2015–2016学年第二学期期末试题

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1. 对于任意两个事件A,B，必有$P(A-B)=($ $)$

(A) $P(A)-P(B)$

(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)+P(B)$

(D) $P(A)-P(AB)$

2. 设$F(x)$和$f(x)$分别为某随机变量的分布函数和概率密度，则必有 ( )

(A) $f(x)$单调不减

(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx=1$

(C) $F(-\infty)=0$

(D) $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

3. 设随机变量X的数学期望存在，则$E(E(E(X)))=($ $)$

(A) 0 (B) $E(X)$ (C) $D(X)$ (D) $[E(X)]^2$

4. 设二维随机变量(X,Y)服从区域$D:x^2+y^2\leq 1$上的均匀分布，则(X,Y)的概率密度函数为 ( )

(A) $f(x,y)=1$

(B) $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}$

(C) $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(D) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_6$是来自正态总体$N(0,1)$的样本，则统计量$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_6^2$服从 ( )

(A) 正态分布 (B) t分布 (C) F分布 (D) χ^2分布

二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1. 设A，B为两事件，且$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{6}$，则$P(\overline{A}|\overline{B})=$________.

2. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}x+c, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则常数$c=$________.

3. 设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim B\left(16,\frac{1}{2}\right)$，$Y$服从于参数为9的泊松分布，则$D(X-2Y+1)=$________.

4. 设随机变量X的数学期望$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2(>0)$，则$P\{\left|X-\mu\right|\geq 3\sigma\}\leq$________.

5. 设$\widehat{\theta}_1$，$\widehat{\theta}_2$是参数θ的两个无偏估计，如果$\widehat{\theta}_1$比$\widehat{\theta}_2$更有效，则$D(\widehat{\theta}_1)$和$D(\widehat{\theta}_2)$的大小关系是________.

三、解答题（本大题共4题，每题10分，共40分，解答应写出推理，演算步骤）

1. 设随机变量X服从标准正态分布，即X的概率密度为$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，求随机变量函数$Y=\mathrm{e}^X$的概率密度。

2. 设随机变量$X=\begin{cases}1, & 若A发生\\ 0, & 若A不发生\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & 若B发生\\ 0, & 若B不发生\end{cases}$，其中随机事件$A$和$B$相互独立，且$P(A)=P(B)=p(0<p<1)$。求二维随机变量$(X,Y)$的联合分布律，并说明$X$与$Y$的线性相关性。

3. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0<x<1,0<y<x\\ 0 & 其他\end{cases}$$

试求：

(1) 边缘密度$f_X(x)$、$f_Y(y)$，并说明X与Y的独立性；

(2) 条件密度$f_{X|Y}(x|0.2)$。

4. 设总体X具有概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}\quad(\theta>0)$$

$X_1,X_2\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，

(1) 求参数θ的矩估计；

(2)求参数θ的极大似然估计。

四、综合题（本大题共3题，每题10分，共30分.解答应写出推理，演算步骤）

1. 某公司有200名员工参加一种资格证书考试。按往年经验，该考试通过率为0.8，试利用中心极限定理计算这200名员工至少有150人通过考试的概率。($\Phi(1.65)=0.95$，$\Phi(1.77)=0.9616$，$\Phi(2.18)=0.9854$)

2. 某校大二学生线性代数考试成绩X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，从中随机地抽取20份考卷，算得平均成绩$\bar{x}=72$分，样本方差$s^2=16$分，试求：

(1) 学生线性代数考试成绩标准差σ的置信水平为98% 置信区间；

(2) 学生线性代数成绩均值μ的置信水平为95% 的（单侧）置信上限。

($\chi^2_{0.01}(19)=36.19$，$\chi^2_{0.99}(19)=7.63$，$t_{0.05}(19)=1.729$，$t_{0.025}(19)=2.093$)

3. 2005年在某地区分行业调查职工平均工资情况：已知体育、卫生、社会福利事业职工工资$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$（单位：元）；文教、艺术、广播事业职工工资$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$（单位：元）。从总体$X$中调查8人，平均工资$\overline{x}=1386$元，标准差$s_1=218$元，从总体$Y$中调查7人，平均工资$\overline{y}=1172$元，标准差$s_2=227$元，试在显著性水平$\alpha=0.05$下，检验这两大类行业职工工资有无显著差异。

($F_{0.025}(6,7)=5.12$，$F_{0.025}(7,6)=5.70$，$t_{0.025}(13)=2.16$，$t_{0.05}(13)=1.77$)

五、证明题（本题5分.应写出必要的推理步骤）

1. 设随机变量X与Y相互独立，且服从同一分布。试证明：

$$P\{a<\min(X,Y)\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2$$