11 无穷级数

无穷级数

定义 **1.** 给定数列: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, 式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数(简称级数),记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,其中第n项称为级数的通项。

级数的敛散性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前n项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第n次部分和,各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列。

- 如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
 - 此时称5为级数的和,
 - $\delta R_n = S S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的余项;
- 如果 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 发散,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

特殊级数的敛散性

级数的性质

性质 **1.** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也 收敛,而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

性质 **2.** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ 也收敛,而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

推论。级数的每一项同乘以不为0的常数后, 其敛散性不变。

性质 3. 在一个级数前面加上(或者去掉)有限项,级数的敛散性不变。

性质 **4** (收敛级数的结合律)。如果一个级数收敛,加括号后所成的级数也收敛,且与原级数有相同的和。

发散级数加括号后,可能发散也可能收敛。

收敛的必要条件

定理 **1.** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 。

.....

注记 1. 若通项不趋于零,则级数一定发散.

例 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于1, 因此它发散.

.....

注记 2. 若通项趋于零,则级数未必收敛.

例 2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于0, 但是它发散。

定义 **2.** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geq 0$ (对所有n),则称它为正项级数。

性质。正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列。

定理 2. 正项级数收敛 ⇔ 它的部分和数列有界。

注记. 正项级数加括号后, 其敛散性不变。

定理 **3** (比较判别法). 对于两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n n \sum_{n=1}^{\infty} v_n$,若有c > 0使得 $u_n \leq cv_n$,对所有n,则有

- 1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;
- 2. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散。

定理 **4** (比较判别法的极限形式). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数,且有 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

- 1. 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pi \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散;
- 2. 若l=0,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;
- 3. 若 $l = +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

定理 **5** (比值判别法). 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$,则有

- 1. 若l < 1, 则级数收敛;
- 2. 若l>1,则级数发散;
- 3. 若l=1,则级数可能收敛也可能发散。

交错级数

定义 **3.** 正负项相间的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$,其中每个 $u_n > 0$,称为交错级数。

交错级数

定理 6 (莱布尼兹定理)。如果交错级数满足条件

- 1. $u_{n+1} \le u_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$;
- 2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

则级数收敛,且其和 $S \leq u_1$,余项满足 $|R_n| \leq u_{n+1}$ 。

例 **3.** 交错级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
 收敛。

任意项级数

定理 **7.** 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

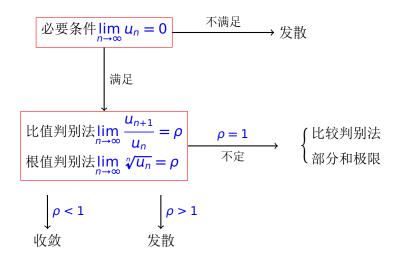
定义 **4.** 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

- 1. 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散;
- 2. 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 都收敛。

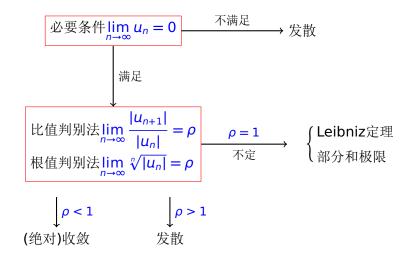
定理 **8.** 对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,若 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$,则有

- 1. 当l < 1时级数绝对收敛;
- 2. 当l > 1时级数发散。

正项级数审敛法



一般级数审敛法



幂级数收敛域的求法(重要)

- 标准形式幂级数 ($\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n, \alpha_n \neq 0$)
 - 1. 先求幂级数的收敛半径R, 记 $\rho = \lim_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$,则

$$-\rho \neq 0, \rho \neq +\infty \Longrightarrow R = \frac{1}{\rho}$$

$$-\rho=0\Longrightarrow R=+\infty$$

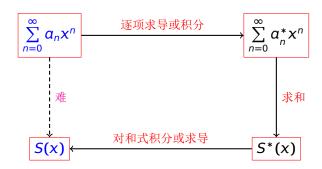
$$-\rho=\infty\Longrightarrow R=0$$

- 2. 再讨论在 $x = \pm R$ 处的敛散性
- 非标准形式幂级数
 - 通过换元转化为标准形式
 - 直接用比值法或者根值法

幂级数和函数的求法(重要)

• 初等变换法: 分解和式并套用公式

• 映射变换法: 逐项求导或逐项积分



常数项级数和的求法

- 直接求和: 求出级数的部分和, 再求极限
- 间接求和: 转换为求幂级数和, 再代入值

函数展开为幂级数的方法(重要)

直接展开法 利用泰勒公式计算系数,并研究余项间接展开法 利用已知的函数展开式,及幂级数性质