第五节	函数的微分
5.1	微分的定义
5.2	微分的几何意义
5.3	基本初等函数的微分公式与微分运算法则
5.4	微分在近似计算中的应用
5.5	小结　思考题

例 1　一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$. 求此薄片面积的改变量 Δy.

解　正方形面积为 $y=f(x)=x^2$. 则面积改变量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

比如，当 $x_0=1, \Delta x=0.1$ 时，

$$\Delta y=2\cdot 1\cdot 0.1+0.1^2=0.2+0.01.$$

注记　若 Δx 很小，则 $2x_0\Delta x$ 远比 $(\Delta x)^2$ 大。因此

$$\boxed{\Delta y\approx 2x_0\Delta x} \quad 即 \quad \boxed{\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x}$$

定义 2　对于自变量在点x_0处的改变量Δx，如果函数$y = f(x)$的相应改变量Δy可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中A与Δx无关，则称$y = f(x)$在点x_0处可微，并称$A\Delta x$为函数$y = f(x)$ 在点x_0处(相应于自变量增量Δx)的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x_0),$$

即

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

注记　微分$\mathrm{d}y$叫做函数增量Δy的线性主部.

由定义知:

(1) $\mathrm{d}y$ 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;

(2) $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶无穷小;

(3) 当 $A \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0),$$

即$\mathrm{d}y$ 与 Δy 是等价无穷小;

(4) A 是与 Δx 无关的常数,但与 $f(x)$ 和 x_0 有关;

(5) 当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ (线性主部).

可微的条件

定理 $y=f(x)$在点x_0处可微 $\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$在点x_0处可导，且$A=f'(x_0)$.

证明.

(1) 必要性: 由$f(x)$ 在点 x_0 可微可得

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$$

即函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且$A=f'(x_0)$.

续.

(2) 充分性：因为函数$f(x)$ 在点 x_0 可导，因此

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

其中$\alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$, 从而

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

由可微的定义可知函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，且 $A = f'(x_0)$.

函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$, 即 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$.

导数与微分的区别

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数是一个定数 $f'(x_0)$, 而微分 $\mathrm{d}y = f'(x_0)(x-x_0)$ 是 $x-x_0$ 的线性函数,它的定义域是R. 注意到

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{d}y = \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0) = 0,$$

因此, $\mathrm{d}y$是当$x \to x_0$时的无穷小.

2. 从几何意义上来看, $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率,而微分 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\,(x-x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量.

例 3　求$y = x^2$当$x = 2$，$\Delta x = 0.01$时的微分.

解　$\mathrm{d}y = (x^2)'\,\Delta x = 2x\Delta x$，所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}} = 2 \times 2 \times 0.01 = 0.04.$$

通常把自变量x的增量 Δx 称为自变量的微分记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x = \Delta x$. 于是我们有

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

即函数的微分$\mathrm{d}y$与自变量的微分$\mathrm{d}x$之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".

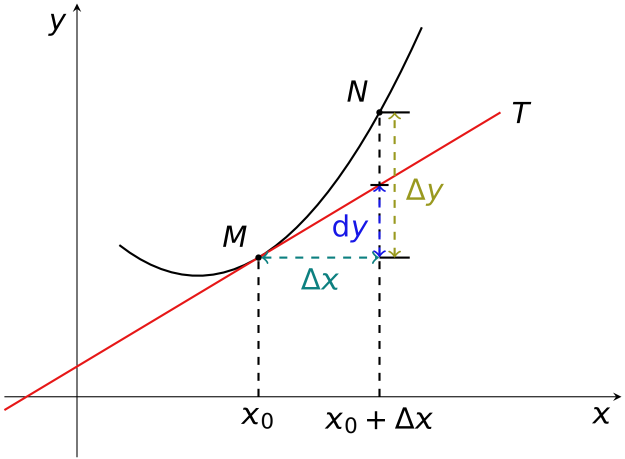
练习 1 求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x+2)$.

解 (1) $dy = y'_x\,dx = (xe^x)'_x\,dx = (x+1)e^x\,dx$.

(2) $dy = y'_x\,dx = \big(\sin(3x+2)\big)'_x\,dx$.

$$= 3\cos(3x+2)\,dx$$

第五节	函数的微分
5.1	微分的定义
5.2	微分的几何意义
5.3	基本初等函数的微分公式与微分运算法则
5.4	微分在近似计算中的应用
5.5	小结　思考题



当Δx很小时，切线纵坐标对应的增量dy可以近似替代曲线纵坐标对应的增量Δy.

由$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$可知，要计算函数的微分，只需计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1.基本初等函数的微分公式

$$\mathrm{d}(C)=0 \qquad \mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$$

基本初等函数的微分公式

$$\mathrm{d}\left(a^x\right) = a^x \ln a \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}\left(e^x\right) = e^x \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x \ln a}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

微分的形式不变性

- 若$y = f(u)$，则有$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u$；
- 若$y = f(u), u = g(x)$，则仍有$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u$。

例 4　$[\sin x]' = \cos x$，但是 $[\sin 2x]' \neq \cos 2x$.

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}(\sin 2x) = \cos 2x\,\mathrm{d}(2x).$$

求微分举例

例 5　设 $y = \ln\left(x + e^{x^2}\right)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解　$\because y' = \dfrac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}}$, 　$\therefore \mathrm{d}y = \dfrac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}}\mathrm{d}x$

例 6　设 $y = \mathrm{e}^{1-3x}\cos x$, 求 $\mathrm{d}y$.

解　易知$\mathrm{d}y = \cos x \cdot \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{1-3x}\right) + \mathrm{e}^{1-3x} \cdot \mathrm{d}(\cos x)$. 因为

$$\left(\mathrm{e}^{1-3x}\right)' = -3\mathrm{e}^{1-3x},\ (\cos x)' = -\sin x$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \cos x \cdot \left(-3\mathrm{e}^{1-3x}\right)\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{1-3x} \cdot (-\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{1-3x}(3\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 7 设 $y=\sin(2x+1)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 $\because y=\sin u, u=2x+1.$

$$\therefore \mathrm{d}y=\cos u\,\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\,\mathrm{d}(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2\,\mathrm{d}x=2\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x$$

例 8 设 $y=\mathrm{e}^{-ax}\sin bx$, 求 $\mathrm{d}y$.

$$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos bx\,\mathrm{d}(bx)+\sin bx\cdot\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}(-ax)$$

解

$$=\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos bx\cdot b\,\mathrm{d}x+\sin bx\cdot\mathrm{e}^{-ax}\cdot(-a)\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)\,\mathrm{d}x$$

例 9 在下列等式左端的括号中填入适当的函数,使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t$ (2) $\mathrm{d}\left(\sin x^2\right)=(\quad)\,\mathrm{d}(\sqrt{x})$

解 (1) 因为$\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\,\mathrm{d}t$, 所以

$$\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

从而 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t$

(2) $\because \dfrac{\mathrm{d}\left(\sin x^2\right)}{\mathrm{d}(\sqrt{x})}=\dfrac{2x\cos x^2\,\mathrm{d}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}=4x\sqrt{x}\cos x^2$

$\therefore \mathrm{d}\left(\sin x^2\right)=\left(4x\sqrt{x}\cos x^2\right)\mathrm{d}(\sqrt{x})$

第五节	函数的微分
5.1	微分的定义
5.2	微分的几何意义
5.3	基本初等函数的微分公式与微分运算法则
5.4	微分在近似计算中的应用
5.5	小结　思考题

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小时,

$$\Delta y|_{x=x_0}\approx \mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

1. 求 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 附近的近似值

由$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$ 得:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

2.求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 附近的近似值

令 $x_0=0, \Delta x=x.\quad \because f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

$$\therefore f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$$

例 10 计算$\cos 60°30'$ 的近似值 .

解 设 $f(x) = \cos x$, 则 $f'(x) = -\sin x$, (x 为弧度).

$$\cos 60°30' = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360} \approx 0.4924$$

例 11 半径10厘米的金属圆片加热后,半径伸长了 0.05厘米,问面积增大了多少？

解 设 $A = \pi r^2, r = 10$ 厘米, $\Delta r = 0.05$ 厘米. 则

$$\Delta A \approx dA = 2\pi r \cdot \Delta r = 2\pi \times 10 \times 0.05 = \pi (\text{厘米}^2).$$

常用近似公式

当 $|x|$ 很小时, 有

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$;

(2) $\sin x \approx x$ (x 为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x 为弧度);

(4) $e^x \approx 1 + x$

(5) $\ln(1+x) \approx x$

例 12　计算下列各数的近似值，

(1) $\sqrt[3]{998.5}$

(2) $e^{-0.03}$.

解　(1) $\sqrt[3]{998.5} = \sqrt[3]{1000 - 1.5}$

$$= \sqrt[3]{1000\left(1 - \frac{1.5}{1000}\right)} = 10\sqrt[3]{1 - 0.0015}$$
$$\approx 10\left(1 - \frac{1}{3} \times 0.0015\right) = 9.995$$

(2) $\mathrm{e}^{-0.03} \approx 1 - 0.03 = 0.97$.

第五节	函数的微分
5.1	微分的定义
5.2	微分的几何意义
5.3	基本初等函数的微分公式与微分运算法则
5.4	微分在近似计算中的应用
5.5	小结　思考题

微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \Longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \quad \Longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

求导数与微分的方法,叫做微分法. 研究微分法与导数理论及其应用的科学,叫做微分学.

导数与微分的联系:可导$\Longleftrightarrow$可微.

小结

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小时,

$$\Delta y|_{x=x_0} \approx \mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

1. $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 附近的近似值为:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

2.$f(x)$ 在点 $x=0$ 附近的近似值为:

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$$

思考题

思考 某家有一机械挂钟，钟摆的周期为1秒．在冬季，摆长缩短了0.01厘米，这只钟每天大约快多少?

(单摆的周期公式为：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ (l为摆长，单位：cm，g 取 980 cm/s^2.)

解 由 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，可得 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l} = \dfrac{\pi}{\sqrt{gl}}$．当 $|\Delta l| << l$ 时，

$$\Delta T \approx \mathrm{d}T = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l.$$

解（续） 据题设，摆的周期是1秒，由此可知摆的原长为 $\frac{g}{(2\pi)^2}$ (cm). 现摆长的改变量 $\Delta l = -0.01$ cm, 于是周期的改变量为

$$\Delta T \approx \mathrm{d}T = \frac{\pi}{\sqrt{g \cdot \frac{g}{(2\pi)^2}}} \times (-0.01)$$

$$= \frac{2\pi^2}{g} \times (-0.01) \approx -0.0002(\mathrm{s})$$

也就是说，由于摆长缩短了0.01cm，钟摆的周期便相应缩短了大约0.0002秒, 即每秒约快0.0002 秒, 从而每天约快 $0.0002 \times 24 \times 60 \times 60 = 17.289(\mathrm{s})$.