第一节 集合

第二节 映射与函数

第三节 复合函数与反函数　初等函数

第一节 集合

第二节 映射与函数

第三节 复合函数与反函数 初等函数

第三节 复合函数与反函数 初等函数

复合函数

定义　设f和g为两个函数，且$D_f \cap R_g \neq \varnothing$，则称定义在

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

上的函数 $f \circ g$ 为 f 和 g 的复合函数，其中

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

对于复合函数$f \circ g$，称x为自变量，u为中间变量，y为因变量.

例子　两个函数$y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 - x^2$ 的复合函数是$y = \sqrt{1 - x^2}$.

注记 1

1. 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

   例子　$y = \arcsin u, u = 2 + x^2; y \neq \arcsin\left(2 + x^2\right).$

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

   例子　$y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}, \quad y = \sqrt{u}, \quad u = \cot v, \quad v = \frac{x}{2}.$

第三节	复合函数与反函数　初等函数
3.1	复合函数
3.2	反函数
3.3	函数的运算
3.4	初等函数
3.5	小结　思考题

反函数

定义 设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \to D,$$

称此映射 f^{-1} 为函数 f 的 反函数.

注记 2

1. 反函数f^{-1}由函数f确定.
2. 函数与反函数的图像关于$y = x$对称.

例 1　求函数 $y=\sqrt{e^x+1}$ 的反函数.

解　由$e^x=y^2-1$可得

$$x=\ln\left(y^2-1\right).$$

又$y=\sqrt{e^x+1}>1$, 即原函数的值域为 $(1,+\infty)$, 因此反函数为

$$y=\ln\left(x^2-1\right),$$

反函数的定义域为:

$$D_{f^{-1}}=(1,+\infty)$$

定理 (反函数存在定理) 单调函数 f 必存在单调的反函数，且此反函数与 f 具有相同的单调性.

第三节	复合函数与反函数　初等函数
3.1	复合函数
3.2	反函数
3.3	函数的运算
3.4	初等函数
3.5	小结　思考题

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域分别是 D_1 、 D_2, $D = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

1. 函数的和(差):

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),\ x \in D;$$

2. 函数的积:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),\ x \in D;$$

3. 函数的商:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in D \backslash \{x \mid g(x) = 0\}.$$

例子　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明必定存在 $(-l, l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数$h(x)$使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

解：假设存在$g(x)$ 和 $h(x)$ 满足条件, 则有

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{cases}$$

易知, $g(x)$,$h(x)$满足条件.

第三节	复合函数与反函数　初等函数
3.1	复合函数
3.2	反函数
3.3	函数的运算
3.4	初等函数
3.5	小结　　思考题

初等函数

下面这五种函数, 统称为基本初等函数:

1. 幂函数$y = x^\mu$;
2. 指数函数$y = a^x$;
3. 对数函数$y = \log_a x$;
4. 三角函数$y = \sin x$, $y = \cos x$, 等;
5. 反三角函数$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, 等.

由五种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的函数, 称为初等函数.

练习 将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = (1 + \ln x)^5$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $y = u^5,\ u = 1 + \ln x.$

(2) $y = \sin^2(3x + 1)$ $\cdots\cdots\cdots$ $y = u^2,\ u = \sin v,\ v = 3x + 1.$

小结

1. 复合函数: 复合函数的形成与复合过程的分解.
2. 反函数: 反函数的基本求法.
3. 函数的运算: 简单函数的四则运算.
4. 初等函数: 基本初等函数的复合.

思考 已知 $f(\tan x) = \sec^2 x + 1$, 求 $f(x)$.

解 易知 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$, 因此

$$f(\tan x) = \left(\tan^2 x + 1\right) + 1,$$

所以

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) + 1 = x^2 + 2.$$