第一节	数列的极限
第二节	函数的极限
第三节	无穷小与无穷大
第四节	**极限运算法则**

第四节	极限运算法则
4.1	极限运算法则
4.2	求极限方法举例

四则运算法则

定理 1 如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

1. $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$
2. $\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$
3. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

证明.

因为$\lim f(x) = A,\ \lim g(x) = B$ 所以

$$f(x) = A + \alpha,\ g(x) = B + \beta. \text{ 其中 } \alpha \to 0, \beta \to 0.$$

由无穷小运算法则,得

$$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \to 0.$$

$$\begin{aligned}[f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) &= (A + \alpha)(B + \beta) - AB \\ &= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \to 0.\end{aligned}$$

续.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为$B\alpha-A\beta\to 0$ 又因为$\beta\to 0, B\neq 0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$时, $|\beta|<\frac{|B|}{2}$, 所以

$$|B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|.$$

所以

$$|B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

推论 如果$\lim f(x)$ 存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论 如果$\lim f(x)$ 存在,而 n 是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

第四节	极限运算法则
4.1	极限运算法则
4.2	求极限方法举例

函数极限的基本公式

1 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n+a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0)$$

2 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

注意：若$Q(x_0)=0$，则商的法则不能应用.

3 如果基本初等函数$f(x)$在x_0的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例子　求函数极限$\lim\limits_{x\to1}(3x^2-2x+1)$。

解　原式$=3\lim\limits_{x\to1}x^2-2\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}1$

$$=3\times1^2-2\times1+1+1=2$$

例子 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right) &= \lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}5\\ &= \left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5\\ &= 2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

例子　求函数极限$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$。

解　$$原式=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{3+1}{3+3}=\frac{2}{3}$$

例子 求函数极限$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$。

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} \\
&= \lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

例子 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、 b.

解 $x\to 1$ 时, 分母的极限是零,而商的极限存在. 则

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.\end{aligned}$$

故 $a=6, b=-7$.

例子　求函数极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$。

解　原式

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{1-x^2}-\frac{2}{1-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

例子 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 先用x^3 去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例子　设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 $a\Delta b$.

解

$$\text{左边}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2+ax(x+1)+b(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(a+b)x+2+b}{x+1}$$

若商的极限存在，则必须 $1+a=0,\ a+b=2$ 解得

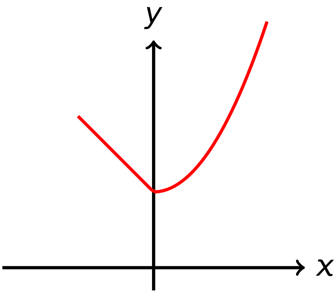
$$a=-1,\ b=3.$$

例子　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

解　$n\to\infty$ 时,是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

求极限方法举例



设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}$$

求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解　易知

$$\lim_{x\to 0^-} = 1-0=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} = 1+0=1,$$

左右极限相等，故$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

练习 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2\ln(1+x)+e^x+2)$； $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$； $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$。 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \dfrac{5}{4}$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g", "\times" description] \\
U(u_0,\eta) & \neq & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\boxed{\begin{array}{c} x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0) \\ g(x) \neq u_0 \end{array}}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0, \delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0, \delta) \arrow[dd, "\checkmark\ f \circ g"] \\
\mathring{U}(u_0, \eta) \arrow[r, phantom, "="] & \mathring{U}(u_0, \eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A, \epsilon) & U(A, \epsilon)
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "\checkmark"', "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) \arrow[r, phantom, "="] & U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

定理 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，并且存在$\delta_0 > 0$使得 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$时$g(x) \neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A.$$

定理 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$且$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f\Big[\lim_{x\to x_0} g(x)\Big] = f(u_0).$$

例子 $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}.$

小结　思考

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

思考题

问题　在某个过程中，若$f(x)$有极限，$g(x)$无极限，那么$f(x)+g(x)$是否有极限？为什么？

解　没有极限，使用反证法易证。