第一节 导数的概念

第二节 求导法则和基本初等函数求导公式

第一节 导数的概念

第二节 求导法则和基本初等函数求导公式

第二节	求导法则和基本初等函数求导公式
2.1	函数的和、差、积、商的求导法则
2.2	反函数的导数
2.3	复合函数的导数
2.4	基本求导法则与求导公式
2.5	小结　思考

定理 如果函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导,则它们的和、差、积、商 (除分母不为零外)在点 x 处也可导，并且

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.
2. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \ (v(x) \neq 0)$.

函数的和、差、积、商的求导法则

证明.

设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0)$, 则

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} \\
&= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 在 x 处可导.

推论

1. $$\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$$
2. $[Cf(x)]' = Cf'(x), C$ 为常数.
3. $$\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_i'(x)f_k(x)$$

例 1　求 $y=x^3-2x^2+\sin x$ 的导数.

解　$y'=3x^2-4x+\cos x$

例 2　求 $y=\sin 2x\cdot\ln x$ 的导数.

解　$\because y=2\sin x\cdot\cos x\cdot\ln x$

$$\therefore y'=2\cos x\cdot\cos x\cdot\ln x+2\sin x\cdot(-\sin x)\cdot\ln x$$

$$+2\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=2\cos 2x\ln x+\frac{1}{x}\sin 2x$$

例 3　求 $y=\tan x$ 的导数.

解　由条件可得

$$
\begin{aligned}
y' = (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}
$$

即 $(\tan x)' = \sec^2 x$.

同理可得 $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

例 4　求 $y=\sec x$ 的导数.

解　由条件知

$$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$$

同理可得 $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

例 5 求 $y = \sinh x$ 的导数.

解 由条件

$$y' = (\sinh x)' = \left[\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$$

同理可得 $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\geq 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$

解 当 $x<0$ 时,

$$f'(x)=1,$$

当 $x>0$时

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x}, \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{(0+h)-\ln(1+0)}{h}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln[1+(0+h)]-\ln(1+0)}{h}=1,$$

所以$f'(0)=1$. 综上，我们有

$$f'(x)=\begin{cases}1, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0.\end{cases}$$

练习　求下列函数的导数。

(1) $f(x) = x^5 - 4x^4 + x^2 + 3x + \mathrm{e}$

(2) $f(x) = (x + 2)(3x^3 + 2x)$

答案　(1)　$f'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 2x + 3$；

(2)　$f'(x) = 12x^3 + 18x^2 + 4x + 4$。

基本导数公式III

利用商的导数运算公式，可以得到：

$$(\tan x)' = \sec^2 x \tag{1}$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \tag{2}$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x \tag{3}$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x \tag{4}$$

其中，$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$。

第二节	求导法则和基本初等函数求导公式
2.1	函数的和、差、积、商的求导法则
2.2	反函数的导数
2.3	复合函数的导数
2.4	基本求导法则与求导公式
2.5	小结　思考

定理 如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

注记 上式也可以写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$。

证明.

任取 $x \in I_x$, 给x以增量 $\Delta x\,(\Delta x \neq 0, x + \Delta x \in I_x)$. 由 $y = f(x)$ 的单调性可知 $\Delta y \neq 0$, 于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}},$$

由$f(x)$ 连续，得 $\Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$, 又知 $\varphi'(y) \neq 0$，故

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

即

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

基本导数公式V

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{7}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{8}$$

第二节	求导法则和基本初等函数求导公式
2.1	函数的和、差、积、商的求导法则
2.2	反函数的导数
2.3	复合函数的导数
2.4	基本求导法则与求导公式
2.5	小结　思考

例 7 $[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$一般不成立。比如

$$(\sin 2x)' \neq \cos 2x.$$

实际上，我们有

$$\begin{aligned}(\sin 2x)' &= (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x\cos x)' \\ &= 2\big[(\sin x)'\cdot\cos x + \sin x\cdot(\cos x)'\big] \\ &= 2[\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x)] \\ &= 2[\cos^2 x - \sin^2 x] \\ &= 2\cos 2x\end{aligned}$$

定理 8　设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

或者

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

证明.

由 $y=f(u)$ 在点 u_0 可导, 得 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$. 故

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad \left(\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0\right)$$

所以 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$.因此

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]\\&=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=f'(u_0)\varphi'(x_0)\end{aligned}$$

例 9 求复合函数的导数:

(1) $y = (1 + 2x)^6$

(2) $y = e^{3x^2+1}$

(3) $y = \ln(\sin x)$

(4) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

练习 1　求复合函数的导数：

(1)　$y = e^{2x^2-6x}$

(2)　$y = \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$

(3)　$y = \dfrac{\sin 3x}{x^2}$

注记 1 设 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$。则复合函数 $y=f(g(h(x)))$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

三重复合函数的导数

例 10　求三重复合函数的导数：

(1)　$y = e^{\sqrt{-2x+1}}$

(2)　$y = \ln(\cos(3x+1))$

三重复合函数的导数

练习 2　求三重复合函数的导数：

(1)　$y = e^{\sqrt{x^2-1}}$

(2)　$y = \tan^2(3x^2 + 1)$

第二节	求导法则和基本初等函数求导公式
2.1	函数的和、差、积、商的求导法则
2.2	反函数的导数
2.3	复合函数的导数
2.4	基本求导法则与求导公式
2.5	小结　思考

常数和基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0 \qquad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad \left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

设 $u = u(x), v = v(x)$ 可导，则

$$(1)\ (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2)\ (Cu)' = Cu'\ (C\text{是常数})$$

$$(3)\ (uv)' = u'v + uv'$$

$$(4)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$$

反函数的求导法则

设函数 $x = f(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_x = f\left(I_y\right)$ 内也可导，且有

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

设 $y=f(u)$, 而 $u=\varphi(x)$ 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

或

$$y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

1. 利用上述公式及法则, 初等函数求导问题可完全解决.
2. 注意:初等函数的导数仍为初等函数.

第二节	求导法则和基本初等函数求导公式
2.1	函数的和、差、积、商的求导法则
2.2	反函数的导数
2.3	复合函数的导数
2.4	基本求导法则与求导公式
2.5	小结　思考

注意:

1. $[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)\cdot v'(x)$;
2. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' \neq \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$;
3. 分段函数求导时, 分界点导数用左右导数求;
4. 反函数的求导法则(注意成立条件);
5. 复合函数的求导法则(注意函数的复合过程, 合理分解正确使用链导法).

已能求导的函数:可分解成基本初等函数,或常数与基本初等函数的和、差、积、商.

思考题

选择　若 $f(u)$ 在 u_0 不可导，　$u = g(x)$ 在 x_0 可导，且 $u_0 = g(x_0)$，　则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处 ....(　　)

(1) 必可导　　(2) 必不可导　　(3) 不一定可导

思考题

解　正确地选择是(3)

(1) 反例：$f(u)=|u|$ 在 $u=0$ 处不可导, 取 $u=g(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处可导, $f[g(x)]=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

(2)反例：取 $u=g(x)=x^4$ 在 $x=0$ 处可导, $f[g(x)]=\left|x^4\right|=x^4$ 在 $x=0$ 处可导, (2)×

思考题

思考　求曲线 $y = 2x - x^3$ 上与 x 轴平行的切线方程.

解　易知$y' = 2 - 3x^2$，令$y' = 0$得

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}},\ x_2 = -sqrt\frac{2}{3}$$

故切点为

$$(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4\sqrt{6}}{9}),\ (-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{4\sqrt{6}}{9})$$

所求切线方程为 $y = \frac{4\sqrt{6}}{9}$ 和 $y = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$