第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

在一定条件下，我们有下面的洛必达法则：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

未定式

未定式是指如果当$x \to x_0$(或者$\to \infty$)时，两个函数$f(x)$与$g(x)$都趋于零或者趋于无穷大，那么极限$\lim[f(x)/g(x)]$ ($x \to x_0$或者$x \to \infty$）可能存在，也可能不存在，通常把这种极限称为未定式，也称未定型。

1. $\frac{0}{0}$型
2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型
3. $0 \cdot \infty$和 $\infty - \infty$ 型
4. 0^0、1^∞和∞^0型

第二节	洛必达法则
2.1	$\frac{0}{0}$型的洛必达法则
2.2	$\frac{\infty}{\infty}$型的洛必达法则
2.3	$0\cdot\infty$型和$\infty-\infty$型的未定式
2.4	1^{∞}型，0^{0}型和∞^{0}型的未定式

定理 1 如果

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

(2) $f(x)$,$g(x)$在点a的某去心邻域可导, 且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 或为 $\infty)$.

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 或 $\infty)$.

这种用导数商的极限计算函数商的极限的方法称为洛必达法则.

$\frac{0}{0}$型的洛必达法则

几点注意事项：

1. $x \to a$ 改为$x \to \infty$ 仍然成立。
2. 只能对未定式使用洛必达法则，否则讲会出现错误。
3. 如$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍为未定式，在满足条件的前提下，可以继续对$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'}{g'}$
用洛必达法则。

证明.

补充定义$f(a)=g(a)=0$不会影响极限，从而$f(x)$,$g(x)$在以a和x 为端点的闭区间上满足柯西中值定理的条件,因此有

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f(x)}{g(x)} \quad (\xi\text{在}a\text{与}x\text{之间})$$

显然当 $x\to a$ 时 , $\xi\to a$, 对上式取极限,有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

从而定理得证.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}$.

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

练习 1 用洛必达法则求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

(2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

两种方法比较

注记 1　对于$x \to 0$时的$\frac{0}{0}$型极限，现在我们有两种方法可以使用：

(1) 等价无穷小量代换

(2) 洛必达法则

一般地，方法(1)应该优先使用，因为方法(2)可能变得复杂.

例 7　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 6x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin(x^3)}$$

练习 2　求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$

第二节	洛必达法则
2.1	$\frac{0}{0}$型的洛必达法则
2.2	$\frac{\infty}{\infty}$型的洛必达法则
2.3	$0\cdot\infty$型和$\infty-\infty$型的未定式
2.4	1^{∞}型，0^{0}型和∞^{0}型的未定式

定理 8 如果

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

(2) $f(x), g(x)$ 在点 a 的某去心邻域内可导,且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A($ 或 $\infty)$。

那么

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

在上述定理中， $x \to a$改为$x \to \infty$ 仍然成立.

例 9 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+4}$.

例 10 求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n>0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

练习 3 求函数极限： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$

思考 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

注记 2　洛必达法则未必总是有效．例如：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

第二节	洛必达法则
2.1	$\frac{0}{0}$型的洛必达法则
2.2	$\frac{\infty}{\infty}$型的洛必达法则
2.3	$0\cdot\infty$型和$\infty-\infty$型的未定式
2.4	1^{∞}型，0^{0}型和∞^{0}型的未定式

对于$0\cdot\infty$型和$\infty-\infty$型的未定式，我们可以将它们变换为$\frac{0}{0}$ 型或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式，然后使用洛必达法则.

例 11　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

练习 4　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

第二节	洛必达法则
2.1	$\frac{0}{0}$型的洛必达法则
2.2	$\frac{\infty}{\infty}$型的洛必达法则
2.3	$0\cdot\infty$型和$\infty-\infty$型的未定式
2.4	1^∞型，0^0型和∞^0型的未定式

1^∞型，0^0型和∞^0型的未定式

对于1^∞型，0^0型和∞^0型的未定式，我们可以将它们变换为$0\cdot\infty$型未定式，进而化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，然后使用洛必达法则.

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

例 12　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$

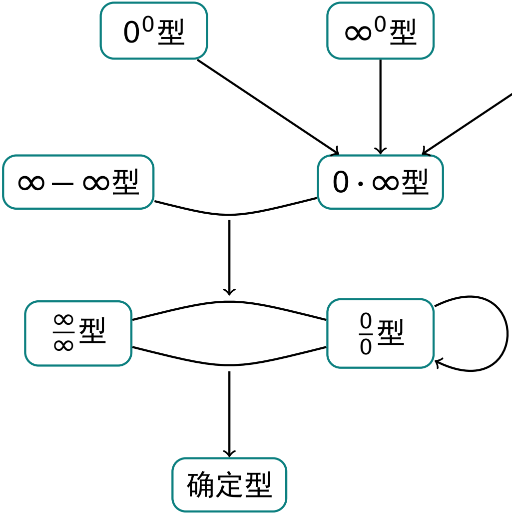
练习 5 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

小结



0^0型
∞^0型
1^∞型
$\infty-\infty$型
$0\cdot\infty$型
$\frac{\infty}{\infty}$型
$\frac{0}{0}$型
确定型