概率论与数理统计

第一章 · 随机事件的概率

2021 年 3 月 21 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类:

1. 确定性现象: 在一定条件下必然发生的现象;
2. 不确定性现象: 在一定条件下可能发生也可能不发生的现象.
    1. 个别现象 不能重复试验
    2. 随机现象: 可以重复试验, 并且结果呈现某种规律

- 太阳东升西落 (确定)
- 明天是否是晴天 (不确定)
- 抛一枚均匀的硬币, 正面是否向上 (不确定)

概率论与数理统计就是研究随机现象量的规律性的数学学科.

第一节 随机事件

第二节 随机事件的概率

第三节 条件概率

第四节 事件的独立性

第一节	随机事件
1.1	随机试验与样本空间
1.2	随机事件
1.3	事件的关系与运算

试验

产生观测结果的行为或过程称为试验.

- E1 掷一颗骰子, 观察所掷的点数是几;
- E2 将一枚硬币抛两次, 观察正面 H 出现的次数;
- E3 将一枚硬币抛两次, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况;
- E4 观察某产品的使用寿命;
- E5 观察某地明天的天气是雨天还是非雨天.

一个试验被称为随机试验, 如果它满足条件:

1. 可能结果不止一个, 结果明确;
2. 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

小注: 可以在相同的条件下重复进行的随机试验称为可重复的随机试验 (E1–E4), 否则称为不可重复的随机试验 (E5).

在不引起混淆的情况下, 我们将用随机试验或试验指代可重复的随机试验.

样本空间

随机试验的每个可能结果称为一个样本点，全体样本点组成的集合称为样本空间.

习惯上分别用 ω 和 Ω 表示样本点与样本空间.

样本空间

例 1　求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币, 观察正、反面出现的情况;

$$\{(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)\}$$

(2) 记录某地的最低与最高气温.

$$\{(x, y) | a \le x \le y \le b\}$$

其中 a, b 分别为该地气温的下界和上界.

随机事件

样本空间 Ω 的任意一个子集称为一个随机事件, 简称事件.

事件常用大写字母 A, B, C 等表示.

设 A 是一个事件, 当试验中出现的样本点 $\omega \in A$ 时, 称事件 A 发生.

随机事件

随机事件的分类：

1. 只含一个样本点的事件称为基本事件
2. 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
3. Ω：必然事件
4. $\varnothing$：不可能事件

事件的关系与运算

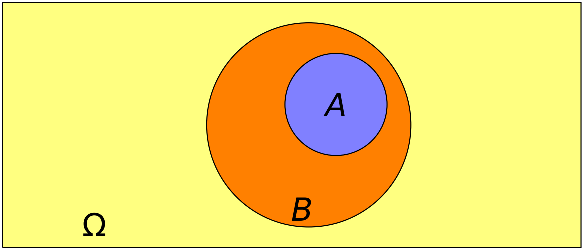
事件是一个集合，因此事件间的关系和运算可以按照集合之间的关系和运算来规定.

设试验 E 的样本空间为 Ω, $A, B, C, A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ 为 Ω 的子集.

事件的关系

若 $A \subset B$ (或 $B \supset A$), 则称事件 A 是事件 B 的子事件

（或事件 B 包含 事件 A）.



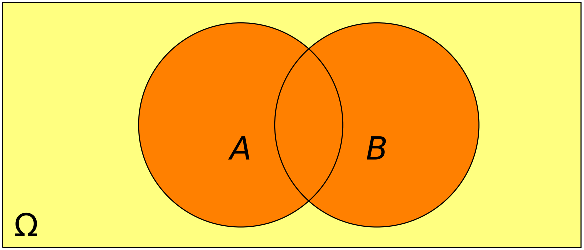
含义: 若事件 A 发生时, 事件 B 一定发生.

小注: 对任意事件 A, 有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 则称事件 A 与 B 相等.

称事件 $A \cup B$ 为事件 A 与 B 的和事件, 其中

$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$



含义: 事件 A、B 至少有一个发生.

事件的运算

事件的和可以推广到多个的情形：如 n 个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \ldots, A_n \text{ 至少有一个发生”}$$

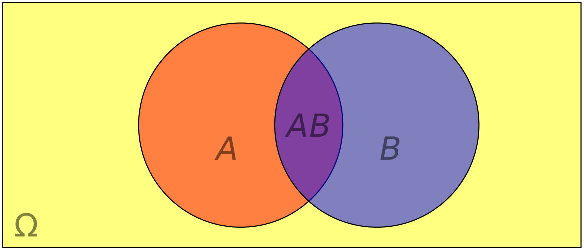
可数个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2 \ldots, \text{ 至少有一个发生”}$$

事件的运算

称事件 $A \cap B$ (简记为 AB) 为事件 A 与 B 的积事件, 其中

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{且} \omega \in B\}.$$



含义: 事件 A 和 B 同时发生.

事件的积可以推广到多个的情形：如 n 个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \ldots, A_n \text{ 全都发生”}$$

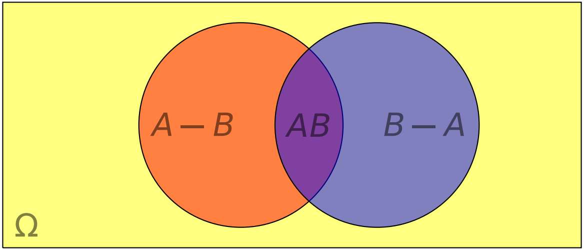
可数个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2 \ldots, \text{ 全都发生”}$$

事件的运算

称事件 $A-B$ 为事件 A 与 B 的差事件, 其中

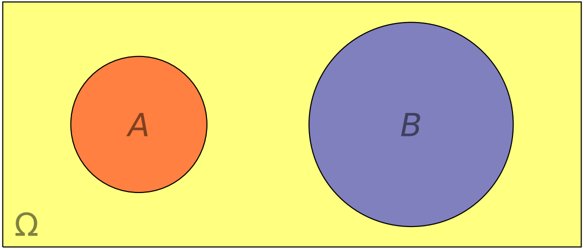
$$A-B=\{\omega|\omega\in A\text{且}\omega\notin B\}.$$



含义: 事件 A 发生, 但 B 不发生.

性质: 对任意两个事件 A 和 B, 总有 $A-B=A-A\cap B$.

若 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).

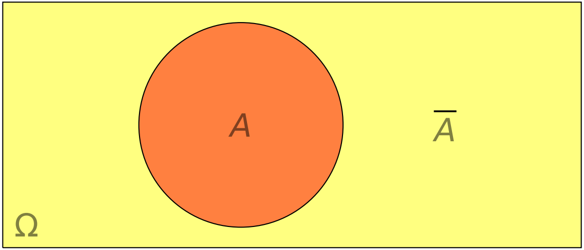


含义: 事件 A 与 B 不可能同时发生.

事件的运算

称 $\Omega - A$ 为事件 A 的对立事件(或逆事件), 记为 $\overline{A}$.

含义: 事件 A 不发生.



性质:

1. 由差事件与对立事件的定义, 显然 $A - B = A \cap \overline{B}$.
2. 事件 A、B 对立当且仅当 A、B 互斥且 $A \cup B = \Omega$.

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算:

1. 交换律: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
2. 结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
4. 对偶律: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

例 2　一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标 $(i = 1, 2, 3)$. 试用事件的运算符号表示下列事件：

(1) 三次射击至少有一次击中目标；

(2) 三次射击恰有两次击中目标；

(3) 三次射击至多有一次击中目标.

解:　有条件可得

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(2) $A_1 A_2 \overline{A}_3 \cup A_1 \overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1 A_2 A_3$.

(3) $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$.

第一节　随机事件

第二节　随机事件的概率

第三节　条件概率

第四节　事件的独立性

事件的概率：刻画试验中随机事件发生的可能性大小的度量.

在概率论的发展历史上, 曾有过多种概率定义方法:

1. 概率的古典定义
2. 概率的统计定义
3. 概率的公理化定义

第二节	随机事件的概率
2.1	事件的频率
2.2	概率的性质
2.3	等可能概型 (古典概型)
2.4	几何概型

事件的频率

定义 1 设在 n 次试验中, 事件 A 发生了 m 次, 则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的频率 (frequency).

历史上的掷硬币试验：

试验者	投掷次数	正面次数	频率
德摩根	2048	1061	0.5181
浦丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

概率的统计定义

在相同条件下重复进行的试验中，若随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近，则称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A) = p$.

也就是说：概率是频率的稳定值.

意义：实际应用中常将大量重复试验中事件的频率作为概率的近似估计.

频率的性质:

1. $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
2. $f_n(\Omega) = 1$, $f_n(\varnothing) = 0$;
3. 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 两两互斥, 则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

定义 2　设 Ω 是样本空间, 对每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应. 若函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件:

1. 非负性: 对任意事件 A, 均有 $P(A) \geq 0$;
2. 规范性: $P(\Omega) = 1$;
3. 可列加性: 若事件序列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 两两互斥, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_n(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率 (probability).

第二节	随机事件的概率
2.1	事件的频率
2.2	概率的性质
2.3	等可能概型 (古典概型)
2.4	几何概型

概率的性质

由概率的定义，不难得出概率的一些性质：

性质 1 $P(\varnothing) = 0.$

证明 因为 $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \cdots$，且 $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$，

由规范性及可列可加性得

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing \cup \cdots) = P(\Omega) + P(\varnothing) + \cdots$$

由概率的非负性可得 $P(\varnothing) = 0.$

性质 2(有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

概率的性质

性质 3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则

$$P(B-A)=P(B)-P(A), P(B) \geq P(A).$$

证明　易知 $B=A \cup (B-A)$, 且 $A \cap (B-A)=\varnothing$.

由概率的可列可加性可知

$$P(B)=P(A \cup (B-A))=P(A)+P(B-A),$$

移项可得

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由概率的非负性可得 $P(B-A) \geq 0$, 即

$$P(B) \geq P(A).$$

推论：对任意事件 A, B, 有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

概率的性质

性质 4 对任一事件 A, $P(A) \leq 1$.

证明: 因为 $A \subset \Omega$, 由性质 3可得.

性质 5对任一事件 A, 有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明　因为 $A \cup \overline{A} = \Omega$, 且 $A \cap \overline{A} = \varnothing$, 由有限可加性可得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

也即

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 6: (加法公式) 对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明: 因为

$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$

且

$$A(B - AB) = \varnothing, \ AB \subset B,$$

由性质 2 和性质 3 可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

推论 1 对任意三个事件 A_1, A_2, A_3, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$- P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3)$$

$$+ P(A_1A_2A_3)$$

推论 2 对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P\left(A_iA_j\right)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P\left(A_iA_jA_k\right) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n).$$

例 1　设 A, B 为两事件, $P(A)=0.3$, $P(A\cup B)=0.6$,

求 $P(A\overline{B})$.

解:　易知

$$A\overline{B}=A(\Omega-B)=A-AB,$$

故

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB).$$

又因为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

所以

$$P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3.$$

例 2　设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，求证 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$

证明　由对偶率易知 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，故

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$$

$$=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)\right]$$

$$=P(AB).$$

第二节	随机事件的概率
2.1	事件的频率
2.2	概率的性质
2.3	等可能概型 (古典概型)
2.4	几何概型

古典概型

对某些特殊类型的随机试验，要确定事件发生的概率，并不需要作重复试验，而是根据人类长期积累的关于"对称性"的实际经验，提出数学模型，直接计算出来，从而给出概率相应的定义．这类试验称为等可能概率模型或古典概型.

古典概型

定义 3　如果一个随机试验具有以下特点:

1. 样本空间只含有限多个元素 (样本点);
2. 基本事件发生的可能性相同,

则称此随机试验是等可能概型或古典概型. 此时对每个事件 $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件 A 的古典概率.

例 3　将一枚硬币抛两次,

(1)　设事件 A_1 为" 恰好出现一次正面”, 求 $P(A_1)$;

(2)　设事件 A_2 为" 至少出现一次正面", 求 $P(A_2)$.

解:　易知试验的样本空间为

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

故

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = 0.5,\ P(A_2) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

计数原理

加法原理： 设完成一件事有 k 类方式，每类方式分别有 $n_1, \ldots, n_k$ 种方法，则完成这件事一共有

$$n_1 + \cdots + n_k$$

种方法.

特点： 一步完成.

乘法原理：设完成一件事有 k 个步骤，每一步需要 $n_1, \ldots, n_k$ 种方法，则完成这件事一共有

$$n_1 n_2 \cdots nk$$

种方法.

特点：多步完成.

计数原理

排列数： 从 n 个元素中取 k 个不同元素排成一列的所有个数，记为 A_n^k.

排列数公式：

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

组合数： 从 n 个不同元素中，取出 $m(m \le n)$ 个元素的所有组合的个数，记为 C_n^k 或 $\binom{n}{k}$.

组合数公式：

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

例 4 (无放回抽样) 设袋中有只 4 白球和 2 只黑球, 现从袋中无放回地依次摸出 2 只球 (即取出的球不放回). 试求

(1) 取到到的两只球都是白球的概率;

(2) 取到的两只球颜色相同的概率;

(3) 到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解: 记 $A = \{$取到到的两只球都是白球$\}$

$B = \{$取到到的两只球都是黑球$\}$

$C = \{$取到到的两只球至少有一白球$\}$

$D = \{$取到到的两只球颜色相同$\}$

(1) 由古典概率模型:

$$P(A) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{2}{5},\ P(B) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{15}.$$

(2) 因为 $D = A \cup B$ 且 $AB = \varnothing$, 故由概率有限可加性,

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{15}$$

因为 $C = \overline{B}$, 故 $P(C) = P(B) = 1 - P(B) = \frac{14}{15}$

例 5　将 n 个球随机地放入 $N(N \geq n)$ 个盒子中去, 盒子的容量不限, 试求

(1) 每个盒子至多有一只球的概率;

(2) n 个盒子中各有一球的概率.

解:　由条件知, 这是一个古典概型问题, 每一种放法是一个基本事件. 因为每个球有 N 种放法, 由乘法原理, 共有 N^n 种放法.

(1) 每个盒子中至多只有一只球, 共有

$$N(N-1)\cdot(N-n+1)$$

种放法, 故所求概率为

$$p=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

(2) n 个盒子的选法有 C_N^n 种方法, 对选定的 n 个盒子, 每个盒子各有一个球的放法有 $n!$ 种. 由乘法原理,

共有 $n!C_N^n$ 种放法, 因此所求概率为

$$p=\frac{n!C_N^n}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

例 6 (抽签的公平性)　袋中有 a 个红球和 b 个白球, 每次从袋中任取一个球且不放回. 用事件 A_n 表示第 n 次取到红球, $1 \le n \le a+b$, 试证明

$$P(A_n) = \frac{a}{a+b},$$

即 A_n 发生的概率与 n 无关.

解:　考虑到取球顺序, 从 $a+b$ 个球中选取 n 个球共有 A_{a+b}^{n} 种取法, 即

$$n(\Omega)=A_{a+b}^{n}=(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1).$$

在第 n 次取到红球共有 a 种取法, 而前面 $n-1$ 次共 A_{a+b-1}^{n-1} 种取法, 即

$$n(A_n)=A_{a+b-1}^{n-1}\cdot a=(a+b-1)\cdots(a+b-n+1)\cdot a.$$

由古典概率模型, 所求的概率为

$$P(A_n)=\frac{n(A_n)}{n(\Omega)}=\frac{a}{a+b}.$$

实际推断原理: 概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不会发生.

例 7 一位常饮奶茶的女士称: 她能从一杯冲好的奶茶中辨别出该奶茶是先放牛奶还是先放茶. 做了 10 次测试, 结果是她都正确地辨别出来了. 问该女士的说法是否可信?

古典概型

解: 假设该女士的说法不可信, 即纯粹是靠运气猜对的. 在此假设下, 每次试验的两个可能结果为:

$$奶 + 茶 \quad 或 \quad 茶 + 奶$$

且它们是等可能的, 因此是一个古典概型问题. 10 次试验一共有 2^{10} 个等可能的结果, 10 次都猜对的概率为:

$$p = \frac{1}{2^{10}} = 0.0009766$$

由实际推断原理, 该女士的说法可信.

第二节	随机事件的概率
2.1	事件的频率
2.2	概率的性质
2.3	等可能概型 (古典概型)
2.4	几何概型

几何概型

古典概型是关于试验的结果为有限个，且每个结果出现的可能性相同的概率模型. 一个直接的推广是：保留等可能性，而允许试验具有无限多个结果的.

定义： 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积或度数) 成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型.

几何概型中，事件 A 的概率：

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

例 8 (会面问题)　甲乙两人相约在早上 8 点到 9 点在某地会面，先到者等候另一人 20 分种，过时则离开．假设两人可以在指定时间内任意时刻到达，试计算两人会面的概率．

解：记 8 点为计算时刻的 0 时刻，以分钟为时间单位，以 x, y 分别表示甲、乙到达的时刻，则样本空间为

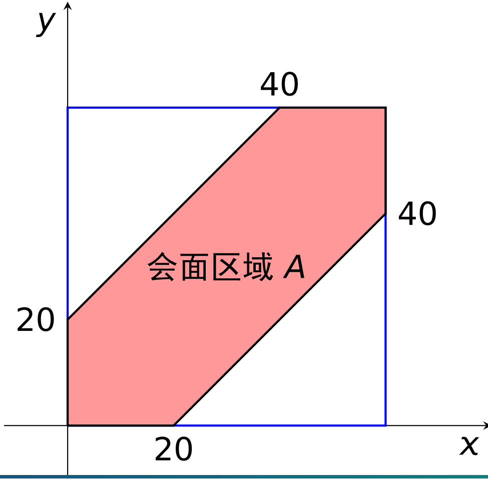
$$\Omega = \{(x, y) | 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\}.$$

甲、乙能够会面的充要条件为

$$|x - y| \le 20,\ (x, y) \in \Omega.$$

样本空间及事件的几何表示如图所示，由几何概型的计算公式得

$$p = S(A)/S(\Omega) = \frac{5}{9}.$$



第一节	随机事件
第二节	随机事件的概率
第三节	**条件概率**
第四节	事件的独立性

第三节	条件概率
3.1	条件概率
3.2	乘法公式
3.3	全概率公式与贝叶斯公式

设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，称为条件概率，记为 $P(B|A)$.

有时为了强调区别，也称 $P(B)$ 为无条件概率.

例 1　一个家庭中有两个小孩，已知其中一个是女孩，问另一个也是女孩的概率是多少？（假定生男生女是等可能的）

解: 由题意, 样本空间为

$$\Omega=\{(\text{男},\text{男}),(\text{男},\text{女})\ (\text{女},\text{男}),(\text{女},\text{女})\}.$$

A 表示事件“至少有一个是女孩”, B 表示事件“两个都是女孩”, 则有

$$A=\{(\text{女},\text{女}),(\text{男},\text{女})\ (\text{女},\text{男})\},$$

$$B=\{(\text{女},\text{女})\}.$$

由于事件 A 已经发生, 所以这时试验的所有可能结果只有三种, 而事件包含的基本事件只占其中的一种, 所以有

$$P(B|A)=\frac{1}{3}$$

在这个例子中，若不知道事件已经发生的信息，那么事件发生的概率为

$$P(B)=\frac{1}{4}\neq P(B|A).$$

原因：事件 A 的发生改变了样本空间.

注意到

$$P(A)=\frac{3}{4}, P(AB)=\frac{1}{4}$$

于是

$$P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率

定义 1 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下, 事件 B 的条件概率.

小注: 条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率 (满足非负性、规范性、可列可加性三个条件).

计算: 根据具体的情况, 可选用下列两种方法之一来计算条件概率 $P(B|A)$

1. 在缩减后的样本空间 Ω_A 中计算;
2. 在原来的样本空间 Ω 中, 直接由定义计算.

例 2　一袋中有 10 个球，其中 3 个黑球，7 个白球，依次从袋中不放回取两球.

(1) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；

(2) 已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率.

解: 记 $A_i = \{$第 i 次取到黑球$\}(i = 1, 2)$.

(1) 第一次取到黑球, 则第二次取到黑球的方法有两种, 所有可取的球有 9 个. 故

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$$

(2) 因为

$$P(A_1A_2) = \frac{3 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{15}, \ P(A_2) = \frac{3}{10},$$

所以

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{2}{9}.$$

例 3　保险公司按年向车主收取保险费，并承担交通事故的赔偿费用．假设车主一年内发生事故的概率为 0.2，连续两年发生事故的概率是 0.08．试解释保险公司的车险浮动费率规则的合理性：

(1) 若第一年内发生了事故，则上调第二年的保险费；

(2) 若第一年内未发生事故，则下调第二年的保险费．

解: 用事件 A 表示第一年发生了事故, 事件 B 表示第二年发生了事故, 则有

$$P(A)=P(B)=0.2,\ P(AB)=0.08.$$

若第一年内发生了事故, 则第二年发生事故的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.08}{0.2}=0.4>P(A)$$

若第一年内未发生事故, 则第二年发生事故的概率为

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.15<P(A)$$

定理 1 (乘法公式) 由条件概率的定义, 得到

1. 如果 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.
2. 如果 $P(B) > 0$, 则有 $P(AB) = P(A|B)P(B)$.

推论: 如果 $P(A_1A_2) > 0$, 则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

更一般地, 若 $P(A_1A_2\cdots A_{n1}) > 0$, 则有乘法公式

$$P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\cdots P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

乘法公式

例 4 一袋中有 a 个白球和 b 个红球．现依次不放回地从袋中取两球．试求两次均取到白球的概率．

解: 记

$$A_i = \{第\ i\ 次取到白球\}(i = 1, 2),$$

要求 $P(A_1A_2)$．显然

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b},\ P(A_2|A_1) = \frac{a-1}{a+b-1},$$

因此

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

例 5　某厂产品的废品率为 4%, 而合格品在中有 75% 是一等品, 求一等品率.

解:　记 A：合格品；B：一等品, 由题意知

$$P(A) = 1 - 4\% = 96\%,\ P(B|A) = 75\%$$

因为 $B \subset A$, 故 $B = BA$, 所以

$$P(B) = P(BA) = P(B|A)P(A) = 0.96 \times 0.75 = 0.72.$$

第三节	条件概率
3.1	条件概率
3.2	乘法公式
3.3	全概率公式与贝叶斯公式

定义 2 设 Ω 为某试验的样本空间, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为一组事件. 如果以下条件成立:

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 两两互斥,
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$

则称 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

例子: 对任意事件 A, A 与 $\overline{A}$ 为样本空间的一个划分.

全概率公式

定理 2 (全概率公式) 设试验 E 的样本空间为 Ω, A 为 E 的事件, 如果 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0, (i = 1, \ldots, n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \ + P(A|B_n)P(B_n).$$

应用: 利用全概率公式, 可以把复杂事件概率的计算问题, 化为若干互不相容的简单情形, 分别求概率然后求和.

证明 因为 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是 Ω 的一个划分, 所以

$$A = A \cap \Omega = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$$

$$(AB_i)\big(AB_j\big) = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i = 1, \ldots, n$$

由概率的可加性及乘法公式, 有

$$P(A) = (AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n)$$

$$= P(AB_1) + \cdots + P(AB_n)$$

$$= P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

例 6　两个车间生产同型号的家电．第 1 车间的次品率为 0.15, 第 2 车间的次品率为 0.12．两个车间生产的成品混放在一起, 假设第 1,2 车间生产的成品比例为 2 : 3．在仓库中随机地取一件成品, 求它是次品的概率;

解:　记 $A = \{$从仓库种取到的是次品$\}$,

$B_i = \{$产品是第 i 车间生产的$\}$;

易知 B_1, B_2 是样本空间的一个划分, 由全概率公式得:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_1)P(B_2)$$

$$= 0.15 \times \frac{2}{5} + 0.12 \times \frac{3}{5} = 0.132$$

例 7　假设在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率. 经分析, 该时期内利率下调的概率为 60%, 利率不变的概率为 40%. 根据经验, 在利率下调时某支股票上涨的概率为 80%, 在利率不变时, 这支股票上涨的概率为 40%. 求这支股票上涨的概率.

解:　设 B_1, B_2 表示事件 “利率上调” 和 “利率不变”, A 表示事件" 股票上涨", 易知 $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 B_2 = \varnothing$, 由全概率公式:

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\
= 80\% \times 60\% + 40\% \times 40\% \\
= 64\%
\end{aligned}
$$

贝叶斯公式

定理 3 如果 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, A 是一个事件, 且 $P(B_i) > 0, P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}, i = 1, \cdots, n.$$

证明 由乘法公式可知

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

又由全概率公式可得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \quad + P(A|B_n)P(B_n).$$

故结论成立.

贝叶斯公式

贝叶斯公式于 1763 年由贝叶斯 (Bayes) 给出．它是在观察到事件 A 已发生的条件下，寻找导致 A 发生的每个原因 B_i 的概率．

在贝叶斯公式中，$P(B_i)$ 和 $P(B_i|A)$ 分别称为原因 B_i 的先验概率和后验概率．

先验概率常常根据等可能的假设或者以往的数据积累来确定．是在没有进一步信息（不知道事件 A 是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识．

而在得到进一步的信息之后（知道事件 A 已经发生），我们得以对各个可能原因发生的概率重新加以修正

例 8 由医学统计数据分析可知，人群中患由某种病菌引起的疾病占总人数的 0.5%．一种血液化验以 95% 的概率将患有此疾病的人检查出呈阳性，但也以 1% 的概率误将不患此疾病的人检验出呈阳性．现设某人检查出呈阳性反应，问他确患有此疾病的概率是多少？

解: 记“检出阳性”为事件 A, " 被检者患病" 和“被检者不患病”分别为事件 B_1, B_2, 则

$$P(B_1) = 0.005, P(B_2) = 0.995$$

$$P(A|B_1) = 0.95, P(A|B_2) = 0.01$$

由贝叶斯公式可得:

$$P(B_1|A) = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.01} \approx 0.323.$$

例 9 玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0,1,2 只残次品的概率相应地为 0.8,0.1 和 0.1．一顾客欲买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随机地查看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回．试求：

(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率 α；

(2) 在顾客买下的一箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率 β.

解: 记" 顾客买下该箱玻璃杯" 为事件 A，“箱中有 i 只残次品 $(i=0,1,2)$” 为事件 B_i 显然 B_0, B_1, B_2 为

的一个划分，由题意:

$$P(B_0)=0.8, P(B_1)=0.1, P(B_2)=0.1, P(A|B_0)=1.$$

$$P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}, P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

解: (1) 由全概率公式, 有:

$$\alpha = P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A|B_i)P(B_i)$$

$$= 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} \approx 0.94$$

(2) 由贝叶斯公式, 有:

$$\beta = P(B_0|A) = \frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)} \approx \frac{0.8}{0.94} \approx 0.85$$

两个事件的独立性

设有两个事件 A, B, 一般来说, $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 是有差异的, 但有时事件 A 的发生与否并不影响事件 B 发生的概率, 即 $P(B|A) = P(B)$.

例 1　袋中有 6 个白球, 2 个黑球, 从中有放回地抽取两次, 每次取一球, 记 A = 第一次取到白球, B = 第二次取到白球, 则有

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & P(B) &= \frac{8\times 6}{8^2} = \frac{3}{4} \\
P(AB) &= \frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}, & P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

因此 $P(B|A) = P(B)$. 同理可得 $P(B|A) = 3/4 = P(B)$.

小注: 这就是说, 已知事件 A 发生, 并不影响事件 B 发生的概率, 这时称事件 A, B 独立.

由乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A),$$

当事件 A, B 独立时, 有

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1}$$

当 $P(A) = 0$ 时, 由

$$0 \le P(AB) \le P(A) = 0$$

可知 $P(AB) = 0$, (1) 式仍然成立.

注意: $P(A) = 0$ 时, $P(B|A)$ 没有意义.

两个事件的独立性

定义 1　若两事件 A, B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A, B 独立, 或称 A, B 相互独立.

小注: 用

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

刻划独立性, 比用

$$P(A|B) = P(A) \text{ 或 } P(B|A) = P(B)$$

更好, 它不受 $P(B) > 0$ 或 $P(A) > 0$ 的制约, 且体现对称性.

事件的独立性

在实际应用中，往往根据问题的实际情况去假设事件间的独立性．如

- 投掷硬币（或骰子），我们相信每次的结果都不受以前结果的影响；
- 在相同条件下做实验，一般假定每次的实验误差相互独立；
- 一般假定生产中不同的流程（机器、人）也是相互独立的．

例 2　甲乙二人独立地对目标各射击一次, 设甲射中目标的概率为 0.5, 乙射中目标的概率为 0.6, 求目标被击中的概率.

解:　假设 A, B 分别表示甲乙击中目标, 则 $A \cup B$ 表示目标被击中, 由于 A, B 独立,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.6 \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

定理 1 若事件 A 与 B 独立, 则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别独立.

证明 因为 $P(AB) = P(A)P(B)$, 所以

$$
\begin{aligned}
P(A\overline{B}) &= P(A(\Omega - B)) = P(A - AB) \\
&= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)[1 - P(B)] \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

由对称性知, $\overline{A}$ 与 B 相互独立. 利用第一条结论, 可得 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

互斥与独立的关系

“两个事件互斥”和“两个事件相互独立”是不同的概念：

- 互斥 $\Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 独立 $\Longrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

但两者也有关系：如果 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$, 则两者不可能既是互斥的又是独立的.

两个事件的独立性

小注: 若 A 与 B 相互独立, 且 B 与 C 相互独立, 则 A 与 C 未必相互独立.

例子　从全体有两个孩子的家庭中随机选择一个家庭, 并考虑下面三个事件:

1. A 为"第一个孩子是男孩",
2. B 为"两个孩子不同性别",
3. C 为"第一个孩子是女孩".

容易验证 A 与 B 相互独立, B 与 C 相互独立, 但是 A 与 C 不独立.

定义 2

设 A_1, A_2, A_3 是三个事件, 如果

1. 两两独立 $\begin{cases} P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) \end{cases}$
2. $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立.

多个事件的独立性

定义 称 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立, 如果对任意一组指标

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \quad (k \geq 2)$$

都有

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

多个事件的独立性

性质 设 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立, 则

1. 其中任意 $k(k \geq 2)$ 个事件也是相互独立的.
2. 将若干个 A_i 用 $\overline{A_i}$ 替换后, 得到的新事件集也相互独立.
3. 特别地, 我们有

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdots P\left(\overline{A}_n\right)$$
$$= 1 - \prod_1^n [1 - P(A_i)]$$

例 3 (保险赔付)　设有 n 个人向保险公司购买人身意外保险（保险期为 1 年），假定投保人在一年内发生意外的概率为 0.01. 求

(1) 保险公司赔付的概率;

(2) 当 n 为多大时, 使得以上赔付的概率超过 1/2.

小注:每个人是否发生意外可以看作是相互独立的.

解: 记 $A_i = \{$第 i 个投保人出现意外$\}(i=1,2,\ldots,n)$,

$$A = \{\text{保险公司赔付}\}$$

(1) 因为 $A_1,\ldots,A_n$ 相互独立, 且 $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$, 我们有

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A}_i\right) = 1 - (0.99)^n.$$

(2) 注意到 $P(A) \geq 0.5$ 等价于 $(0.99)^n \leq 0.5$, 我们有

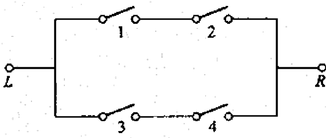
$$n \geqslant \frac{\lg 2}{2 - \lg 99} \approx 68.416$$

即当投保人数大于等于 69 人时, 赔付的概率超过 1/2.

例 4　设有电路如下图所示, 其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点, 设各继电器接点闭合与否是相互独立的, 且每一继电器接点闭合的概率均为 p, 求 L 至 R 为通路的概率.

解:　设 $A_i=\{$第 i 个继电器闭合$\}$,

$A=\{L$ 至 R 是通路$\}$,



由 $A=A_1A_2\cup A_3A_4$ 及 A_1,A_2,A_3,A_4 的独立性可得

$$P(A)=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)$$

$$-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$=2p^2-p^4$$

例 5　据以往记录的数据分析, 某船只运输某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2% (记这一事件为 A_1), 损坏 10% (记这一事件为 A_2), 损坏 90% (记这一事件为 A_3). 且 $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05.$

设物品件数很多, 取出一件后不影响后一件取的是否为

好品的概率, 现从已被运输的物品中随机地取 3 件, 发

现这三件都是好的（记这一事件为 B ）, 试求 $P(A_1|B)$.

解: 在被运输的物品中, 随机取 3 件, 相当于在物品中抽取 3 次, 每次取一件, 作不放回抽样. 由于抽取一件后, 不影响取后一件是否为好品的概率, 已知当 A_1 发生时, 一件产品是好品的概率为 $12\% = 98\%$. 由独立性可知, 随机取 3 件, 它们都是好品的概率为

$$P(B|A_1) = 0.98^3.$$

同理可得

$$P(B|A_2) = 0.9^3, P(B|A_3) = 0.1^3.$$

由条件知 $P(A_1)=0.8, P(A_2)=0.15, P(A_3)=0.05, A_iA_j=\varnothing(i\neq j, i,j=1,2,3)$ 且

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$$

由贝叶斯公式可得:

$$\begin{aligned}P(A_1|B)&=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}\\&=\frac{(0.98)^3\times 0.8}{0.8624}=0.8731\end{aligned}$$