

第二章 极限与连续

一、单项选择

1. 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ().

- (A) > 0 (B) ≥ 0 (C) $= 0$ (D) < 0

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}} = ()$.

- (A) ∞ (B) 1 (C) 不存在 (D) 0

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = ()$

- (A) e (B) e^{-1} (C) $e+1$ (D) $e^{-1}+1$

4. 下列运算过程正确的是 ()

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+n} = 0+0+\cdots+0=0$

(B) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$

(C) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

(D) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})x} = 1$

5. 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = ()$

- (A) 1 (B) 0 (C) a (D) b

6. 设 $f(x)$ 在 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 定义. 如果极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则下列结论正确的是 ()

- (A) $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 有界;
(B) 存在正数 δ , $f(x)$ 在 $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ 有界;
(C) $f(x)$ 在 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 有界;
(D) 存在正数 δ , $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 有界.

7. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{f(3x)} = ()$

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{4}{3}$

8. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则 ().

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ 一定都不存在;

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ 一定都存在;

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ 恰有一个存在, 而另一个不存在;

(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ 都不一定存在.

9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个比另三个更高阶的无穷小量 ().

(A) x^2

(B) $1 - \cos x$

(C) $\sqrt{1-x^2} - 1$

(D) $x - \tan x$

10. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos 2x$ 与 x^2 相比是 ().

(A) 高阶无穷小量

(B) 同阶但不等价的无穷小量

(C) 低阶无穷小量

(D) 等价无穷小量

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 ().

(A) 无穷小量

(B) 无穷大量

(C) 有界量非无穷小量

(D) 无界但非无穷大量

12. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数中比 x 高阶的无穷小量是 ().

(A) $x + \sin x$

(B) $x - \sin x$

(C) $\ln(1+x)$

(D) $\ln(1-x)$

13. 设在某个极限过程中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是无穷大量, 则下列函数中哪一个也必是无穷大量 ().

(A) $f(x) + g(x)$

(B) $f(x) - g(x)$

(C) $f(x) \cdot g(x)$

(D) $\frac{f(x)}{g(x)}$

14. $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos 3x$ 是 x^2 的 ().

(A) 高阶无穷小

(B) 同阶无穷小, 但不等价

(C) 等价无穷小

(D) 低阶无穷小

15. $x=1$ 是 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ 的 ().

(A) 连续点

(B) 跳跃间断点

(C) 可去间断点

(D) 无穷间断点

16. $y = \frac{\sqrt{x-3}}{(x+1)(x+2)}$ 的连续区间是 ().

- (A) $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$ (B) $[3, +\infty)$
 (C) $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

17. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x-x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的间断点个数为 ().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

18. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ 为连续函数, 则 $k = ()$

- (A) 1 (B) -3 (C) 0 (D) 3

19. 函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否连续? ()

- (A) 连续 (B) 不连续, 因为无定义
 (C) 不连续, 因为极限不存在 (D) 前面都不对

20. 要使 $f(x) = (1+x^2)^{-\frac{2}{x^2}}$ 在 $x=0$ 处连续, 应补充定义 $f(0)$ 的值为 ().

- (A) 0 (B) e^{-2} (C) e^{-4} (D) e^{-1}

二、填空题

1. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(4x-1)^\alpha} = \beta$, 则 α, β 的值是 _____.

2. 若 $a > 0, b > 0$ 均为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} =$ _____

3. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} =$ _____

4. 设 $P(x)$ 是 x 的多项式, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x) - 6x^3}{x^2} = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x} = 3$, 则 $P(x) =$ _____.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{3}} =$ _____.

6. 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - ax - x + 4}{x-1} = A$, 则有 $a =$ _____, $A =$ _____.

7. 设 $f(x) = x \sin \frac{2}{x} + \frac{\sin x}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ _____.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^3 x \cdot \sin \frac{1}{x}}{3x^2} =$ _____.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)) = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{1+x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x^2 + 3x^{\frac{5}{2}}$ 是关于 x 的 阶无穷小.

13. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1-3x} = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$, 则 a 和 b 的值分别为 .

14. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2\sin x - \sin 2x$ 与 x^k 是等价无穷小量, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 函数 $y = \frac{\sqrt{1+x}}{(x-1)(x+2)}$ 的间断点是 .

16. 设函数 $y = \begin{cases} (1-x)^{\frac{3}{x}} & x \neq 0 \\ K & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则参数 $K = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 函数 $f(x) = \begin{cases} x+a & x \leq 0 \\ e^x + 1 & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

18. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin 2x}{x} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{\ln(1+4x)}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处间断, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的连续区间是 .

20. $x=1$ 是函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}$ 的 .

三、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\tan x}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2-2x+2})$

知识点: 极限的四则运算法则及有理分式的极限

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\arctan x \cdot \arcsin \frac{1}{x})$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n})$

6. 若 $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0 (a < b)$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$

7. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^2(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1) + \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^4}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

8. 设 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ a & x = 0 \text{ (其中 } k \neq 0 \text{)} \\ \frac{\sin kx}{x} & x < 0 \end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右极限;

(2) 当 a 和 k 取何值时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续?