11 无穷级数

无穷级数

定义 1. 给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中第n项称为级数的通项。

级数的敛散性

级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的前n项的和$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$称为第$n$次部分和，各个部分和$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$构成一个数列。

- 如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
  - 此时称S为级数的和，
  - 称$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$为级数的余项；
- 如果 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

特殊级数的敛散性

- 调和级数：$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .... 发散
- p-级数：$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p > 0)$ .... $0 < p \leq 1$发散，$p > 1$收敛
- 几何级数：$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ .... $|q| < 1$收敛, $|q| \geq 1$发散

级数的性质

性质 1. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

性质 2. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

推论. 级数的每一项同乘以不为0的常数后，其敛散性不变。

性质 3. 在一个级数前面加上（或者去掉）有限项，级数的敛散性不变。

性质 4 (收敛级数的结合律). 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和。

> 发散级数加括号后，可能发散也可能收敛。

收敛的必要条件

定理 1. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

. . . .

注记 1. 若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于1，因此它发散.

. . . .

注记 2. 若通项趋于零，则级数未必收敛.

例 2. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$的通项趋于0，但是它发散。

定义 2. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$满足条件$u_n \geq 0$（对所有$n$），则称它为正项级数。

性质. 正项级数的部分和数列$\{S_n\}$是单调递增数列。

定理 2. 正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界。

注记. 正项级数加括号后，其敛散性不变。

定理 3 (比较判别法)**.** 对于两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，若有$c > 0$使得$u_n \leq c v_n$，对所有$n$，则有

1. 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；
2. 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

定理 4 (比较判别法的极限形式)**.** 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都为正项级数，且有$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$。

1. 若$0 < l < +\infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$同敛散；
2. 若$l = 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；
3. 若$l = +\infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也发散。

定理 5 (比值判别法)**.** 如果正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$满足$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则有

1. 若$l < 1$，则级数收敛；
2. 若$l > 1$，则级数发散；
3. 若$l = 1$，则级数可能收敛也可能发散。

交错级数

定义 3. 正负项相间的级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$，其中每个$u_n > 0$，称为交错级数。

交错级数

定理 6 (莱布尼兹定理)**.** 如果交错级数满足条件

1. $u_{n+1} \le u_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$；
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；

则级数收敛，且其和$S \le u_1$，余项满足$|R_n| \le u_{n+1}$。

例 3. 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛。

任意项级数

定理 7. 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛。

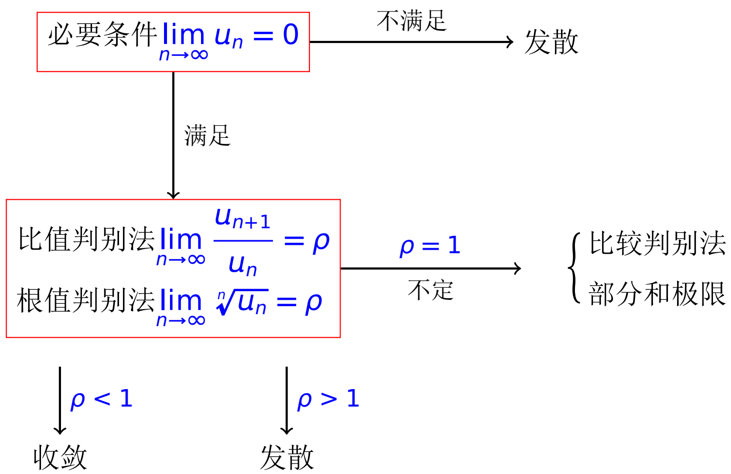
定义 4. 对任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，

1. 称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；
2. 称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 都收敛。

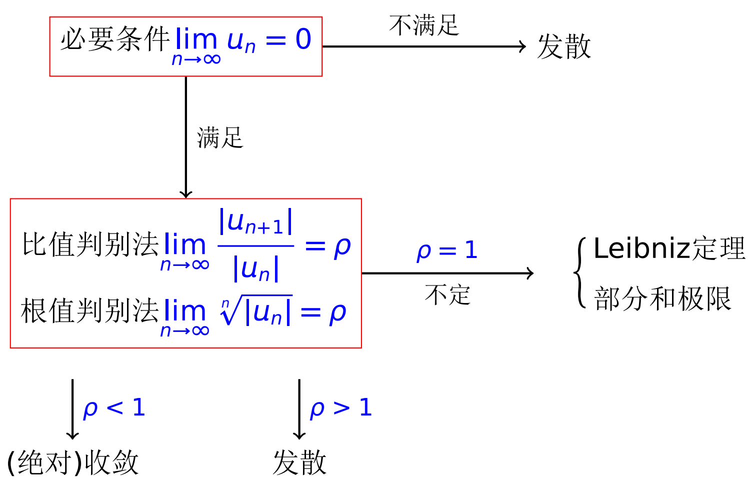
定理 8. 对于任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$，则有

1. 当$l < 1$时级数绝对收敛；
2. 当$l > 1$时级数发散。

正项级数审敛法



一般级数审敛法



幂级数收敛域的求法**(重要)**

- 标准形式幂级数 ($\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n \neq 0$)

  1. 先求幂级数的收敛半径R, 记$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$,则
     - $\rho \neq 0, \rho \neq +\infty \Longrightarrow R = \frac{1}{\rho}$
     - $\rho = 0 \Longrightarrow R = +\infty$
     - $\rho = \infty \Longrightarrow R = 0$
  2. 再讨论在$x = \pm R$处的敛散性

- 非标准形式幂级数
  - 通过换元转化为标准形式
  - 直接用比值法或者根值法

幂级数的性质

性质 5. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛域上连续。

性质 6. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛域上可积，且有逐项积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\end{aligned}$$

逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

性质 7. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间$(-R, R)$上可导，且有逐项求导公式

$$\begin{aligned}S'(x) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n x^n\big)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\end{aligned}$$

逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

幂级数和函数的求法**(重要)**

- 初等变换法：分解和式并套用公式
- 映射变换法：逐项求导或逐项积分

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} \arrow[r, "\text{逐项求导或积分}"] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n} \arrow[d, "\text{求和}"] \\
\boxed{S(x)} & \boxed{S^*(x)} \arrow[l, "\text{对和式积分或求导}"']
\end{tikzcd}
$$

常数项级数和的求法

- 直接求和：求出级数的部分和，再求极限
- 间接求和：转换为求幂级数和，再代入值

定理 9 (泰勒公式)**.** 如果函数$f(x)$在包含x_0的区间(a,b)内有直到$n+1$阶的连续导数，则当$x\in(a,b)$时，$f(x)$可按$x-x_0$的方幂展开为

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\
+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),
\end{aligned}
$$

其中余项$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$介于$x_0$和$x$之间。

如果$f(x)$在区间(a,b)内各阶导数都存在，而且当$n\to\infty$时$R_n\to 0$，则得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

该级数称为函数$f(x)$的泰勒级数。 特别地，当$x_0=0$时，上式变成

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

该级数称为函数$f(x)$的麦克劳林级数。

常用函数的泰勒级数

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\cdots \\
(1+x)^\alpha &= 1+C_\alpha^1x+C_\alpha^2x^2+C_\alpha^3x^3+\cdots+C_\alpha^nx^n+\cdots \\
(1+x)^{-1} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots \\
(1-x)^{-1} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots
\end{aligned}$$

函数展开为幂级数的方法**(重要)**

直接展开法 利用泰勒公式计算系数，并研究余项

间接展开法 利用已知的函数展开式，及幂级数性质