9 二重积分

设曲顶柱体的底面为xy平面有界闭区域D，顶面为连续曲面$f(x,y)$，则它的体积为

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

二重积分的性质

性质 1 (函数可加性)**.**

$$\iint\limits_D \left[af(x,y)+bg(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 2 (区域可加性)**.** 设积分区域D可以划分为D_1和D_2，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 3. 如果在D上有$f(x,y)\ge g(x,y)$，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 4. 设在D上$m \le f(x,y) \le M$，D的面积为A，则有

$$mA \le \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le MA$$

性质 5. 如果在D上有$f(x,y)\equiv 1$，D的面积为A，则有

$$\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A$$

性质 6 (积分中值定理)**.** 如果$f(x,y)$在闭区域D上连续，D的面积为A，则在D中至少存在一点(ξ,η)，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)A$$

二重积分的计算I

如果积分区域D为X型区域，即有

$$D=\left\{(x,y)\middle|a\le x\le b,\phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.}$$

二重积分的计算II

如果积分区域D为Y型区域，即有

$$D=\left\{(x,y)\middle|a\le y\le b,\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.}$$

- X 型区域的特点: 穿过区域且平行于 y 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.
- Y型区域的特点：穿过区域且平行于 x 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.
- 注意重积分转化为累次积分时，积分的上下限怎么找.

二重积分的计算III

用极坐标表示积分区域

1. 先求θ的范围

2. 再求r的函数

$$D = \left\{(\rho, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \ \phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta)\right\}$$

二重积分在极坐标系与直角坐标系下的转换

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta, \\ &= \int_\alpha^\beta \left[\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\right] \mathrm{d}\theta \end{aligned}}$$