微积分课程

微积分1 复习

2021 年 1 月 10 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

例 1 求下列函数的定义域:

$$f(x) = \sqrt{x-2} \tag{1}$$

$$f(x) = \ln(x^2-1) \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} \tag{3}$$

例 1　求下列函数的定义域：

$$f(x)=\sqrt{x-2} \tag{1}$$

$$f(x)=\ln(x^2-1) \tag{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3} \tag{3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求：

例 1 求下列函数的定义域：

$$f(x)=\sqrt{x-2} \tag{1}$$

$$f(x)=\ln(x^2-1) \tag{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3} \tag{3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；

函数的定义域

例 1 求下列函数的定义域:

$$f(x)=\sqrt{x-2} \tag{1}$$

$$f(x)=\ln(x^2-1) \tag{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3} \tag{3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求:

1. 根号里面要求大于等于零;
2. 对数里面要求大于零;

例 1 求下列函数的定义域：

$$f(x) = \sqrt{x-2} \tag{1}$$

$$f(x) = \ln(x^2-1) \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} \tag{3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；
3. 分母要求不能等于零。

例 2 将函数$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$分解为简单函数的复合。

复合函数的分解

例 2　将函数$f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$分解为简单函数的复合。

- 简单函数指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数。

复合函数的分解

例 2　将函数$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$分解为简单函数的复合。

- 简单函数指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数。
- 基本初等函数指的是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六种。

数列极限

对于数列极限，我们有如下基本公式：

数列极限

对于数列极限，我们有如下基本公式：

$$\lim_{n\to\infty} c = c \qquad ①$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k>0) \qquad ②$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0 \quad (k>0) \qquad ③$$

对于$x \to \infty$的函数极限，我们有如下基本公式：

对于$x \to \infty$的函数极限，我们有如下基本公式：

$$\lim_{x\to\infty} c = c \qquad ①$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{为正整数}) \qquad ②$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \qquad ③$$

对于$x \to x_0$的函数极限，如果$f(x)$是初等函数，x_0在$f(x)$的定义区间中，则有

函数极限II

对于$x \to x_0$的函数极限，如果$f(x)$是初等函数，x_0在$f(x)$的定义区间中，则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 3 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \leq 0 \\ x^2+1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

判断该函数在$x \to 0$及$x \to 1$时的极限是否存在。

左极限和右极限

例 3　设

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \leq 0 \\ x^2+1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

判断该函数在$x \to 0$及$x \to 1$时的极限是否存在。

定理　极限存在当且仅当左右极限都存在而且相等。

极限的四则运算

各种极限都有四则运算法则：

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) \qquad ①$$

$$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \qquad ②$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \qquad ③$$

例 4　求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x} \tag{2}$$

等价无穷小代换

例 4　求下列极限：

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x} \tag{2}$$

事实　等价无穷小代换有如下特点：

- 我们只有对$x \to 0$的代换公式；

例 4 求下列极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x} \tag{2}$$

事实 等价无穷小代换有如下特点:

- 我们只有对$x \to 0$的代换公式;
- 只能对乘除因子代换,不能对加减项代换。

例 5　求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x} \tag{2}$$

例 5　求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x} \tag{2}$$

事实　洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；

例 5 求下列极限：

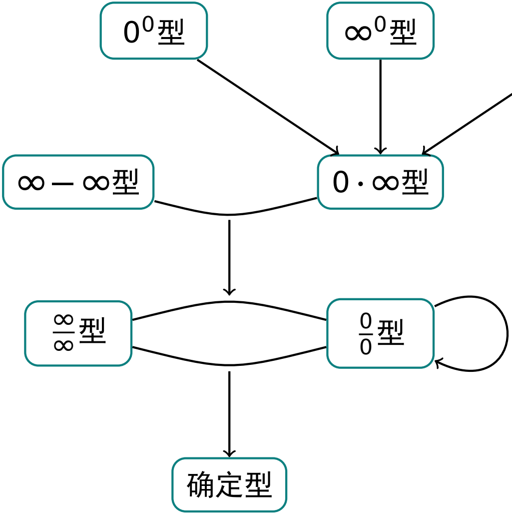
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x} \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x} \qquad (2)$$

事实 洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限。

小结


0^0型
∞^0型
1^∞型
$\infty-\infty$型
$0\cdot\infty$型
$\frac{\infty}{\infty}$型
$\frac{0}{0}$型
确定型

例 6　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

例 6　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

定理 7　若$x\to\square$时，$a(x)\to 0$，$b(x)\to\infty$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to\square}\left(1+a(x)\right)^{b(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}a(x)b(x)}}$$

例 8　求函数$f(x)$的间断点，并判断其类型。其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\leq 1, x\neq 0\\[2ex] \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$$

例 8　求函数$f(x)$的间断点，并判断其类型。其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\ne 0\\[2ex] \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\ne 2\end{cases}$$

注记　函数的间断点通常在这两种点中出现：

1. 使得分母为零的点；
2. 分段函数的交界点.

导数公式

- $(C)' = 0$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则:

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则:

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则:

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

例 9　求下列函数的导数：

(1) $f(x) = e^{x^2}$；

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$；

(3) $f(x) = \cos(\ln x)$。

例 9 求下列函数的导数：

(1) $f(x) = e^{x^2}$；

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$；

(3) $f(x) = \cos(\ln x)$。

定理 设$y = f(u), u = g(x)$，则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例 10　对下面的方程求导数y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

例 10 对下面的方程求导数y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$；
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$。

定理 如果函数$f(x)$满足下列条件:

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续,

(2) 在开区间(a, b)内可导,

(3) $f(a) = f(b)$,

则至少存在一点$\xi \in (a, b)$使得$f'(\xi) = 0$.

定理　如果函数$f(x)$满足下列条件:

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续,

(2) 在开区间(a, b)内可导,

则至少存在一点$\xi \in (a, b)$使$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西定理

定理　如果函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上都连续，

(2) 在开区间(a,b)内都可导，

(3) 在开区间(a,b)内$g'(x)\neq 0$，

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例 11 求下列函数的单调区间与极值:

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$;

(2) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

例 11 求下列函数的单调区间与极值：

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$;

(2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

事实 对于单调区间与极值，有如下基本结果：

- $f'(x)>0$ 的区间为单调增加区间；
- $f'(x)<0$ 的区间为单调减少区间；
- $f'(x)=0$或者不存在的点很可能为极值点。

事实　一般地，对于函数在闭区间$[a, b]$上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点。

函数的最值

事实　一般地，对于函数在闭区间$[a, b]$上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点。

事实　特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值。

例 12　求下列曲线的凹向与拐点:

(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$;

(2) $f(x) = (x-2)^{\frac{5}{3}}$.

例 12　求下列曲线的凹向与拐点：

（1）$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$;

（2）$f(x) = (x-2)^{\frac{5}{3}}$.

事实　对于凹向与拐点，有如下基本结果：

- $f''(x) > 0$ 的区间为凹（上凹）区间；
- $f''(x) < 0$ 的区间为凸（下凹）区间；
- $f''(x) = 0$或者不存在的点很可能为拐点。

曲线的渐近线

例 13 求曲线$f(x) = \frac{1}{x-1}$的渐近线:

例 13　求曲线$f(x) = \frac{1}{x-1}$的渐近线：

事实　对于曲线的渐近线，我们有如下定义：

- 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，则$y = b$为水平渐近线；
- 若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则$x = a$为铅垂渐近线。

若$y=f(x)$可导，则变化率$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$也称为$f(x)$的边际函数。

若$y=f(x)$可导，则变化率$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为$f(x)$的边际函数。

- 总成本函数$C(Q) \Longrightarrow$ 边际成本$C'(Q)$
- 总收益函数$R(Q) \Longrightarrow$ 边际收益$R'(Q)$

若$y=f(x)$可导，则变化率$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为$f(x)$的边际函数。

- 总成本函数$C(Q)\Longrightarrow$ 边际成本$C'(Q)$
- 总收益函数$R(Q)\Longrightarrow$ 边际收益$R'(Q)$

若$y=f(x)$可导，则相对变化律

$$\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=y'\frac{x}{y}$$

称为$f(x)$的弹性函数。

积分公式大全

$$\int 1 \, dx = x + C \tag{4}$$

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \tag{5}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \tag{6}$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{7}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \tag{8}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{9}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{10}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{11}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \tag{12}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{13}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{14}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \tag{15}$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \tag{16}$$

积分公式大全

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \tag{18}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \tag{19}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \tag{20}$$

第一类换元法

$$\begin{aligned}\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) \\ &= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}\end{aligned}$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到。

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到。

例 14 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$.

例 15　求不定积分 $\int \sin^2 x \cos x \, dx$.

第二类换元法

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\psi(t))\,\mathrm{d}(\psi(t)) \\
&= \left[\int f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}
\end{aligned}
$$

指数函数换元

例 16　求不定积分$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$.

例 17　求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$.

三角函数换元总结

1. $\int f(\sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$，令$x = a\sin t$

三角函数换元总结

1. $\int f(\sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$，令$x = a\sin t$
2. $\int f(\sqrt{x^2 + a^2})\,\mathrm{d}x$，令$x = a\tan t$

三角函数换元总结

1. $\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$，令$x=a\sin t$
2. $\int f(\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$，令$x=a\tan t$
3. $\int f(\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$，令$x=a\sec t$

分部积分公式：$\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

分部积分公式： $\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 18　求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例 19　求不定积分 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 18　求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例 19　求不定积分 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

例 20　求不定积分 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

例 21　求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

分部积分公式: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 18　求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例 19　求不定积分 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

例 20　求不定积分 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

例 21　求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

例 22　求不定积分 $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.