第一节	不定积分的概念与性质
第二节	换元积分法
第三节	分部积分法
第四节	有理分式的积分

定义 1　如果$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数(分式)。

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式。

定理 2　假分式 = 多项式 + 真分式

有理分式分解

理论上，任何一个有理分式(真分式)都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C$$
2. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$$
3. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

理论上，任何一个有有理分式(真分式)的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4 $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$$

5 $$\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+C(n\geq 2)$$

6 $$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}(n\geq 2)$$ 可以用递推法求出

有理分式的分解

定理 3　设多项式$Q(x)$不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个$Q_i(x)$是一次多项式或二次不可约多项式。

定理 4　假定上面任何两个$Q_i(x)$都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式。

有理分式的分解

1 分母中若有因式$(x-a)^k$时，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x+a)^k}+\frac{A_2}{(x+a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x+a}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

特别地: $k=1$,时，分解后为 $\dfrac{A}{x+a}$.

2 分母中若有因式 $\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中$p^2-4q<0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 M_i, N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

特别地: $k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

于是，将有理函数转化为部分分式之和后，只会出现三种情况：

(1) 多项式

(2) $\dfrac{A}{(x+a)^n}$

(3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

(1)和(2)两种情况的不定积分都比较容易求出，因此只讨论情况(3)。

讨论不定积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

易知 $x^2+px+1=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$, 令 $x+\frac{p}{2}=t$,

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\frac{p^2}{4},\ b=N-\frac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记　有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合。

例 5 求 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=3, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=-5, \\ b=6, \end{cases} \quad \text{于是}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3} \right) \mathrm{d}x$$

$$= -5\ln|x-2| + 6\ln|x-3| + C.$$

例 6 求 $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

解 令 $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$.右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2A-B+C=0, \\ A=1, \end{cases} \implies \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=1 \end{cases} \quad 故$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

例 7 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}$

解 令 $\displaystyle\frac{1}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+(A+C)}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{4}{5}, \\ B=-\dfrac{2}{5}, \\ C=\dfrac{1}{5}, \end{cases}$$ 故

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+2x} - \frac{2}{5} \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5} \arctan x + C.
\end{aligned}
$$

练习 1 求不定积分

(1) $$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

注记　初等函数的原函数未必都是初等函数。可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$