高等数学–微积分(一)

第五章·不定积分

2020 年 12 月 28 日

■ 统计与数学学院　■ 王官杰

第一节	不定积分的概念与性质
1.1	原函数与不定积分的概念
1.2	不定积分的几何意义
1.3	不定积分的性质
1.4	基本积分表
1.5	小结与复习

一般地，已知函数$y=f(x)$, 容易求出$y'=f'(x)$。

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\mathrm{e}^x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=\ln x$

定义 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系：对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例 1 因 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例 2 $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

(1) 原函数不止一个

(2) 同一个函数的任意两个原函数之间最多相差一个常数C.

定理 (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x)$$

简单地说,连续函数一定有原函数.

注记 初等函数的原函数不一定还是初等函数。

定义 函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数,称为 $f(x)$ 的**不定积分**, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中, 我们称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

例 3　求函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分.

例 4　求函数 $f(x)=\sin x$ 的不定积分.

练习 1　求不定积分.

(1) $\int x\,\mathrm{d}x$

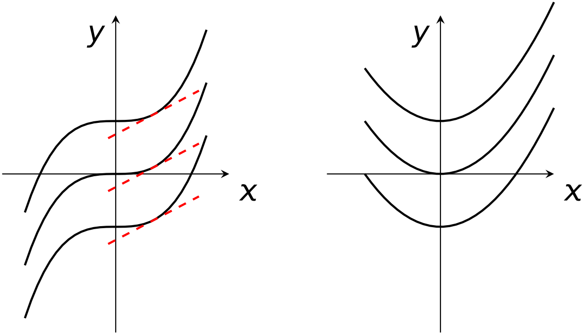
(2) $\int x^2\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

例 5　求函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的不定积分.

例 6　求过点$(1,3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

不定积分的几何意义



(a) $y = x^3 + C$ (b) $y = x^2 + C$

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线. 显然，求不定积分得到一积分曲线族,在同一横坐标$x = x_0$处,任一曲线的切线有相同的斜率.

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x) + C$

性质 2　非零的常数因子,可以移到积分号前面.即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3　两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

注:　上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合。

积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式。

例如，由

$$(x^{a+1})' = (a+1)x^{a}$$

可得

$$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C.$$

类似地，我们有如下基本积分公式。

基本积分公式I

1. $$\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$$
2. $$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$$
3. $$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

例 7　求不定积分

(1) $\displaystyle\int (2x + 5x^2 + 7x^3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int (2x + 1)^2\,\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分

(1) $\displaystyle\int (1-2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

练习 3　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

基本积分公式II

4 $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$

5 $\int a^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

例 8 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int (4\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}})\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$

练习 4 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int (x^2 + 2^x)\,\mathrm{d}x$

基本积分公式III

6. $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7. $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8. $$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

9. $$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

例 9 求不定积分

(1) $\displaystyle\int(\sin x+2\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

练习 5 求不定积分

(1) $\displaystyle\int\cot^2 x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

10 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

11 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

例 10 求不定积分:

(1) $$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

练习 6 求不定积分:

(1) $$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

基本积分公式V

12 $\displaystyle\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

13 $\displaystyle\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

第一节 不定积分的概念与性质

小结

1. 原函数的概念：$F'(X) = f(x)$;
2. 不定积分的概念： $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$;
3. 求微分与求不定积分的互逆关系
4. 基本积分公式

基本积分公式I

1. $\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^{a} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + C$

基本积分公式II

4 $\int e^x \, dx = e^x + C$

5 $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

基本积分公式III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

基本积分公式IV

10 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

基本积分公式V

12 $\displaystyle\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$

13 $\displaystyle\int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$

复习 1 求不定积分

(1) $$\int (\sin x - 2e^x)\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

(3) $$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

第一节 不定积分的概念与性质

第二节 换元积分法

第三节 分部积分法

第四节 有理函数的积分