Part V

第五章

1 不定积分的概念与性质

1.1 原函数与不定积分的概念

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\mathrm{e}^x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=\ln x$

定义. 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系: 对任一 $x\in I$, 都有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或} \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例 **1.** 因 $(\sin x)'=\cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例 **2.** $(x^2)'=2x$, 而且 $(x^2+2)'=2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

(1) 原函数不止一个

(2) 同一个函数的任意两个原函数之间最多相差一个常数 C.

原函数存在定理

定理 (原函数存在定理). 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x\in I$, 都有

$$F'(x)=f(x)$$

简单地说, 连续函数一定有原函数.

注记. 初等函数的原函数不一定还是初等函数.

定义. 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数, 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中, 我们称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x)=f(x)\quad\Longleftrightarrow\quad\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C}$$

例 3. 求函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分.

例 4. 求函数 $f(x)=\sin x$ 的不定积分.

练习 1. 求不定积分.

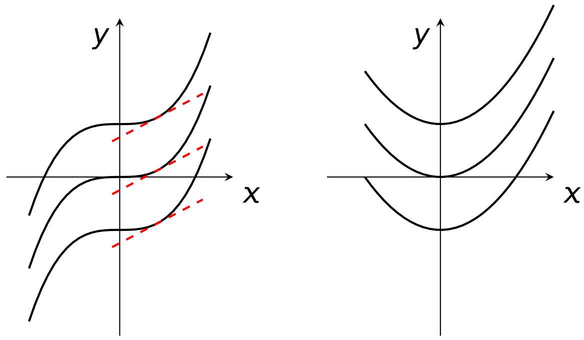
(1) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

例 5. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

例 6. 求过点 $(1,3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.



(a) $y = x^3 + C$　　(b) $y = x^2 + C$

1.2　不定积分的几何意义

不定积分的几何意义

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 显然，求不定积分得到一积分曲线族，在同一横坐标 $x = x_0$ 处，任一曲线的切线有相同的斜率.

1.3　不定积分的性质

性质 **1.** 导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x) + C$

性质 **2.** 非零的常数因子，可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 **3.** 两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

> 注： 上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合.

1.4 基本积分表

基本积分公式

积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

例如，由

$$(x^{a+1})' = (a+1)x^{a}$$

可得

$$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C.$$

类似地，我们有如下基本积分公式.

基本积分公式 **I**

1. $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

例 **7.** 求不定积分

(1) $\int (2x+5x^2+7x^3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int (2-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x$

练习 **2.** 求不定积分

(1) $\int (1-2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int (\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int (\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$

练习 **3.** 求不定积分

(1) $\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

基本积分公式 **II**

4. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$

5. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

例 **8.** 求不定积分：

(1) $\int (4\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}})\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx$

练习 **4.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int (x^2+2^x)\,dx$

基本积分公式 **III**

6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

例 **9.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int (\sin x + 2\cos x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

练习 **5.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cot^2 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\,dx$

基本积分公式 **IV**

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

例 **10.** 求不定积分：

(1) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

练习 **6.** 求不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

基本积分公式 **V**

12. $\int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$

13. $\int \csc x \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$

1.5 小结与复习

小结

1. 原函数的概念：$F'(X) = f(x)$;

2. 不定积分的概念：$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$;

3. 求微分与求不定积分的互逆关系

4. 基本积分公式

复习

复习 **1.** 求不定积分

(1) $\int (\sin x - 2e^x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

2 换元积分法

2.1 第一类换元法

第一类换元法引例

例 **1.** 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解决方法：设置中间变量，并利用复合函数求导法则.

解**.** 令 $u = 2x+1$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x = \int u^{10}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{22}u^{11} + C = \frac{1}{22}(2x+1)^{11} + C.$$

第一类换元法

一般地，设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u)=f(u),\ \int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C.$$

如果 $u=\phi(x)$ 可微, 则由链式法则，有

$$\mathrm{d}F(\phi(x))=F'(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x=f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x=F(\phi(x))+C=\left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}.$$

第一类换元法

定理 (第一类换元法)**.** 设 $f(u)$ 具有原函数, $\phi(x)$ 可导，则有

$$\begin{aligned}\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))\\ &=\left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}\end{aligned}$$

注记. 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x\ \text{化为}\int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{\text{第一类换元法也称为凑微分法.}}$

常用的积分换元 I

1. $\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)$

2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\,\mathrm{d}\left(x^{n}\right)$

3. $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}(\ln|x|)=\ln a\,\mathrm{d}\left(\log_{a}|x|\right)(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$

4. $\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x}\right)$

5. $a^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\,\mathrm{d}\left(a^{x}\right)(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$;

6. $\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$

7. $\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$

常用的积分换元 **II**

8. $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x}=\sec^{2}x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$

9. $\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2}x}=\csc^{2}x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cot x)$

10. $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}}=\mathrm{d}(\arcsin x)=-\mathrm{d}(\arccos x)$

11. $\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\mathrm{d}(\arctan x)=-\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)$

第一类换元法

例 **2.** 求不定积分 $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

解 (解法 1). $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, \mathrm{d}(2x)$

令 $u = 2x$, 则上式等于

$$\frac{1}{2}\int \sin u \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

解 (解法 2). $\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = 2\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = 2\int \sin x \, \mathrm{d}\sin x$

令 $u = \sin x$, 则上式等于

$$2\int u \, \mathrm{d}u = u^2 + C = (\sin x)^2 + C.$$

第一类换元法

解 (解法 3). $\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = 2\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = -2\int \cos x \, \mathrm{d}\cos x$

令 $u = \cos x$, 则上式等于

$$-2\int u \, \mathrm{d}u = -u^2 + C = -(\cos x)^2 + C$$

注记. 观察点不同，所得结论不同.

第一类换元法

例 **3.** 求不定积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$

(2) $\int \sin(3x+4) \, \mathrm{d}x$

第一类换元法

练习 **1.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

例 **4.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x$

练习 **2.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

例 **5.** 求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ .... $\displaystyle\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x$ .... $\displaystyle\frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ .... $\displaystyle\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

练习 **3.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$（$a>0$）$\dotfill$ $\arcsin\dfrac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$ $\dotfill$ $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$

例 **6.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x$ $\dotfill$ $\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{2}{5}\sin^5 x+\dfrac{1}{7}\sin^7 x+C$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ $\dotfill$ $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

形如 $\int \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$ 的解题思路：m,n 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

练习 **4.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cos^6 x\sin x\,\mathrm{d}x$ $\dotfill$ $-\dfrac{1}{7}\cos^7 x+C$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$ $\dotfill$ $\sin x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

例 **7.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x$ $\dotfill$ $\dfrac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$ $\dotfill$ $-\ln|\cos x|+C$

(3) $\displaystyle\int \csc x\,\mathrm{d}x$ $\dotfill$ $\ln|\csc x-\cot x|+C$

练习 **5.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x$ $\dotfill$ $\ln|\sin x|+C$

(2) $\int \sec x \, dx$ .... $\ln|\sec x + \tan x| + C$

例 **8.** 求不定积分 $\int \sin^2 x \, dx$.

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：m, n 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 **6.** 求不定积分 $\int \cos^2 2x \, dx$.

例 **9.** 求 $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

解. 易知 $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$ 于是

$$\begin{aligned} \int \cos 3x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 5x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C \end{aligned}$$

形如 $\int \cos mx \cos nx \, dx$ 的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

例 **10.** 求 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

解. 由条件可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x-\int \frac{(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C\end{aligned}$$

形如 $\int \frac{a\sin x+b\cos x}{A\sin x+B\cos x}dx$ 的解题思路:
令 $a\sin x+b\cos x=m(A\sin x+B\cos x)+n(A\sin x+B\cos x)'$ 拆项.

2.2 第二类换元法

第二类换元法

问题. $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=?$

解决方法： 改变中间变量的设置方法.

过程： 令 $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int(\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\cdots\cdots\end{aligned}$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

第二类换元法

定理 (第二类换元法)**.** 若 $x=\phi(t)$ 是单调、可导的函数，而且 $\phi'(t)\neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) \\ &= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

例 **11.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ .... $x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$

练习 **7.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$ .... $\arctan(\mathrm{e}^x)+C$

常用变量代换

常用的变量代换

1. 三角代换
2. 倒代换
3. 简单无理函数代换

三角代换

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 令$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow a\cos t$

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 令$x=a\tan t$, $\sqrt{a^2+x^2}\Longrightarrow a\sec t$

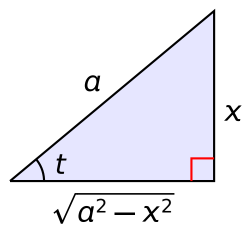
(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2}\Longrightarrow a\tan t$

三角代换

例 **12.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解**.** 令 $x=a\sin t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= \int 1\,\mathrm{d}t = t+C\\ &= \arcsin\frac{x}{a}+C\end{aligned}$$



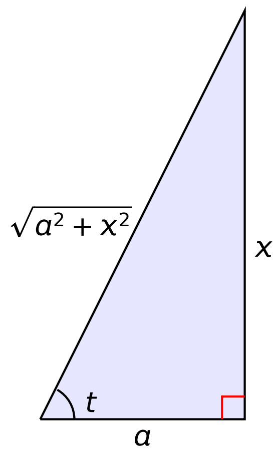
三角代换

例 **13.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解. 设 $x = a\tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t, \quad \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$



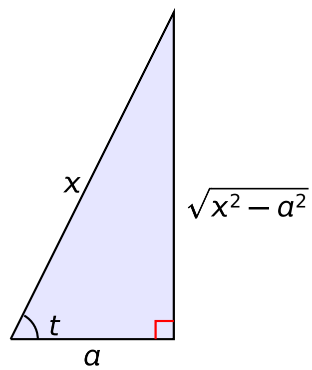
三角代换

例 **14.** 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

解. 当 $x>0$ 时, 设 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\quad \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t}&=\int\sec t\,\mathrm{d}t\\&=\ln|\sec t+\tan t|+C_1\\&=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_2\end{aligned}$$



解 (续). 当 $x<0$ 时, 设 $x=-u$, 那么 $u>0$, 利用上段结果,

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}&=-\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}}\\&=-\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)+C_2\\&=-\ln\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2\\&=\ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C_2\\&=\ln\left(-x-\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2-\ln a^2\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\end{aligned}$$

从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

三角代换

练习 **8.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ .... $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

练习 **9.** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ .... $\displaystyle\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

三角代换

注记**.** 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定**.**

例 **15.** 求 $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ （三角代换很繁琐）

解**.** 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1$, $x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t = \int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C\\ &= \frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C\end{aligned}$$

倒代换

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

例 **16.** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(x^7+2)}\,\mathrm{d}x$

解. 令 $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{t^6}{1+2t^7}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right|+C\\&=-\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right|+\frac{1}{2}\ln|x|+C\end{aligned}$$

倒代换

例 17. 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. *(分母的阶较高)*

解. 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2\\&\xlongequal{u=t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)\\&=-\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3+\sqrt{1+u}+C\\&=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C\end{aligned}$$

注记. 当被积函数含有两种或两种以上的根式时 $\sqrt[k]{x},\ldots,\sqrt[l]{x}$ 时，可令 $x=t^n$（n 为各根指数的最小公倍数）

例 **18.** 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解**.** 令 $x=t^6$ 则 $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x=\int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\ &=\int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &=6\left(\int \mathrm{d}t-\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)=6(t-\arctan t)+C\\ &=6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan(\sqrt[6]{x})\right)+C\end{aligned}$$

例 **19.** 求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解**.** 令 $t^6=x+1$，则 $6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t=6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t\\ &=2t^3-3t^2+6t+6\ln|t+1|+C\\ &=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}\\ &\quad+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C\end{aligned}$$

练习 **10.** 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

解**.** $6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+C$

简单无理函数代换

注记**.** 当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\ldots$, 可将无法处理的部分设为 t

例 **20.** 求积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解. 令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$, 则 $\dfrac{1+x}{x}=t^2$, $x=\dfrac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2}$. 于是

简单无理函数代换

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x &= -\int \left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \\
&= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = -2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \\
&= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C
\end{aligned}
$$

简单无理函数代换

例 **21.** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x.$

解. 令 $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, 则 $\mathrm{e}^x=t^2-1$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$ 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = 2\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1\right)-x+C
\end{aligned}
$$

注记. 当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以使用根号内配方法

例 **22.** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解. 易知

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t\\
&=\int\left(\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\int\left(\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t\\
&=\ln|\sec t+\tan t|-\tan\frac{t}{2}+c\\
&=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}+C.
\end{aligned}$$

练习 **11.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ .... $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{2\sqrt{x-3}(x+6)}{3}+C$

2.3 小结

小结

两类积分换元法：

1. 第一类换元（凑微分）

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

2. 第二类换元

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

   (a) 三角代换

   (b) 倒代换

   (c) 根式代换

积分公式大全

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C \tag{1}$$

$$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{3}$$

$$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \tag{4}$$

$$\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C \tag{5}$$

积分公式大全

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{6}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{7}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{8}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \tag{9}$$

积分公式大全

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{10}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{11}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \tag{12}$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \tag{13}$$

积分公式大全

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \tag{17}$$

3 分部积分法

分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

分部积分

设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 具有连续导数，则

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

证明. 由 $(uv)' = u'v + uv'$ 可得

$$uv' = (uv)' - u'v$$

故结论成立.

分部积分

例 **1.** 求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $x\sin x + \cos x + C.$

例 **2.** 求不定积分 $\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$ .... $x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$

注记**.** 若被积函数是幂函数和正 *(余)* 弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就考虑设幂函数为 u, 使其降幂一次 *(假定幂指数是正整数)*

分部积分

练习 **1.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$

(2) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{4}+C.$

例 **3.** 求不定积分 $\int\ln x\,\mathrm{d}x$ .... $x\ln x-x+C.$

例 **4.** 求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

.... $\dfrac{x^2}{2}\arctan x-\dfrac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$

注记**.** 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

分部积分

练习 **2.** 求不定积分：

(1) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

(2) $\int\arcsin x\,\mathrm{d}x$ .... $x\arcsin x+\sqrt{(1-x^2)}+C$

例 **5.** 求积分 $\displaystyle\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x.$

解. 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \int \sin x \,\mathrm{d}\,(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}(\sin x) \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \int \cos x \,\mathrm{d}\,(\mathrm{e}^x) \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \left(\mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\cos x\right) \\ &= \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) - \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\therefore \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

分部积分

例 **6.** 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

解. 由分部积分得

$$\int x f'(x)\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}[f(x)] = x f(x) - \int f(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, 所以

$$\int x f'(x)\mathrm{d}x = x f(x) - \int f(x)\mathrm{d}x = -2x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

递推法

例 **7.** 求不定积分 $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$.

解. 由分部积分得

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}
\end{aligned}
$$

于是 $I_{n+1} = \dfrac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2na^2} I_n$，即

$$
I_n = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} I_{n-1}.
$$

小结

分部积分的关键在于选择合适的 u和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \quad = \int x \, \mathrm{d}\,(\mathrm{e}^x)$
- $\int x \cos x \, \mathrm{d}x \quad = \int x \, \mathrm{d}\,(\sin x)$
- $\int x \ln x \, \mathrm{d}x \quad = \int \ln x \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x \arctan x \, \mathrm{d}x = \int \arctan x \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

4 有理分式的积分

定义 **1.** 如果 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数 *(分式)*.

- 如果 $P(x)$ 次数 $< Q(x)$ 次数，则称它为真分式；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定理 **1.** 假分式 = 多项式 + 真分式

有理分式分解

理论上，任何一个有理分式 (真分式) 都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

有理分式分解

理论上，任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$
5. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}} + C(n \geq 2)$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}(n \geq 2)$ 可以用递推法求出

有理分式的分解

定理 2. 设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x)=Q_1(x)^{m_1}Q_2(x)^{m_2}\cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3. 假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}}\cdots+\frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

有理分式的分解

1. 分母中若有因式 $(x-a)^k$ 时，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x+a)^k}+\frac{A_2}{(x+a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x+a}$$

   其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都是常数.

   特别地: $k=1$, 时，分解后为 $\dfrac{A}{x+a}$.

2. 分母中若有因式 $\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中 $p^2-4q<0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

   其中 M_i,N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

   特别地: $k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

有理分式的分解

于是，将有理函数转化为部分分式之和后，只会出现三种情况：

(1) 多项式

(2) $\dfrac{A}{(x+a)^n}$

(3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

(1) 和 (2) 两种情况的不定积分都比较容易求出，因此只讨论情况 (3).

讨论不定积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

....

易知 $x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$, 令 $x+\dfrac{p}{2}=t$,

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$, $b=N-\dfrac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记. 有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合.

待定系数法

例 **1.** 求 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

解. 令 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=3, \end{cases} \implies \begin{cases} A=-5, \\ b=6, \end{cases} \quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3} \right) \mathrm{d}x \\ &= -5\ln|x-2| + 6\ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

例 **2.** 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$.

解**.** 令 $\displaystyle\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$. 右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2A-B+C=0, \\ A=1, \end{cases} \implies \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=1 \end{cases} \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] \mathrm{d}x \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

例 **3.** 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$

解**.** 令 $\displaystyle\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2 + (B+2C)x + (A+C)}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \implies \begin{cases} A=\dfrac{4}{5}, \\ B=-\dfrac{2}{5}, \\ C=\dfrac{1}{5}, \end{cases} \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+2x} - \frac{2}{5}\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5}\arctan x + C. \end{aligned}$$

有理分式的积分

练习 **1.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

初等函数的不定积分

注记**.** 初等函数的原函数未必都是初等函数. 可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”, 比如

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$