

—— 概率论与数理统计 ——

第一章·随机事件的概率

—— 2021 年 2 月 23 日 ——

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

- 1 确定性现象：在一定条件下必然发生的现象；
- 2 不确定性现象：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

- 1 确定性现象：在一定条件下必然发生的现象；
- 2 不确定性现象：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。

- 太阳东升西落 (确定)
- 明天是否是晴天 (不确定)
- 抛一枚均匀的硬币, 正面是否向上 (不确定)

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

- 1 确定性现象：在一定条件下必然发生的现象；
- 2 不确定性现象：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。

1 个别现象 不能重复试验

- 太阳东升西落 (确定)
- 明天是否是晴天 (不确定)
- 抛一枚均匀的硬币, 正面是否向上 (不确定)

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

- 1 确定性现象：在一定条件下必然发生的现象；
 - 2 不确定性现象：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。
 - 1 个别现象 不能重复试验
 - 2 随机现象：可以重复试验，并且结果呈现某种规律
- 太阳东升西落 (确定)
 - 明天是否是晴天 (不确定)
 - 抛一枚均匀的硬币，正面是否向上 (不确定)

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

- 1 确定性现象：在一定条件下必然发生的现象；
- 2 不确定性现象：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。

1 个别现象 不能重复试验

2 随机现象：可以重复试验，并且结果呈现某种规律

■ 太阳东升西落 (确定)

■ 明天是否是晴天 (不确定)

■ 抛一枚均匀的硬币，正面是否向上 (不确定)

概率论与数理统计就是研究随机现象量的规律性的数学学科。

第一节

随机事件

第二节

随机事件的概率

第三节

条件概率

第四节

事件的独立性

第一节

随机事件

1.1

随机试验与样本空间

1.2

随机事件

1.3

事件的关系与运算

产生观测结果的行为或过程称为**试验**.

- E1 掷一颗骰子, 观察所掷的点数是几;
- E2 将一枚硬币抛两次, 观察正面 H 出现的次数;
- E3 将一枚硬币抛两次, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况;
- E4 观察某产品的使用寿命;
- E5 观察某地明天的天气是雨天还是非雨天.

一个试验被称为**随机试验**, 如果它满足条件:

- 1 可能结果不止一个, 结果明确;
- 2 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一个试验被称为**随机试验**, 如果它满足条件:

- 1 可能结果不止一个, 结果明确;
- 2 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

小注: 可以在相同的条件下重复进行的**随机试验**称为可**重复的随机试验** (E1-E4), 否则称为**不可重复的随机试验** (E5).

随机试验

一个试验被称为**随机试验**, 如果它满足条件:

- 1 可能结果不止一个, 结果明确;
- 2 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

小注: 可以在相同的条件下重复进行的**随机试验**称为可**重复的随机试验** (E1-E4), 否则称为**不可重复的随机试验** (E5).

在不引起混淆的情况下, 我们将用**随机试验**或**试验**指代可重复的随机试验.

随机试验的每个可能结果称为一个样本点, 全体样本点组成的集合称为样本空间.

样本空间

随机试验的每个可能结果称为一个样本点, 全体样本点组成的集合称为样本空间.

习惯上分别用 ω 和 Ω 表示样本点与样本空间.

例 1 求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币, 观察正、反面出现的情况;

例 1 求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币, 观察正、反面出现的情况;

$$\{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$$

例 1 求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币, 观察正、反面出现的情况;

$$\{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$$

(2) 记录某地的最低与最高气温.

例 1 求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币, 观察正、反面出现的情况;

$$\{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$$

(2) 记录某地的最低与最高气温.

$$\{(x, y) | a \leq x \leq y \leq b\}$$

其中 a, b 分别为该地气温的下界和上界.

第一节

随机事件

1.1

随机试验与样本空间

1.2

随机事件

1.3

事件的关系与运算

样本空间 Ω 的任意一个子集称为一个随机事件, 简称事件.

样本空间 Ω 的任意一个子集称为一个随机事件, 简称事件.

事件常用大写字母 A, B, C 等表示.

样本空间 Ω 的任意一个子集称为一个随机事件, 简称事件.

事件常用大写字母 A, B, C 等表示.

设 A 是一个事件, 当试验中出现的样本点 $\omega \in A$ 时, 称事件 A 发生.

随机事件的分类：

- 1 只含一个样本点的事件称为基本事件

随机事件的分类：

- 1 只含一个样本点的事件称为基本事件
- 2 含有多于一个样本点的事件称为复合事件

随机事件的分类:

- 1 只含一个样本点的事件称为基本事件
- 2 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
- 3 Ω : 必然事件

随机事件的分类：

- 1 只含一个样本点的事件称为基本事件
- 2 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
- 3 Ω ：必然事件
- 4 \emptyset ：不可能事件

第一节

随机事件

1.1

随机试验与样本空间

1.2

随机事件

1.3

事件的关系与运算

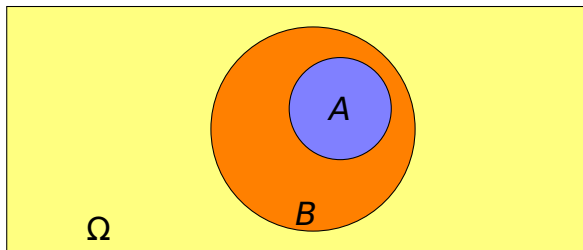
事件的关系与运算

事件是一个集合, 因此事件间的关系和运算可以按照集合之间的关系和运算来规定.

设试验 E 的样本空间为 Ω , $A, B, C, A_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 为 Ω 的子集.

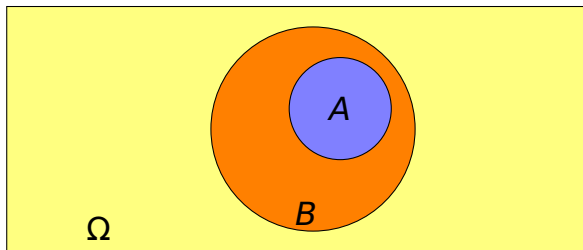
事件的关系

若 $A \subset B$ (或 $B \supset A$), 则称事件 A 是事件 B 的子事件
(或事件 B 包含事件 A).



事件的关系

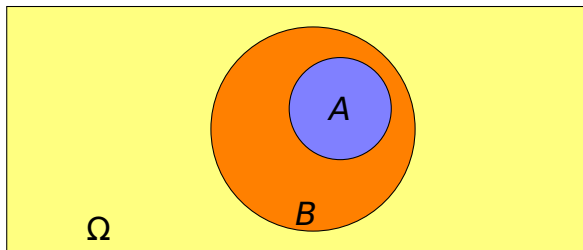
若 $A \subset B$ (或 $B \supset A$), 则称事件 A 是事件 B 的子事件
(或事件 B 包含事件 A).



含义: 若事件 A 发生时, 事件 B 一定发生.

事件的关系

若 $A \subset B$ (或 $B \supset A$), 则称事件 A 是事件 B 的子事件
(或事件 B 包含事件 A).



含义: 若事件 A 发生时, 事件 B 一定发生.

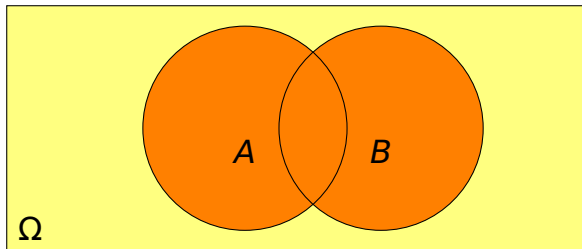
小注: 对任意事件 A , 有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 则称事件 A 与 B 相等.

事件的运算

称事件 $A \cup B$ 为事件 A 与 B 的**和事件**, 其中

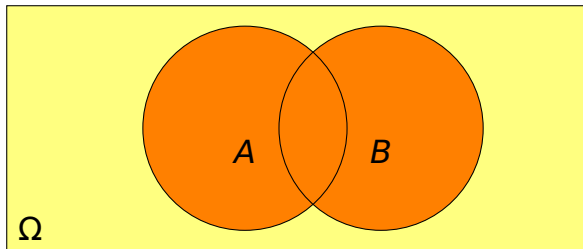
$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$



事件的运算

称事件 $A \cup B$ 为事件 A 与 B 的**和事件**, 其中

$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$



含义: 事件 A 、 B 至少有一个发生.

事件的和可以推广到多个的情形：如 n 个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \text{“事件 } A_1, \dots, A_n \text{ 至少有一个发生”}$$

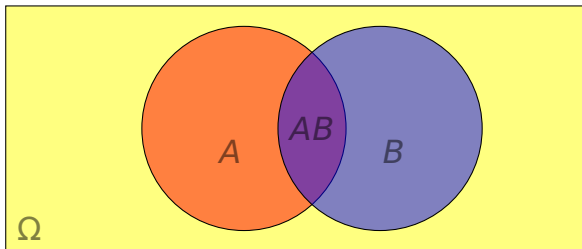
可数个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \dots, \text{ 至少有一个发生”}$$

事件的运算

称事件 $A \cap B$ (简记为 AB) 为事件 A 与 B 的积事件, 其中

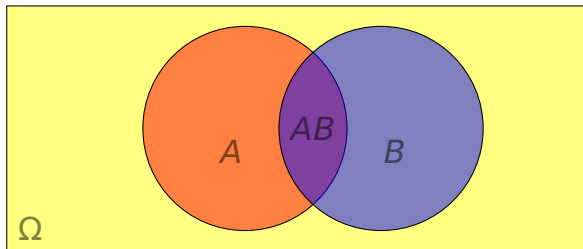
$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$



事件的运算

称事件 $A \cap B$ (简记为 AB) 为事件 A 与 B 的积事件, 其中

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$



含义: 事件 A 和 B 同时发生.

事件的运算

事件的积可以推广到多个的情形：如 n 个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \text{“事件 } A_1, \dots, A_n \text{ 全都发生”}$$

事件的运算

事件的积可以推广到多个的情形：如 n 个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \text{“事件 } A_1, \dots, A_n \text{ 全都发生”}$$

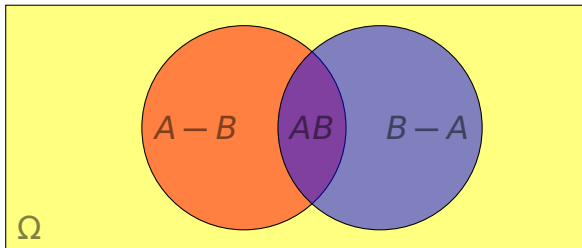
可数个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \dots, \text{ 全都发生”}$$

事件的运算

称事件 $A - B$ 为事件 A 与 B 的差事件, 其中

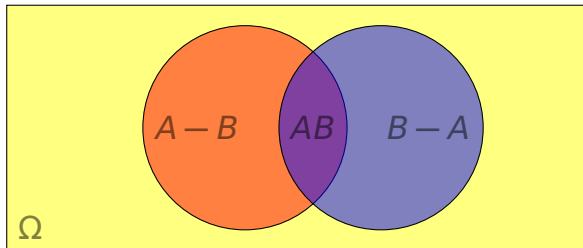
$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.$$



事件的运算

称事件 $A - B$ 为事件 A 与 B 的差事件, 其中

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.$$

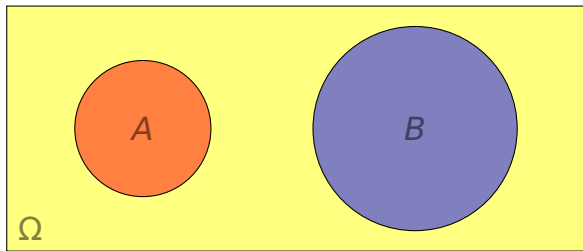


含义: 事件 A 发生, 但 B 不发生.

性质: 对任意两个事件 A 和 B , 总有 $A - B = A - A \cap B$.

事件的关系

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).

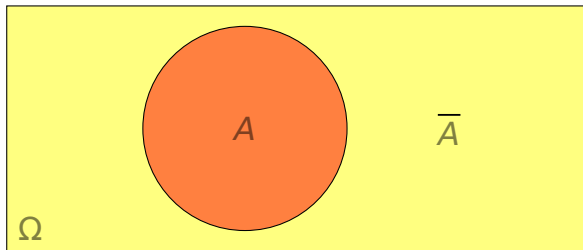


含义: 事件 A 与 B 不可能同时发生.

事件的运算

称 $\Omega - A$ 为事件 A 的**对立事件**(或**逆事件**), 记为 \bar{A} .

含义: 事件 A 不发生.



性质:

- 1 由差事件与对立事件的定义, 显然 $A - B = A \cap B$.
- 2 事件 A 、 B 对立当且仅当 A 、 B 互斥且 $A \cup B = \Omega$.

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1 交换律: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1 交换律: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

2 结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1 交换律: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

2 结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1 交换律: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

2 结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4 对偶律: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

例2 一名射手连续向某个目标射击三次, 事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标 ($i = 1, 2, 3$). 试用事件的运算符号表示下列事件:

- (1) 三次射击至少有一次击中目标;
- (2) 三次射击恰有两次击中目标;
- (3) 三次射击至多有一次击中目标.

解: 有条件可得

- (1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
- (2) $A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3$.
- (3) $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$.

第一节

随机事件

第二节

随机事件的概率

第三节

条件概率

第四节

事件的独立性

事件的**概率**：刻画试验中随机事件发生的**可能性大小**的度量.

事件的**概率**：刻画试验中随机事件发生的**可能性大小**的度量.

在概率论的发展历史上, 曾有过多多种概率定义方法:

- 1 概率的古典定义
- 2 概率的统计定义
- 3 概率的公理化定义

第二节

随机事件的概率

2.1

事件的频率

2.2

概率的性质

2.3

等可能概型 (古典概型)

2.4

几何概型

定义 3 设在 n 次试验中, 事件 A 发生了 m 次, 则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的频率(frequency).

事件的频率

历史上的掷硬币试验：

试验者	投掷次数	正面次数	频率
德摩根	2048	1061	0.5181
浦丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

概率的统计定义

在相同条件下重复进行的试验中, 若随着试验次数 n 的增加, 事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近, 则称 p 为事件 A 的**概率**, 记作 $P(A) = p$.

概率的统计定义

在相同条件下重复进行的试验中, 若随着试验次数 n 的增加, 事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近, 则称 p 为事件 A 的**概率**, 记作 $P(A) = p$.

也就是说: **概率是频率的稳定值.**

概率的统计定义

在相同条件下重复进行的试验中, 若随着试验次数 n 的增加, 事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近, 则称 p 为事件 A 的**概率**, 记作 $P(A) = p$.

也就是说: **概率是频率的稳定值.**

意义: 实际应用中常将大量重复试验中事件的频率作为概率的近似估计.

频率的性质:

- 1 $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
- 2 $f_n(\Omega) = 1, f_n(\emptyset) = 0$;
- 3 若事件 A_1, A_2, \dots, A_k 两两互斥, 则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

概率的公理化定义

定义 4 设 Ω 是样本空间, 对每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应. 若函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件:

- 1 非负性: 对任意事件 A , 均有 $P(A) \geq 0$;
- 2 规范性: $P(\Omega) = 1$;
- 3 可列加性: 若事件序列 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ 两两互斥, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率(probability).

第二节

随机事件的概率

2.1

事件的频率

2.2

概率的性质

2.3

等可能概型 (古典概型)

2.4

几何概型

概率的性质

由概率的定义, 不难得出概率的一些性质:

性质 1 $P(\emptyset) = 0$.

证明.

因为 $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \dots$, 且 $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$,

由规范性及可列可加性得

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \dots) = P(\Omega) + P(\emptyset) + \dots$$

由概率的非负性可得 $P(\emptyset) = 0$.

性质 2(有限可加性) 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

概率的性质

性质 3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A).$$

证明.

概率的性质

性质 3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A).$$

证明.

证明: 易知 $B = A \cup (B - A)$, 且 $A \cap (B - A) = \emptyset$.

由概率的可列可加性可知

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A),$$

移项可得

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

由概率的非负性可得 $P(B - A) \geq 0$, 即

$$P(B) \geq P(A).$$

概率的性质

性质 3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A).$$

证明.

证明: 易知 $B = A \cup (B - A)$, 且 $A \cap (B - A) = \emptyset$.

由概率的可列可加性可知

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A),$$

移项可得

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

由概率的非负性可得 $P(B - A) \geq 0$, 即

$$P(B) \geq P(A).$$

推论: 对任意事件 A, B , 有 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$.

概率的性质

性质 4 对任一事件 A , $P(A) \leq 1$.

概率的性质

性质 4 对任一事件 A , $P(A) \leq 1$.

证明: 因为 $A \subset \Omega$, 由性质3可得.

概率的性质

性质 4 对任一事件 A , $P(A) \leq 1$.

证明: 因为 $A \subset \Omega$, 由性质3可得.

性质 5 对任一事件 A , 有 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

概率的性质

性质 4 对任一事件 A , $P(A) \leq 1$.

证明: 因为 $A \subset \Omega$, 由性质3可得.

性质 5 对任一事件 A , 有 $P(A) = 1 - P(A)$.

证明.

因为 $A \cup A = \Omega$, 且 $A \cap A = \emptyset$, 由有限可加性可得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A) = P(A) + P(A),$$

也即

$$P(A) = 1 - P(A).$$

性质 6: (加法公式) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

概率的性质

性质 6: (加法公式) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明: 因为

$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$

且

$$A(B - AB) = \emptyset, \quad AB \subset B,$$

由性质 2 和性质 3 可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

概率概率的性质

推论 1 对任意三个事件 A_1, A_2, A_3 , 有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) \\ & + P(A_1A_2A_3) \end{aligned}$$

推论 2 对任意 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = & \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_iA_j) \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n). \end{aligned}$$

概率的性质

例5 设 A, B 为两事件, $P(A) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.6$,
求 $P(AB)$.

解: 易知

$$AB = A(\Omega - B) = A - AB,$$

故

$$P(AB) = P(A - AB) = P(A) - P(AB).$$

又因为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

所以

$$P(A) - P(AB) = P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3.$$

例 6 设 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 求证 $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$

概率的性质

例6 设 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 求证 $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$

证明.

由对偶率易知 $\overline{A}\overline{B} = \overline{A \cup B}$, 故

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\&= 1 - P(A \cup B) \\&= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] \\&= 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(AB) \right] \\&= P(AB).\end{aligned}$$

第二节

随机事件的概率

2.1

事件的频率

2.2

概率的性质

2.3

等可能概型 (古典概型)

2.4

几何概型

对某些特殊类型的随机试验, 要确定事件发生的概率, 并不需要做重复试验, 而是根据人类长期积累的关于“对称性”的实际经验, 提出数学模型, 直接计算出来, 从而给出概率相应的定义. 这类试验称为等可能概率模型或古典概型.

定义 7 如果一个随机试验具有以下特点:

- 1 样本空间只含有限多个元素 (样本点);
- 2 基本事件发生的可能性相同,

则称此随机试验是**等可能概型**或**古典概型**. 此时对每个事件 $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件A的**古典概率**.

例 8 将一枚硬币抛两次,

- (1) 设事件 A_1 为 "恰好出现一次正面", 求 $P(A_1)$;
- (2) 设事件 A_2 为 "至少出现一次正面", 求 $P(A_2)$.

例 8 将一枚硬币抛两次,

(1) 设事件 A_1 为 "恰好出现一次正面", 求 $P(A_1)$;

(2) 设事件 A_2 为 "至少出现一次正面", 求 $P(A_2)$.

解: 易知试验的样本空间为

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

故

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = 0.5, \quad P(A_2) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

计数原理

加法原理： 设完成一件事有 k 类方式, 每类方式分别有 n_1, \dots, n_k 种方法, 则完成这件事一共有

$$n_1 + \dots + n_k$$

种方法.

特点： 一步完成.

计数原理

加法原理： 设完成一件事有 k 类方式, 每类方式分别有 n_1, \dots, n_k 种方法, 则完成这件事一共有

$$n_1 + \dots + n_k$$

种方法.

特点： 一步完成.

乘法原理： 设完成一件事有 k 个步骤, 每一步需要 n_1, \dots, n_k 种方法, 则完成这件事一共有

$$n_1 n_2 \dots n_k$$

种方法.

特点： 多步完成.

计数原理

排列数： 从 n 个元素中取 k 个不同元素排成一系列的所有个数, 记为 A_n^k .

排列数公式：

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

计数原理

排列数： 从 n 个元素中取 k 个不同元素排成一系列的所有个数, 记为 A_n^k .

排列数公式：

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

组合数： 从 n 个不同元素中, 取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数, 记为 C_n^k 或 $\binom{n}{k}$.

组合数公式：

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

例 9 (无放回抽样) 设袋中有只 4 白球和 2 只黑球, 现从袋中无放回地依次摸出 2 只球 (即取出的球不放回). 试求

- (1) 取到的两只球都是白球的概率;
- (2) 取到的两只球颜色相同的概率;
- (3) 到的两只球中至少有一只是白球的概率.

解： 记 $A = \{\text{取到到的两只球都是白球}\}$

$B = \{\text{取到到的两只球都是黑球}\}$

$C = \{\text{取到到的两只球至少有一白球}\}$

$D = \{\text{取到到的两只球颜色相同}\}$

(1) 由古典概率模型：

$$P(A) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{15}.$$

解：记 $A = \{\text{取到到的两只球都是白球}\}$

$B = \{\text{取到到的两只球都是黑球}\}$

$C = \{\text{取到到的两只球至少有一白球}\}$

$D = \{\text{取到到的两只球颜色相同}\}$

(1) 由古典概率模型：

$$P(A) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{15}.$$

(2) 因为 $D = A * B$ 且 $AB = \emptyset$, 故由概率有限可加性,

$$P(D) = P(A * B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{15}$$

因为 $C = \overline{B}$, 故 $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{14}{15}$

例 10 将 n 个球随机地放入 $N(N \geq n)$ 个盒子中去, 盒子的容量不限, 试求

- (1) 每个盒子至多有一只球的概率;
- (2) n 个盒子中各有一球的概率.

解: 由条件知, 这是一个古典概型问题, 每一种放法是一个基本事件. 因为每个球有 N 种放法, 由乘法原理, 共有 N^n 种放法.

(1) 每个盒子中至多只有一只球, 共有

$$N(N-1) \cdot (N-n+1)$$

种放法, 故所求概率为

$$p = \frac{N(N-1) \cdots (N-n+1)}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}.$$

(1) 每个盒子中至多只有一只球, 共有

$$N(N-1) \cdot (N-n+1)$$

种放法, 故所求概率为

$$p = \frac{N(N-1) \cdots (N-n+1)}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}.$$

(2) n 个盒子的选法有 C_N^n 种方法, 对选定的 n 个盒子, 每个盒子各有一个球的放法有 $n!$ 种. 由乘法原理,

共有 $n!C_N^n$ 种放法, 因此所求概率为

$$p = \frac{n!C_N^n}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}.$$

例 11 (抽签的公平性) 袋中有 a 个红球和 b 个白球, 每次从袋中任取一个球且不放回. 用事件 A_n 表示第 n 次取到红球, $1 \leq n \leq a + b$, 试证明

$$P(A_n) = \frac{a}{a + b},$$

即 A_n 发生的概率与 n 无关.

解: 考虑到取球顺序, 从 $a+b$ 个球中选取 n 个球共有 A_{a+b}^n 种取法, 即

$$n(\Omega) = A_{a+b}^n = (a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1).$$

在第 n 次取到红球共有 a 种取法, 而前面 $n-1$ 次共 A_{a+b-1}^{n-1} 种取法, 即

$$n(A_n) = A_{a+b-1}^{n-1} \cdot a = (a+b-1)\cdots(a+b-n+1) \cdot a.$$

由古典概率模型, 所求的概率为

$$P(A_n) = \frac{n(A_n)}{n(\Omega)} = \frac{a}{a+b}.$$

实际推断原理： 概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不会发生.

例 12 一位常饮奶茶的女士称：她能从一杯冲好的奶茶中辨别出该奶茶是先放牛奶还是先放茶. 做了 10 次测试, 结果是她都正确地辨别出来了. 问该女士的说法是否可信?

解： 假设该女士的说法不可信，即纯粹是靠运气猜对的. 在此假设下，每次试验的两个可能结果为：

奶 + 茶 或 茶 + 奶

且它们是等可能的，因此是一个古典概型问题. 10 次试验一共有 2^{10} 个等可能的结果，10 次都猜对的概率为：

$$p = \frac{1}{2^{10}} = 0.009766$$

由实际推断原理，该女士的说法可信.

第二节

随机事件的概率

2.1

事件的频率

2.2

概率的性质

2.3

等可能概型 (古典概型)

2.4

几何概型

古典概型是关于试验的结果为有限个, 且每个结果出现的可能性相同的概率模型. 一个直接的推广是: 保留等可能性, 而允许试验具有无限多个结果的.

几何概型

古典概型是关于试验的结果为有限个, 且每个结果出现的可能性相同的概率模型. 一个直接的推广是: 保留等可能性, 而允许试验具有无限多个结果的.

定义: 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度 (面积或体积或度数) 成比例, 则称这样的概率模型为几何概率模型.

几何概型中, 事件 A 的概率:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

例 13 (会面问题) 甲乙两人相约在早上 8 点到 9 点在某地会面, 先到者等候另一人 20 分钟, 过时则离开. 假设两人可以在指定时间内任意时刻到达, 试计算两人会面的概率.

解: 记 8 点为计算时刻的 0 时刻, 以分钟为时间单位, 以 x, y 分别表示甲、乙到达的时刻, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}.$$

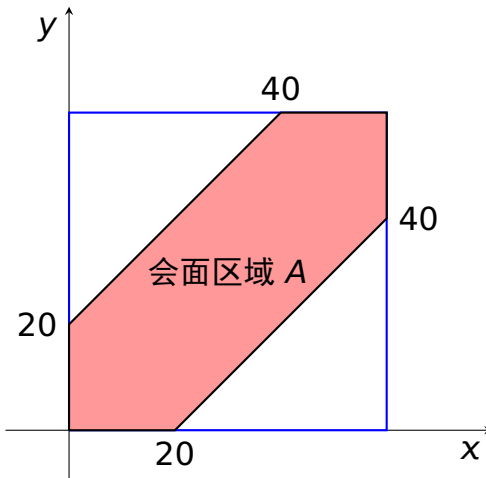
甲、乙能够会面的充要条件为

$$|x - y| \leq 20, (x, y) \in \Omega.$$

古典概型

样本空间及事件的几何表示如图所示, 由几何概型的计算公式得

$$p = S(A)/S(\Omega) = \frac{5}{9}.$$



第一节

随机事件

第二节

随机事件的概率

第三节

条件概率

第四节

事件的独立性

第三节

条件概率

3.1

条件概率

3.2

乘法公式

3.3

全概率公式与贝叶斯公式

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率, 称为条件概率, 记为 $P(B|A)$.

有时为了强调区别, 也称 $P(B)$ 为无条件概率.

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率, 称为条件概率, 记为 $P(B|A)$.

有时为了强调区别, 也称 $P(B)$ 为无条件概率.

例 14 一个家庭中有两个小孩, 已知其中一个女孩, 问另一个也是女孩的概率是多少? (假定生男生女是等可能的)

条件概率

解：由题意，样本空间为

$$\Omega = \{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}.$$

A 表示事件“至少有一个是女孩”， B 表示事件“两个都是女孩”，则有

$$A = \{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男})\},$$

$$B = \{(\text{女}, \text{女})\}.$$

由于事件已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件包含的基本事件只占其中的一种，所以有

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

条件概率

在这个例子中, 若不知道事件已经发生的信息, 那么事件发生的概率为

$$P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B|A).$$

条件概率

在这个例子中, 若不知道事件已经发生的信息, 那么事件发生的概率为

$$P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B|A).$$

原因: 事件 A 的发生改变了样本空间.

条件概率

在这个例子中, 若不知道事件已经发生的信息, 那么事件发生的概率为

$$P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B|A).$$

原因: 事件 A 的发生改变了样本空间.

注意到

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(AB) = \frac{1}{4}$$

于是

$$P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率

定义 15 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下, 事件 B 的条件概率.

条件概率

定义 15 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下, 事件 B 的条件概率.

小注: 条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率 (满足三个条件).

条件概率

定义 15 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下, 事件 B 的条件概率.

小注: 条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率 (满足三个条件).

计算: 根据具体的情况, 可选用下列两种方法之一来计算条件概率 $P(B|A)$

- 1 在缩减后的样本空间 Ω_A 中计算;
- 2 在原来的样本空间 Ω 中, 直接由定义计算.

例 16 一袋中有 10 个球, 其中 3 个黑球, 7 个白球, 依次从袋中不放回取两球.

- (1) 已知第一次取出的是黑球, 求第二次取出的仍是黑球的概率;
- (2) 已知第二次取出的是黑球, 求第一次取出的也是黑球的概率.

条件概率

解： 记 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到黑球}\} (i = 1, 2)$.

(1) 第一次取到黑球, 则第二次取到黑球的方法有两种, 所有可取的球有9个. 故

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$$

条件概率

解：记 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到黑球}\} (i = 1, 2)$.

(1) 第一次取到黑球，则第二次取到黑球的方法有两种，所有可取的球有9个。故

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$$

(2) 因为

$$P(A_1A_2) = \frac{3 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{15}, \quad P(A_2) = \frac{3}{10},$$

所以

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{2}{9}.$$

例 17 保险公司按年向车主收取保险费, 并承担交通事故的赔偿费用. 假设车主一年内发生事故的的概率为 0.2, 连续两年发生事故的的概率是 0.08. 试解释保险公司的车险浮动费率规则的合理性:

- (1) 若第一年内发生了事故, 则上调第二年的保险费;
- (2) 若第一年内未发生事故, 则下调第二年的保险费.

条件概率

解： 用事件 A 表示第一年发生了事故, 事件 B 表示第二年发生了事故, 则有

$$P(A) = P(B) = 0.2, P(AB) = 0.08.$$

条件概率

解： 用事件 A 表示第一年发生了事故, 事件 B 表示第二年发生了事故, 则有

$$P(A) = P(B) = 0.2, P(AB) = 0.08.$$

若第一年内发生了事故, 则第二年发生事故的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4 > P(A)$$

条件概率

解： 用事件 A 表示第一年发生了事故, 事件 B 表示第二年发生了事故, 则有

$$P(A) = P(B) = 0.2, P(AB) = 0.08.$$

若第一年内发生了事故, 则第二年发生事故的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4 > P(A)$$

若第一年内未发生事故, 则第二年发生事故的概率为

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = 0.15 < P(A)$$

第三节

条件概率

3.1

条件概率

3.2

乘法公式

3.3

全概率公式与贝叶斯公式

乘法公式

定理 18 (乘法公式) 由条件概率的定义, 得到

- 1 如果 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.
- 2 如果 $P(B) > 0$, 则有 $P(AB) = P(A|B)P(B)$.

乘法公式

定理 18 (乘法公式) 由条件概率的定义, 得到

1 如果 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

2 如果 $P(B) > 0$, 则有 $P(AB) = P(A|B)P(B)$.

推论: 如果 $P(A_1A_2) > 0$, 则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

乘法公式

定理 18 (乘法公式) 由条件概率的定义, 得到

1 如果 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

2 如果 $P(B) > 0$, 则有 $P(AB) = P(A|B)P(B)$.

推论: 如果 $P(A_1A_2) > 0$, 则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

更一般地, 若 $P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有乘法公式

$$P(A_1A_2 \cdots A_n)$$

$$= P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}) \cdots P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

例 19 一袋中有 a 个白球和 b 个红球. 现依次不放回地从袋中取两球. 试求两次均取到白球的概率.

乘法公式

例 19 一袋中有 a 个白球和 b 个红球. 现依次不放回地从袋中取两球. 试求两次均取到白球的概率.

解: 记

$$A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到白球}\} (i = 1, 2),$$

要求 $P(A_1A_2)$. 显然

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{a-1}{a+b-1},$$

因此

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

例 20 某厂产品的废品率为 4%, 而合格品在中 有 75% 是一等品, 求一等品率.

例 20 某厂产品的废品率为 4%, 而合格品在中有 75% 是一等品, 求一等品率.

解: 记 A : 合格品; B : 一等品, 由题意知

$$P(A) = 1 - 4\% = 96\%, \quad P(B|A) = 75\%$$

因为 $B \subset A$, 故 $B = BA$, 所以

$$P(B) = P(BA) = P(B|A)P(A) = 0.96 \times 0.75 = 0.72.$$

第三节

条件概率

3.1

条件概率

3.2

乘法公式

3.3

全概率公式与贝叶斯公式

定义 21 设 Ω 为某试验的样本空间, B_1, B_2, \dots, B_n 为一组事件. 如果以下条件成立:

1 B_1, B_2, \dots, B_n 两两互斥,

2 $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

则称 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 Ω 的一个划分.

定义 21 设 Ω 为某试验的样本空间, B_1, B_2, \dots, B_n 为一组事件. 如果以下条件成立:

1 B_1, B_2, \dots, B_n 两两互斥,

2 $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

则称 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 Ω 的一个划分.

例子: 对任意事件 A , A 与 \bar{A} 为样本空间的一个划分.

定理 22 (全概率公式) 设试验 E 的样本空间为 Ω , A 为 E 的事件, 如果 B_1, B_2, \dots, B_n 是 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0, (i = 1, \dots, n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

全概率公式

定理 22 (全概率公式) 设试验 E 的样本空间为 Ω , A 为 E 的事件, 如果 B_1, B_2, \dots, B_n 是 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0, (i = 1, \dots, n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

应用: 利用全概率公式, 可以把复杂事件概率的计算问题, 化为若干互不相容的简单情形, 分别求概率然后求和.

全概率公式

证明.

因为 B_1, B_2, \dots, B_n 是 Ω 的一个划分, 所以

$$A = A \cap \Omega = AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n$$

$$(AB_i)(AB_j) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, n$$

由概率的可加性及乘法公式, 有

$$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n)$$

$$= P(AB_1) + \dots + P(AB_n)$$

$$= P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

例 23 两个车间生产同型号的家电. 第 1 车间的次品率为 0.15, 第 2 车间的次品率为 0.12. 两个车间生产的成品混放在一起, 假设第 1, 2 车间生产的成品比例为 2 : 3. 在仓库中随机地取一件成品, 求它是次品的概率;

全概率公式

例 23 两个车间生产同型号的家电. 第 1 车间的次品率为 0.15, 第 2 车间的次品率为 0.12. 两个车间生产的成品混放在一起, 假设第 1, 2 车间生产的成品比例为 2 : 3. 在仓库中随机地取一件成品, 求它是次品的概率;

解: 记 $A = \{\text{从仓库种取到的是次品}\},$
 $B_i = \{\text{产品是第 } i \text{ 车间生产的}\};$

易知 B_1, B_2 是样本空间的一个划分, 由全概率公式得:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 0.15 \times \frac{2}{5} + 0.12 \times \frac{3}{5} = 0.132 \end{aligned}$$

例 24 假设在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率. 经分析, 该时期内利率下调的概率为 60%, 利率不变的概率为 40%. 根据经验, 在利率下调时某支股票上涨的概率为 80%, 在利率不变时, 这支股票上涨的概率为 40%. 求这支股票上涨的概率.

例 24 假设在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率. 经分析, 该时期内利率下调的概率为 60%, 利率不变的概率为 40%. 根据经验, 在利率下调时某支股票上涨的概率为 80%, 在利率不变时, 这支股票上涨的概率为 40%. 求这支股票上涨的概率.

解: 设 B_1, B_2 表示事件“利率上调”和“利率不变”, A 表示事件“股票上涨”, 易知 $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 B_2 = \emptyset$, 由全概率公式:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 80\% \times 60\% + 40\% \times 40\% \\ &= 64\% \end{aligned}$$

贝叶斯公式

定理 25 如果 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间 Ω 的一个划分, A 是一个事件, 且 $P(B_i) > 0, P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, i = 1, \dots, n.$$

证明.

由乘法公式可知

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(A B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

又由全概率公式可得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

故结论成立.

贝叶斯公式

贝叶斯公式于 1763 年由贝叶斯 (Bayes) 给出. 它是在观察到事件 A 已发生的条件下, 寻找导致 A 发生的每个原因 B_i 的概率.

在贝叶斯公式中, $P(B_i)$ 和 $P(B_i|A)$ 分别称为原因 B_i 的**先验概率**和**后验概率**.

贝叶斯公式

贝叶斯公式于 1763 年由贝叶斯 (Bayes) 给出. 它是在观察到事件 A 已发生的条件下, 寻找导致 A 发生的每个原因 B_i 的概率.

在贝叶斯公式中, $P(B_i)$ 和 $P(B_i|A)$ 分别称为原因 B_i 的**先验概率**和**后验概率**.

先验概率常常根据等可能的假设或者以往的数据积累来确定. 是在没有进一步信息 (不知道事件 A 是否发生) 的情况下, 人们对诸事件发生可能性大小的认识.

贝叶斯公式

贝叶斯公式于 1763 年由贝叶斯 (Bayes) 给出. 它是在观察到事件 A 已发生的条件下, 寻找导致 A 发生的每个原因 B_i 的概率.

在贝叶斯公式中, $P(B_i)$ 和 $P(B_i|A)$ 分别称为原因 B_i 的**先验概率**和**后验概率**.

先验概率常常根据等可能的假设或者以往的数据积累来确定. 是在没有进一步信息 (不知道事件 A 是否发生) 的情况下, 人们对诸事件发生可能性大小的认识.

而在得到进一步的信息之后 (知道事件 A 已经发生), 我们得以对各个可能原因发生的概率重新加以修正

例 26 由医学统计数据可知, 人群中患由某种病菌引起的疾病占总人数的 0.5% . 一种血液化验以 95% 的概率将患有此疾病的人检查出呈阳性, 但也以 1% 的概率误将不患此疾病的人检验出呈阳性. 现设某人检查出呈阳性反应, 问他确患有此疾病的概率是多少?

例 26 由医学统计数据可知, 人群中患由某种病菌引起的疾病占总人数的 0.5%. 一种血液化验以 95% 的概率将患有此疾病的人检查出呈阳性, 但也以 1% 的概率误将不患此疾病的人检验出呈阳性. 现设某人检查出呈阳性反应, 问他确患有此疾病的概率是多少?

解: 记“检出阳性”为事件 A , “被检者患病”和“被检者不患病”分别为事件 B_1, B_2 , 则

$$P(B_1) = 0.005, P(B_2) = 0.995$$

$$P(A|B_1) = 0.95, P(A|B_2) = 0.01$$

由贝叶斯公式可得:

$$P(B_1|A) = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.01} \approx 0.323.$$

例 27 玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率相应地为 0.8, 0.1 和 0.1. 一顾客欲买一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随机地查看 4 只, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则退回. 试求:

- (1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率 α ;
- (2) 在顾客买下的一箱玻璃杯中, 确实没有残次品的概率 β .

例 27 玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率相应地为 0.8, 0.1 和 0.1. 一顾客欲买一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随机地查看 4 只, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则退回. 试求:

- (1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率 α ;
- (2) 在顾客买下的一箱玻璃杯中, 确实没有残次品的概率 β .

解: 记“顾客买下该箱玻璃杯”为事件 A, “箱中有 i 只残次品 ($i = 0, 1, 2$)”为事件 B_i 显然 B_0, B_1, B_2 为

Ω 的一个划分, 由题意:

$$P(B_0) = 0.8, P(B_1) = 0.1, P(B_2) = 0.1, P(A|B_0) = 1.$$

$$P(A|B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}, P(A|B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}$$

解： (1) 由全概率公式, 有:

$$\begin{aligned}\alpha = P(A) &= \sum_{i=0}^2 P(A|B_i)P(B_i) \\ &= 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} \approx 0.94\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式, 有:

$$\beta = P(B_0|A) = \frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)} \approx \frac{0.8}{0.94} \approx 0.85$$

第一节

随机事件

第二节

随机事件的概率

第三节

条件概率

第四节

事件的独立性

两个事件的独立性

设有两个事件 A, B , 一般来说, $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 是有差异的, 但有时事件 A 的发生与否并不影响事件 B 发生的概率, 即 $P(B|A) = P(B)$.

两个事件的独立性

设有两个事件 A, B , 一般来说, $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 是有差异的, 但有时事件 A 的发生与否并不影响事件 B 发生的概率, 即 $P(B|A) = P(B)$.

例 28 袋中有 6 个白球, 2 个黑球, 从中有放回地抽取两次, 每次取一球, 记 A = 第一次取到白球, B = 第二次取到白球, 则有

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & P(B) &= \frac{8 \times 6}{8^2} = \frac{3}{4} \\ P(AB) &= \frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}, & P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

因此 $P(B|A) = P(B)$. 同理可得 $P(B|A) = 3/4 = P(B)$.

两个事件的独立性

设有两个事件 A, B , 一般来说, $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 是有差异的, 但有时事件 A 的发生与否并不影响事件 B 发生的概率, 即 $P(B|A) = P(B)$.

例 28 袋中有 6 个白球, 2 个黑球, 从中有放回地抽取两次, 每次取一球, 记 A = 第一次取到白球, B = 第二次取到白球, 则有

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, & P(B) &= \frac{8 \times 6}{8^2} = \frac{3}{4} \\P(AB) &= \frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}, & P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

因此 $P(B|A) = P(B)$. 同理可得 $P(B|A) = 3/4 = P(B)$.

小注: 这就是说, 已知事件 A 发生, 并不影响事件 B 发生的概率, 这时称事件 A, B **独立**.

两个事件的独立性

由乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A),$$

当事件 A, B 独立时, 有

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (1)$$

当 $P(A) = 0$ 时, 由

$$0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$$

可知 $P(AB) = 0$, (1) 式仍然成立.

注意: $P(A) = 0$ 时, $P(B|A)$ 没有意义.

两个事件的独立性

定义 29 若两事件 A, B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A, B 独立, 或称 A, B 相互独立.

小注: 用

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

刻画独立性, 比用

$$P(A|B) = P(A) \text{ 或 } P(B|A) = P(B)$$

更好, 它不受 $P(B) > 0$ 或 $P(A) > 0$ 的制约, 且体现对称性.

事件的独立性

在实际应用中，往往根据问题的实际情况去假设事件间的独立性。如

- 投掷硬币（或骰子），我们相信每次的结果都不受以前结果的影响；
- 在相同条件下做实验，一般假定每次的实验误差相互独立；
- 一般假定生产中不同的流程（机器、人）也是相互独立的。

两个事件的独立性

例 30 甲乙二人独立地对目标各射击一次, 设甲射中目标的概率为 0.5, 乙射中目标的概率为 0.6, 求目标被击中的概率.

解: 假设 A, B 分别表示甲乙击中目标, 则 $A \cup B$ 表示目标被击中, 由于 A, B 独立,

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\&= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\&= 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.6 \\&= 0.8.\end{aligned}$$

两个事件的独立性

定理 31 若事件 A 与 B 独立, 则 A 与 \bar{B} 、 \bar{A} 与 B 、 \bar{A} 与 \bar{B} 也分别独立.

证明.

因为 $P(AB) = P(A)P(B)$, 所以

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}) &= P(A(\Omega - B)) = P(A - AB) \\&= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\&= P(A)[1 - P(B)] \\&= P(A)P(\bar{B})\end{aligned}$$

由对称性知, \bar{A} 与 B 相互独立. 利用第一条结论, 可得 \bar{A} 与 \bar{B} 相互独立.

互斥与独立的关系

“两个事件互斥”和“两个事件相互独立”是不同的概念：

■ 互斥 $\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

■ 独立 $\implies P(AB) = P(A)P(B)$.

互斥与独立的关系

“两个事件互斥”和“两个事件相互独立”是不同的概念：

■ 互斥 $\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

■ 独立 $\implies P(AB) = P(A)P(B)$.

但两者也有关系：如果 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$ ，则两者不可能既是互斥的又是独立的。

两个事件的独立性

小注: 若 A 与 B 相互独立, 且 B 与 C 相互独立, 则 A 与 C 未必相互独立.

两个事件的独立性

小注: 若 A 与 B 相互独立, 且 B 与 C 相互独立, 则 A 与 C 未必相互独立.

例子 从全体有两个孩子的家庭中随机选择一个家庭, 并考虑下面三个事件:

- 1 A 为“第一个孩子是男孩”,
- 2 B 为“两个孩子不同性别”,
- 3 C 为“第一个孩子是女孩”.

容易验证 A 与 B 相互独立, B 与 C 相互独立, 但是 A 与 C **不独立**.

三个事件的独立性

定义 32

设 A_1, A_2, A_3 是三个事件, 如果

$$\text{1 两两独立} \left\{ \begin{array}{l} P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) \end{array} \right.$$

$$\text{2 } P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立.

多个事件的独立性

定义 称 $n(n \geq 2)$ 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 如果对任意一组指标

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad (k \geq 2)$$

都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

多个事件的独立性

性质 设 $n(n \geq 2)$ 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则

- 1 其中任意 $k(k \geq 2)$ 个事件也是相互独立的.
- 2 将若干个 A_i 用 \bar{A}_i 替换后, 得到的新事件集也相互独立.
- 3 特别地, 我们有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)] \end{aligned}$$

例 33 (保险赔付) 设有 n 个人向保险公司购买人身意外保险 (保险期为 1 年), 假定投保人在一年内发生意外的概率为 0.01. 求

- (1) 保险公司赔付的概率;
- (2) 当 n 为多大时, 使得以上赔付的概率超过 $1/2$.

小注:每个人是否发生意外可以看作是相互独立的.

解: 记 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个投保人出现意外}\} (i = 1, 2, \dots, n)$,

$A = \{\text{保险公司赔付}\}$

(1) 因为 A_1, \dots, A_n 相互独立, 且 $A = \cup_{i=1}^n A_i$, 我们有

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - (0.99)^n.$$

(2) 注意到 $P(A) \geq 0.5$ 等价于 $(0.99)^n \leq 0.5$, 我们有

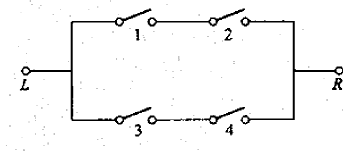
$$n \geq \frac{\lg 2}{2 - \lg 99} \approx 68.416$$

即当投保人数大于等于 69 人时, 赔付的概率超过 1/2.

例 34 设有电路如下图所示, 其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点, 设各继电器接点闭合与否是相互独立的, 且每一继电器接点闭合的概率均为 p , 求 L 至 R 为通路的概率.

例 34 设有电路如下图所示, 其中 1, 2, 3, 4 为继电器接点, 设各继电器接点闭合与否是相互独立的, 且每一继电器接点闭合的概率均为 p , 求 L 至 R 为通路的概率.

解: 设 $A = \{\text{第 } i \text{ 个继电器闭合}\},$
 $A = \{L \text{ 至 } R \text{ 是通路}\},$



由 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$ 及 A_1, A_2, A_3, A_4 的独立性可得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) \\ &\quad - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= 2p^2 - p^4 \end{aligned}$$

例 35 据以往记录的数据分析, 某船只运输某种物品损坏的情况共有三种: 损坏 2% (记这一事件为 A_1), 损坏 10% (记这一事件为 A_2), 损坏 90% (记这一事件为 A_3). 且 $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05$.

设物品件数很多, 取出一件后不影响后一件取的是否为好品的概率, 现从已被运输的物品中随机地取 3 件, 发现这三件都是好的 (记这一事件为 B), 试求 $P(A_1|B)$.

解： 在被运输的物品中，随机取 3 件，相当于在物品中抽取 3 次，每次取一件，作不放回抽样。由于抽取一件后，不影响取后一件是否为好品的概率，已知当 A_1 发生时，一件产品是好品的概率为 $1 - 2\% = 98\%$ 。由独立性可知，随机取 3 件，它们都是好品的概率为

$$P(B|A_1) = 0.98^3.$$

同理可得

$$P(B|A_2) = 0.9^3, P(B|A_3) = 0.1^3.$$

由条件知 $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05, A_i A_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, 3)$ 且

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

由贝叶斯公式可得:

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B|A_i)P(A_i)} \\ &= \frac{(0.98)^3 \times 0.8}{0.8624} = 0.8731 \end{aligned}$$