第一节	不定积分的概念与性质
第二节	换元积分法
第三节	分部积分法
第四节	有理函数的积分

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

分部积分

设$u = u(x)$和$v = v(x)$具有连续导数，则

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = \int u \, \mathrm{d}v = uv - \int vu' \, \mathrm{d}x = uv - \int v \, \mathrm{d}u$$

设$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续导数，则

$$\int uv'\,dx=\int u\,dv=uv-\int vu'\,dx=uv-\int v\,du$$

证明.

由$(uv)'=u'v+uv'$可得

$$uv'=(uv)'-u'v$$

故结论成立.

例 1　求不定积分 $\int x \cos x \, dx$

例 1 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, x\sin x + \cos x + C.$

例 1 求不定积分 $\int x\cos x\,dx$ .... $x\sin x+\cos x+C.$

例 2 求不定积分 $\int x^2 e^x\,dx$

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $x\sin x + \cos x + C$.

例 2　求不定积分 $\int x^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ .... $x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) + C$.

分部积分

例 1 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $x\sin x+\cos x+C$.

例 2 求不定积分 $\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$ .... $x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C$.

注记 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就考虑设幂函数为u, 使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

练习 1　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$

练习 1 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$ .... $(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$

(2) $\displaystyle\int x e^{2x} \, dx$ .... $\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{4}+C.$

例 3　求不定积分 $\int \ln x \, dx$

例 3　求不定积分 $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ .... $x\ln x - x + C$.

例 3 求不定积分 $\int \ln x \, dx$ .... $x \ln x - x + C$.

例 4 求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

例 3　求不定积分 $\int \ln x \, dx$ .... $x \ln x - x + C.$

例 4　求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

.... $\dfrac{x^2}{2} \arctan x - \dfrac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$

例 3 求不定积分 $\int \ln x \, dx$ .... $x\ln x - x + C.$

例 4 求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

注记 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为u.

练习 2　求不定积分：

(1) $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$

(2) $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分：

(1) $\int x \ln x \, dx$ .... $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

(2) $\int \arcsin x \, dx$ .... $x \arcsin x + \sqrt{(1-x^2)} + C$

例 5　求积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

例 5 求积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

解 由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, d\left(e^x\right) = e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x) \\
&= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int \cos x \, d\left(e^x\right) \\
&= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x\right) \\
&= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

例 6 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

例 6　已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int xf'(x)dx$.

解　由分部积分得

$$\int xf'(x)dx = \int x\,d[f(x)] = xf(x) - \int f(x)dx.$$

因为 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$, 所以

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

例 7　求不定积分 $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \mathrm{d}x.$

解　由分部积分得

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}
\end{aligned}
$$

于是 $I_{n+1} = \dfrac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2na^2} I_n$，即

$$
I_n = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} I_{n-1}.
$$

小结

分部积分的关键在于选择合适的u和$\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

小结

分部积分的关键在于选择合适的u和$\mathrm{d}v$：

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \qquad = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

小结

分部积分的关键在于选择合适的u和$\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

小结

分部积分的关键在于选择合适的u和$\mathrm{d}v$：

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

分部积分的关键在于选择合适的u和$\mathrm{d}v$：

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

第一节　不定积分的概念与性质

第二节　换元积分法

第三节　分部积分法

第四节　有理函数的积分