

## 11 无穷级数

### 无穷级数

定义 1. 给定数列:  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ , 式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

称为**无穷级数** (简称**级数**), 记为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 其中第  $n$  项称为级数的**通项**。

### 级数的敛散性

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的前  $n$  项的和  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  称为第  $n$  次**部分和**, 各个部分和  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  构成一个数列。

- 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  **收敛**;
  - 此时称  $S$  为级数的**和**,
  - 称  $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$  为级数的**余项**;
- 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  发散, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  **发散**。

### 特殊级数的敛散性

- 调和级数:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ..... 发散
- $p$ -级数:  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  ( $p > 0$ ) .....  $0 < p \leq 1$  发散,  $p > 1$  收敛
- 几何级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  .....  $|q| < 1$  收敛,  $|q| \geq 1$  发散

## 级数的性质

性质 1. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  也收敛, 而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

性质 2. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n$  也收敛, 而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

推论. 级数的每一项同乘以不为0的常数后, 其敛散性不变。

性质 3. 在一个级数前面加上 (或者去掉) 有限项, 级数的敛散性不变。

性质 4 (收敛级数的结合律). 如果一个级数收敛, 加括号后所成的级数也收敛, 且与原级数有相同的和。

发散级数加括号后, 可能发散也可能收敛。

## 收敛的必要条件

定理 1. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

.....

注记 1. 若通项不趋于零, 则级数一定发散。

例 1. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$  的通项趋于1, 因此它发散。

.....

注记 2. 若通项趋于零, 则级数未必收敛。

例 2. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$  的通项趋于 0, 但是它发散。

定义 2. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  满足条件  $u_n \geq 0$  (对所有  $n$ ), 则称它为 **正项级数**。

性质. 正项级数的部分和数列  $\{S_n\}$  是单调递增数列。

**定理 2.** 正项级数收敛  $\iff$  它的部分和数列有界。

注记. 正项级数加括号后, 其敛散性不变。

定理 3 (比较判别法). 对于两个正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 若有  $c > 0$  使得  $u_n \leq cv_n$ , 对所有  $n$ , 则有

1. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛;
2. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  也发散。

定理 4 (比较判别法的极限形式). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都为正项级数, 且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。

1. 若  $0 < l < +\infty$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  同敛散;
2. 若  $l = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛;
3. 若  $l = +\infty$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散。

定理 5 (比值判别法). 如果正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , 则有

1. 若  $l < 1$ , 则级数收敛;
2. 若  $l > 1$ , 则级数发散;
3. 若  $l = 1$ , 则级数可能收敛也可能发散。

## 交错级数

**定义 3.** 正负项相间的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$  或  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ , 其中每个  $u_n > 0$ , 称为**交错级数**。

## 交错级数

**定理 6 (莱布尼兹定理).** 如果交错级数满足条件

1.  $u_{n+1} \leq u_n, n = 1, 2, 3, \dots;$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0;$

则级数收敛, 且其和  $S \leq u_1$ , 余项满足  $|R_n| \leq u_{n+1}$ 。

**例 3.** 交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  收敛。

## 任意项级数

**定理 7.** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛。

**定义 4.** 对任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,

1. 称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  **条件收敛**, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散;

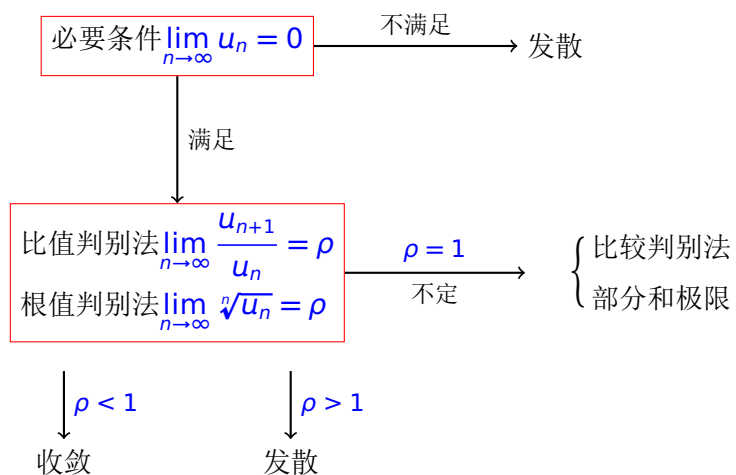
2. 称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  **绝对收敛**, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  都收敛。

**定理 8.** 对于任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$ , 则有

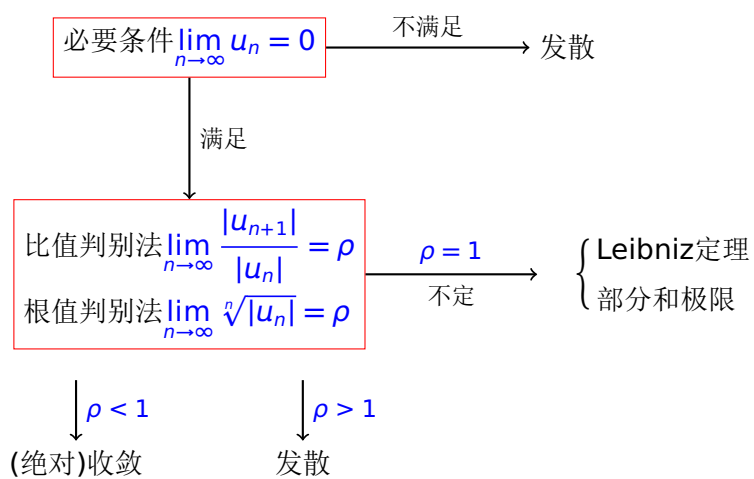
1. 当  $l < 1$  时级数绝对收敛;

2. 当  $l > 1$  时级数发散。

## 正项级数审敛法



## 一般级数审敛法

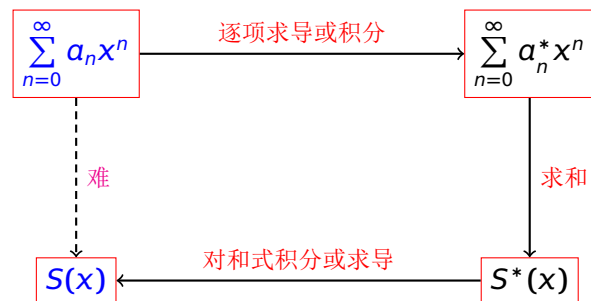


## 幂级数收敛域的求法(重要)

- 标准形式幂级数 ( $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n \neq 0$ )
  1. 先求幂级数的收敛半径 $R$ , 记 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ , 则
    - $\rho \neq 0, \rho \neq +\infty \implies R = \frac{1}{\rho}$
    - $\rho = 0 \implies R = +\infty$
    - $\rho = \infty \implies R = 0$
  2. 再讨论在 $x = \pm R$ 处的敛散性
- 非标准形式幂级数
  - 通过换元转化为标准形式
  - 直接用比值法或者根值法

### 幂级数和函数的求法(重要)

- 初等变换法: 分解和式并套用公式
- 映射变换法: 逐项求导或逐项积分



### 常数项级数和的求法

- 直接求和：求出级数的部分和，再求极限
- 间接求和：转换为求幂级数和，再代入值

### 函数展开为幂级数的方法(重要)

**直接展开法** 利用泰勒公式计算系数，并研究余项

**间接展开法** 利用已知的函数展开式，及幂级数性质