第十一章历年期末试题

1. (**2017 年**) 以下四个关于级数的结论中，正确的结论是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)^2$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $u_n \geq \dfrac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $u_n \geq v_n\ (n=1,2,\cdots)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

2. (**2016 年**) 设 a 为常数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin a}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (　　).

(A) 绝对收敛　　**(B)** 发散

(C) 条件收敛　　**(D)** 收敛性取决于 a 的值

3. (**2016 年**) 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解是 (　　)

(A) $\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{Cx}$　　**(B)** $\sin\dfrac{y}{x}=x+C$　　**(C)** $\sin\dfrac{x}{y}=Cx$　　**(D)** $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$

4. (**2014 年**) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足关系 $a_n \leq b_n$, 则 (　　).

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛　　**(B)** 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛　　**(D)** 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散

5. (**2013 年**) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是正项级数，且 $u_n > v_n(n=1,2,\cdots,99)$, $u_n \leq v_n(n=100,101,\cdots)$, 则下列命题正确的是 (　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛　　**(B)** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散　　**(D)** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛， 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

6. (2012 年) 设 $0<u_n<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中一定收敛的是 (　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n^2$

7. (2011 年) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中必定发散是 (　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$

8. (2010 年) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (　).

(A) 一定收敛, 其和为零　(B) 一定收敛, 但和不一定为零

(C) 一定发散　(D) 可能收敛, 也可能发散

9. (2017 年) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛域是 $(-4,2]$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x-2)^n$ 的收敛区间是________.

10. (2016 年) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{4}$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径 $R=$________.

11. (2015 年) 实数 q 满足什么条件，几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛，即 q 满足________.

12. (2014 年) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$, $|x|<2$ 的和函数是________.

13. (2013 年) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}x^n$ 的收剑半径为________.

14. (2012 年) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n}(x-1)^n$ 的收敛域为________.

15. (2011 年) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ 的和 $S=$________.

16. (2010 年) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛域为________.

17. (2017 年) 求微分方程 $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解.

18. (**2017 年**) 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 敛散性，若收敛，指出其是绝对收敛还是条件收敛.

19. (**2017 年**) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n\cdot n}$ 的收敛域及和函数.

20. (**2016 年**) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$ 的和函数及收敛域。

21. (**2016 年**) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{5-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数,并求其收敛域.

22. (**2015 年**) 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$ 是绝对收敛，条件收敛，还是发散?

23. (**2014 年**) 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域。

24. (**2013 年**) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$ 的敛散性.

25. (**2013 年**) 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数。

26. (**2012 年**) (**本题满分 8 分**) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{b}{a_n})^n$ 的敛散性,其中 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, ($a>0$, $b>0$).

27. (**2012 年**) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

28. (**2011 年**) 讨论级数 $\sum\limits_{n=}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{a^n}(a>0)$ 是绝对收敛,条件收敛,还是发散.

29. (**2011 年**) 试求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域 I 与和函数 $S(x)$,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}$ 的和.

30. (**2010 年**) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 绝对收敛和条件收敛性.

31. (**2010 年**) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

32. (**2011 年**) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

[另附] 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=}^{\infty} \dfrac{u_n}{n^2}$ 绝对收敛.