

第十一章 本章历学期末试题

1. (2017年) 以下四个关于级数的结论中, 正确的结论是 ().

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n \geq \frac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n (n = 1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

2. (2016年) 设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin a}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ ().

(A) 绝对收敛

(B) 发散

(C) 条件收敛

(D) 收敛性取决于 a 的值

3. (2014年) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足关系 $a_n \leq b_n$, 则 ().

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散

4. (2013年) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是正项级数, 且 $u_n > v_n (n = 1, 2, \dots, 99)$, $u_n \leq v_n (n = 100, 101, \dots)$, 则下列命题正确的是 ().

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

5. (2012年) 设 $0 < u_n < \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$, 则下列级数中一定收敛的是 ().

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^2$

6. (2011年) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中必定发散是 ().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$

7. (2010年) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ().

- (A) 一定收敛, 其和为零 (B) 一定收敛, 但和不一定为零
(C) 一定发散 (D) 可能收敛, 也可能发散

8. (2017年) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛域是 $(-4, 2]$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间是_____.
9. (2016年) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径 $R =$ _____.
10. (2015年) 实数 q 满足什么条件, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛, 即 q 满足_____.
11. (2014年) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$, $|x| < 2$ 的和函数是_____.
12. (2013年) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$ 的收敛半径为_____.
13. (2012年) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-1)^n$ 的收敛域为_____.
14. (2011年) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 的和 $S =$ _____.
15. (2010年) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 的收敛域为_____.

16. (2017年) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 敛散性, 若收敛, 指出其是绝对收敛还是条件收敛.

17. (2017年) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n}$ 的收敛域及和函数.

18. (2016年) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$ 的和函数及收敛域.

19. (2016年) 将函数 $f(x) = \frac{1}{5-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数, 并求其收敛域.

(A班) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数, 并求其收敛域.

20. (2015年) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right)$ 是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散?

21. (2014年) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} (x-1)^n$ 的收敛域.

22. (2013年) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

23. (2013年) 将函数 $f(x) = \ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

24. (2012年) (本题满分8分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 的敛散性, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, ($a > 0$, $b > 0$).

25. (2012年) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

26. (2011年) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{a^n}$ ($a > 0$) 是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散.

27. (2011年) 试求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ 的收敛域 I 与和函数 $S(x)$, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ 的和.

[另附] 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域 I 与和函数 $S(x)$, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.

28. (2010年)判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 绝对收敛和条件收敛性.

29. (2010年) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

30. (2011年) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

[另附] 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$ 绝对收敛.