反常积分

反常积分有两种类型：

1. 无限区间上的积分：无穷限的反常积分
2. 对无界函数的积分：无界函数的反常积分

无限区间上的积分

定义 **1.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 如果

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (b>a)$$

存在, 就称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **2.** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续, 如果

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (b>a)$$

存在, 就称此极限为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **3.** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 如果反常积分

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 上述两个反常积分之和为 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的反常积分，即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

无界函数的反常积分

定义 **4.** 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x(\varepsilon>0)$ 存在, 就称此极限为无界函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$发散.

定义 **5.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x(\varepsilon>0)$ 存在, 就定义反常积分

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

否则称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 **6.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除 $x=c(a<c<b)$ 外连续，且 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$, 如果两个反常积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛, 就定义反常积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

Γ 函数

定义 **7.** $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ *($r>0$)* 为 Γ 函数.

性质 **1.** Γ 函数有如下公式

1. $\Gamma(1)=1$
2. $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!$
3. 余元公式 $\Gamma(r)\Gamma(1-r)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi r)}$ $(0<r<1)$.
4. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

定义 **8.** 对任何实数 $x>-1$，定义其阶乘为

$$x!=\Gamma(x+1).$$

平面图形的面积

1. 由曲线 $y = f(x)$, x 轴，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

2. 由 $y = f_1(x)$,$y = f_2(x)$, $x = a$,$x = b$ 所围成的平面图形的面积为

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|\,\mathrm{d}x$$

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到
4. 计算积分结果

1. 由曲线 $x = \varphi(y)$, y 轴，直线 $y = a$ 以及直线 $y = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y$$

2. 由曲线 $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$，直线 $y = a$ 以及直线 $y = b$ 所围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\,\mathrm{d}y$$

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

由曲线 $x = \varphi(y)$，直线 $y = c, y = d$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_c^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 \, \mathrm{d}y$$

注记**.** 如果旋转体是由连续曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = a, x = b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx}$$