1 随机事件

1.4 概率的乘法法则

条件概率

定义：设 $P(B) > 0$，称

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{(必考)}$$

为在事件 B 发生条件下，事件 A 的条件概率。在古典概率模型中，

$$P(A|B) = \frac{\text{事件 } AB \text{ 包含的样本点数}}{\text{事件 } B \text{ 包含的样本点数}} = \frac{n(AB)}{n(B)}.$$

乘法公式

由条件概率的定义，如果 $P(B) > 0$，则

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

类似地，如果 $P(A) > 0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

以上等式称为乘法公式。

全概率公式

定义：设 Ω 为某试验的样本空间，$B_1, B_2, \cdots$ 为一组事件。如果以下条件成立：

1. $B_1, B_2, \cdots$ 两两互斥；
2. $\cup_i B_i = \Omega$，

则称 $B_1, B_2, \cdots$ 为样本空间 Ω 的一个划分（分割），或称 $B_1, B_2, \cdots$ 为一个完备事件组。对任意满足 $0 < P(B) < 1$ 的事件 B，B 与 $\overline{B}$ 构成一个完备事件组。

全概率公式

全概率公式：如果 $B_1, B_2, \cdots$ 构成一个完备事件组，且都有正概率，则对任意事件 A 有

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i). \qquad \text{(必考)}$$

特殊情况：如果事件 B 满足 $0 < P(B) < 1$，则对事件 A，有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

贝叶斯公式

贝叶斯定理：如果 $B_1, B_2, \cdots$ 构成一个完备事件组，且都有正概率，则对任意正概率的事件 A 有

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots \qquad \text{(必考)}$$

注意: 全概率公式和贝叶斯公式往往会放到一个题目里考察!!!