10 微分方程

微分方程的概念

定义 1. 含有未知函数的导数或微分的方程，即形如下面形式的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程。其中微分方程中出现的导数的最高阶数n，称为微分方程的阶。

通解、特解、初始条件的含义，知道如何使用初始条件确定通解中的常数已得到特解。

一阶微分方程

注意要会判断一阶微分方程所属的类别(可分离变量、齐次微分方程 or 一阶线性微分方程)

应知道线性微分方程的解的结构。

1. 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$
   - 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$
2. 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$
   - 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$
   - 换元：令$v = \frac{y}{x}$，则有$y = xv$， 从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v$。 代入原方程得到
   $$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$$
   - 分离变量：得到 $\dfrac{\mathrm{d}v}{f(v) - v} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$
   - 两边积分：得到通解，然后将v代回

3. 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ ($q(x) = 0$ 称为一阶齐次线性微分方程, $q(x) \neq 0$称为一阶非齐次线性微分方程)

   - 先用变量分离法求 $y' + p(x)y = 0$ 的解得 $y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$.
   - 将 $y = u(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 代入 $y' + p(x)y = q(x)$.

   ....

$$
\begin{aligned}
&u'(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\\
\Rightarrow\ &u(x) = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} + C\\
\Rightarrow\ &y = \mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} + C\right)
\end{aligned}
$$

   上式即为一阶线性非齐次方程的通解公式.

二阶常系数线性齐次方程

研究二阶常系数线性齐次方程：$y'' + py' + qy = 0$。

....

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为λ_1和λ_2。

1. 若$\lambda_1 \neq \lambda_2$为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

2. 若$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$为相同实根，则方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}$$

3. 若$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

差分

定义 2. 对于数列 y_x（$x = 0, 1, 2, \cdots$），称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的（一阶）差分；称

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

为 y_x 的二阶差分。

性质. 差分具有以下性质：

1. $\Delta(cy_x) = c\Delta y_x$
2. $\Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$
3. $\Delta(y_x z_x) = z_x \Delta y_x + y_{x+1} \Delta z_x$
4. $\Delta\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right) = \dfrac{z_x \Delta y_x - y_x \Delta z_x}{y_x y_{x+1}}$

差分方程

定义. 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程(注意，含下标的y至少要有两个)。差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差，称为该差分方程的阶。（这里最大的下标为$x+n$,最小的下标是x，差分方程的阶为n）

> 要会判断一个方程是否是差分方程，以及要会计算差分方程的阶
> 如：$\Delta y_x = y_{x+1}$是否为差分方程？

定义 3. 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解。

- 满足一定的初始条件的解称为特解。
- 含有n个相互独立的任意常数的解称为n阶差分方程的通解。

一阶常系数齐次线性差分方程

$y_{x+1} - a y_x = 0$的通解为$y_x = c a^x$。

应知道常系数线性差分方程的解的结构.