

复习 I

1 集合与函数

函数的定义域

例 1. 求下列函数的定义域：

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 1) \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \quad (3)$$

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；
3. 分母要求不能等于零。

复合函数的分解

例 2. 将函数 $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ 分解为简单函数的复合。

- **简单函数**指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数。
- **基本初等函数**指的是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六种。

2 极限与连续

数列极限

对于数列极限，我们有如下基本公式：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0 \quad (k > 0) \quad (3)$$

函数极限 I

对于 $x \rightarrow \infty$ 的函数极限，我们有如下基本公式：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c = c \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \text{ 为正整数}) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \quad (3)$$

函数极限 II

对于 $x \rightarrow x_0$ 的函数极限，如果 $f(x)$ 是初等函数， x_0 在 $f(x)$ 的定义区间中，则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

左极限和右极限

例 1. 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & x > 1 \end{cases}$$

判断该函数在 $x \rightarrow 0$ 及 $x \rightarrow 1$ 时的极限是否存在.

定理. 极限存在当且仅当左右极限都存在而且相等.

极限的四则运算

各种极限都有四则运算法则:

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) \quad (1)$$

$$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \quad (2)$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (3)$$

等价无穷小代换

例 2. 求下列极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x} \quad (2)$$

事实. 等价无穷小代换有如下特点:

- 我们只有对 $x \rightarrow 0$ 的代换公式;
- 只能对乘除因子代换, 不能对加减项代换.

洛必达法则

例 3. 求下列极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan^3 x} \quad (1)$$

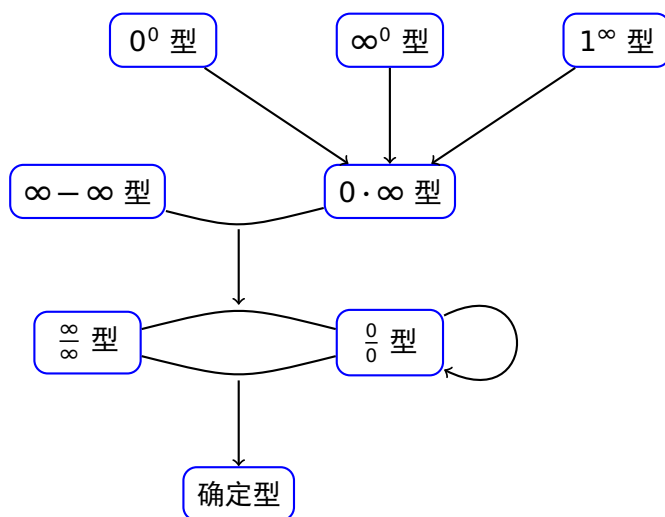
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin x}{\cos 3x} \quad (2)$$

事实. 洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限.

小结

函数极限



关于 1^∞ 型极限

例 4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$.

定理 1. 若 $x \rightarrow \square$ 时, $a(x) \rightarrow 0$, $b(x) \rightarrow \infty$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow \square} (1 + a(x))^{b(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \square} a(x)b(x)}$$

连续与间断

例 5. 求函数 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型. 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \leq 1, x \neq 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x > 1, x \neq 2 \end{cases}$$

注记. 函数的间断点通常在这两种点中出现:

1. 使得分母为零的点;
2. 分段函数的交界点.

3 导数与微分

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

复合函数求导

例 1. 求下列函数的导数：

(1) $f(x) = e^{x^2}$;

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

(3) $f(x) = \cos(\ln x)$.

定理. 设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

隐函数求导

例 2. 对下面的方程求导数 y'_x :

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$;
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$.

4 导数的应用

罗尔定理

定理. 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,
- (3) $f(a) = f(b)$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

拉格朗日定理

定理. 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西定理

定理. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上都连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 内都可导,
- (3) 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

用中值定理证明不等式

例 1. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$.
- (2) 存在两个不同的点 $\theta, \eta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\theta)f'(\eta) = 1$.

思路解析:

- (1) 第一问用零点定理 ($F(x) = f(x) - (1 - x)$).
- (2) 第二问利用第一问结论与拉格朗日中值定理.

$$f(\xi) - f(0) = f'(\theta)\xi, \quad f(1) - f(\xi) = f'(\eta)(1 - \xi)$$

两式相乘, 并用第一问结论即可证明.

单调区间与极值

例 2. 求下列函数的单调区间与极值:

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$;

(2) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

事实. 对于单调区间与极值, 有如下基本结果:

- $f'(x) > 0$ 的区间为单调增加区间;
- $f'(x) < 0$ 的区间为单调减少区间;
- $f'(x) = 0$ 或者不存在的点很可能为极值点.

函数的最值

事实. 一般地, 对于函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最值, 我们只需考虑下述这些可疑点:

- 导数为零的点;
- 导数不存在的点;
- 区间的端点.

事实. 特殊地, 若函数在区间 (开或闭, 有限或无限) 上可导, 且在区间内只有一个驻点, 则有

- 如果该驻点为极大值, 则它也是最大值;
- 如果该驻点为极小值, 则它也是最小值.

凹向与拐点

例 3. 求下列曲线的凹向与拐点:

(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$;

(2) $f(x) = (x - 2)^{\frac{5}{3}}$.

事实. 对于凹向与拐点, 有如下基本结果:

- $f''(x) > 0$ 的区间为凹 (上凹) 区间;
- $f''(x) < 0$ 的区间为凸 (下凹) 区间;
- $f''(x) = 0$ 或者不存在的点很可能为拐点.

曲线的渐近线

例 4. 求曲线 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 的渐近线:

事实. 对于曲线的渐近线, 我们有如下定义:

- 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, 则 $y = b$ 为水平渐近线;
- 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则 $x = a$ 为铅垂渐近线.

边际与弹性

若 $y = f(x)$ 可导, 则变化率 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的**边际函数**.

- 总成本函数 $C(Q) \Rightarrow$ 边际成本 $C'(Q)$
- 总收益函数 $R(Q) \Rightarrow$ 边际收益 $R'(Q)$

若 $y = f(x)$ 可导, 则相对变化律

$$\frac{E_y}{E_x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = y' \frac{x}{y}$$

称为 $f(x)$ 的弹性函数.

5 不定积分

积分公式大全

$$\int 1 \, dx = x + C \quad (4)$$

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \quad (6)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (7)$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \quad (8)$$

积分公式大全

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad (9)$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad (10)$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C \quad (11)$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C \quad (12)$$

积分公式大全

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C \quad (13)$$

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (14)$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \quad (15)$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \quad (16)$$

积分公式大全

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (17)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (19)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (20)$$

第一类换元法

$$\begin{aligned} \int f(\phi(x)) \phi'(x) \, dx &= \int f(\phi(x)) \, d(\phi(x)) \\ &= \left[\int f(u) \, du \right]_{u=\phi(x)} \end{aligned}$$

最常用的积分换元

一般地, 如果 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则有

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

例 1. 求不定积分 $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$.

正弦和余弦换元

例 2. 求不定积分 $\int \sin^2 x \cos x dx$.

第二类换元法

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int f(\psi(t)) d(\psi(t)) \\ &= \left[\int f(\psi(t)) \psi'(t) dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)} \end{aligned}$$

指数函数换元

例 3. 求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1} dx$.

分部积分公式: $\int u dv = uv - \int v du$

例 5. 求不定积分 $\int x \cos x dx$.

例 6. 求不定积分 $\int x e^x dx$.

例 7. 求不定积分 $\int x \ln x dx$.

例 8. 求不定积分 $\int x \arctan x dx$.

例 9. 求不定积分 $\int e^x \sin x dx$.

2. $\int f(\sqrt{x^2 + a^2}) dx$, 令 $x = a \tan t$

3. $\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx$, 令 $x = a \sec t$