线性代数讲义

王官杰

目录

第 3 章　行列式

行列式起源于线性方程组的研究, 本章我们将介绍行列式的定义、性质以及应用．为了方便大家理解, 这里将首先使用公理化的方式定义行列式, 然后再通过公理化定义给出行列式的显式表达式．这样做的另外一个原因是想告诉大家, 为什么在行列式的显式定义中会出现逆序数这么奇怪的东西．

第 1 讲　行列式的公理化定义

3.1.1　二阶行列式

我们首先考察线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

对于该线性方程组, 我们可以通过加减消元法得到它的解为（设分母不为零）：

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ y = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}. \tag{3.1}$$

为了更好地表示和记忆上面的公式, 我们引入二阶行列式这一记号 (概念)．

定义 3.1.1. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 则称

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为对应于二阶矩阵 A 的行列式, 记为 $\det(A)$ 或者 $|A|$, 即

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3.2}$$

我们一般使用对角线法则记忆二阶行列式的公式, 主对角元相乘取正号, 副对角元相乘取负号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

采用二阶行列式的记号, 线性方程组的求解公式(3.1)可以改写为:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{3.3}$$

3.1.2　三阶行列式

对于一般的三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

利用消元法, 可求得它的解为（设分母不为零）:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}. \end{cases}$$

同样地, 为了记忆和书写的方便, 我们引入三阶行列式这一记号.

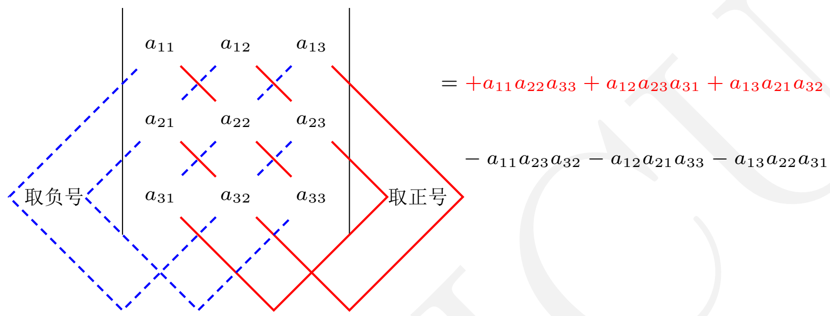
定义 3.1.2. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 则称

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{3.4}$$

为对应于三阶矩阵 A 的行列式, 记为 $\det(A)$ 或者 $|A|$, 即

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{3.5}$$

三阶行列式也有对角线法则, 平行于主对角的三个元素的乘积取正号, 平行于副对角的三个元素的乘积取负号.



采用三阶行列式的记号, 对上面的三元线性方程组, 我们得到: 当 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$ 时, 有

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}}.$$

即 x_i 的分母是系数矩阵对应的三阶行列式, 而分子恰为将系数矩阵的第 i 列用常数项列向量替换后得到的方阵对应的三阶行列式.

3.1.3　n 阶行列式

继续上面的讨论, 我们希望能够给出一个由 n 个方程构成的 n 元线性方程组的解的表达式, 且该表达式类似于上面 $n=2$ 和 $n=3$, 即将解表示为

$$x_i=\frac{n\text{阶行列式}}{n\text{阶行列式}}$$

的形式.

直觉告诉我们, 直接给出 n 阶行列式的表达式是一个很困难的任务, 因为三阶行列式的表达式就已经很复杂了. 我们可以反过来, 从行列式应该具有的性质入手, 得到行列式的表达式.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵, 它的列向量记为 $\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_n$, 即 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$, 为了叙述方便, 我们将 $\boldsymbol{A}$ 的行列式记为[1]

$$|A| = \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$$

考察线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{3.6}$$

我们希望线性方程组的解可以表示成如下形式:

$$x_i = \frac{\det(\boldsymbol{A}_i)}{\det(\boldsymbol{A})} \tag{3.7}$$

期中 $\boldsymbol{A}_i$ 是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 将第 i 列换成 $\boldsymbol{b}$ 之后得到的矩阵. 下面我们来观察一下 $\det(\cdot)$ 应该满足什么样的条件.

假设 $\boldsymbol{x}_1$ 是线性方程组(3.6)的解, 则显然 $k\boldsymbol{x}_1$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{b}$ 的解. 这意味着, 如果线性方程组的系数矩阵保持不变, 但常数项变为原来的 k 倍, 那么每个未知数都会变成原先的 k 倍. 因此, 若线性方程组的解可以用(3.7)表示, $\det(\cdot)$ 至少应具有以下性质[2]:

性质 1. *若矩阵的某一列乘以常数 k, 则新得到的矩阵的行列式是原先矩阵的行列式的 k 倍, 即*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, k\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_n) = k\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_n).$$

假设 $\boldsymbol{x}_1$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ 的解, $\boldsymbol{x}_2$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ 的解, 则线性 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)$ 的解. 因此, 若线性方程组的解可以用(3.7)表示, $\det(\cdot)$ 至少应具有以下性质:

性质 2. *若矩阵的某一列可以写成两个列向量的和的形式, 则该矩阵的行列式可以写成两个矩阵的行列式之和的形式, 即*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_n).$$

假设线性方程组的右端项与第系数矩阵的第 i 列相同, 若线性方程组存在唯一的解, 则该解必定是

$$\begin{cases} x_k = 0, \ (k \neq i) \\ x_k = 1 \ (k = i). \end{cases}$$

[1]这里的行列式实际上是 $R^{n\times n}$ 到 R 的一个函数, 我们希望通过该函数应该满足的法则来唯一确定该函数.

[2]分别考察 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{b}$ 使用使用(3.7)求解即可得此结论. 注意到, 两方程组使用(3.7)求解时, 分母是相同的, 分子中的矩阵分别是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列变为 $\boldsymbol{b}$ 和 $k\boldsymbol{b}$. 注意, 后一方程组使用(3.7)求解时, 分子应该是前者的 k 倍.

因此, 若线性方程组的解可以用(3.7)表示,det(·) 至少应具有以下性质：

性质 3. *若矩阵的两列相同, 则其行列式为零, 即*

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0.$$

最后, 为了能够唯一确定 det(·), 我们假设其还具有以下性质

性质 4. *单位矩阵的行列式为 1, 即* $\det(\boldsymbol{E}_n)=1$.

下面, 我们由性质2和性质3得到一个新的性质.

性质 5. *交换行列式的两列, 则行列式的值变为原来的相反数. 即*

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=-\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n).$$

证明. 由性质3和性质2可得

$$\begin{aligned}0&=\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&=\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&\quad+\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&=\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\end{aligned}$$

性质得证. □

定理 3.1.1. *若 det(·) 满足性质2, 则性质3和性质5是等价的.*

证明. 由性质5的证明, 可知, 性质2和性质3可以得到性质5, 下证性质2和性质5可以得到性质3.

由性质5可得,

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=-\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n),$$

于是

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0.$$

定理得证. □

由于在计算行列式时, 性质5比性质3使用起来更为频繁和方便, 因此, 我们更愿意使用性质5来定义行列式.

定义 3.1.3 (行列式的公理化定义). *假设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 其列向量记为 $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$, 则 n 阶行列是满足性质1、性质2、性质5和性质4的函数*[3].

从上述定义, 我们不难看出, 行列式可以理解为对 n 维空间中, 列向量所围成的几何体的体积. 接下来, 我们从行列式的定义出发, 得到更多行列式的性质, 并最终推导出行列式的显示表达式. **注意, 下列所有关于行列式的定义、性质、定理, 将行改成列, 仍然成立. 证明见定理 3.2.5.**

性质 6. *若行列式有一列为零向量, 则行列式的值等于 0.*

证明. 由于行列式满足1, 设行列式第 i 列为零向量, 因此

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,0,\ldots,\boldsymbol{a}_n) &= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,0\cdot\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= 0\cdot\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

性质 7. *若行列式有两列元素成比例, 则行列式的值等于 0.*

证明. 由于行列式满足性质1, 设行列式第 i 列和第 j 列元素成比例,$\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{a}_j$, 因此

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n) &= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,k\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= k\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

其中最后一个等号用到了性质3. □

性质 8. *对行列式做倍加列变换, 行列式的值不变.*

证明. 根据性质2以及性质3.1.3, 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i+k\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n) &= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&\quad+\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,k\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)+0\\
&= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n).
\end{aligned}
$$

□

[3] 如将行列式定义中的“行”全部换成“列”，可以得到一个等价的定义

性质 9. 对角矩阵的行列式为对角线元素的乘积, 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n. \tag{3.8}$$

证明. 由性质1和性质4, 易得

$$\begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n. \tag{3.9}$$

□

性质 10. 上三角形矩阵和下三角形矩阵的行列式等于对角线元素的乘积, 即

证明. 我们以下三角形矩阵为例做证明, 上三角形矩阵的证明类似, 留作练习.

若矩阵的对角线元素全都不是 0, 则显然有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质9可知结论成立.

若矩阵对角元元素至少有一个位 0, 不妨设对角线上最后一个为 0 的元素是 a_{ii}, 则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ a_{i1} & \dots & 0 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意到第 i 列的元素全部为 0, 由性质6易得行列式为 0, 而对角线元素乘积也是 0, 因此命题成立. □

由性质10, 可知, 我们在计算行列式时, 只需要对矩阵进行初等列变换, 将矩阵转化为上三角形矩阵或者下三角形矩阵, 即可方便地计算任意矩阵的行列式.

性质 11. 若 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$, 则 $\det(\boldsymbol{M}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{C})$, 其中 $\boldsymbol{O}$ 是零矩阵.

证明. 假设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 p 阶和 q 阶方阵, 我们要计算 $\boldsymbol{D}$ 的行列式. 用行初等变换将 $\boldsymbol{D}$ 上三角化, 可以分别将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 上三角化. 具体地, 设

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{pp} \end{pmatrix}, \quad M = \text{初等变换中交换两列的次数}, \\
&\boldsymbol{B} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & c_{qq} \end{pmatrix}, \quad N = \text{初等变换中交换两列的次数}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

在 $\boldsymbol{D}$ 中, 分别对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 所在的列做上面一样的行初等变换, 得到

$$
\boldsymbol{D} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * & & & \\ & \ddots & \vdots & & & \\ & & a_{pp} & & & \\ & & & c_{11} & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & c_{qq} \end{pmatrix}
\tag{3.11}
$$

则在上述初等列变换中, 交换两列的次数是 $M + N$. 所以有

$$
\begin{aligned}
|M| &= (-1)^{M+N} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & * & & & \\ & \ddots & \vdots & & & \\ & & a_{pp} & & & \\ & & & c_{11} & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & c_{qq} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{M+N} a_{11} \cdots a_{pp} c_{11} \cdots c_{qq} \\
&= (-1)^{M} a_{11} \cdots a_{pp} \cdot (-1)^{N} c_{11} \cdots c_{qq} = |A||C|.
\end{aligned}
$$

□

同理可得

性质 12. 若 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$, 则 $\det(\boldsymbol{M})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{C})$, 其中 $\boldsymbol{O}$ 是零矩阵.

注 3.1.1. 如果 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_s$ 是方阵, 则有

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1 & * & \cdots & * \\ & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|,\quad \begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ * & \boldsymbol{A}_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{A}_s\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|,$$

特别地,

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_s\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|.$$

证明. 由性质11和性质12易得. □

第 2 讲　拉普拉斯展开以及行列式的显式定义

在本节, 我们首先给出行列式的拉普拉斯展开, 然后再给出行列式的显式定义.

3.2.1　行列式按行、按列展开

首先我们需要引入余子式和代数余子式的概念：

定义 3.2.1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个在 n 阶方阵, 将元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素划去后, 剩下的 $n-1$ 阶方阵的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij}, 并把数 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

注意, 虽然余子式和代数余子式在名称中含有式, 但实际上它们是一个数. 实际上行列式也称为 “式”, 但这些 “式” 只是形状上有个形式, 实际上只是一个数.

例 3.2.1. 根据定义 *3.2.1* 计算行列式 $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 5 & -2\end{vmatrix}$ 每个元素的余子式和代数余子式.

解. 我们只举一个例子, 第二行第一列元素 -1 的余子式和代数余子式. 根据定义, 它的余子式是去掉第二行和第一列所有元素剩余的二阶行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-17,$$

因此它的代数余子式是 $A_{21}=(-1)^{2+1}(-17)=17$. 读者可以自行计算其他元素的余子式和代数余子式. □

接下来我们便可以给行列式的拉普拉斯展开公式：

定理 3.2.1. *设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵, 则*

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad j=1,2,\ldots,n \tag{3.12}$$

证明. 这里给出证明要点, 首先证明下面的引理

引理 3.2.2. *如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列除了 a_{ij} 以外的其余元素全为 0, 则 $|\boldsymbol{A}|=a_{ij}A_{ij}$. 然后利用性质2和5即可得出结论.*

□

3.2.2　行列式的显示定义

我们以二阶行列式来引入行列式的显示定义．对于二阶行列式, 我们有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}\\a_{21}&0\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

注意上式中, 最右边的第二和第三个行列式中, 一行是玲一行的倍数, 因此这两个式子为 0. 从而我们有

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}\\a_{21}&0\end{vmatrix}$$

根据行列式的定义, 我们有

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0\\0&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}\\a_{21}&0\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}-a_{12}a_{21}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{3.13}$$

类似地, 对于三阶行列式, 每一列都可以拆分成

$$\begin{pmatrix}a_{1j}\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\a_{2j}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\a_{3j}\end{pmatrix} \tag{3.14}$$

三种情况, 因此我们可以将 $\boldsymbol{A}$ 的行列式表示成 $3\times 3=9$ 个行列式的和的形式．注意到上述 9 个行列式中, 如果某个行列式的两列的非零元位于同一行, 则该行列式的值为 0, 因此, 只有非零元位于不同行不同列的行列式的值才有可能不为 0．这样的行列式一共有 6 个, 即

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{32}\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}&&\\&a_{22}&\\&&a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} &&a_{13}\\a_{21}&&\\&a_{32}&\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} &a_{12}&\\&&a_{23}\\a_{31}&&\end{vmatrix}\\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{11}&&\\&&a_{23}\\&a_{32}&\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} &a_{12}&\\a_{21}&&\\&&a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} &&a_{13}\\&a_{22}&\\a_{31}&&\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

注意到, 每一列的行指标实际上就是 $1,2,3$ 的一个排列, 因此我们可以使用排列来表示后面的 6 个行列式[4]. 如第一个行列式可以用 $[1,2,3]$ 表示, 第二个行列式可以用 $[2,3,1]$ 表示．上式中, 所有的行指标为

$$\text{行指标} = [1,2,3],[2,3,1],[3,1,2],[1,3,2],[2,1,3],[3,2,1].$$

公式(3.15)可以进一步改写为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} 1&&\\&1&\\&&1\end{vmatrix} + a_{21}a_{32}a_{13}\begin{vmatrix} &&1\\1&&\\&1&\end{vmatrix} + a_{31}a_{12}a_{23}\begin{vmatrix} &1&\\&&1\\1&&\end{vmatrix}\\ &\quad + a_{11}a_{32}a_{23}\begin{vmatrix} 1&&\\&&1\\&1&\end{vmatrix} + a_{21}a_{12}a_{33}\begin{vmatrix} &1&\\1&&\\&&1\end{vmatrix} + a_{31}a_{22}a_{13}\begin{vmatrix} &&1\\&1&\\1&&\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

上式中的每一个初等矩阵的行列式都可以通过交换两列的操作变为单位矩阵的行列式．后面三个行列式需要进行奇数次列交换（一次）, 前面三个行列式需要进行偶数次列交换（零次或者两次）．例如, 若行指标是 $[3,1,2]$, 其对应的3.16中的初等矩阵进行两次行交换即可以变为单位矩阵, 因此其对应的行列式的值为 $a_{31}a_{12}a_{23}$ 乘以 $(-1)^2$．其余的也类似．

注意到, 通过列交换将初等矩阵变为单位矩阵, 等价于将行指标变为从小到大的顺序排列．我们在这里举例说明, 将 $[3,1,2]$ 变为从小到大排列的指标, 需要进行如下两次变换:

$$[3,1,2]\to[1,3,2]\to[1,2,3].$$

[4]注意,$3!=6$.

对于 n 阶方阵, 根据同样的分析, 我们有类似的表达式. 为了给出该表达式, 我们首先引入一些必要的术语.

定义 3.2.2. 数 $1, 2, \ldots, n$ 的按照任意次序排成的有序数组称为一个 n 元排列, 记为 $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$. 所有 n 元排列做成的集合记为 S_n. 特别地, 称 $[1, 2, \ldots, n]$ 为自然排列.

容易知道 S_n 中元素的个数为 $n!$, 这意味着 n 元排列一共有 $n!$ 个.

为了研究需要经过奇数次还是偶数次行交换才可以将上面叙述中的初等矩阵变成单位矩阵, 我们引入逆序数和奇排列、偶排列的概念.

定义 3.2.3. 在一个排列中, 如果两个数中前者大于后者, 则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中所含逆序数的总数称为该排列的逆序数.排列 $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$ 的逆序数记为 $\tau([p_1, p_2, \ldots, p_n])$. 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

在一个排列中, 对调其中的两个数, 而其余的数保持不变, 就可以得到一个新的排列. 对排列所作的上述变换称为对换.

定理 3.2.3. 对换改变排列的奇偶性, 即作一次对换, 奇排列变为偶排列, 偶排列变为奇排列.

证明. 这里仅仅给出证明要点：分两步证明, 先证明相邻两个数交换顺序改变排列的奇偶性. 对换可以看做是相邻对换进行多次操作. □

我们前面提到过, 交换初等矩阵通过行变换变为单位矩阵需要进行行变换换的次数, 决定了展开式中某一项的符号. 交换出等矩阵与行指标构成的排列是一一对应的, 因此, 对交换初等矩阵进行一次行变换等价于对行指标构成的排列进行一次对换. 于是交换初等矩阵通过行变换变为单位矩阵需要进行行变换换的次数, 等于将行指标构成的排列通过对换变为自然排列所需要的对换的次数.

事实上, 我们并不关心对换次数的具体数值, 我们只关心对换次数的奇偶性. 注意到自然排列是一个偶排列, 因此, 若一个排列是偶排列, 则通过对换将其变为自然排列所需要的对换的次数是偶数；若一个排列是奇排列, 则通过对换将其变为自然排列所需要的对换的次数是奇数.

于是, 我们就得到了行列式展开的显式表达式：

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{[p1, \ldots, p_n] \in S_n} (-1)^{\tau([p_1, \ldots, p_n])} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \ldots a_{p_n n}. \tag{3.17}$$

定理 3.2.4. $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$.

证明. 仅给出证明要点, 考虑显式表达式中的项

$$(-1)^{\tau([p_1, \ldots, p_n])} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \ldots a_{p_n n} = (-1)^{\tau([p_1, \ldots, p_n]) + \tau([1, 2, \ldots, n])} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \ldots a_{p_n n},$$

若将上式中的两个元素 $a_{p_s s}$ 与 $a_{p_t t}$ 进行对换．由于新的下标排列都是原下标排列进行了一次对换, 因此, 两个下标排列的逆序数之和的奇偶性保持不变．通过对换, 将行指标排列变为自然排列, 假设此时行指标为 $[q_1, \ldots, q_n]$, 则有

$$(-1)^{\tau([p_1,\ldots,p_n])+\tau([1,2,\ldots,n])} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \ldots a_{p_n n} = (-1)^{\tau([1,2,\ldots,n])+\tau([p_1,\ldots,p_n])} a_{1q_1} a_{21_2} \ldots a_{nq_n}.$$

设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (b_{ij})_{n\times n}$, 则 $b_{ij} = a_{ji}$．于是

$$\begin{aligned} \det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) &= \sum_{[p_1,p_2,\ldots,p_n]\in S_n} (-1)^{\tau([p_1,p_2,\ldots,p_n])} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{[p_1,p_2,\ldots,p_n]\in S_n} (-1)^{([p_1,p_2,\ldots,p_n])} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \\ &= \det(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

□

定理 3.2.5. 将行之前行列式中定义、性质中的所有行改成列, 仍然成立.

第 3 讲　克莱姆法则及行列式的应用