第一节　不定积分的概念与性质

第二节　换元积分法

第三节　分部积分法

第四节　有理函数的积分

**例 1** 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

**解决方法：** 设置中间变量，并利用复合函数求导法则。

**解** 令 $u = 2x+1$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x = \int u^{10}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{22}u^{11}+C = \frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C.$$

一般地，设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u) = f(u), \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C.$$

如果 $u = \phi(x)$ 可微, 则由链式法则，有

$$\mathrm{d}F(\phi(x)) = F'(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\phi(x)) + C = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}.$$

**定理 (第一类换元法)** 设$f(u)$具有原函数，$\phi(x)$可导，则有

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

**注记** 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 化为 } \int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

第一类换元法也称为凑微分法。

# 常用的积分换元I

1. $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}\mathrm{d}\left(a^x\right)(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$;
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$

# 常用的积分换元II

8 $$\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$$

9 $$\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$$

10 $$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x) = -\mathrm{d}(\arccos x)$$

11 $$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x) = -\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)$$

例 2　求不定积分 $\int \sin 2x \,\mathrm{d}x$.

解 (解法1)　$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \,\mathrm{d}(2x)$

令 $u = 2x$,则上式等于

$$\frac{1}{2}\int \sin u \,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

解 (解法2)　$\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = 2\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = 2\int \sin x \,\mathrm{d}\sin x$

令$u = \sin x$, 则上式等于

$$2\int u \,\mathrm{d}u = u^2 + C = (\sin x)^2 + C.$$

解 (解法3) $$\int \sin 2x \, dx = 2\int \sin x \cos x dx = -2\int \cos x \, d\cos x$$

令 $u = \cos x$, 则上式等于

$$-2\int u \, du = -u^2 + C = -(\cos x)^2 + C$$

注记　观察点不同，所得结论不同.

例 3　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$

**练习 1**　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

例 4　求不定积分

(1) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x$

**练习 2** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

**例 5** 求不定积分（其中$a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \cdots\cdots \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

**练习 3** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ （$a>0$） $\cdots\cdots \arcsin\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)} \cdots\cdots \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

**例 6**　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$ ..... $\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{2}{5}\sin^5 x+\dfrac{1}{7}\sin^7 x+C$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$ .......................... $\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

> 形如$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$的解题思路：$m,n$有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分。

**练习 4**　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cos^6 x\sin x\,dx$ .......................... $-\dfrac{1}{7}\cos^7 x+C$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ ................ $\sin x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

**例 7** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\ln|\cos x|+C$

(3) $\displaystyle\int \csc x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ln|\csc x-\cot x|+C$

**练习 5** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cot x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ln|\sin x|+C$

(2) $\displaystyle\int \sec x\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ln|\sec x+\tan x|+C$

**例 8**　求不定积分 $\int \sin^2 x \, dx$。

> 形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：$m, n$ 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ 降幂。

**练习 6**　求不定积分 $\int \cos^2 2x \, dx$。

例 9　求 $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

解　易知 $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$ 于是

$$\int \cos 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$
$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$$

形如 $\int \cos mx \cos nx \, dx$ 的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

例 10　求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

解　由条件可得

$$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int dx-\int \frac{(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C$$

形如 $\displaystyle\int \frac{a\sin x+b\cos x}{A\sin x+B\cos x}dx$ 的解题思路:
令 $a\sin x+b\cos x = m(A\sin x+B\cos x)+n(A\sin x+B\cos x)'$ 拆项.

| | |
|---|---|
| 第二节 | 换元积分法 |
| 2.1 | 第一类换元法 |
| 2.2 | 第二类换元法 |
| 2.3 | 小结 |

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

解决方法: 改变中间变量的设置方法.

过程: 令 $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \cdots\cdots$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

**定理 (第二类换元法)** 若$x = \phi(t)$是单调、可导的函数，而且$\phi'(t) \neq 0$，则有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t))$$
$$= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

**例 11** 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ ............... $x-\ln(e^x+1)+C$

**练习 7** 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ .............. $\arctan(e^x)+C$

# 常用变量代换

常用的变量代换

1. 三角代换
2. 倒代换
3. 简单无理函数代换

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 令$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow a\cos t$

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 令$x=a\tan t$, $\sqrt{a^2+x^2}\Longrightarrow a\sec t$

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2}\Longrightarrow a\tan t$

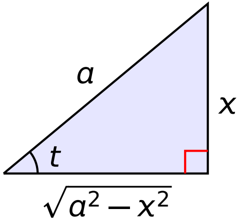
例 12　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解　令 $x = a\sin t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int 1\,\mathrm{d}t = t + C$$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C$$

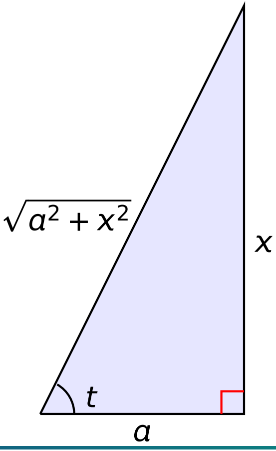


**例 13** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

**解** 设 $x = a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t, \quad \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

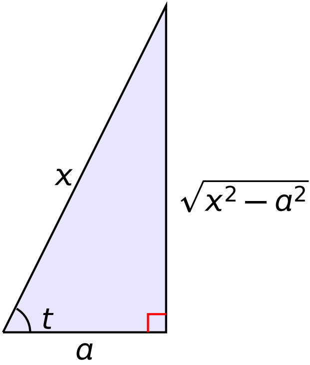


**例 14** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

**解** 当 $x>0$ 时,设 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\quad \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}&=\int\frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t}=\int\sec t\,\mathrm{d}t\\&=\ln|\sec t+\tan t|+C_1\\&=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_2\end{aligned}$$



**解（续）** 当 $x<0$ 时,设 $x=-u$, 那么 $u>0$, 利用上段结果,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} \\
&= -\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)+C_2 \\
&= -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2 \\
&= \ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C_2 \\
&= \ln\left(-x-\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2-\ln a^2 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C
\end{aligned}
$$

从而

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C
$$

练习 8　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

练习 9　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

**注记** 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定。

**例 15** 求 $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ （三角代换很繁琐）

**解** 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则$x^2=t^2-1$, $x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C$$

# 倒代换

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

**例 16** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x$

**解** 令 $x=\dfrac{1}{t} \Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$,则

$$\int \frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int \frac{t^6}{1+2t^7}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right|+C$$

$$=-\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right|+\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

例 17　求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解　令 $x=\frac{1}{t}$, 则$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2$$

$$\overset{u=t^2}{=\!=\!=} -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$= -\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3 + \sqrt{1+u} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

注记　当被积函数含有两种或两种以上的根式时 $\sqrt[k]{x}, \ldots, \sqrt[l]{x}$时，可令$x = t^n$（$n$为各根指数的最小公倍数）

例 18　求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解　令 $x = t^6$则 $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 6(t - \arctan t) + C \\
&= 6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan(\sqrt[6]{x})\right) + C
\end{aligned}$$

例 19　求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

解　令 $t^6 = x+1$，则$6t^5\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1}$$

$$+ 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C$$

**练习 10** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

**解** $6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+C$

**注记** 当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, . . . . . ., 可将无法处理的部分设为 $t$

**例 20** 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

**解** 令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$, 则 $\dfrac{1+x}{x}=t^2$, $x=\dfrac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$.

于是

# 简单无理函数代换

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x &= -\int \left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \\ &= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = -2t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\ &= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right| + C\end{aligned}$$

**例 21** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.

**解** 令$t=\sqrt{1+e^x}$, 则 $e^x=t^2-1$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $dx=\dfrac{2t}{t^2-1}\,dt$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx=\int \frac{2}{t^2-1}\,dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C$$

注记　当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$,可以使用根号内配方法

例 22　求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解　易知

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| - \tan\frac{t}{2} + c \\
&= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.
\end{aligned}
$$

**练习 11**　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ........................ $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$ ........................ $\dfrac{2\sqrt{x-3}(x+6)}{3}+C$

| | |
|---|---|
| 第二节 | 换元积分法 |
| 2.1 | 第一类换元法 |
| 2.2 | 第二类换元法 |
| 2.3 | 小结 |

两类积分换元法:

1. 第一类换元（凑微分）
$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))=\left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$
2. 第二类换元
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t))=\left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$
   1. 三角代换
   2. 倒代换
   3. 根式代换

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C \tag{1}$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{3}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{4}$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C \tag{5}$$

# 积分公式大全

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{6}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{7}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{8}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \tag{9}$$

# 积分公式大全

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{10}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{11}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \tag{12}$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \tag{13}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{14}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \tag{15}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \tag{16}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \tag{17}$$

第一节 不定积分的概念与性质

第二节 换元积分法

第三节 分部积分法

第四节 有理函数的积分