrm{Var}(X)=0$当且仅当X取某个常数的概率为1。

方差的常用计算公式： $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

方差的性质

设X、Y为随机变量，a、b、c为常数，则有

1. $\mathrm{Var}(c) = 0$

方差的性质

设X、Y为随机变量，a、b、c为常数，则有

1. $\operatorname{Var}(c) = 0$
2. $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$

方差的性质

设X、Y为随机变量，a、b、c为常数，则有

1. $\mathrm{Var}(c) = 0$
2. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
3. $$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

   特别地，若X和Y相互独立，则有

   $$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

方差的性质

设X、Y为随机变量，a、b、c为常数，则有

1. $\mathrm{Var}(c) = 0$
2. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$
3. $$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \\ \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$
   特别地，若X和Y相互独立，则有
   $$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$
4. $\mathrm{Var}(X) = 0$的充要条件是X以概率1取常数c, 即
   $$P\{X = c\} = 1.$$

方差的性质

设X、Y为随机变量，a、b、c为常数，则有

1. $\mathrm{Var}(c) = 0$
2. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
3. $$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)\\ \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}\end{aligned}$$

   特别地，若X和Y相互独立，则有

   $$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$
4. $\mathrm{Var}(X) = 0$的充要条件是X以概率1取常数c，即

   $$P\{X = c\} = 1.$$

方差的性质

例 10　连续掷两次骰子，用随机变量X表示两次的点数之和，求$\mathrm{Var}(X)$.

例 11　设随机变量X 的期望和方差分别为$E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$，且 $\mathrm{Var}(X) > 0$，求

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

的期望和方差。

例 11 设随机变量X 的期望和方差分别为$E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$，且 $\mathrm{Var}(X) > 0$，求

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

的期望和方差。

通常将$X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$称为$X$的标准化的随机变量。

常用随机变量的方差

随机变量	X	$E(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
两点分布	$B(1,p)$	p	$p(1-p)$
二项分布	$B(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$P(\lambda)$	λ	λ
均匀分布	$U[a,b]$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$EP(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

常用随机变量的方差

例 12　一台设备由三个部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率分别为 $0.01, 0.02, 0.03$。设各部件的状态相互独立，用X 表示同时需要调整的部件数，求 X 的期望和方差。

例 12　一台设备由三个部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率分别为 $0.01, 0.02, 0.03$。设各部件的状态相互独立，用X 表示同时需要调整的部件数，求 X 的期望和方差。

解:　$X = X_1 + X_2 + X_3$，其中$X_i \sim B(1, p_i)$，求得$E(X) = 0.06$，$\mathrm{Var}(X) = 0.0586$。

切比雪夫不等式

定理 设随机变量X有期望和方差，则对于任给的$\varepsilon > 0$，有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2},$$

即

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

协方差

对于二维随机向量 (X, Y)，除了其分量 X 和Y 的期望与方差外，还有一些数字特征，用以刻画X 与Y 之间的相关程度，其中最主要的就是下面要讨论的协方差和相关系数。

协方差

定义 13 定义：对于二维随机向量(X, Y)，称

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

为X与Y的协方差(Covariance)。

定义 13　定义：对于二维随机向量(X, Y)，称

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

为X与Y的协方差(Covariance)。

由定义直接可得：任意随机变量与其自身的协方差就是该随机变量的方差，即

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X).$$

协方差的性质

设X, Y, Z为随机变量，a, b, c, d为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$;

协方差的性质

设X, Y, Z为随机变量，a, b, c, d为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$；

协方差的性质

设X, Y, Z为随机变量，a, b, c, d为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$；
3. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$；

协方差的性质

设X, Y, Z为随机变量，a, b, c, d为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$；
3. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$；
4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$；

设X, Y, Z为随机变量，a, b, c, d为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$；
3. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$；
4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$；
5. $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$。

协方差的性质

设X, Y, Z为随机变量，a, b, c, d为常数，则有

1. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$；
2. $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\text{Cov}(X, Y)$；
3. $\text{Cov}(X, Y + Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z)$；
4. $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$；
5. $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\,\text{Cov}(X, Y)$。

协方差的性质

设X, Y, Z为随机变量，a, b, c, d为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$;
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$;
3. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$;
4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$;
5. $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$。

推论　两随机变量相互独立，则协方差等于零；反之未必成立。

协方差的性质

性质 $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

协方差的性质

性质 $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

证明.

等式右边各项为

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 2E(XY) - 2E(X) \cdot E(Y)$$

协方差的性质

性质 $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

证明.

等式右边各项为

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$
$$2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 2E(XY) - 2E(X) \cdot E(Y)$$

而等式左边为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(X + Y) = E[(X + Y)^2] - E(X + Y)^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2
\end{aligned}$$

比较等式两边可知等式成立。

练习 1 假设二维随机变量(X, Y)的联合分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

求$\mathrm{Cov}(X, Y)$。

练习 1 假设二维随机变量(X,Y)的联合分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

求$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$。

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot 1 = 0,$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3},$$

$$\mathrm{Cov}(X-Y,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) - \mathrm{Var}(Y) = -\frac{2}{3}.$$

定义 对于二维随机变量(X,Y)，如果两个变量的方差都不为零，称

$$\rho_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

为X与Y的相关系数(Correlation)，也可以记为$\rho(X,Y)$。

令

$$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}},\ Y^* = \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}},$$

称X^*, Y^*分别为X，Y的标准化随机变量，易知

$$E(X^*)=0,\ \mathrm{Var}\,X^*=1,\ E(Y^*)=0,\ \mathrm{Var}\,Y^*=1,$$

$$\rho_{X,Y}=\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)=E(X^*Y^*)$$

性质　相关系数表示随机变量之间的线性相关程度：

1. $|\rho_{X,Y}| \le 1$。
2. $|\rho_{X,Y}| = 1$ 当且仅当 $P\{Y = aX + b\} = 1$.

性质　相互独立 $\Longrightarrow$ 不相关；反之未必成立。

X \ Y	1	2	3	4
4	a	0	0	a
3	0	a	a	0
2	0	a	a	0
1	a	0	0	a

$\rho = 0$

X \ Y	1	2	3	4
4	0	0	0	c
3	0	c	0	0
2	0	0	c	0
1	c	0	0	0

$\rho = 0.8$

X \ Y	1	2	3	4
4	0	0	0	c
3	0	0	c	0
2	0	c	0	0
1	c	0	0	0

$\rho = 1$

X \ Y	1	2	3	4
4	c	0	0	0
3	0	0	c	0
2	0	c	0	0
1	0	0	0	c

$\rho = -0.8$

X \ Y	1	2	3	4
4	c	0	0	0
3	0	c	0	0
2	0	0	c	0
1	0	0	0	c

$\rho = -1$

例 14 设(X, Y)服从 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的均匀分布，即概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

求$\rho_{X,Y}$。

例 14 设(X,Y)服从 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$ 上的均匀分布，即概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

求$\rho_{X,Y}$。

注记 在这个例子中，X和Y不相关，但是两者不是相互独立的。

相关系数

由协方差的性质及相关系数与协方差的关系可得:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(X \pm Y)\\ =&\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y) \pm 2\rho_{X,Y}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}.\end{aligned}$$

相关系数

由协方差的性质及相关系数与协方差的关系可得：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(X \pm Y)\\ =&\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2\rho_{X,Y}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}.\end{aligned}$$

例 15　已知随机变量X和Y的方差分别为1和4，相关系数为-0.5，求$\mathrm{Var}(X+Y)$和$\mathrm{Var}(X-Y)$。

例 16 (投资风险组合)　设有1百万用于投资甲、乙两种证券：若将资金t投资于甲证券，将资金$1-t$投资于乙证券，则称$(t, 1-t)$为一个投资组合。

例 16 (投资风险组合)　设有1百万用于投资甲、乙两种证券：若将资金t投资于甲证券，将资金$1-t$投资于乙证券，则称$(t, 1-t)$为一个投资组合。

用随机变量X和Y分别表示投资甲、乙证券的收益率。已知X和Y的期望（代表平均收益）分别为μ_1和μ_2，方差（代表风险）分别为σ_1^2和σ_2^2，相关系数为ρ。

例 16 (投资风险组合) 设有1百万用于投资甲、乙两种证券：若将资金t投资于甲证券，将资金$1-t$投资于乙证券，则称$(t, 1-t)$为一个投资组合。

用随机变量X和Y分别表示投资甲、乙证券的收益率。已知X和Y的期望（代表平均收益）分别为μ_1和μ_2，方差（代表风险）分别为σ_1^2和σ_2^2，相关系数为ρ。

1. 求投资组合的平均收益和风险。
2. 求投资风险最小的投资组合。

例 16 (投资风险组合) 设有1百万用于投资甲、乙两种证券：若将资金t投资于甲证券，将资金$1-t$投资于乙证券，则称$(t, 1-t)$为一个投资组合。

用随机变量X和Y分别表示投资甲、乙证券的收益率。已知X和Y的期望（代表平均收益）分别为μ_1和μ_2，方差（代表风险）分别为σ_1^2和σ_2^2，相关系数为ρ。

1. 求投资组合的平均收益和风险。
2. 求投资风险最小的投资组合。

在第二问中假设$\sigma_1^2 = 0.25$、$\sigma_2^2 = 0.49$、$\rho = 0.6$。

投资组合的收益$Z = tX + (1-t)Y$，则平均收益为

$$E(Z) = t\mu_1 + (1-t)\mu_2,$$

投资风险为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(tX + (1-t)Y) \\ &= t^2\,\mathrm{Var}(X) + (1-t)^2\,\mathrm{Var}(Y) + 2t(1-t)\,\mathrm{Cov}(X,Y) \\ &= t^2\sigma_1^2 + (1-t)^2\sigma_2^2 + 2t(1-t)\rho\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

当$t = 87.5\%$时，函数有最小值，此时风险最小。

矩与中心矩

定义：对随机变量X与正整数k，

1. 称$E(X^k)$为X的k阶原点矩，
2. 称$E[(X-EX)^k]$为X的k阶中心矩。

例：

1. 期望$E(X)$为X的一阶原点矩，
2. 方差$\mathrm{Var}(X)$为X的二阶中心矩。

定义：对二维随机向量(X,Y)，称矩阵

$$B=\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X,X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \mathrm{Cov}(Y,Y) \end{pmatrix}$$

为(X,Y)的协方差矩阵。

例：设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$(X,Y)$的协方差矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

协方差矩阵

定义：设$\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$n$维随机向量，称矩阵

$$B=\big(\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\big)_{n\times n}$$

为$\vec{X}$的协方差矩阵。

性质：协方差阵为对称的半正定矩阵。

二维正态分布

定义 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\rho\cdot\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$都是常数，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty,-1<\rho<1$, 我们称$(X,Y)$服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,$
二维正态分布，记为:

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

可以证明：参数μ_1, μ_2是随机变量X和Y的数学期望，参数σ_1, σ_2分别是它们的标准差，ρ是它们的相关系数。

证明.

首先计算随机变量X的边缘概率密度：

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(x,y)} \mathrm{d}y$$

其中

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{\rho\,(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right] \\ &= \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \frac{\rho\,(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]^2 \end{aligned}$$

二维正态分布

置换积分变量 $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]=t$ 得到

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

由对称性得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{\frac{-(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

故二维正态分布的两个边缘分布都是正态分布，且有

$\mu_1=E(X),\mu_2=E(Y),\sigma_1=\sqrt{Var(X)},\sigma_2=\sqrt{Var(Y)}.$

可以证明,参数 ρ 是随机变量X与 Y的数学期望

$$\rho_{XY} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} e^{-u(x,y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为二次积分，得

$$\rho_{XY} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2}} I(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\frac{\rho\left(x-\mu_1\right)}{\sigma_1}\right]^2} \mathrm{d}y$$

二维正态分布

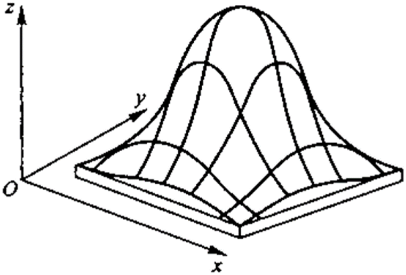
设 $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{y-\mu^2}{\sigma_2}-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]=t$, 则得

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[t\sqrt{1-\rho^2}+\frac{\rho\,(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sigma_2\left(1-\rho^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\rho\sigma_2\,(x-\mu_1)}{\sigma_1}\sqrt{1-\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\rho\sigma_2\,(x-\mu_1)}{\sigma_1}\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\rho_{XY}=\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{d}x
$$

设 $\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} = t$, 则得 $\rho_{XY} = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \rho$

二维正态分布曲面图所示



当相关系数 $\rho = 0$ 时

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]_1^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} = f_X(x) f_Y(y)$$

注记　对于二维正态随机向量(X,Y)，X与Y相互独立的充分必要条件是$\rho_{X,Y} = 0$。

n元正态分布*

定义：以以下函数为密度的分布称为n元正态分布，简记为$N(\vec{\mu}, B$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T B^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right\},$$

其中B为n阶正定矩阵，

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

n元正态分布的性质：若$\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, B)$，则

- $\vec{X}$的各分量的边缘分布为

$$X_i \sim N(\mu_i, b_{ii}),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

  其中b_{ii}为B的第i行第i列的元素；

- $\vec{X}$的协方差矩阵为B。