第八章历年期末试题

1. (2017 年) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:
①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;
②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都连续;
③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;
④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都存在.
若用"$P \Rightarrow Q$" 表示性质 P 推出性质 Q, 则有 (　)
(A) ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ①　**(B)** ③ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ①　**(C)** ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④　**(D)** ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ①

2. (2016 年) 二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极大值点是 (　).
(A) $(1,0)$　**(B)** $(-3,2)$　**(C)** $(-3,0)$　**(D)** $(1,2)$

3. (2014 年) 设 $z=\sin(xy)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ (　).
(A) $y\sin(xy)$　**(B)** $-y\sin(xy)$　**(C)** $y\cos(xy)$　**(D)** $-y\cos(xy)$

4. (2014 年) 如果 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, 则二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 (　).
(A) 一定连续　**(B)** 一定偏导数存在
(C) 一定可微　**(D)** 一定有极值

5. (2013 年) 设 $z=xe^{xy}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　).
(A) xye^{xy}　**(B)** e^{xy}　**(C)** x^2e^{xy}　**(D)** $(1+xy)e^{xy}$

6. (2012 年) 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　).
(A) $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$　**(B)** $\dfrac{y}{x^2+y^2}$　**(C)** $\dfrac{x}{x^2+y^2}$　**(D)** $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$

7. (2011 年) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在的 (　).
(A) 充分条件　**(B)** 必要条件　**(C)** 充要条件　**(D)** 无关条件

8. (2011 年) 函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在其定义域上 (　)．

(A) 有极大值无极小值　　(B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值　　(D) 无极大值无极小值

[另附] 函数 $f(x,y)=xy$ 在其定义域上 (　)．

(A) 有极大值无极小值　　(B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值　　(D) 无极大值无极小值

9. (2010 年) 设 $z=\sqrt{\ln(xy)}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　)．

(A) $\frac{1}{x\sqrt{\ln(xy)}}$　　(B) $\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$　　(C) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$　　(D) $\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}$

10. (2017 年) 设 $z=x^2e^y+y^2\sin x$, 则 $\mathrm{d}z|_{(\pi,0)}=$__________．

11. (2017 年) 设二元函数 $z=\int_1^{xy}\ln t\,\mathrm{d}t$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________．

12. (2016 年) 设 $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$, 则 $\mathrm{d}f(x,y)|_{x=1,y=1}=$__________．

13. (2015 年) 设 $z=f(3x-2y,xy)$, 且 $f(u,v)$ 可微, 则全微分 $\mathrm{d}z=$__________

14. (2014 年) 设 $z=f(x\ln y,y-x)$, 且 f 具有一阶连续偏导数，则全微分 $\mathrm{d}z=$__________．

15. (2013 年) 已知函数 $z=\ln\left(1+x^2-y^2\right)$, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$__________．

16. (2012 年) 函数 $z=x^2y+\frac{x}{y}$ 的全微分 $dz=$__________．

17. (2011 年) 设函数 $z=\mathrm{e}^x\sin y$, 则 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=$__________．

18. (2010 年) 函数 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 的定义域是__________．

19. (2017 年) 求二元函数 $z=3x^2-4xy+5y^2-2x-6y+1$ 的极值.

20. (2016 年) 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

21. (2015 年) 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z=xyz$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

22. (2015 年) 求二元函数 $f(x,y)=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

23. (2014 年) 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z=x^3y^2+z$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

24. (2014 年) 设二元函数 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$，试讨论参数 a,b 满足什么条件时，$f(x,y)$ 有唯一极大值，或有唯一极小值。

25. (2013 年) 已知 f 具有二阶连续偏导数，且 $z=f\left(x^2-y^2,xy\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

26. (2013 年) 设 $x^3+y-xyz^5=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

27. (2013 年) 已知直角三角形斜边长为 l，试求两条直角边等于何值时，直角三角形的周长最大？

28. (2012 年) (本题满分 7 分) 已知 f 具有二阶连续偏导数，且 $z=f(xy,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

29. (2012 年) (本题满分 8 分) 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

30. (2012 年) 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

31. (2011 年) 设 $z=\arctan(xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[另附] 设 $z=\arctan(\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

32. (2011 年) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{y}{z}=\ln\frac{z}{x}$ 所确定，求 $\mathrm{d}z$.

33. (2010 年) 已知求函数 $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

34. (**2017 年**) 设二元函数 $F(x, y)$ 在 $\left(x_0, y_0\right)$ 某邻域内具有二阶连续的偏导数，且

$$F\left(x_0, y_0\right)=0,\ F_x\left(x_0, y_0\right)=0,\ F_{xx}\left(x_0, y_0\right)\cdot F_y\left(x_0, y_0\right)\neq 0.$$

证明: 由方程 $F(x, y)=0$ 在 $\left(x_0, y_0\right)$ 某邻域内确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极值.

35. (**2016 年**) 设 $z=f[x+\varphi(y)]$, 其中 f 二次可导, φ 可导, 证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

36. (**2010 年**) 设 $y=f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t)=0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数, 试证

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$