高等数学 B--微积分 (一)

# 第五章 · 不定积分

2021 年 3 月 18 日

■ 统计与数学学院　■ 王官杰

| 第一节 | 不定积分的概念与性质 |
|---|---|
| 1.1 | 原函数与不定积分的概念 |
| 1.2 | 不定积分的几何意义 |
| 1.3 | 不定积分的性质 |
| 1.4 | 基本积分表 |
| 1.5 | 小结与复习 |

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\mathrm{e}^x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=\ln x$

**定义** 若定义在区间 $I$ 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系:对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或} \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的一个原函数.

**例 1** 因 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

**例 2** $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2 + 2)' = 2x$, 因此 $x^2$ 和 $x^2 + 2$ 都是 $2x$ 的原函数.

(1) 原函数不止一个

(2) 同一个函数的任意两个原函数之间最多相差一个常数 $C$.

**定理 (原函数存在定理)** 如果函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 则在区间 $I$ 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x)$$

简单地说, 连续函数一定有原函数.

**注记** 初等函数的原函数不一定还是初等函数.

**定义**　函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中，我们称 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，$x$ 为积分变量.

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

**例 3** 求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分.

**例 4** 求函数 $f(x) = \sin x$ 的不定积分.

**练习 1** 求不定积分.

(1) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x$

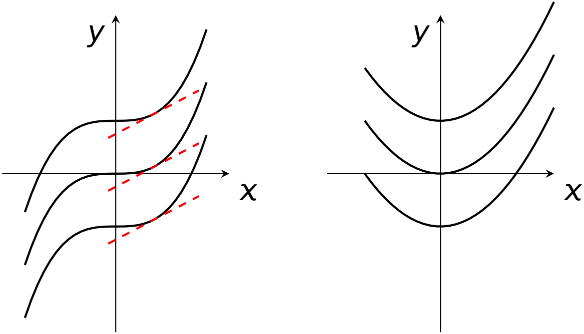
(2) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

例 5　求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

例 6　求过点 $(1, 3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

| | |
|---|---|
| 第一节 | 不定积分的概念与性质 |
| 1.1 | 原函数与不定积分的概念 |
| 1.2 | 不定积分的几何意义 |
| 1.3 | 不定积分的性质 |
| 1.4 | 基本积分表 |
| 1.5 | 小结与复习 |




(a) $y = x^3 + C$　　(b) $y = x^2 + C$

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 显然，求不定积分得到一积分曲线族, 在同一横坐标 $x = x_0$ 处, 任一曲线的切线有相同的斜率.

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x) + C$

性质 2　非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3　两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

注：　上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合.

积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

例如，由

$$(x^{a+1})' = (a+1)x^a$$

可得

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C.$$

类似地，我们有如下基本积分公式.

# 基本积分公式 I

1. $\int 1 \, dx = x + C$
2. $\int x^a \, dx = \dfrac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
3. $\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

**例 7**　求不定积分

(1) $\displaystyle\int (2x+5x^2+7x^3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int (2-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分

(1) $\int (1-2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int (\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int (\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$

练习 3　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

# 基本积分公式 II

4 $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C$

5 $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

例 8　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int (4\mathrm{e}^{x} - x^{\mathrm{e}})\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x$

练习 4　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int (x^{2} + 2^{x})\,\mathrm{d}x$

# 基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

7 $$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

8 $$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$$

9 $$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

**例 9**　求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

**练习 5**　求不定积分

(1) $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$

# 基本积分公式 IV

10 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

11 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

例 10　求不定积分：

(1) $$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

练习 6　求不定积分：

(1) $$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

# 基本积分公式 V

12 $\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$

13 $\int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$

# 小结

1. 原函数的概念：$F'(X) = f(x)$;
2. 不定积分的概念：$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$;
3. 求微分与求不定积分的互逆关系
4. 基本积分公式

# 基本积分公式 I

1. $\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\displaystyle\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

# 基本积分公式 II

4 $\displaystyle\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$

5 $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

# 基本积分公式 III

6 $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$

7 $\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$

8 $\displaystyle\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$

9 $\displaystyle\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$

10 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

# 基本积分公式 V

12 $$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

13 $$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

**复习 1** 求不定积分

(1) $\int (\sin x - 2e^x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

| | |
|---|---|
| 第一节 | 不定积分的概念与性质 |
| 第二节 | 换元积分法 |
| 第三节 | 分部积分法 |
| 第四节 | 有理分式的积分 |

| | |
|---|---|
| 第二节 | 换元积分法 |
| 2.1 | 第一类换元法 |
| 2.2 | 第二类换元法 |
| 2.3 | 小结 |

**例 1**　求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

**解决方法：** 设置中间变量，并利用复合函数求导法则.

**解**　令 $u=2x+1$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$, 于是

$$\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x=\int u^{10}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{22}u^{11}+C=\frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C.$$

一般地，设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u) = f(u), \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C.$$

如果 $u = \phi(x)$ 可微, 则由链式法则，有

$$\mathrm{d}F(\phi(x)) = F'(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\phi(x)) + C = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}.$$

**定理 (第一类换元法)** 设 $f(u)$ 具有原函数, $\phi(x)$ 可导，则有

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

**注记** 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 化为 } \int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

第一类换元法也称为凑微分法.

# 常用的积分换元 I

1. $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\mathrm{d}\left(x^n\right)$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln|x|) = \ln a\,\mathrm{d}\left(\log_a|x|\right)(a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$
4. $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
5. $a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\mathrm{d}\left(a^x\right)(a>0 \text{ 且 } a \neq 1);$
6. $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$
7. $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$

## 常用的积分换元 II

8 $$\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$$

9 $$\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$$

10 $$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x) = -\mathrm{d}(\arccos x)$$

11 $$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x) = -\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)$$

**例 2** 求不定积分 $\int \sin 2x \, \mathrm{d}x$.

**解 (解法 1)** $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, \mathrm{d}(2x)$

令 $u = 2x$, 则上式等于

$$\frac{1}{2} \int \sin u \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

**解 (解法 2)** $\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = 2 \int \sin x \cos x \mathrm{d}x = 2 \int \sin x \, \mathrm{d} \sin x$

令 $u = \sin x$, 则上式等于

$$2 \int u \, \mathrm{d}u = u^2 + C = (\sin x)^2 + C.$$

解 (解法 3) $\int \sin 2x \, dx = 2\int \sin x \cos x dx = -2\int \cos x \, d\cos x$

令 $u = \cos x$, 则上式等于

$$-2\int u \, du = -u^2 + C = -(\cos x)^2 + C$$

注记　观察点不同，所得结论不同.

**例 3** 求不定积分

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$$

(2) $$\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$$

**练习 1**　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$

例 4　求不定积分

(1) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分

(1) $$\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

**例 5** 求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ ........................ $\displaystyle\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx$ ..................... $\displaystyle\frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx$ ........................ $\displaystyle\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

**练习 3** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ （$a>0$） ..................... $\displaystyle\arcsin\frac{x}{a}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$ ........................ $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

**例 6**　求不定积分

(1) $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$ ..... $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

(2) $\int \sin^3 x \, dx$ ........................ $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

> 形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 的解题思路：$m, n$ 有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分.

**练习 4**　求不定积分

(1) $\int \cos^6 x \sin x \, dx$ ........................ $-\frac{1}{7}\cos^7 x + C$

(2) $\int \cos^5 x \, dx$ ............... $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

**例 7** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,\mathrm{d}x \dotfill \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x \dotfill -\ln|\cos x|+C$

(3) $\displaystyle\int \csc x\,\mathrm{d}x \dotfill \ln|\csc x-\cot x|+C$

**练习 5** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x \dotfill \ln|\sin x|+C$

(2) $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x \dotfill \ln|\sec x+\tan x|+C$

例 8　求不定积分 $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

形如 $\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x$ 的解题思路：$m, n$ 都是偶数时，使用 $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ 或 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 降幂.

练习 6　求不定积分 $\int \cos^2 2x \, \mathrm{d}x$.

例 9　求 $\int \cos 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x$

解　易知 $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$ 于是

$$\int \cos 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$$

形如 $\int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x$ 的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

**例 10** 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

**解** 由条件可得

$$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x-\int \frac{(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C$$

形如 $\displaystyle\int \frac{a\sin x+b\cos x}{A\sin x+B\cos x}dx$ 的解题思路:

令 $a\sin x+b\cos x = m(A\sin x+B\cos x)+n(A\sin x+B\cos x)'$ 拆项.

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$

解决方法： 改变中间变量的设置方法.

过程： 令 $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$, 于是

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \cdots\cdots$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

**定理 (第二类换元法)** 若 $x = \phi(t)$ 是单调、可导的函数，而且 $\phi'(t) \neq 0$，则有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t))$$

$$= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

**例 11** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x-\ln(e^x+1)+C$

**练习 7** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \arctan(e^x)+C$

# 常用变量代换

常用的变量代换

1. 三角代换
2. 倒代换
3. 简单无理函数代换

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 令$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2}\Longrightarrow a\cos t$

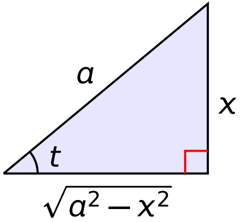
(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 令$x=a\tan t$, $\sqrt{a^2+x^2}\Longrightarrow a\sec t$

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2}\Longrightarrow a\tan t$

例 12　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解　令 $x = a\sin t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int 1\,\mathrm{d}t = t + C$$
$$= \arcsin\frac{x}{a} + C$$

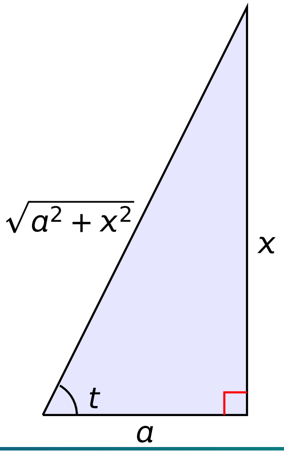


**例 13** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

**解** 设 $x = a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t, \quad \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$

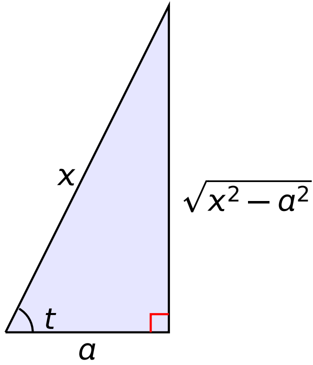


**例 14** 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

**解** 当 $x>0$ 时, 设 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\quad \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t}=\int \sec t\,\mathrm{d}t\\
&=\ln|\sec t+\tan t|+C_1\\
&=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1\\
&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a+C_1\\
&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_2
\end{aligned}$$



**解 (续)** 当 $x<0$ 时, 设 $x=-u$, 那么 $u>0$, 利用上段结果,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} \\
&= -\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)+C_2 \\
&= -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2 \\
&= \ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C_2 \\
&= \ln\left(-x-\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2-\ln a^2 \\
&= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C
\end{aligned}
$$

从而

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C
$$

练习 8　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

练习 9　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

**注记** 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的，需要根据被积函数的情况决定.

**例 15** 求 $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ （三角代换很繁琐）

**解** 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则 $x^2=t^2-1$, $x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C$$

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x = \dfrac{1}{t}$.

**例 16** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x$

**解** 令 $x = \dfrac{1}{t} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 则

$$\int \frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \frac{t^6}{1+2t^7}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right| + C$$

$$= -\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right| + \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

例 17　求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. (分母的阶较高)

解　令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2 \\
&\xlongequal{u=t^2} -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u) \\
&= -\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3 + \sqrt{1+u} + C \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C
\end{aligned}
$$

注记　当被积函数含有两种或两种以上的根式时 $\sqrt[k]{x},\ldots,\sqrt[l]{x}$ 时，可令 $x=t^n$（$n$ 为各根指数的最小公倍数）

例 18　求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解　令 $x=t^6$ 则 $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6t^5}{t^3\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 6(t-\arctan t)+C \\
&= 6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan(\sqrt[6]{x})\right)+C
\end{aligned}
$$

例 19　求积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

解　令 $t^6 = x+1$，则 $6t^5\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1}$$

$$+ 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C$$

练习 10　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}$

解　$6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + C$

**注记** 当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, . . . . . ., 可将无法处理的部分设为 $t$

**例 20** 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x.$

**解** 令 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} = t$, 则 $\dfrac{1+x}{x} = t^2$, $x = \dfrac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x = -\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$.

于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x &= -\int \left(t^2-1\right)t\frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \\
&= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = -2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \\
&= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C
\end{aligned}
$$

例 21　求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, 则 $\mathrm{e}^x=t^2-1$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1\right)-x+C$$

注记　当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以使用根号内配方法

例 22　求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解　易知

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2\cos^2 \frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| - \tan\frac{t}{2} + c \\
&= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.
\end{aligned}
$$

**练习 11**　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ...................... $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$ ......................... $\dfrac{2\sqrt{x-3}(x+6)}{3}+C$

两类积分换元法:

1. 第一类换元（凑微分）
$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$
2. 第二类换元
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$
    1. 三角代换
    2. 倒代换
    3. 根式代换

# 积分公式大全

(1) $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

(2) $$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

(3) $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

(4) $$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

(5) $$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$

# 积分公式大全

(6) $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

(7) $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

(8) $$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

(9) $$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

# 积分公式大全

$$(10)\qquad \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$(11)\qquad \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$(12)\qquad \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$(13)\qquad \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

(14) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

(15) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

(16) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(17) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

第一节　不定积分的概念与性质

第二节　换元积分法

**第三节　分部积分法**

第四节　有理分式的积分

# 分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 具有连续导数，则

$$\int uv'\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int vu'\,\mathrm{d}x=uv-\int v\,\mathrm{d}u$$

**证明**　由 $(uv)'=u'v+uv'$ 可得

$$uv'=(uv)'-u'v$$

故结论成立.

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ ............... $x\sin x+\cos x+C.$

例 2　求不定积分 $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ .......... $x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+C.$

注记　若被积函数是幂函数和正（余）弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 $u$，使其降幂一次（假定幂指数是正整数）

**练习 1** 求不定积分：

(1) $\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$ ............. $(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$

(2) $\int x\mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$ .............................. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{4}+C.$

例 3　求不定积分 $\int \ln x \, dx$ ........................ $x\ln x - x + C$.

例 4　求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

注记　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 $u$.

练习 2　求不定积分：

(1) $\int x\ln x\,dx$ ............................ $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

(2) $\int \arcsin x\,dx$ .................... $x\arcsin x+\sqrt{(1-x^2)}+C$

**例 5** 求积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

**解** 由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, d\left(e^x\right) = e^x \sin x - \int e^x \, d(\sin x) \\
&= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int \cos x \, d\left(e^x\right) \\
&= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x\right) \\
&= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

**例 6**　已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $e^{-x^2}$, 求 $\int xf'(x)dx$.

**解**　由分部积分得

$$\int xf'(x)dx = \int x\, d[f(x)] = xf(x) - \int f(x)dx.$$

因为 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x)dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 $x$ 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$, 所以

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

例 7　求不定积分 $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \, \mathrm{d}x.$

解　由分部积分得

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

于是 $I_{n+1} = \dfrac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2na^2} I_n$，即

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} I_{n-1}.$$

## 小结

分部积分的关键在于选择合适的 $u$ 和 $\mathrm{d}v$：

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\,(\mathrm{e}^x)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\,(\sin x)$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$

**定义 1** 如果 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数 (分式).

- 如果 $P(x)$ 次数 $< Q(x)$ 次数，则称它为真分式;
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

**定理 1** 假分式 = 多项式 + 真分式

理论上，任何一个有理分式 (真分式) 都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

# 有理分式分解

理论上，任何一个有有理分式 (真分式) 的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和：

4 $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$$

5 $$\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+C(n\geq 2)$$

6 $$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}(n\geq 2)$$ 可以用递推法求出

**定理 2** 设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

**定理 3** 假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

1 分母中若有因式 $(x-a)^k$ 时，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x+a)^k}+\frac{A_2}{(x+a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x+a}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

特别地: $k=1$, 时，分解后为 $\dfrac{A}{x+a}$.

2 分母中若有因式 $\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中 $p^2-4q<0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 $M_i, N_i$ 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

特别地: $k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

于是，将有理函数转化为部分分式之和后，只会出现三种情况：

(1) 多项式

(2) $\dfrac{A}{(x+a)^n}$

(3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

(1) 和 (2) 两种情况的不定积分都比较容易求出，因此只讨论情况 (3).

讨论不定积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

易知 $x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$, 令 $x+\dfrac{p}{2}=t$,

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$, $b=N-\dfrac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记　有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合.

例 1　求 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,dx.$

解　令 $\displaystyle\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=3, \end{cases} \implies \begin{cases} A=-5, \\ b=6, \end{cases}$$ 于是

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}\right)dx$$

$$= -5\ln|x-2| + 6\ln|x-3| + C.$$

例 2　求 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

解　令 $\displaystyle\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$. 右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2A-B+C=0, \\ A=1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=1 \end{cases} \quad \text{故}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

**例 3** 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}$

**解** 令 $\frac{1}{(1+2x)\left(1+x^2\right)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+(A+C)}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{5}, \\ B=-\frac{2}{5}, \\ C=\frac{1}{5}, \end{cases}$$ 故

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left( \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+2x} - \frac{2}{5} \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5} \arctan x + C.
\end{aligned}
$$

**练习 1**　求不定积分

(1) $$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

注记　初等函数的原函数未必都是初等函数．可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$