高等数学–微积分(一)

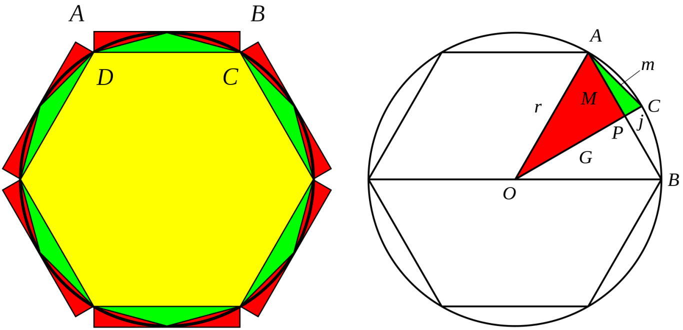
第二章·极限与连续

2020 年 12 月 23 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

第一节　数列的极限

刘辉割圆术



记内接正$6 \times 2^{n-1}$边型的面积为A_n, 则$n \to \infty$时，正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小。

截杖问题

“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;
第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第n天截下的木棒长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

数列的定义

定义 1 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots,$ $f(n), \cdots$ 排列的一列数称为数列, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示, 其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为通项或一般项。

例子 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

例子 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$

例子 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

定义 2　对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \leq M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子　$x_n = \frac{n}{n+1}$ ································ 有界.

例子　$x_n = 2^n$ ································ 无界.

小注：数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间$[-M, M]$上.

有界性

若存在实数 A, 对一切 n 都满足 $x_n \geq A$, 称 $\{x_n\}$ 为下有界， A 是 $\{x_n\}$ 的下界;

同样, 若存在 B, 对一切 n 都满足 $x_n \leq B$, 称 $\{x_n\}$ 为上有界， B 是 $\{x_n\}$ 的上界.

单调性

若数列 $\{x_n\}$ 满足:

1. $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, 称数列 $\{x_n\}$ 为单调增数列;
2. $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 单调减数列.

单调增数列和单调减数列统称为单调数列.

定义 3 将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

例子 $x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}$

例子 $x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}$

小注： 在子数列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然, $n_k \geq k$.

问题　随着n的增大，x_n也跟着变化。当n趋于无穷大时，x_n是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$　　$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \frac{1}{2^n}$　　$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$　　$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$　　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots \times$
5. $x_n = (-1)^n$　　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots \times$

定义 4 设$\{x_n\}$为一个数列，如果存在常数A，对任何$\epsilon > 0$，总存在正整数$N > 0$，使得当$n > N$时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列$\{x_n\}$的**极限**等于A，或者称数列$\{x_n\}$ **收敛**于A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A\ (n \to \infty).$$

如果这样的常数A不存在，则称数列$\{x_n\}$ **发散**.

小注： 1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;

2. 一般情况下，N 与任意给定的正数 ϵ有关.

为了表达方便，引入符号

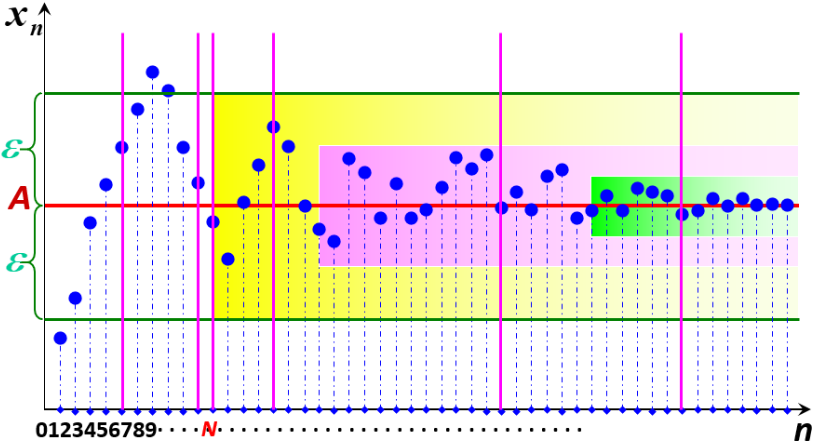
- $\forall$ ································任意给定的.
- $\exists$ ·····································存在

使用$\epsilon - N$语言，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$可以表示为：

$\forall\epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$.

小注： 数列极限的定义未给出求极限的方法.

数列极限的几何解释



数列极限的基本公式

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，（$|q| < 1$）

例子 设$x_n = C$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$。

证明.

$\forall \epsilon > 0$，取$N = 1$，则当$n > N$时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例子 证明$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

证明.

$\forall\epsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\epsilon}]+1$，则当$n>N$时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

例子 证明 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$。

证明.

$\forall \epsilon > 0$，取 $N = [\dfrac{1}{\epsilon}] + 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例子 证明 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证明.

任给 $\epsilon > 0$, 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
若 $0 < |q| < 1$, $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$, 要使$n \ln|q| < \ln\epsilon$，只需要 $n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$, 故取 $N = \left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时，就有

$$\left|q^n - 0\right| < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

例子 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证明.

任给 $\epsilon > 0$, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists\, N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有,

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

发散数列

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$。

性质 1 (极限的唯一性) 收敛数列的极限必唯一。

证明.

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$ 由定义可知:

$\forall \epsilon > 0, \exists\ N_1, N_2$, 使得:

当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$;

当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$, 则当 $n > N$ 时有

$$|a-b| = |(x_n - b) - (x_n - a)|$$

$$\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b-a|.$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

收敛数列的性质

性质 2 (有界性)　设$\{x_n\}$收敛，则存在$M>0$使得$|x_n|\le M$。

证明.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$。取$\epsilon=1$，则存在$N>0$，使得当$n>N$时有$|x_n-A|<\epsilon=1$。此时

$$|x_n| = |(x_n-A)+A| \le |x_n-A|+|A| < 1+|A|$$

取$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|A|\}$，则对任何$n$都有$|x_n|\le M$。

推论　无界数列必定发散.

性质 3 (保号性)　设数列收敛于$A > 0$（或$A < 0$），则存在$N > 0$，使得当$n > N$时有$x_n > 0$（或$x_n < 0$）。

证明.

取$\epsilon = A/2$，则存在$N > 0$，使得当$n > N$时有$|x_n - A| < \epsilon = A/2$。此时$x_n > A/2 > 0$。

小注：　这个定理表明，若数列的极限为正（或负），则该数列从某一项开始以后所有项也为正（或负）.

定理 (保号性) 设数列$x_n \geq 0$（或$x_n \leq 0$），且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则有$A \geq 0$（或$A \leq 0$）。

推论 如果$x_n \geq y_n$，而且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有$A \geq B$。

思考 若将上面的等号去掉，结论如何？

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A.

小注： 这个定理表明:若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的.

小结

- 数列: 研究其变化规律;
- 数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;
- 收敛数列的性质: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收签性.

选择 已知数列$\{x_n\}$的通项为$x_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$，则该数列.(　　)

(A) 收敛且有界　　(B) 收敛且无界

(C) 发散且有界　　(D) 发散且无界