目录

Part I

第一章

1 集合

1.1 集合的概念

集合的概念

概念：

- 集合是具有确定性质的对象的总体；
- 构成集合的每一个对象，称为集合的元素.

例子：

1. 太阳系的九大行星.
2. 教室里的所有同学.

如果a是集合A中的元素，记为$a \in A$；否则记为$a \notin A$.

集合的表示法

分类：

1. 由有限个元素组成的几何称为有限集.
2. 由无限个元素组成的几何称为无限集.

表示方法：

1. 列举法　　$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
2. 描述法　　$B = \{x \mid x$ 所具有的特征$\}$

子集

如果$x \in A$，必有$x \in B$，则称A是B的子集，记为$A \subset B$或$B \supset A$.

如果$A \subset B$，且$B \subset A$，则称A与B相等，记为$A = B$.

例如： 若$A = \{1, 2\}$, $C = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$，则$A = C$.

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

例如： $\{x|x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

小注： 空集是任何集合的子集.

数集

元素为数的集合称为数集, 人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集$\mathbf{N}$
- 整数集$\mathbf{Z}$
- 有理数集$\mathbf{Q}$
- 实数集$\mathbf{R} \longleftarrow$ 微积分的研究对象
- 复数集$\mathbf{C}$

小注： $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

1.2 集合的运算

集合的运算

1. 交集：$A \cap B = \{x \,|\, x \in A$ 且 $x \in B\}$
2. 并集：$A \cup B = \{x \,|\, x \in A$ 或 $x \in B\}$
3. 差集：$A \backslash B = \{x \,|\, x \in A$ 且 $x \notin B\}$
4. 补集(余集)：$A^c = I \backslash A = \{x \,|\, x \in I$ 且 $x \notin A\}$, 其中I为研究对象的全体(全集).

集合运算律

1. 交换律
   - $A \cap B = B \cap A$
   - $A \cup B = B \cup A$
2. 结合律
   - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律
   - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
   - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. 对偶律
   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

笛卡尔(Descartes)乘积

设有集合A和B. 对任意的$x \in A$, $y \in B$, 则称集合

$$\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

为A与B的笛卡尔乘积(或直积), 记为$A \times B$. 例如: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$即为$xOy$平面上全体点的集合, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$常记为$\mathbf{R}^2$.

1.3 区间和邻域

有限区间

区间是指介于两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

区间可分为有限区间和无限区间.

有限区间：

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\} \qquad \text{开区间}$$

$$[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\} \qquad \text{闭区间}$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\} \qquad \text{左开右闭区间}$$

$$[a,b)=\{x \mid a\le x<b\} \qquad \text{左闭右开区间}$$

例子. 用区间表示下列数集：

(1) $\{x \mid 1<x<3\}$　　*(2)* $\{x \mid -5\le x<0\}$

无限区间

无限区间有如下五种：

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\} \qquad (a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x\le b\} \qquad [a,+\infty)=\{x \mid x\ge a\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$$

例子. 用区间表示下列数集：

(1) $\{x \mid x<3\}$　　*(2)* $\{x \mid x\ge 2\}$

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

邻域

设 a与δ是两个实数, 且$\delta > 0$,

- a的 δ邻域 $U(a,\delta)$:
$$\left\{x \,\middle|\, |x-a| < \delta\right\} = (a-\delta, a+\delta)$$
其中a称为邻域的中心, δ称为邻域的半径.
- a的去心δ邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$:
$$\left\{x \,\middle|\, 0 < |x-a| < \delta\right\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$
- a的左δ邻域:$(a-\delta, a)$
- a的右δ邻域:$(a, a+\delta)$

1.4 小结 思考题

小结

1. 集合的有关概念: 集合、元素、子集、全集、空集、交集、并集、补集、直积、区间、邻域.
2. 集合的运算: 交集、并集、补集、直积的求法.
3. 区间和邻域: 连续的点组成的集合的表示方法.

思考题

经调查，有彩电的家庭占96%，有冰箱的家庭占87%，有音响的家庭占78%，有空调的家庭占69%，试估计四种电器都有的家庭占多少?

思考题解答

没有彩电的家庭占4%，没有冰箱的家庭占13%, 没有音响的家庭占22%，没有空调的家庭占31%, 所以四种电器都有的至少占

$$1-(4\%+13\%+22\%+31\%)=30\%$$

根据交集是任意集合的子集可知：四种电器都有的最多占69%，所以四种电器都有的至少占30%, 最多占69%.

2 映射与函数

2.1 映射的概念

映射的概念

设X与Y是两个非空集合, 若对X中的每一个元素x,均可以找到Y中唯一确定的元素y与之对应, 则称这个对应是集合X到Y的一个映射, 记为f, 或者更详细地写为：

$$f:X\to Y.$$

将x的对应元素y记为

$$f(x):x\mapsto y=f(x).$$

y称为映射f下x的像, x称为映射f下y的原像(或逆像). 集合X称为映射f的定义域, 记为$D_f=X$; X的所有元素的像$f(x)$的集合

$$\{y|y\in Y,y=f(x),x\in X\}$$

称为映射f的值域, 记为R_f(或$f(X)$).

映射举例

例子. 设 $A = \{$商场中的所有商品$\}$, $B = \{$商场中商品九月份的销量$\}$, 则

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y \ (y\text{是商品}x\text{九月份的销量})$$

是一个映射, $D_f = A, \quad R_f = B$

映射举例

例子. 设$A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$, 则

$$f : A \to B$$
$$f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$$

是一个映射, $D_f = A, R_f = \{4, 5, 6\} \subset B$

映射的三个基本要素

概括起来, 构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

1. 集合X, 即定义域$D_f = X$.
2. 集合Y, 即限制值域的范围$R_f \subset Y$.
3. 对应法则f, 使每个$x \in X$, 有唯一确定的$y = f(x)$与之对应.

注记 **1.** *1. 映射要求元素的像必须是唯一的.*

2. 映射并不要求元素的原像也是唯一的.

单射和满射

设 f 是集合X 到集合Y的一个映射, 若

1. 对任意的$x_1 \neq x_2$, 都有$f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称f为单射.

2. $R_f = Y$, 则称f为满射.

3. f既是单射又是满射, 则称f为双射(或一一映射).

注记 **2.** *单射$\Longleftrightarrow$ 原像唯一.*

2.2 逆映射与复合映射

逆映射

如果映射 f是单射, 则对任一 $y \in R_f \subset Y$, 它的原像 $x \in X$ (即满足方程 $f(x) = y$ 的 x) 是唯一确定的, 于是, 对应关系

$$g : R_f \to X$$
$$y \mapsto x\ (f(x) = y)$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射, 称之为 f 的逆映射,记为 f^{-1},其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$,值域为 $R_{f^{-1}} = X$

逆映射举例

例子. 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$, 则

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y = x + 3$$

既是单射，又是满射，存在逆映射

$$f^{-1} : B \to A$$

$$x \to y = x - 3$$

逆映射举例

例子. 设 $A=[0,\pi]$, $B=[-1,1]$, 则

$$f:A\to B$$
$$x\mapsto y=\cos x$$

既是单射，又是满射，存在逆映射

$$f^{-1}:B\to A$$
$$x\mapsto y=\arccos x$$

复合映射

现设有如下两个映射

$$g:X\to U_1$$
$$x\mapsto u=g(x)$$

和

$$f:U_2\to Y$$
$$u\mapsto y=f(u),$$

如果 $R_g\subset U_2=D_f$, 那就可以构造出一个新的对应关系

$$f\circ g:X\to Y$$
$$x\mapsto y=f[g(x)]$$

也是一个映射, 称之为 f 和 g 的 复合映射.

复合映射举例

例子.

$$\begin{aligned} g: \quad & R \to R & \qquad f: \quad & R^{+} \to R \\ & x \mapsto u = 1 - x^2 & & u \mapsto y = \sqrt{u} \end{aligned}$$

则 $R_g = (-\infty, 1]$, 它不是D_f的子集, 因此不能构成复合映射 $f \circ g$. 但若将 g 的定义域缩小，就有可能构成复合映射. 比如令 $g^* : [-1, 1] \to R$

$$x \mapsto u = 1 - x^2$$

则可以构成复合映射 $f \circ g^* : [-1, 1] \to R$

$$x \to y = \sqrt{1 - x^2}$$

2.3 函数的概念

函数的定义

定义. 设非空数集$D \subset \mathbf{R}$, 则称映射$f : D \to \mathbf{R}$为定义在D上的函数, 简记为

$$y = f(x), \ x \in D.$$

- x称为自变量;
- y称为因变量;
- D称为定义域;
- 函数值的全体构成的数集$R_f = \left\{ y \,\middle|\, y = f(x), x \in D \right\}$称为值域.

函数的两要素

例子. 研究$y = x$和$y = \dfrac{x^2}{x}$是不是相同的函数. **例子.** 研究$y = x$和$y = \sqrt{x^2}$是不是相同的函数.

注记 3. 两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应法则都相同.

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域. 例如

(1) $y=\sqrt{x}$的定义域为$D=[0,+\infty)$,

(2) $y=\log_a x$的定义域为$D=(0,+\infty)$,

(3) $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为$D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

(1) 根号里面要求大于等于零；

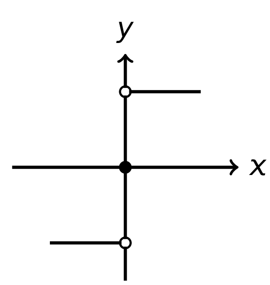
(2) 对数里面要求大于零；

(3) 分母要求不能等于零.

几个特殊函数

(1) 符号函数:

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当x>0,\\ 0, & 当x=0,\\ -1 & 当x<0.\end{cases}$$



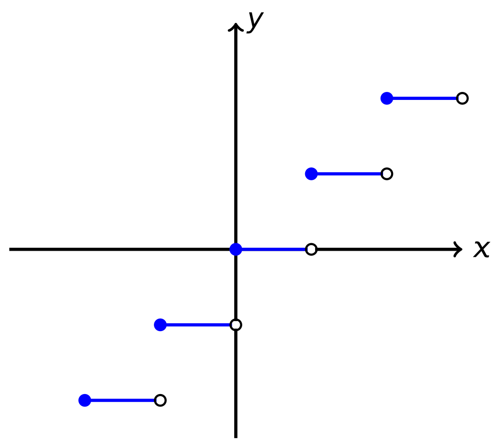
$x=\operatorname{sgn}x|x|$

几个特殊函数

(2) 取整函数: $y=[x]$, 其中$[x]$表示不超过x的最大整数.

显然

$$x-1<[x]\leq x$$



几个特殊函数

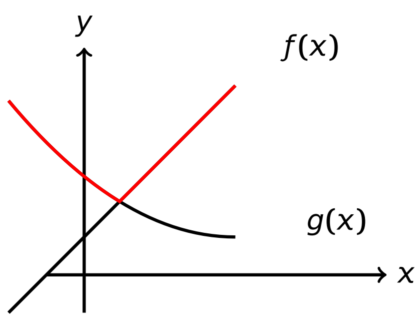
(3) 狄利克雷函数:

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时;}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时.}\end{cases}$$

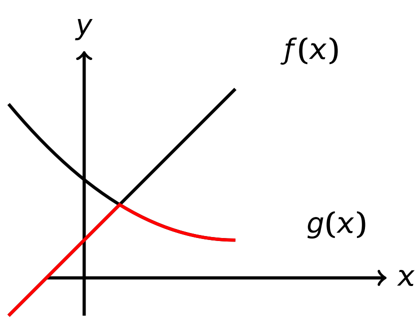
几个特殊函数

(4) 取最值函数

$$y = \max\{f(x, g(x)\}$$



$$y = \min\{f(x, g(x)\}$$



分段函数

如果一个函数在定义域的不同部分用不同的公式来表达，则称该函数为分段函数.

例子.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, \ x > 0, \\ x^2-1, \ x \le 0. \end{cases}$$

2.4 函数的性质

函数的奇偶性

给定函数$y=f(x)$, 设其定义域D关于原点对称,

1. 若$\forall x\in D$, 总有$f(-x)=f(x)$, 则称$f(x)$为偶函数.
2. 若$\forall x\in D$, 总有$f(-x)=-f(x)$, 则称$f(x)$为奇函数.

例子. x, x^3, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\sin x$, $\tan x$ 为奇函数.

例子. x^2, x^4, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^4}$, $\cos x$ 为偶函数.

小注： 奇函数关于原点对称; 偶函数关于y轴对称.

函数的周期性

设函数$y=f(x)$的定义域为D, 如果存在一个不为零的常数l, 使得对任意的$x\in D$, 有$(x\pm l)\in D$, 且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立, 则称$f(x)$为周期函数；l称为$f(x)$的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例子. $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 以 2π 为周期.

例子. $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 以 π 为周期.

函数的周期性

例子. 设函数 $y=f(x), x\in R$ 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$ 均对称，证明 $y=f(x)$ 是周期函数，并求周期.

证明. 由条件知:$f(a+x)=f(a-x)$, $f(b+x)=f(b-x)$,于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a+(x-a)) = f(a-(x-a)) \\ &= f(2a-x) \\ &= f(b-(b+x-2a)) = f(b+(b+x-2a)) \\ &= f(x+2(b-a)) \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数，且$2(b-a)$ 是它的一个周期.

函数的单调性

定义. 设函数$y=f(x)$的定义域为D, 区间$I\subset D$, x_1, x_2为区间I上的任意两个数,

(1) 若当$x_1<x_2$时, 恒有$f(x_1)<f(x_2)$, 则称$f(x)$在区间I上单调增加或递增;

(2) 若当$x_1<x_2$时, 恒有$f(x_1)>f(x_2)$, 则称$f(x)$在区间I上单调减少或递减;

函数的单调性

例子. $y=x$在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

例子. $y=\ln x$在$(0,+\infty)$上是单调增加的.

例子. $y=1/x$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调减少.

例子. $y=x^2$在$(-\infty,0]$上单调减少, 在$[0,+\infty)$上单调增加.

函数的有界性

定义. 设函数$y=f(x)$在数集I上有定义, 如果存在一个正数M, 对于所有$x\in I$, 恒有$|f(x)|\le M$, 则称函数$f(x)$是在I上的有界函数. 若不存在这样的M, 则称$f(x)$是在I上的无界函数.

例子. $y=\sin x$, $y=\cos x$ 是有界函数.

例子. $y=x^2$, $y=\tan x$, $y=x\cos x$ 是无界函数.

2.5 小结　思考题

小结

1. 映射的有关概念: 映射、逆映射、复合映射.
2. 函数的有关概念: 函数、定义域、值域.
3. 函数的几种特性: 奇偶性、周期性、单调性、有界性.

思考题

思考. 已知$f(x)$ 是一个偶函数，且满足 $f(a+x)=f(a-x)$, 则$f(x)$是不是一个周期函数？若是，请说明它的一个周期，若不是，请说明理由.

解答. 若$a\ne 0$ 则为周期函数, 且周期为$2a$(见例 35); 若$a=0$, 则不一定为周期函数.

3 复合函数与反函数　初等函数

3.1 复合函数

复合函数

定义. 设f和g为两个函数，且$D_f \cap R_g \neq \varnothing$，则称定义在

$$\left\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\right\}$$

上的函数 $f \circ g$ 为 f 和 g 的复合函数，其中

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

对于复合函数$f \circ g$，称x为自变量，u为中间变量，y为因变量.

例子. 两个函数$y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 - x^2$ 的复合函数是$y = \sqrt{1 - x^2}$.

复合函数

注记 1. *1.* 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例子. $y = \arcsin u, u = 2 + x^2; y \neq \arcsin\left(2 + x^2\right)$.

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例子. $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}, \quad y = \sqrt{u}, \quad u = \cot v, \quad v = \frac{x}{2}$.

3.2 反函数

反函数

定义. 设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \to D,$$

称此映射 f^{-1} 为函数 f 的 反函数.

注记 **2.** 1. 反函数f^{-1}由函数f确定.

2. 函数与反函数的图像关于$y = x$对称.

反函数

例子. 求函数 $y = \sqrt{e^x + 1}$ 的反函数.

解答. 由$e^x = y^2 - 1$可得

$$x = \ln\left(y^2 - 1\right).$$

又$y = \sqrt{e^x + 1} > 1$, 即原函数的值域为 $(1, +\infty)$, 因此反函数为

$$y = \ln\left(x^2 - 1\right),$$

反函数的定义域为:

$$D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$$

反函数

定理 (反函数存在定理)**.** 单调函数 f 必存在单调的反函数 , 且此反函数与 f 具有相同的单调性.

3.3 函数的运算

函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域分别是 D_1 、 D_2, $D = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

1. 函数的和(差):

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),\ x \in D;$$

2. 函数的积:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),\ x \in D;$$

3. 函数的商:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in D \backslash \{x \mid g(x) = 0\}.$$

函数的运算

例子. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明必定存在 $(-l, l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数$h(x)$使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

解：假设存在$g(x)$ 和 $h(x)$ 满足条件, 则有

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{cases}$$

易知, $g(x)$,$h(x)$满足条件.

3.4 初等函数

初等函数

下面这五种函数, 统称为基本初等函数：

1. 幂函数$y = x^{\mu}$；
2. 指数函数$y = a^x$；
3. 对数函数$y = \log_a x$；
4. 三角函数$y = \sin x$, $y = \cos x$, 等；
5. 反三角函数$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, 等.

由五种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的函数, 称为初等函数.

初等函数的分解

练习. 将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = (1 + \ln x)^5$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $y = u^5$, $u = 1 + \ln x$.

(2) $y = \sin^2(3x + 1)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 3x + 1$.

3.5 小结 思考题

小结

1. 复合函数: 复合函数的形成与复合过程的分解.
2. 反函数: 反函数的基本求法.
3. 函数的运算: 简单函数的四则运算.
4. 初等函数: 基本初等函数的复合.

思考题

思考. 已知 $f(\tan x)=\sec^2 x+1$, 求 $f(x)$.

解答. 易知 $\sec^2 x=\tan^2 x+1$, 因此

$$f(\tan x)=\left(\tan^2 x+1\right)+1,$$

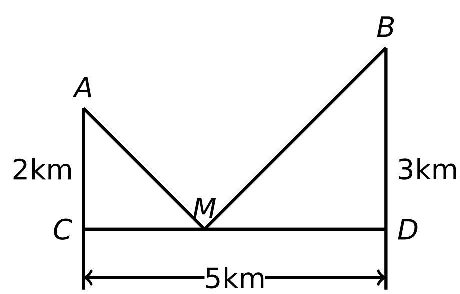
所以

$$f(x)=\left(x^2+1\right)+1=x^2+2.$$

4 函数关系的建立

函数关系的建立

例子. 在一条直线公路的一侧有A、B两村，其位置如图所示，公共汽车公司欲在公路上建立汽车站M. A、B两村各修一条直线大道通往汽车站，设$CM=x$(km)，试把A、B两村通往M的大道总长y(km)表示为x的函数.



函数关系的建立

解答. 根据题意和图示知

$$CM = x, DM = 5 - x.$$

在直角三角形ACM中,

$$AM = \sqrt{x^2 + 4},$$

在直角三角形BDM中,

$$BM = \sqrt{(5-x)^2 + 9}.$$

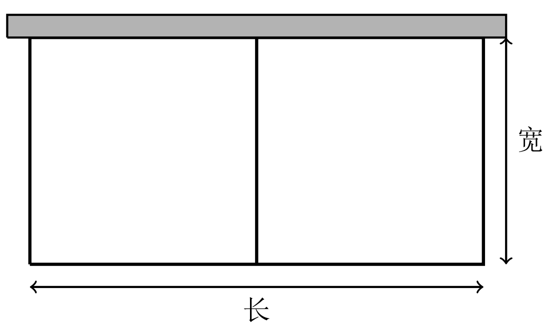
所以

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(5-x)^2 + 9},$$

此函数的定义域为$D = [0, 5]$.

函数关系的建立

例子. 如图, 以墙为一边用篱笆围成长方形的场地，并用平行于宽的篱笆隔开。已知篱笆总长为60米。把场地面积$S(\mathrm{m}^2)$表示为场地宽$x(\mathrm{m})$的函数，并指出函数的定义域。



函数关系的建立

解答. 设篱笆的宽为 x , 则

$$长 = 60 - 3x$$

因此

$$S = x(60-3x) = -3x^2 + 60x,$$

其定义域为 $\{x|0 < x < 20\}$.

函数关系的建立

例子. 某工厂每年需某种原料a吨，拟分若干批购进，每批进货的费用为b元. 设该厂使用这种原料是均匀的，即平均库存量为批量的一半. 每吨原料的库存费用每年为c元. 试求出一年中库存费用与进货费用之和与进货批量的函数关系.

函数关系的建立

解答. 设进货批量为 x 吨,进货费用与库存费用之和为$p(x)$. 因年进货量为a，故每年进货批数为$\frac{a}{x}$, 则进货费用为

$$b\frac{a}{x}.$$

因为使用这种原料是均匀的，即平均库存为$\frac{x}{2}$，故每年的库存费为 $c\cdot\frac{x}{2}$, 所以

$$p(x) = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2}\cdot x,$$

其定义域为 $(0, a]$

函数关系的建立

例子. 某人从美国到加拿大去度假，已知把美元兑换成加拿大元时，币面数值增加 12%,而把加拿大元兑换成美元时，币面数值减少12%. 请证明经过这样一来一回的兑换后，他亏损了多少钱.

函数关系的建立

解答. 设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数, $f_2(x)$ 为将x加拿大元兑成的美元数，则

$$f_1(x) = x + x \cdot 12\% = 1.12x, x \geq 0$$
$$f_2(x) = x - x \cdot 12\% = 0.88x, x \geq 0$$
$$f_2(f_1(x)) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x$$

故 $f_1(x), f_2(x)$ 不互为反函数，经过一来一回的兑换后，x美元变成$0.9856x$美元，即发生了亏损.

例如*: 1000*美元经过这样的来回兑换，将亏损*14.4*美元*.*

练习题

(1) 设生产与销售某种商品的总收入函数R是产量x的二次函数，经统计得知当产量分别为0,2,4时，总收入R为0,6,8，试确定R关于x的函数式。(2) 某商店年销售某种产品800件，均匀销售，分批进货。若每批订货费为60元，每件每月库存费0.2元。试列出库存费与进货费之和P与批量x之间的函数关系。

练习题

(3) 某企业对某产品制定如下销售策略：购买20公斤以下（包括20公斤）部分，每公斤价10元；购买量小于等于200公斤时，其中超出20公斤的部分，每公斤7元；购买超过200公斤的部分，每公斤价5元，试写出购买量x公斤的费用函数$C(x)$。(4) 某车间设计最大生产能力为每月100台机床，至少要完成40台方可保本,当生产x台时的总成本函数为$C(x) = x^2 + 10x$ (百元)。按市场规律，价格为$P = 250 - 5x$(x为需求量)，可以销售完，试写出月利润函数。

练习题答案

(1) $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$; (2) $P = 1.2x + \frac{48000}{x}$; (3) $C(x) = \begin{cases} 10x, 0 \le x \le 20 \\ 60 + 7x, 20 < x \le 200 \\ 5x + 460, x > 200 \end{cases}$;

(4) $L(X) = 240x - 6x^2 (40 \le x \le 100)$.

5 经济学中的常用函数

5.1 需求函数

需求函数

需求量: 某一商品关于一定的价格水平,在一定的时间内,消费者愿意而且有支付能力购买的商品量。

如果价格是决定需求量的最主要因素，可以认为需求量 Q_d 是 P的函数, 称为需求函数，记作

$$Q_d = Q_d(P).$$

常见需求函数有:

1. 线性函数 $Q_d = -aP + b$, 其中 $a > 0$;
2. 幂函数 $Q_d = kP^{-a}$, 其中 $k > 0, a > 0$;
3. 指数函数 $Q_d = a\mathrm{e}^{-bp}$, 其中 $a, b > 0$.

需求函数

例子. 设某商品的需求函数为

$$Q = -aP + b \quad (a, b > 0)$$

讨论 $P = 0$ 时的需求量和$Q = 0$ 时的价格.

解答. $P = 0$ 时 $Q = b$, 它表示价格为零时的需求量为 b, 称为饱和需求量; $Q = 0$ 时 $P = \frac{b}{a}$, 它表示价格为 $\frac{b}{a}$ 时无人愿意购买此商品.

5.2 供给函数

供给函数

供给量: 在一定的价格条件下，在一定时期内生产者愿意并可供出售的商品量. 如果价格是决定供给量的最主要因素，可以认为供给量 Q_s 是P的函数, 称为供给函数，记作

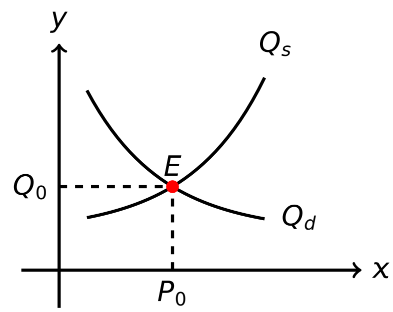
$$Q_s = Q_s(P).$$

常见供给函数有:

1. 线性函数 $Q_s = aP + b$, 其中 $a > 0$;
2. 幂函数 $Q_s = kP^a$, 其中 $k > 0, a > 0$;
3. 指数函数 $Q_s = a\mathrm{e}^{bp}$, 其中 $a, b > 0$.

供需平衡点

在同一个坐标系中作出需求函数Q_d和供给函数Q_s，两条曲线的交点称为供需平衡点(E)，该点的横坐标称为均衡价格(P_0)，该点的纵坐标称为均衡数量(Q_0).



当$P \neq P_0$时，市场力量会推动P趋向P_0.寻求P_0是金融经济学的主要问题之一.

供需平衡点

例子. 考虑下列线性需求函数和供给函数：

$$D(P) = a - bP,\ b > 0; \quad S(P) = c + eP,\ e > 0$$

试问 a, c 满足什么条件时，存在正的均衡价格(即$P_e > 0$)？

解答. 由 $D(P) = S(P)$ 得：$a - bP = c + eP$, 由此可得均衡价格为

$$P_e = \frac{a-c}{b+e}.$$

因此$P_e > 0$ 的必要充分条件是 $a > c$.

5.3 总成本函数、总收益函数、总利润函数

总成本函数

总成本: 生产和经营一定数量产品所需要的总投入.

在不计市场的其他次要影响因素的情况下,它可以简单地看成是产量 Q 的函数,称为总成本函数,记为 $C(Q)$.

通常总成本由固定成本和可变成本两部分组成。

$$C(Q) = C_{固定}(Q) + C_{可变}(Q).$$

称

$$\overline{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_{固定}(Q)}{Q} + \frac{C_{可变(Q)}}{Q},$$

为平均成本.

总成本函数

例子. 已知某种产品的总成本函数为 $C(Q) = 1000 + \frac{Q^2}{8}$ 求当生产 100 个该产品时的总成本和平均成本。

解答. 由题意，产量为*100*时的总成本为

$$C(100) = 1000 + \frac{100^2}{8} = 2250$$

所以平均成本为 $\overline{C}(100) = \frac{2250}{100} = 22.5$

总收益函数

总收益: 出售一定数量产品所得到的全部收入， 它可以简单地看成是销量 Q 的函数,称为总收益函数,记为 $R(Q)$. 称 $\overline{R}(Q) = \frac{R(Q)}{Q}$为平均收益. 如果产品价格 P 保持不变，则

$$R(Q) = PQ,\ \overline{R} = P.$$

总收益函数

例子. 设某商品的需求关系是$3Q+4P=100$, 求总收益和平均收益.

解答. 由条件知, 价格函数为

$$P=\frac{100-3Q}{4},$$

所以总收益为

$$R(Q)=P\cdot Q=\frac{100Q-3Q^2}{4},$$

平均收益为

$$\overline{R}(Q)=P(Q)=\frac{100-3Q}{4}.$$

总利润函数

总利润: 总收益减去总成本和上缴税金后的余额(为简单起见，一般不计上缴税金).

在不计市场的其他次要影响因素的情况下, 它可以简单地看Q的函数, 称为总利润函数, 记为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

称 $\overline{L}(Q)=\frac{L(Q)}{Q}$为平均利润.

总利润函数

例子. 设某种商品的总成本为 $C(Q)=20+2Q+0.5Q^2$ 若每售出一件该商品的收入是 20 万元，求生产 10 件的总利润.

解答. 由题意知 $P=20$ (万元），总收益为 $R(Q)=P\cdot Q=20Q$. 所以

$$\begin{aligned}L(Q)&=R(Q)-C(Q)\\&=20Q-\left(20+2Q+0.5Q^2\right)\\&=-20+18Q-0.5Q^2\end{aligned}$$

因此 $L(10)=\left(-20+18\times 10-0.5\times 10^2\right)=110($ 万元 $)$

5.4 库存函数

库存函数

设某企业在计划期 T 内，对某种物品总需求量为 Q ，由于库存费用及资金占用等因素，显然一次进货是不划算的，考虑均匀的分 n 次进货，每次进货批量为$q=\dfrac{Q}{n}$，进货周期为$t=\dfrac{T}{n}$. 假定每件物品的贮存单位时间费用为C_1，每次进货费用为C_2，每次进货量相同，进货间隔时间不变，以匀速消耗贮存物品，则平均库存为$\dfrac{q}{2}$，在时间 T 内的总费用 E 为

$$E=\frac{1}{2}C_1Tq+C_2\frac{Q}{q}$$

其中 $\dfrac{1}{2}C_1Tq$ 是贮存费, $C_2\frac{Q}{q}$ 是进货费用.

习题

1. 设需求函数由$P+Q=1$给出，(1) 求总收益函数P; (2)若售出1/3单位，求其总收益。 2. 某工厂对棉花的需求函数由$PQ^{1.4}=0.11$给出, (1) 求其总收益函数R; (2)P(12),R(10), R(12),R(15),P(15),P(20)。 3. 若工厂生产某种商品，固定成本200,000元，每生产一单位产品，成本增加1000元，求总成本函数。

习题

4. 某厂生产一批元器件，设计能力为日产 100 件，每日的固定成本为 150 元，每件的平均可变成本为 10 元，(1)试求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数;（2）若每件售价 14 元，试写出总收入函数;（33）试写出总利润函数。 5.某产品之需求函数为$Q_d = 20 - 3P$,供给函数为 $Q_s = 5P - 1$, 求该商品的均衡价格。

习题答案

1. $R = Q - Q^2, R\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{9}.$

2. $R = 0.11Q^{-0.4}, P(15) = 0.0025, P(12) = 0.0034\ P(20) = 0.0017, R(10) = 0.044, R(12) = 0.041,$
$R(15) = 0.037$

3. $C = C(Q) = 200000 + 1000Q$

4. (1) $C(X) = 150 + 10X(\text{ 元 })(0 < X \le 100)$
$\overline{C}(X) = \dfrac{150}{X} + 10(0 < X \le 100)$
(2) $R(X) = 14X(\text{ 元 })(0 < X \le 100)$
(3) $L(X) = -150 + 4X(\text{ 元 })(0 < X \le 100)$

习题答案

5. $R = \begin{cases} 250x, 0 \le x \le 600 \\ 250 \times 600 + (250 - 20)(x - 600), 600 < x \le 800 \\ 250 \times 600 + 230 \times 200, x > 800 \end{cases}$

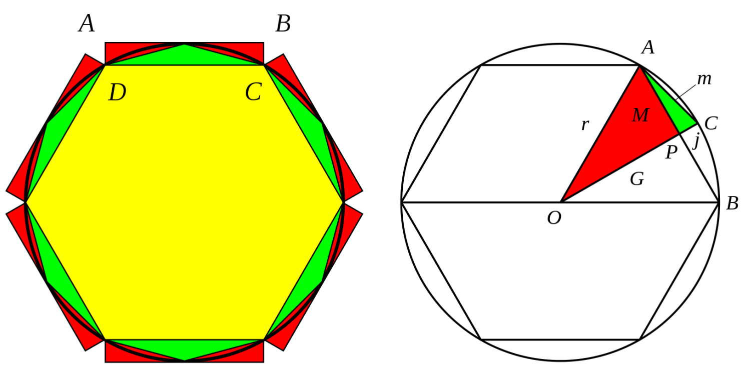
Part II

第二章

1 数列的极限

1.1 引例

刘辉割圆术



记内接正$6 \times 2^{n-1}$边型的面积为A_n，则$n \to \infty$时，正多边形的面积和圆的面积之差可以任意小。

截杖问题

“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

第一天截下的木棒长为 $X_1 = \dfrac{1}{2}$; 第二天截下的木棒长总和为 $X_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2}$;

$$\cdots$$

第n天截下的木棒长总和为 $X_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

1.2 数列的有关概念

数列的定义

定义. 以正整数集 N^+ 为定义域的函数 $f(n)$ 按 $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$ 排列的一列数称为数列, 通常用 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示，其中 $x_n = f(n)$, x_n 称为通项或一般项。

例子. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$

例子. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$

例子. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

有界性

定义. 对数列 x_n, 若存在正数 M, 使得一切正整数 n, 恒有 $|x_n| \le M$ 成立, 则称数列 x_n 有界, 否则，称为无界.

例子. $x_n = \frac{n}{n+1}$ ·· 有界.

例子. $x_n = 2^n$ ·· 无界.

小注： 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间$[-M, M]$上.

有界性

若存在实数 A, 对一切 n 都满足 $x_n \geq A$, 称 $\{x_n\}$ 为下有界， A 是 $\{x_n\}$ 的下界;

同样, 若存在 B, 对一切 n 都满足 $x_n \leq B$, 称 $\{x_n\}$ 为上有界， B 是 $\{x_n\}$ 的上界.

单调性

若数列 $\{x_n\}$ 满足：

1. $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 称数列 $\{x_n\}$ 为单调增数列;
2. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 单调减数列.

单调增数列和单调减数列统称为单调数列.

子数列

定义.将数列 $\{x_n\}$ 在保持原有顺序情况下，任取其中无穷多项构成的新数列称为 $\{x_n\}$ 的子数列，简称子列.

例子. $x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}$

例子. $x_2, x_4, x_6 \ldots, x_{2n}$

小注： 在子数列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 中，一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项，显然, $n_k \geq k$.

1.3 数列极限的定义

数列极限的定义

问题. 随着n的增大，x_n也跟着变化。当n趋于无穷大时，x_n是否会无限接近一个确定的数？

1. $x_n = 3$　　$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$
2. $x_n = \frac{1}{2^n}$　　$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$
3. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$　　$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$
4. $x_n = 2^n$　　$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$ ×
5. $x_n = (-1)^n$　　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ ×

数列的极限

定义. 设$\{x_n\}$为一个数列，如果存在常数A，对任何$\epsilon > 0$，总存在正整数$N > 0$，使得当$n > N$时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列$\{x_n\}$的极限等于A，或者称数列$\{x_n\}$ 收敛于A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \text{ 或 } x_n \to A\ (n \to \infty).$$

如果这样的常数A不存在，则称数列$\{x_n\}$ 发散.

小注： 1. 不等式 $|x_n - A| < \epsilon$ 刻划了 x_n 与 A 的无限接近;
2. 一般情况下，N 与任意给定的正数 ϵ有关.

$\epsilon - N$语言

为了表达方便，引入符号

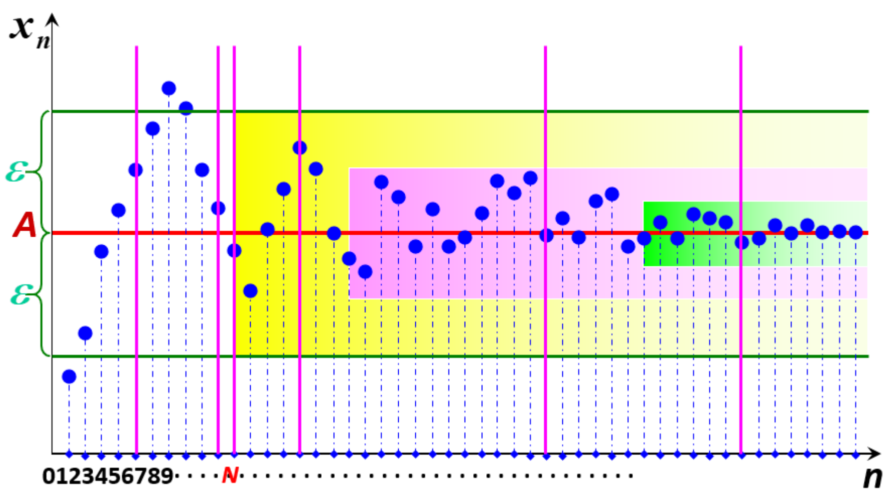
- $\forall$ ....任意给定的.
- $\exists$ ....存在.

使用$\epsilon - N$语言， $\lim_{n\to\infty} x_n = A$可以表示为：

$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$.

小注： 数列极限的定义未给出求极限的方法.

数列极限的几何解释



数列极限的基本公式

1. $\lim_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）
4. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$，（$|q| < 1$）

数列极限

例子. 设$x_n = C$，证明$\lim_{n\to\infty} x_n = C$。

证明. $\forall \epsilon > 0$，取$N = 1$，则当$n > N$时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

数列的极限

例子. 证明$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。

证明. $\forall \epsilon > 0$，取$N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$，则当$n > N$时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

数列极限

例子. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$。

证明. $\forall\epsilon>0$，取$N=[\dfrac{1}{\epsilon}]+1$，则当$n>N$时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

数列的极限

例子. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, 其中 $|q|<1$.

证明. 任给 $\epsilon>0$, 若 $q=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$. 若 $0<|q|<1$, $|x_n-0|=|q^n|<\epsilon$, 要使$n\ln|q|<\ln\epsilon$，只需要 $n>\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}$, 故取 $N=\left[\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时，就有

$$|q^n-0|<\epsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0$$

数列的极限

例子. 设 $x_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}.$$

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，故 $\exists\ N$ 使得当 $n > N$ 有

$$|x_n - a| < \sqrt{a}\epsilon,$$

从而有，

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

发散数列

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$。

1.4 收敛数列的性质

收敛数列的性质

性质 1 (极限的唯一性)**.** 收敛数列的极限必唯一。

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a \neq b$ 由定义可知： $\forall \epsilon > 0, \exists\ N_1, N_2$, 使得: 当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \epsilon$; 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \epsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$，则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\ &\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b - a|. \end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

收敛数列的性质

性质 2 (有界性)**.** 设$\{x_n\}$收敛，则存在$M > 0$使得$|x_n| \le M$。

证明. 设$\lim_{n\to\infty} x_n = A$。取$\epsilon = 1$，则存在$N > 0$，使得当$n > N$时有$|x_n - A| < \epsilon = 1$。此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \le |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |A|\}$，则对任何$n$都有$|x_n| \le M$。

推论. 无界数列必定发散.

收敛数列的性质

性质 3 (保号性)**.** 设数列收敛于$A > 0$（或$A < 0$），则存在$N > 0$，使得当$n > N$时有$x_n > 0$（或$x_n < 0$）。

证明. 取$\epsilon = A/2$，则存在$N > 0$，使得当$n > N$时有$|x_n - A| < \epsilon = A/2$。此时$x_n > A/2 > 0$。

小注： 这个定理表明, 若数列的极限为正（或负），则该数列从某一项开始以后所有项也为正（或负）.

收敛数列的性质

定理 (保号性)**.** 设数列$x_n \ge 0$（或$x_n \le 0$），且$\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则有$A \ge 0$（或$A \le 0$）。

推论. 如果$x_n \ge y_n$，而且$\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim_{n\to\infty} y_n = B$，则有$A \ge B$。

思考. 若将上面的等号去掉，结论如何？

收敛数列的性质

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 A.

小注： 这个定理表明:若数列有两个不同的子数列收敛于不同的极限，则该数列是发散的.

小结

- 数列: 研究其变化规律;
- 数列极限: 极限思想、精确定义、几何意义;
- 收敛数列的性质: 唯一性、有界性、保号性、子数列的收签性.

复习与提高

选择. 已知数列$\{x_n\}$的通项为$x_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$，则该数列 .... (　　)

(A) 收敛且有界　　(B) 收敛且无界

(C) 发散且有界　　(D) 发散且无界

2　函数的极限

2.1　函数极限的定义

函数极限的定义

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中函数的极限。我们主要研究以下两种情形:

1. 自变量 x 任意接近于有限值 $x_0(x \to x_0)$时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;
2. 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x \to \infty)$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

函数的极限($x \to x_0$)

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中,对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A.

问题. 如何用数学的语言刻画"无限接近"?

- 用$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.

函数的极限($x \to x_0$)

定义. 设$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义，如果存在常数A，对于任何$\epsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当$x \to x_0$时$f(x)$以A为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \to A(\text{当 } x \to x_0)$$

“$\epsilon-\delta$” 定义： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists\ \delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有

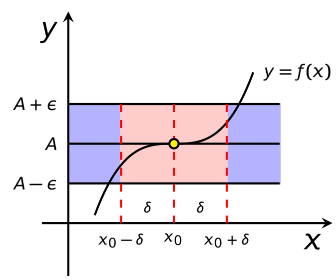
$$|f(x)-A|<\epsilon.$$

极限的几何解释

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时,函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y=A$$

为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区域内.



小注： 一般情况下, δ 与ϵ有关。小注： 函数极限是否存在与$f(x)$在x_0点是否有定义无关.

函数极限的例子

1. $y=C$

   - 当 $x\to x_0$ 时，$y\to C$

2. $y=x$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

3. $y = 2x + 1$

   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$

4. $y = \sqrt{x}$

   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

函数极限的例子

例子. 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C, (C$ 为常数 $)$.

证明. 任给 $\epsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| <$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

函数极限的例子

例子. 证明$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$。

证明. $\forall \epsilon > 0$，取$\delta = \epsilon$，则当$0 < |x - x_0| < \delta$时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$$

所以$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$。

函数极限的例子

例子. 证明$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$（$x_0>0$）。

证明. $\forall\epsilon>0$，取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\epsilon\}$，则当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|&=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\\&\le\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\frac{\sqrt{x_0}\,\epsilon}{\sqrt{x_0}}=\epsilon\end{aligned}$$

函数的极限($x\to x_0$)

注记. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$f(x_0)$未必总是相等。

例子. 设$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1;\\ 3, & x=1.\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$。

注记. 即使$f(x)$在x_0处无定义，极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$仍可能存在。

例子. 函数极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

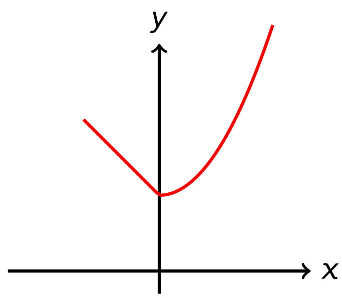
函数的单侧极限

设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x,\ x<0;\\ x^2+1,\ x\ge 0;\end{cases}$$

证明$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.　　分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论:

1. x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^-$;
2. x 从右侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0^+$;



左极限和右极限

定义. 设$f(x)$在点x_0 左邻域有定义，如果对任何$\epsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得当$x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当$x \to x_0$时$f(x)$以A为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

定义. 设$f(x)$在点x_0 右邻域有定义，如果对任何$\epsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得当$x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当$x \to x_0$时$f(x)$以A为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A.$$

单侧极限与极限的关系

注意到

$$\begin{aligned}
&\{x|0 < |x - x_0| < \delta\} \\
= &\{x|0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x| - \delta < x - x_0 < 0\}
\end{aligned}$$

于是我们有

定理. 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

例子. 设$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。

单侧极限

例子. 设$f(x)=|x|$，研究函数极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

例子. 设$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x^2-x+2, & x>1\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

注记. 研究当$x\to x_0$时函数$f(x)$的左右极限，不必要求$f(x)$在x_0处有定义。

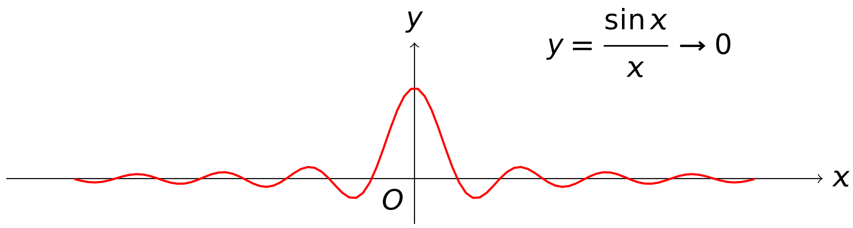
左极限和右极限

练习. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x<0\\ e^x, & 0<x<1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$；判断极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$和$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$是否存在，若存在求出该极限。

解答. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在。

函数的极限($x\to\infty$)

观察函数$\dfrac{\sin x}{x}$当$x\to\infty$时的变化趋势.



函数的极限($x\to\infty$)

函数 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察: 当 x 无限增大时, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于0.

问题. 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

- 用$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小;
- 用$|x|>X$ 表示 $x\to\infty$ 的过程.

函数的极限($x\to\infty$)

定义. 设$f(x)$在$|x|$足够大时有定义，如果存在常数A，对任何$\epsilon>0$，总存在$X>0$，使得当$|x|>X$时，总有$|f(x)-A|<\epsilon$，则称当$x\to\infty$时$f(x)$以A为极限，记为

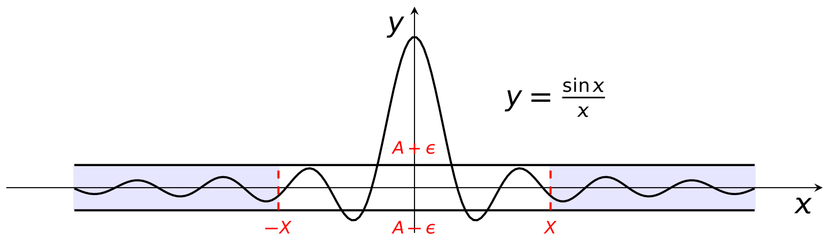
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

思考. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的$\epsilon$语言定义。

注记. $x\to\infty$有两种方向，即$x\to-\infty$和$x\to+\infty$。类似地可以定义$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

定理. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

极限的几何解释



当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线，宽为2ϵ的带形区域内.

函数的极限($x \to \infty$)

例子. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

证明. 由条件可知：

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{1}{|x|}<\frac{1}{x}=\epsilon,$$

故对$\forall\epsilon>0$, 取 $X=\frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x|>X$ 时恒有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\epsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

函数的极限($x \to \infty$)

例子. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$。

证明. $\forall \epsilon > 0$，由数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$知道，存在正整数$N_1 > 0$使得当$n > N_1$时有$\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$. 取$X = N_1 + 1$，则当$x > X$时有$[x] > N_1$，从而

$$\left|\frac{1}{2^x} - 0\right| = \frac{1}{2^x} \le \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

函数极限的基本公式I

$$\lim_{x\to\infty} C = C \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{为正整数}) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b > 1) \tag{4}$$

2.2 函数极限的性质

函数极限的性质

性质 1 (唯一性). *如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则这个极限唯一.*

证明. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, 且 $A \ne B$ 由定义可知： $\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_1, \delta_2$, 使得: 当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$; 当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$; 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$，则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$\begin{aligned}|A - B| &= |(f(x) - A) - (f(x) - B)| \\ &\le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|.\end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性)**.** 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在$\delta > 0$和$M > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|f(x)| \le M$。

证明. 取$\epsilon = 1$，则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|f(x) - A| < \epsilon = 1$。此时

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\ &\le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|\end{aligned}$$

取$M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性。

例子. 设$f(x) = 1/x$，则$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$，此时当$0 < |x - 1| < 1/2$时有$|f(x)| \le 2$。

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性)**.** 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且$A > 0$（或$A < 0$），则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或$f(x) < \frac{A}{2} < 0$）。

证明. 取$\epsilon = A/2$，则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|f(x) - A| < \epsilon = A/2$。此时$f(x) > A/2 > 0$。

例子. 设$f(x) = 2x - 1$，则$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，此时当$0 < |x - 1| < 1/4$时，有$f(x) > 1/2 > 0$。

函数极限的性质

定理 (保号性)**.** 设$f(x) \geq 0$（或$f(x) \leq 0$），且$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则$A \geq 0$（或$A \leq 0$）。

推论. 如果函数$g(x) \geq h(x)$，而且$\lim_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} h(x) = B$，则有$A \geq B$。

极限的性质，对于其它形式的极限也成立。

小结

- 极限的定义：定义、几何意义；
- 极限的性质：唯一性、局部保号性、局部有界性.

3 无穷小与无穷大

3.1 无穷小

无穷小

定义. 如果$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$，就称$f(x)$为当$x \to x_0$时的无穷小.

小注： $f(x)$为当$x \to x_0$时的无穷小 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| < \epsilon$

小注： 类似地，可以定义$x \to \infty$、 $x \to -\infty$、$x \to +\infty$ 时的无穷小。

无穷小

例子. 0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$时的无穷小。

例子. 函数$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$时的无穷小。

小注： 无穷小是变量，不能与很小的数混淆。 小注： 零是可以作为无穷小的唯一的数

无穷小与函数极限的关系

定理. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

定理的意义：

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x)\approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

无穷小与函数极限的关系

证明. 必要性: 因$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 所以对$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有

$$|f(x)-A|<\epsilon.$$

令 $\alpha(x)=f(x)-A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x)=A+\alpha(x)$. 充分性: 设 $f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 则对$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\alpha(x)|<\epsilon, \text{ 即 } |f(x)-A|<\epsilon,$$

也即$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

无穷小的运算

定理. *两个(有限个)无穷小的和差还是无穷小.*

证明. 设α及β是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小, 则对$\forall \epsilon > 0$, $\exists\ X_1 > 0, X_2 > 0$, 使得 当 $|x| > X_1$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

当 $|x| > X_2$ 时恒有

$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 当 $|x| > X$ 时,恒有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$。

无穷小的运算

问题. *无穷多个无穷小的和是不是无穷小?*

答案. *不是,例如*

无穷小的运算

定理. 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

1	1/2	1/3	1/4	1/5	...	$\to 0 (n\to\infty)$
0	1/2	1/3	1/4	1/5	...	$\to 0 (n\to\infty)$
0	0	1/3	1/4	1/5	...	$\to 0 (n\to\infty)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\to 0 (n\to\infty)$
1	1	1	1	1	...	$\to 1 (n\to\infty)$

证明. 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M>0,\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有 $|u|\le M$. 又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 则对$\forall\epsilon>0,\exists\delta_2>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时恒有

$$|\alpha|<\frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\epsilon.$$

所以当 $x\to x_0$ 时, $u\cdot\alpha$ 为无穷小.

无穷小的运算

推论. 常数与无穷小的积是无穷小。

推论. 有限个无穷小的积是无穷小。

> 注意：两个无穷小的商不一定是无穷小。

无穷小的运算

问题. 无穷多个无穷小的积是不是无穷小?

答案. 不是，例如：

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
1 & 2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
1 & 1 & 3^2 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \to 0(n\to\infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \to 1(n\to\infty)
\end{array}
$$

无穷小

例子. 求函数极限$\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x})$。

练习. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{1}{x}$； 0

3.2 无穷大

无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义. 设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域有定义。如果对任何给定的$M > 0$，总存在$\delta > 0$，使得只要$0 < |x - x_0| < \delta$，就有$|f(x)| > M$，则称$f(x)$当$x \to x_0$ 时为无穷大，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$。

小注： 类似地，可以定义$x \to \infty$、 $x \to -\infty$、$x \to +\infty$ 时的无穷大。

小注： 特殊情况：正无穷大，负无穷大

无穷大

1. 无穷大是变量,不能与很大的数混淆;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是极限不存在的一种特殊情形。
3. 无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大 (例：$\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$).

无穷大

例子. 证明 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$

证： $\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$,只需要 $|x-1|<\frac{1}{M}$. 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义. 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

无穷大

练习. $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{x+1}{x^2}$ 是$x\to 0$时的无穷大。

练习. $\frac{x+2}{x^2-1}$ 是$x\to 1$时的无穷大。

无穷小与无穷大的关系

定理. 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明. 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则对 $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)|>\dfrac{1}{\epsilon}$, 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\epsilon$. 所以当 $x\to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小

无穷小与无穷大的关系

续. 反之,设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, 且 $f(x)\neq 0$.则 $\forall M>0, \exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)|<\dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x)\neq 0$, 从而 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M$. 所以当 $x\to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

小注： 关于无穷大的讨论，都可归结为关于无穷小的讨论. **例子.** $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x^2+1}=0 \implies \lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$。

3.3 小结 思考

小结

主要内容: 两个定义;四个定理;三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;

2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;

3. 无界变量未必是无穷大.

思考

在自变量的同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小：反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案. *不一定。 0 是无穷小，但其倒数不存在. 所以课本上表示为“非零的无穷小的倒数是无穷大”.*

4 极限运算法则

4.1 极限运算法则

四则运算法则

定理. 如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

1. $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$
2. $\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$
3. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

四则运算法则∗

证明. 因为$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$ 所以

$$f(x)=A+\alpha,\ g(x)=B+\beta.\ \text{其中}\ \alpha\to 0,\beta\to 0.$$

由无穷小运算法则,得

$$[f(x)\pm g(x)]-(A\pm B)=\alpha\pm\beta\to 0.$$

$$\begin{aligned}[f(x)\cdot g(x)]-(A\cdot B)&=(A+\alpha)(B+\beta)-AB\\&=(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta\to 0.\end{aligned}$$

四则运算法则✻

续.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)},$$

因为$B\alpha-A\beta\to 0$ 又因为$\beta\to 0, B\neq 0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$时, $|\beta|<\frac{|B|}{2}$, 所以

$$|B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|.$$

所以

$$|B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2,$$

故 $\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$, 有界, 故 (3) 成立.

四则运算法则

推论. 如果$\lim f(x)$ 存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论. 如果$\lim f(x)$ 存在,而 n 是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

4.2 求极限方法举例

函数极限的基本公式

1. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n + a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0)\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

注意：若$Q(x_0) = 0$，则商的法则不能应用.

函数极限的基本公式

3. 如果基本初等函数$f(x)$在x_0的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

求极限方法举例

例子. 求函数极限$\lim\limits_{x\to1}(3x^2-2x+1)$。

解答. 原式$=3\lim\limits_{x\to1}x^2-2\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}1$

$=3\times1^2-2\times1+1=2$

求极限方法举例

例子. 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

解答. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\left(x^2-3x+5\right)&=\lim_{x\to2}x^2-\lim_{x\to2}3x+\lim_{x\to2}5\\&=\left(\lim_{x\to2}x\right)^2-3\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}5\\&=2^2-3\cdot2+5=3\neq0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to2}x^3-\lim\limits_{x\to2}1}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}$$

求极限方法举例($\frac{0}{0}$型)

例子. 求函数极限$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$。

解答. 原式$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3+1}{3+3}=\dfrac{2}{3}$

求极限方法举例($\frac{0}{0}$型)

例子. 求函数极限$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$。

解答. 原式

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

求极限方法举例($\frac{0}{0}$型)

例子. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=2$, 求 a、 b.

解答. $x\to 1$ 时, 分母的极限是零,而商的极限存在. 则

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b=0.$$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+3}=\frac{2+a}{4}=2.$$

故 $a=6, b=-7.$

求极限方法举例($\infty-\infty$型)

例子. 求函数极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$。

解答. 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2} - \dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$
$$= -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

求极限方法举例($\frac{\infty}{\infty}$型)

例子. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解答. 先用x^3 去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

求极限方法举例($\frac{\infty}{\infty}$型)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1} = \frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m} = \begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子、分母,以分出无穷小,然后再求极限.

求极限方法举例

例子. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}+ax+b\right)=2$, 求 $a\Delta b$.

解答.

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2+ax(x+1)+b(x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(a+b)x+2+b}{x+1}\end{aligned}$$

若商的极限存在，则必须 $1+a=0$, $a+b=2$ 解得

$$a=-1,\ b=3.$$

求极限方法举例

例子. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

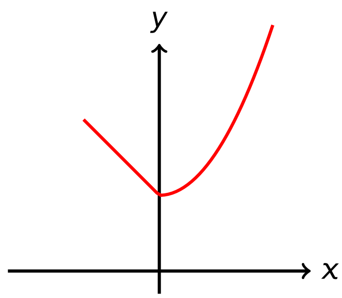
解答. $n\to\infty$ 时,是无限多个无穷小之和, 先变形再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

求极限方法举例

设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x,\ x<0;\\x^2+1,\ x\geq 0;\end{cases}$$



求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解答. 易知

$$\lim_{x\to 0^-} = 1-0=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} = 1+0=1,$$

左右极限相等，故$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

求极限方法举例

练习. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2\ln(1+x)+e^x+2)$； 3

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$； 4

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$。 . . . . $\dfrac{5}{4}$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \not\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "\times\ f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & \neq & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}
$$

复合函数的极限

$$
\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \overset{\boxed{\begin{array}{c} x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0) \\ g(x)\neq u_0 \end{array}}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "\surd\ f\circ g"] \\
\mathring{U}(u_0,\eta) & = & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}
$$

复合函数的极限

$$\boxed{\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \implies \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathring{U}(x_0,\delta) & & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \\
\downarrow g & & & & \\
U(u_0,\eta) & = & U(u_0,\eta) & & \checkmark\ \downarrow f\circ g \\
 & & \downarrow f & & \\
 & & U(A,\epsilon) & & U(A,\epsilon)
\end{array}$$

复合函数的极限

定理. 如果$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，并且存在$\delta_0 > 0$使得 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$时$g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$$

定理. 若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$且$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\Big[\lim_{x\to x_0} g(x)\Big]=f(u_0).$$

例子. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

小结　思考

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   - 多项式与分式函数代入法求极限;
   - 消去零因子法求极限;
   - 无穷小因子分出法求极限;
   - 利用无穷小运算性质求极限;
   - 利用左右极限求分段函数极限.
3. 复合函数的极限运算法则

思考题

问题. 在某个过程中，若$f(x)$有极限，$g(x)$无极限，那么$f(x)+g(x)$是否有极限？为什么？

解答. 没有极限，使用反证法易证。

5　极限存在准则、两个重要极限

本节基本内容

极限存在准则I	极限存在准则II
$\Downarrow$	$\Downarrow$
重要极限I	重要极限II
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

5.1 夹逼准则

极限存在准则I

定理（极限存在准则I）**.** 如果数列 $x_n \le y_n \le z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

例子. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

注记. 在上述定理中，如果不等式$x_n \le y_n \le z_n$仅在$n > N$时成立，结论不变。

极限存在准则I

证明. $\because y_n \to a,\quad z_n \to a,\therefore$ 对$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0,\quad N_2 > 0,$ 使得 当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \varepsilon,$ 当 $n > N_2$ 时恒有 $|z_n - a| < \varepsilon.$ 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，上两式同时成立, 即

$$a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$$

当 $n > N$ 时，恒有

$$a-\varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a+\varepsilon$$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

极限存在准则I

定理（极限存在准则I'）**.** 如果 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记. 若将$x \to x_0$全部改为$x \to \infty$，定理仍成立。

注记. 在上述定理中，如果不等式$f(x) \le g(x) \le h(x)$仅在x_0的某个去心邻域上成立，结论不变。

准则I和准则I'称为夹逼准则或者两面夹准则

注意: 利用两面夹准则求极限关键是构造出 y_n ($f(x)$) 与 $z_n(h(x))$，并且 $y_n(f(x))$ 与 $z_n(h(x))$ 的极限是容易求的.

重要极限I

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

一般地，如果当$x \to 0$时，$\phi(x) \to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin \phi(x)}{\phi(x)} = 1}$$

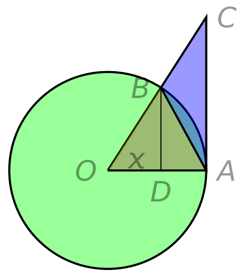
重要极限I

证明. 如图所示,设单位圆 O, 圆心角 $\angle AOB = x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 作单位圆的切线, 得 $\triangle ACO$. 设扇形OAB 的圆心角为 x, $\triangle OAB$ 的高为 BD, 则有 $\sin x = BD$, $\quad x =$ 弧 AB, $\quad \tan x = AC$, 所以

$$\sin x < x < \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



重要极限I

证明续. 上式对于$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0, \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$

又因为

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

由两面夹准则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

重要极限I

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解答. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\times\frac{1}{1} = 1$$

重要极限I

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解答.

$$\begin{aligned}
\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

重要极限I

例子. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解答. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\times 1 = 3$$

重要极限I

例子. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

解答. 原式 $= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{1}{4}\times 1\times 1 = \frac{1}{4}$$

重要极限I

练习. 求下列函数极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

解答. (1) $\frac{5}{4}$　　(2) $\frac{2}{3}$

重要极限I

练习 1. 求下列函数极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$

(3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}}{x}$

重要极限I

例子. 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解答. 令 $t=x-\pi$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}&=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1\end{aligned}$$

重要极限I

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

5.2 重要极限II

极限存在准则II

定理 (极限存在准则II)**.** 单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛。

2. 单调减少且有下界的数列必定收敛。

注记. 若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立。

重要极限II

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}}$$

重要极限II

证明. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 则

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\ +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

显然 $x_{n+1}>x_n$, $\therefore \{x_n\}$ 是单调递增的;

重要极限II

证明续. 又因为

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

所以$\{x_n\}$ 是有界的由单调收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \quad (\mathrm{e} = 2.71828\cdots)$

重要极限II

可以证明

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \xRightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}}$$

一般地，如果当$x \to a$时，$\psi(x) \to 0$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \mathrm{e}}$$

简单情形

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

解答. 原式 $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2} = e^{2}$$

简单情形

例子. 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}$

解答. 原式 $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot(-\frac{1}{3})}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}} = e^{-1/3}$$

练习 2. 求函数极限：

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{x}$ .... e^{-4}

(2) $\lim_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$ .... $e^{-\frac{2}{3}}$

幂指函数的极限

定理. 若 $\lim_{x\to\square} u(x) = A > 0$，$\lim_{x\to\square} v(x) = B$，则有

$$\lim_{x\to\square} u(x)^{v(x)} = A^{B}.$$

幂指情形

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

解答. 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{2x}{x-1}}=\mathrm{e}^2.$$

练习. 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$ $\cdots\cdots$ $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+1}$ $\cdots\cdots$ e^{-1}

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3}$ $\cdots\cdots$ e^{4}

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解答. 由条件知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\&=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\\&=\ln\mathrm{e}=1\end{aligned}$$

变量替换

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

解答. 令 $e^x - 1 = u$, 即 $x = \ln(1+u)$. 则当 $x \to 0$ 时,有 $u \to 0$, 于是

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} = 1$$

单调有界收敛准则

例子. 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$($n$ 重根式)的极限存在 .

证明. 显然 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的; 又 $x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{3 + x_k} < \sqrt{3+3} < 3,$$

即$\{x_n\}$ 是有界的; 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

单调有界收敛准则

证明续. 由 $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$ 得

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3 + x_n}$$

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, 则有

$$A = \sqrt{3 + A}.$$

解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

5.3 连续复利

常数e的意义

例子. 复利问题：假设银行活期存款的年利率为0.5%，存入M元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实. 常数 e 反映了连续增长的规律.

连续复利

设一笔贷款 A_0 (称为本金)，年利率为 r,则

- 一年后本利和 $A_1 = A_0(1+r)$
- 两年后本利和 $A_2 = A_1(1+r) = A_0(1+r)^2$
- k 年后本利和 $A_k = A_0(1+r)^k$

如果一年分 n 期计息，年利率仍为 r ，则每期利率为 $\frac{r}{n}$, 于是一年后的本利和

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

连续复利

k 年后本利和 $A_k = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk}$

如果计息期数 $n \to \infty$ ，即每时每刻计算复利(称为连续复利)，则 k 年后的本利和

$$A_k = \lim_{n\to\infty} A_0 \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk} = \lim_{n\to\infty} A_0 \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rk}$$
$$= A_0 e^{rk}$$

两个重要极限

复习 1. 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$ .... $\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$ 1

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$ .... e^{-3}

小结

1. 两个准则
   - 两面夹(夹逼)准则
   - 单调有界准则
2. 两个重要极限
   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
   - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}.$

复习与提高

例子. 求函数极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$。

解答. 因为当$x\to 0$时，$\cos x$不是无穷小，所以不能用重要极限II公式来计算。

实际上，这个函数是初等函数，且在0的邻域有定义，所以其极限为$(1+1)^1=2$。

复习与提高

例子. 设数列$x_n=\dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限。

例子. 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=\dfrac{1}{2}$，且当$n\geq 1$时有$x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}$。研究数列的极限。

解答. 先说明数列收敛，再根据数列的递归关系求出其极限。

6 无穷小的比较

6.1 无穷小的阶

无穷小的比较

例子. 比较$x\to 0$时的三个无穷小x，$2x$，x^2。

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

无穷小的阶

定义. 设α、β是同一变化过程中的两个无穷小.

1. 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，记为$\beta=o(\alpha)$, 则称$\beta$是比$\alpha$ 高阶的无穷小.

2. 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$ 低阶的无穷小.

3. 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 则称$\beta$和$\alpha$是 同阶的无穷小.

★ 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$和$\alpha$是 等价无穷小，记为$\beta\sim\alpha$.

4. 若$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$, $k>0$, 则β是α的k阶无穷小。

无穷小的阶

例子. 在$x\to 0$时，无穷小x^2比x高阶。

例子. 在$x\to 0$时，无穷小x^2比x^3低阶。

例子. 在$x\to 0$时，无穷小x^2和$5x^2$同阶。

例子. 在$x\to 0$时，无穷小x^2和x^2+2x^3等价。

无穷小的阶

练习 1. 易知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 和 $g(x)=x^2$ 均为 $x\to 0$ 时的无穷小。

(1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶？

(2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶？

(3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶？

(4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价？

常用的等价无穷小

当$x \to 0$时，有如下这些常用的等价无穷小：

(1) $\sin x \sim x$	(5) $\ln(1+x) \sim x$
(2) $\tan x \sim x$	(6) $e^x - 1 \sim x$
(3) $\arcsin x \sim x$	(7) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
(4) $\arctan x \sim x$	(8) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

意义：用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

等价无穷小的充要条件

定理. β 与 α 是等价无穷小的的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$. 称 α 是 β 的主要部分.

证明. 必要性　设 $\alpha \sim \beta$,

$$\lim \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \beta - \alpha = o(\alpha), \qquad \text{即 } \beta = \alpha + o(\alpha)$$

充分性　设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim\left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1$$

$$\therefore \quad \alpha \sim \beta$$

6.2 等价无穷小代换

等价无穷小代换

定理. 设$\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，且$\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则有 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证明.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$
$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

等价无穷小代换

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解答. 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$\tan 2x \sim 2x$ 因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8$$

等价无穷小代换

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解答. 当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\sin x}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

若分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

等价无穷小代换

例子. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解答. 当 $x\to 0$, $\tan x\sim x$, $\quad\sin x\sim x$.

$$\text{原式} =\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0. \qquad ✗$$

解答. 当 $x\to 0$时, $\sin 2x\sim 2x$, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim \frac{1}{2}x^3$

$$\text{原式} =\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}. \qquad ✓$$

注记. 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项。

等价无穷小代换

注记. 当$\alpha_1\sim\beta_1$、$\alpha_2\sim\beta_2$时，下列等式总是成立：

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\overset{✓}{\sim}\beta_1\cdot\beta_2$$

但下列等式未必成立：

$$\alpha_1\pm\alpha_2\overset{✗}{\sim}\beta_1\pm\beta_2$$

例子. 当$x\to 0$时，有

$$\boxed{\begin{array}{c} x+x^2\sim x+x^3 \\[1em] x\sim x \end{array}} \xrightarrow{\text{两边同时相减}} \boxed{x^2\overset{✗}{\sim}x^3}$$

等价无穷小代换

练习 2. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$; ·· $\dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$。 ································ $-\dfrac{9}{8}$

6.3 小结与思考

小结

1. 无穷小的比较：反映了同一过程中, 两无穷小趋于零的速度快慢, 但并不是所有的无穷小都可进行比较.
    - 高(低)阶无穷小;
    - 等价无穷小;
    - 无穷小的阶.
2. 等价无穷小的代换：求极限的又一种方法, 注意适用条件.

思考题

思考. 任何两个无穷小都可以比较吗?

解答. 不能. 例如当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 都是无穷小量, 但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在且不为无穷大. 故当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不能比较.

7　函数的连续性

7.1　函数的连续性的概念

连续的概念

例子. 自然界中有很多现象都是连续地变化着的。

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小。
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小。

对于$y=f(x)$定义域中的一点x_0，如果x从x_0作微小改变Δx后，y的相应改变量Δy也很微小，则称$f(x)$在点x_0 连续。

连续的概念

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，当 x 在 $U(x_0,\delta)$ 内由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时,称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 的增量; 相应地, 函数 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

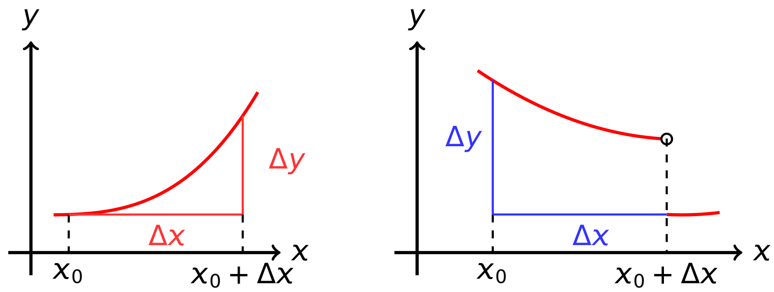
称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.

连续的概念

定义. 设$y=f(x)$在x_0的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称$f(x)$在点x_0 连续。



$$\Updownarrow$$

定义. 设$y=f(x)$在x_0的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称$f(x)$在点x_0 连续。

$\varepsilon-\delta$ 定义：$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

连续的概念

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 即
$$f(x_0^-)=f(x_0^+)$$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

函数在某点连续等价于函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

极限与连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$（极限存在）：

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

. . . .

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$（连续）：

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$$

函数的连续性

例子. 试证函数 $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.

解答. $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

$$\text{又 } f(0) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

由定义知, 函数$f(x)$在$x = 0$处连续。

函数的连续性

例子. 证明函数 $y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 内连续 .

证明. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leq 1$, 故

$$|\Delta y|\leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha\neq 0$ 时, 有 $\sin\alpha\ |<\alpha$, 故 $|\Delta y|\leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|$, $\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时 , $\Delta y\to 0$. 即函数 $y=\sin x$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

单侧连续

定义. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,x_0]$ 内有定义,且 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续。

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义,且 $f\left(x_0^+\right)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)=f(x_0)}$$

单侧连续

例子. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解答. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$

函数右连续但不左连续，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

连续函数

定义. 如果$f(x)$在区间 I 的每一点都连续，则称$f(x)$在区间 I 上连续，或称$f(x)$是区间 I 上的连续函数。

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记. 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线。

函数的连续性

性质. $f(x)$在x_0点连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$。

例子. 判断函数$f(x)$在$x=0$点的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x-1, & x\geq 0 \end{cases}$；

(2) $f(x)=\begin{cases} \frac{2\sin x}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0 \end{cases}$。

函数的连续性

练习 1. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，判断它在 $x=0$ 处的连续性。

解答. $f(x)$在$x=0$处是连续的.

7.2 函数的间断点

函数的间断点

定义. 设$f(x)$在点x_0的某个去心邻域有定义，如果$f(x)$在点x_0不连续，则称它在点x_0 间断，或者称点x_0是$f(x)$的间断点。

x_0 为 $f(x)$ 的间断点,有以下三种情形：

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0).$$

可去间断点

定义.如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在$x=0$处有可去间断点。

例子. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ .... 可去间断点

可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

跳跃间断点

定义. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在,但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子. $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ ....跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

第二类间断点

定义. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数$f(x)$的第二类间断点。

例子. $f(x)=\frac{1}{x}$ .... 无穷间断点

例子. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ .... 振荡间断点

函数的间断点

注记. 间断点常见位置：（*1*）分母为零；（*2*）分段点。

例子. 求函数$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$的间断点，并判断类型。

例子. 求$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\neq 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型。

函数的间断点

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子. 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ 当 } x \text{ 是有理数时},\\ 0, \text{ 当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

在定义域R内每一点处都间断,且都是第二类间断点.

例子. $f(x)=\begin{cases}x, \text{ 当 } x \text{ 是有理数时},\\ -x, \text{ 当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$ 仅在$x=0$处连续，其余各点处处间断.

7.3 初等函数的连续性

连续函数的四则运算

定理. 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例子. $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 故 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 在其定义域内连续.

反函数的连续性

定理. 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数 .

例子. $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y=\arcsin x$$

在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上单调减少且连续;

$y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

复合函数的连续性

定理. 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

例子. 因为$u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续,

$y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,

故$y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续

初等函数的连续性

定理. 初等函数在其定义区间内都是连续函数。

> 1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
> 2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例子. $y = \sqrt{\cos x - 1}$, $\quad D: x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义.

初等函数的连续性

> 初等函数在连续点求极限可用代入法.
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{ 定义区间 })$$

例子. 求 $\lim\limits_{x \to 1} \sin \sqrt{e^x - 1}$

解答. 原式 $= \sin \sqrt{e^1 - 1} = \sin \sqrt{e - 1}$.

7.4 小结 思考

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件。
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$

  - 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
- 第二类间断点：$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$至少一个不存在
  - 无穷间断点：$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$至少一个为无穷大
  - 振荡间断点：$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$均不为无穷大

4. 初等函数的连续性

思考

思考. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 连续， $f(x)$ 在 x_0 是否连续?

解答. 因为$f(x)$ 在 x_0 连续, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 且

$$0\leq \left||f(x)|-|f(x_0)|\right|\leq |f(x)-f(x_0)|$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|.$$

$$\lim_{x\to x_0}f^2(x)=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]=f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

思考

但反之不成立. 例 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 不连续，但 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 $x_0=0$ 连续。

8 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数

1. 最值定理
2. 零点定理
3. 介值定理

8.1 最大值和最小值定理

最大值最小值

定义. 对于在区间I上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

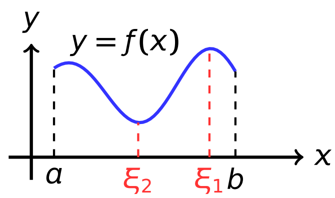
$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间I上的最大(小)值.

最值定理

定理 (最值定理)**.** 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在该区间上有界而且一定能取到最大值M和最小值m.

$$\text{若 } f(x) \in C[a,b], \text{ 则 } \exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b], \text{ 使得 } \forall x \in [a,b] \text{时, 有}$$
$$f(\xi_1) \geq f(x),\ f(\xi_2) \leq f(x).$$



1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

最值定理

例子. 函数$y = \tan x$在开区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值。

例子. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

在区间$[0, 2]$虽然有界，但既无最大值也无最小值。

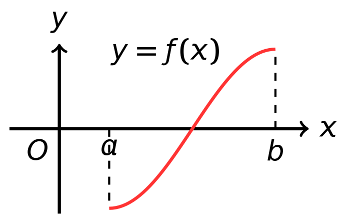
8.2 零点定理与介值定理

零点定理

定义. 如果 x_0 使 $f(x_0) = 0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 (零点定理)**.** 设$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(a)$和$f(b)$异号，则在开区间(a, b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi) = 0$.

几何解释: 连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于x轴的不同侧,则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



零点定理

例子. 证明方程$x^3-3x^2+1=0$在区间$(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$内各有一个实根。

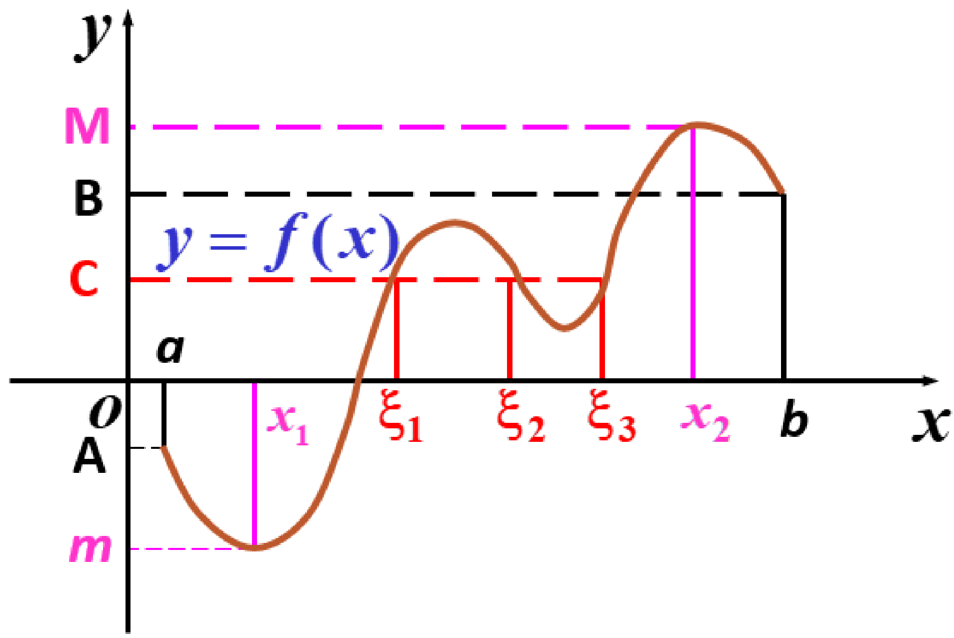
例子. 证明方程$2\sin x=x+1$有实数解。

介值定理

定理 (介值定理)**.** 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)=A$和$f(b)=B$不相等，则对于A与B之间的任何数C，在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=C$.

证明. 令$g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可以得到结论.

几何意义：在 $[a,b]$ 上的连续曲线$y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ (C介于$f(a)$和$f(b)$之间)至少相交一点.



介值定理

推论. 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M与最小值 m 之间的任何值.

证明. 设$f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$,在区间$[x_1,x_2]$(或者$[x_2,x_1]$)上运用介值定理可得结论

介值定理

例子. 证明方程 $x^5-3x+1=0$ 在开区间 *(0,1)* 内至少有一个实根.

证明. 令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在[0,1]上连续，又 $f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0$, 由零点定理, $\exists\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

$\therefore$ 方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 上至少有一根 ξ

介值定理

例子. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 n 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ，使

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

证明. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m, 显然有

$$m \leq f(x_i) \leq M, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

于是

$$nm \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq nM \Rightarrow m \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq M$$

介值定理

证明续. (i) 若 $f(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ 或 $f(b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, 则可取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$.

(ii) 若 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ 与 $f(a), f(b)$ 不同，由介值定理可知，在 (a,b) 至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

综合（i），（ii）可知，原命题得证.

不动点定理

例子. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x\in[a,b]$ 都有 $a\le f(x)\le b$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^*\in[a,b]$, 使 $f(x^*)=x^*$.

证明. 令$g(x)=f(x)-x$, 则$g(x)$在$[a,b]$上连续，由于 $a\le f(x)\le b$, 故

$$g(a)\ge 0,\ g(b)\le 0.$$

若 $g(a)=0$, 可取 $x^*=a$.

若 $g(b)=0$, 可取 $x^*=b$.

若 $g(a)>0, g(b)<0$, 则由介值定理知，存在 $x^*\in(a,b)$, 使 $g(x^*)=0$, 即有 $f(x^*)=x^*$

介值定理

例子. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$, $f(b)>b$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$

证明. 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 而

$$F(a)=f(a)-a<0,\ F(b)=f(b)-b>0,$$

由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$, 使

$$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0,$$

即 $f(\xi)=\xi$

8.3 均衡价格的存在性

均衡价格的存在性

假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数.如果生产某种商品的资源十分昂贵，则价格为零时供给必为零，即 $S(0) = 0$; 再假定 $D(0) > 0$, 即消费者有消费欲望。令

$$Z(P) = D(P) - S(P); \text{ 于是 } Z(0) = D(0) - S(0) > 0.$$

另外，当价格涨到某个充分大的值 $P = P^*$ 时，公司会发现生产该产品利润丰厚，而顾客会感到价格过高，这样必然导致供过于求，即 $D(P^*) < S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*) = D(P^*) - S(P^*) < 0.$$

均衡价格的存在性

又$D = D(P)$和$S = S(P)$都是区间$[0, P^*]$上的连续函数，所以$Z(P) = D(P) - S(P)$也是区间$[0, P^*]$上的连续函数，于是由零点定理，存在 $P_e \in (0, P^*)$, 使得

$$Z(P_e) = D(P_e) - S(P_e) = 0,$$

即

$$D(P_e) = S(P_e), \text{ 且 } P_e > 0.$$

均衡价格的存在性

定理. *假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数，且满足:*

1. *价格为零时，需求超过供给，即 $D(0) > S(0)$;*
2. *存在某个价格 $P = P^* > 0$, 使得在此价格下，供给超过需求，即 $S(P^*) > D(P^*)$.*

则市场上一定存在一个正的均衡价格，即存在 $P_e > 0$, 使得 $D(P_e) = S(P_e)$.

8.4 小结 思考

小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

  注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法:先利用最值定理,再利用介值定理;
  2. 辅助函数法:先作辅助函数$F(x)$, 再利用零点定理;

思考题

思考. 假设有一个登山者头天上午8点从山脚开始上山，晚上6点到达山顶，第二天上午8点从山顶沿原路下山，下午6点到达山脚。问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什么？

思考题解答

解答. 会。

不妨设山高为h,登山者头天登山的高度函数 $f_1(x), f_2(x)$ 在$[8,18]$上连续，且

$$f_1(8)=0,\ f_1(18)=h;\ f_2(8)=h,\ f_2(18)=0$$

设

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),$$

则 $f(x)$ 在$[8,18]$上连续, 且

$$f(8)=-h<0,\ f(18)=h>0.$$

由零点定理知存在一点 $\xi\in(8,18)$, 使 $f(\xi)=0$.

练习题

问题. 证明方程 $x=a\sin x+b$, 其中 $a>0, b>0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

问题. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在 $[x_1,x_n]$ 上必有 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots\ldots+f(x_n)}{n}$$

Part III

第三章

1 导数的概念

1.1 导数的引例

导数引例：瞬时速度

例子. 物体作变速直线运动，经过的路程s是时刻t的函数，$s = f(t)$。求在t_0时刻物体的瞬时速度。

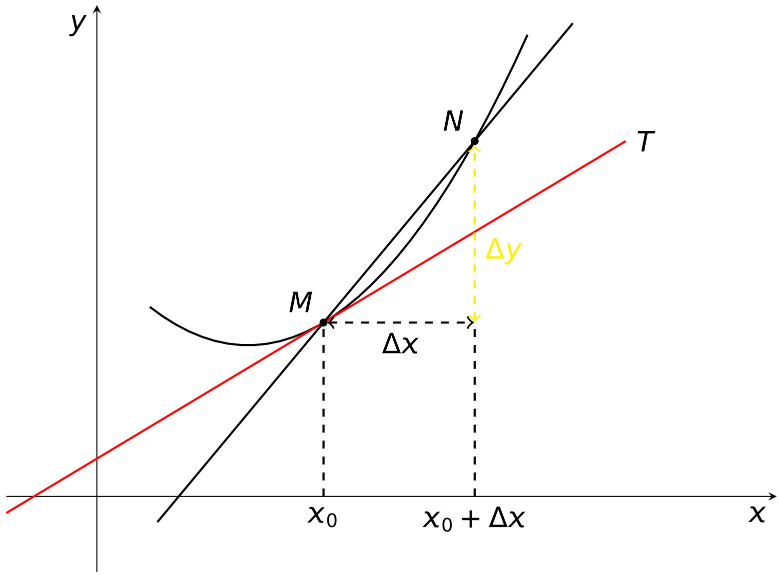
- 从t_0到$t_0+\Delta t$的平均速度为
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$
- 在t_0时刻的瞬时速度为
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

导数引例：切线斜率

例子. 求曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线斜率。

- 设N点在M点附近，则割线MN的斜率为
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
- 让N点往M点跑，则切线MT的斜率为
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数引例：切线斜率



1.2 导数的定义

导数的定义

定义. 设$y=f(x)$在x_0的某邻域有定义。若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为$f(x)$在x_0处的导数（或微商）。记为$f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，或$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$。

注记. 导数$f'(x_0)$反映了$f(x)$在点x_0处的变化快慢，因此 $f'(x_0)$ 又称为$f(x)$在x_0点的变化率.

导数的几种形式

- $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（定义）
- $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$（令$h=\Delta x$）
- $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$（令$x=x_0+h$）

导数的定义

如果$f(x)$在x_0处有导数，则称函数$f(x)$在x_0点可导．否则，称$f(x)$在x_0处不可导。

对于点 x_0, 如果当 $\Delta x\to 0$ 时比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$, 此时函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处是不可导的, 但是为了方便，也往往说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的导数为无穷大, 并记作 $f'(x_0)=\infty$.

如果 $f(x)$ 在区间 I 内每一点都可导，则称$f(x)$在区间 I 内可导。

导函数的定义

如果$f(x)$在区间 I 内可导，则每个 $x_0\in I$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f':x_0\longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 I 内的导函数（简称导数），记为 $f'(x)$，或y'，或$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，或 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$。此时有

$$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}.$$

导函数的几种形式

- $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$（定义）
- $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$（令$h=\Delta x$）

在上式中虽然 x 可以取区间 I 内的任何数值，但在取极限的过程中，x 是常量，Δx 是变量.

求导数举例

求导数的步骤

1. 求增量　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;
2. 算比值　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;
3. 求极限　$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例子. 求函数 $f(x)=C$ (C 为常数) 的导数.

解答. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$。
所以

$$(C)'=0.$$

求导数举例

例子. 求幂函数$f(x)=x^n$的导数。

解答. 由条件得

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right] \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}.$

> 更一般地，对于任意给定的实数 μ,
> $$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

求导数举例

例子. 求函数 $f(x)=\cos x$的导数。

解答. 由条件得

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{2+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

> $(\cos x)'=-\sin x,\ (\sin x)'=\cos x.$

求导数举例

例子. 求函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

解答. 易知

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta} \\ &= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} \\ &= a^x \ln a\end{aligned}$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a,\ (e^x)' = e^x.}$$

求导数举例

例子. 求函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

解答. 由条件知

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}$$

基本导数公式I

利用导数的定义，可以得到

$$(C)' = 0 \tag{5}$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1} \tag{6}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{7}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{8}$$

基本导数公式II

利用导数的定义，可以得到

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \qquad (e^x)' = e^x \tag{9}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{10}$$

分段函数的导数

对于分段函数，我们有（假定$g(x)$和$h(x)$总可导）：

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \le a \\ h(x), & x > a \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x), & x < a \\ h'(x), & x > a \end{cases}$$

注记. $f'(a)$需要单独研究：未必有$f'(a) = g'(a)$。

左导数和右导数

定义. 设$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0]$上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为$f(x)$ 在x_0 处的左导数，记为$f'_-(x_0)$.

定义. 设$f(x)$在$[x_0, x_0+\delta)$上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为$f(x)$ 在x_0 处的右导数，记为$f'_+(x_0)$.

导数与左右导数

性质. 导数存在$\Longleftrightarrow$左导数和右导数都存在且相等。

$$\begin{aligned}\text{导数：}f'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ \text{左导数：}f'_-(x_0)&=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ \text{右导数：}f'_+(x_0)&=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

分段函数的导数

性质. 假定$g(x)$和$h(x)$总可导，分段函数

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\le a\\ h(x), & x>a\end{cases}.$$

如果$f(x)$在$x=a$点连续，则有

$$f'_-(a)=g'(a),\qquad f'_+(a)=h'(a).$$

分段函数的导数

例子. 判断函数$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$在点$x=-1$的连续性与可导性。不连续且不可导 **例子.** 判断函数$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$在点$x=1$处的连续性与可导性。. . . . . . . 连续但不可导 **例子.** 判断函数$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$在点$x=0$处的连续性与可导性。. . . . . 连续且可导

1.3 导数的几何意义

导数的几何意义

函数$f(x)$在x_0处的导数$f'(x_0)$，就是曲线$y=f(x)$在点(x_0,y_0)处的切线斜率。

从而点(x_0,y_0)处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

导数的几何意义

例子. 求$f(x)=x^2$在点$(1,1)$处的切线方程和法线方程.

练习. 求$f(x)=\dfrac{1}{x}$在点$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$处的切线方程和法线方程.

答案. 切线方程为$x+4y-4=0$。

法线方程为$8x-2y-15=0$。

1.4 函数可导性与连续性的关系

可导与连续的关系

定理. $f(x)$在x_0点可导，则$f(x)$在x_0点连续。

证明. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，故

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{\Delta x_0\to 0} f(x+\Delta x)=f(x_0)$. 所以函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

注意：$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\not\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点可导.

可导与连续的关系

例子. $f(x)=|x|$ 在$x=0$处连续但不可导.

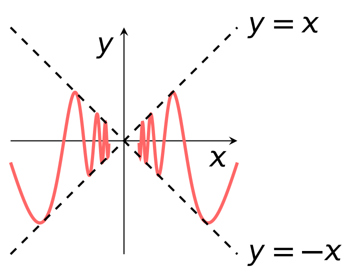
推论. $f(x)$在x_0点不连续$\Longrightarrow f(x)$在x_0点不可导。

例子. 判断$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$，在点$x=-1$处的连续性与可导性。

无穷导数

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，但

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$$

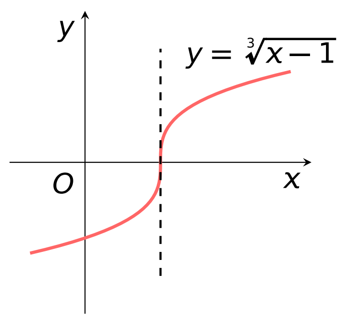


称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有无穷导数(不可导).

例如,

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

在 $x=1$ 处不可导.



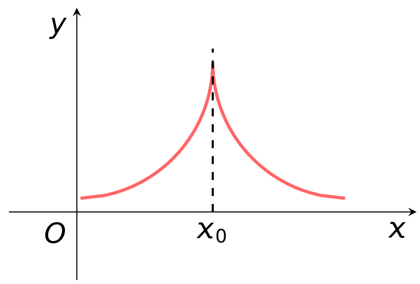
连续但左右导数不存在

函数 $f(x)$ 在连续点的左右导数都不存在 (指摆动不定)，则 x_0 点不可导。

例如,

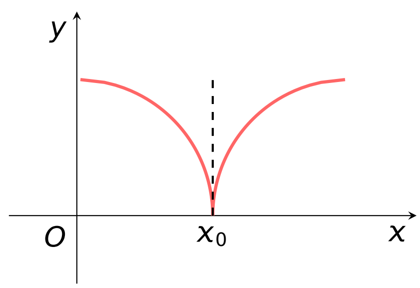
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处不可导.



可导与连续的关系

若 $f'(x_0)=\infty$, 且在点 x_0 的两个单侧导数符号相反，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的尖点 (不可导点).



1.5 小结 思考

小结

1. 导数的实质: 增量比的极限,即瞬时变化率;
2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$
3. 导数的几何意义: 切线的斜率;
4. 可导的函数一定连续，但连续的函数不一定可导;

5. 求导数最基本的方法: 由定义求导数.

$$6.\ 判断可导性\begin{cases}不连续,一定不可导. \\ 连续\begin{cases}直接用定义; \\ 看左右导数是否存在且相等\end{cases}\end{cases}$$

思考题

思考. *函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系?*

解答. 由导数的定义知, $f'(x_0)$ 是一个具体的数值, $f'(x)$ 是由于 $f(x)$ 在某区间 I 上每一点都可导而定义在I上的一个新函数, 即 $\forall x \in I$, 有唯一值 $f'(x)$ 与之对应, 所以两者的区别是: 一个是数值, 另一个是函数. 两者的联系是: 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 即是导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值.

2 求导法则和基本初等函数求导公式

2.1 函数的和、差、积、商的求导法则

函数的和、差、积、商的求导法则

定理. *如果函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 处可导,则它们的和、差、积、商 (除分母不为零外)在点 x 处也可导, 并且*

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.

2. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, $(v(x) \neq 0)$.

函数的和、差、积、商的求导法则

证明. 设 $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}, (v(x)\neq 0)$, 则

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} \\
&= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 在 x 处可导.

函数的和、差、积、商的求导法则

推论. 1. $\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$

2. $[Cf(x)]' = Cf'(x)$, C 为常数.

3.

$$
\begin{aligned}
\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' &= f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) \\
&\quad + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_i'(x)f_k(x)
\end{aligned}
$$

函数求导举例

例子. 求 $y=x^3-2x^2+\sin x$ 的导数.

解答. $y'=3x^2-4x+\cos x$

例子. 求 $y=\sin 2x\cdot\ln x$ 的导数.

解答. $\because y=2\sin x\cdot\cos x\cdot\ln x$

$$\begin{aligned}\therefore y'=&2\cos x\cdot\cos x\cdot\ln x+2\sin x\cdot(-\sin x)\cdot\ln x\\&+2\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{x}\\&=2\cos 2x\ln x+\frac{1}{x}\sin 2x\end{aligned}$$

函数求导举例

例子. 求 $y=\tan x$ 的导数.

解答. 由条件可得

$$\begin{aligned}y'=(\tan x)'=&\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'\\=&\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\=&\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\end{aligned}$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x$.

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

函数求导举例

例子. 求 $y=\sec x$ 的导数.

解答. 由条件知

$$\begin{aligned} y' = (\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x \end{aligned}$$

同理可得 $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

函数求导举例

例子. 求 $y = \sinh x$ 的导数.

解答. 由条件

$$y' = (\sinh x)' = \left[\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$$

同理可得 $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

函数求导举例

例子. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$

解答. 当 $x < 0$ 时,

$$f'(x) = 1,$$

当 $x > 0$时

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+x+h) - \ln(1+x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x}, \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{(0+h)-\ln(1+0)}{h}=1,$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln[1+(0+h)]-\ln(1+0)}{h}=1,$$

所以$f'(0)=1$. 综上，我们有

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0. \end{cases}$$

练习. 求下列函数的导数。

(1) $f(x)=x^5-4x^4+x^2+3x+\mathrm{e}$

(2) $f(x)=(x+2)(3x^3+2x)$

答案. *(1)* $f'(x)=5x^4-16x^3+2x+3$;

(2) $f'(x)=12x^3+18x^2+4x+4$。

基本导数公式III

利用商的导数运算公式，可以得到：

$$(\tan x)'=\sec^2 x \tag{11}$$

$$(\cot x)'=-\csc^2 x \tag{12}$$

$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x \tag{13}$$

$$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x \tag{14}$$

其中，$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$。

2.2 反函数的导数

反函数的导数

定理. 如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

注记. 上式也可以写成$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$。

反函数的导数

证明. 任取 $x\in I_x$, 给x以增量 $\Delta x\,(\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x)$. 由 $y=f(x)$ 的单调性可知 $\Delta y\neq 0$, 于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}},$$

由$f(x)$ 连续，得 $\Delta y\to 0 \quad (\Delta x\to 0)$, 又知 $\varphi'(y)\neq 0$，故

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

即

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

基本导数公式**V**

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{15}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{16}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{17}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{18}$$

2.3 复合函数的导数

复合函数的导数

例子. $[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$一般不成立。比如

$$(\sin 2x)' \neq \cos 2x.$$

实际上，我们有

$$\begin{aligned}(\sin 2x)' &= (2\sin x \cos x)' = 2(\sin x \cos x)' \\ &= 2\big[(\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'\big] \\ &= 2[\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)] \\ &= 2[\cos^2 x - \sin^2 x] \\ &= 2\cos 2x\end{aligned}$$

复合函数的导数

定理. 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

或者

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

复合函数的导数

证明. 由 $y=f(u)$ 在点 u_0 可导, 得 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$. 故

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha \quad \left(\lim_{\Delta u\to 0}\alpha = 0\right)$$

所以 $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha\Delta u$.因此

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]\\ &= f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &= f'(u_0)\varphi'(x_0)\end{aligned}$$

复合函数的导数

例子. 求复合函数的导数：

(1) $y=(1+2x)^6$

(2) $y=e^{3x^2+1}$

(3) $y=\ln(\sin x)$

(4) $y=\sqrt{x^2+1}$

复合函数的导数

练习 1. 求复合函数的导数：

(1) $y=e^{2x^2-6x}$

(2) $y=\sqrt{2x^2-4x+1}$

(3) $y=\dfrac{\sin 3x}{x^2}$

三重复合函数的导数

注记 1. 设 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$。则复合函数 $y=f(g(h(x)))$ 的导数公式为：

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

三重复合函数的导数

例子. 求三重复合函数的导数：

(1) $y=e^{\sqrt{-2x+1}}$

(2) $y=\ln(\cos(3x+1))$

三重复合函数的导数

练习 **2.** 求三重复合函数的导数：

(1) $y=e^{\sqrt{x^2-1}}$

(2) $y=\tan^2(3x^2+1)$

2.4 基本求导法则与求导公式

常数和基本初等函数的导数公式

$(C)'=0$	$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$(\cot x)'=-\csc^2 x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$
$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x), v=v(x)$ 可导，则

$$(1)\ (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2)\ (Cu)' = Cu'\ (C\text{是常数})$$

$$(3)\ (uv)' = u'v + uv'$$

$$(4)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$$

反函数的求导法则

设函数 $x=f(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_x=f\left(I_y\right)$ 内也可导，且有

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$, 而 $u=\varphi(x)$ 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

或

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

1. 利用上述公式及法则, 初等函数求导问题可完全解决.
2. 注意:初等函数的导数仍为初等函数.

2.5 小结 思考

小结

注意：

1. $[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)\cdot v'(x)$;
2. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' \neq \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$;
3. 分段函数求导时, 分界点导数用左右导数求;
4. 反函数的求导法则(注意成立条件);
5. 复合函数的求导法则(注意函数的复合过程，合理分解正确使用链导法).

已能求导的函数:可分解成基本初等函数,或常数与基本初等函数的和、差、积、商.

思考题

选择. 若 $f(u)$ 在 u_0 不可导， $u=g(x)$ 在 x_0 可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处 ....( )

(1) 必可导　　(2) 必不可导　　(3) 不一定可导

思考题

解答. 正确地选择是*(3)*

(1) 反例: $f(u)=|u|$ 在 $u=0$ 处不可导, 取 $u=g(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处可导, $f[g(x)]=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

*(2)*反例: 取 $u=g(x)=x^4$ 在 $x=0$ 处可导, $f[g(x)]=\left|x^4\right|=x^4$ 在 $x=0$ 处可导, (2)×

思考题

思考. 求曲线 $y=2x-x^3$ 上与 x 轴平行的切线方程.

解答. 易知$y'=2-3x^2$，令$y'=0$得

$$x_1=\sqrt{\frac{2}{3}},\ x_2=-sqrt\frac{2}{3}$$

故切点为

$$(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{4\sqrt{6}}{9}),\ (-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{4\sqrt{6}}{9})$$

所求切线方程为 $y=\frac{4\sqrt{6}}{9}$ 和 $y=-\frac{4\sqrt{6}}{9}$

3 高阶导数

3.1 高阶导数的定义

高阶导数的定义

问题 (变速直线运动的加速度.)**.** 设 $s=f(t)$, 则瞬时速度为 $v(t)=f'(t)$。因为加速度 a 是速度v对时间 t 的变化率, 因此

$$a(t)=v'(t)=[f'(t)]'$$

定义. 如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点x处可导,即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数，记作

$$f''(x), y'', \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ 或 } \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

高阶导数的定义

类似地，我们可以定义：

- 二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \frac{d^3 y}{dx^3}$.
- 三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{d^4 y}{dx^4}$.
- 一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的n阶导数,记作
$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数. 相应地, $f(x)$ 称为零阶导数 ;$f'(x)$ 称为一阶导数.

3.2 高阶导数的求法

高阶导数的求法

高阶导数的求法主要有

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.
2. 间接法：利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导数.

直接法

例子. 设 $y=\arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解答. 易知

$$y'=\frac{1}{1+x^2},\ y''=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$y''=\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)'=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{(1+x^2)^3}.$$

因此

$$f''(0)=\left.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}=0; f'''(0)=\left.\frac{2\left(3x^2-1\right)}{(1+x^2)^3}\right|_{x=0}=-2.$$

直接法

例子. 设 $y=x^\alpha(\alpha\in R)$, 求 $y^{(n)}$.

解答. $y'=\alpha x^{\alpha-1}$

$$\begin{aligned}
&y''=\left(\alpha x^{\alpha-1}\right)'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\\
&y'''=\left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right)'=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}\\
&\cdots\cdots\\
&y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\quad(n\geq 1)
\end{aligned}$$

若 α 为自然数 n, 则

$$y^{(n)}=(x^n)^{(n)}=n!,\quad y^{(n+1)}=(n!)'=0$$

直接法

求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(可用数学归纳法证明)

例子. 设 $y=\ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解答. $y' = \frac{1}{1+x}, \quad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$y''' = \frac{2!}{(1+x)^3}, \quad y^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad (n \geq 1, 0! = 1)$$

直接法

例子. 设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解答. $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得 $\quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

直接法

例子. 设 $y = e^{ax}\sin bx(a, b$ 为常数 $)$, 求 $y^{(n)}$.

解答. 由条件知

$$y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$$

$$= e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$= a^{ax} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}\sin(bx + \varphi) \quad \left(\varphi = \arctan\frac{b}{a}\right)$$

$$y'' = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot [ae^{ax}\sin(bx + \varphi) + be^{ax}\cos(bx + \varphi)]$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}\sin(bx + 2\varphi)$$

$$y^{(n)} = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{ax}\sin(bx + n\varphi) \quad \left(\varphi = \arctan\frac{b}{a}\right)$$

高阶导数的运算法则

设函数u和v具有n阶导数，则

1. $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;
2. $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$
3. $(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \quad +\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}$
   $+\cdots+uv^{(n)} \qquad =\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$ 　　莱布尼茨公式

莱布尼茨公式

例子. 设 $y=x^2e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解答. 设 $u=e^{2x}$, $v=x^2$, 则由莱布尼兹公式知

$$\begin{aligned}
y^{(20)} &= \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{(20)}\cdot x^2+20\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{(19)}\cdot\left(x^2\right)' \\
&+\frac{20(20-1)}{2!}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{(18)}\cdot\left(x^2\right)''+0 \\
&=2^{20}\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2x \\
&+\frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2 \\
&=2^{20}\mathrm{e}^{2x}\left(x^2+20x+95\right)
\end{aligned}$$

常用高阶导数公式

$$
\begin{array}{ll}
(1) & (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a (a > 0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x \\
(2) & (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
(3) & (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
(4) & (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \\
(5) & (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}
\end{array}
$$

间接法

例子. 设 $y = \frac{1}{x^2-1}$, 求 $y^{(5)}$.

解答. 由

$$y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

得

$$
\begin{aligned}
y^{(5)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6} - \frac{-5!}{(x+1)^6}\right] \\
&= 60\left[\frac{1}{(x+1)^6} - \frac{1}{(x-1)^6}\right]
\end{aligned}
$$

间接法

例子. 设 $y = \sin^6 x + \cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$.

解答. 由条件可得

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 \\
&= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x\right) \\
&= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \\
&= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \\
&= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x
\end{aligned}
$$

于是$y^{(n)} = \frac{3}{8} \cdot 4^n \cdot \cos\left(4x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

3.3 小结 思考

小结

- 高阶导数的定义及物理意义
- 高阶导数的运算法则(莱布尼兹公式);
- 高阶导数的求法
  - 直接法
  - 间接法

思考题

思考. 设$g'(x)$连续，且$f(x) = (x-a)^2 g(x)$, 求$f''(a)$.

解答. 由$g(x)$可导，可得

$$f'(x) = 2(x-a)g(x) + (x-a)^2 g'(x).$$

又$g''(x)$不一定存在，故$f''(a)$需用定义求。

$$
\begin{aligned}
f''(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)] = 2g(a)
\end{aligned}
$$

4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

4.1 隐函数的导数

显函数与隐函数

- 显函数：由$y=f(x)$直接确定的函数关系。
- 隐函数：由$F(x,y)=0$所确定的函数$y=y(x)$称为隐函数。

$$F(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x) \qquad \text{隐函数的显化}$$

问题. 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

解法. 将y看成x的函数，方程两边同时对x求导。

隐函数求导

例子. 求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

解答. 方程两边对x求导,

$$y+x\frac{dy}{dx}-e^x+e^y\frac{dy}{dx}=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x - y}{x + e^y},$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{y=0} = 1.$$

隐函数求导

例子. 设曲线C的方程为 $x^3 + y^3 = 3xy$, 求过 C 上点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 的切线方程, 并证明曲线C在该点的法线通过原点.

隐函数求导

解答. 方程两边对x求导得

$$3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$$

故

$$y'|_{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)} = \left.\frac{y - x^2}{y^2 - x}\right|_{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)} = -1$$

所求切线方程为

$$y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

即 $x + y - 3 = 0$. 法线方程为 $y - \frac{3}{2} = x - \frac{3}{2}$, 即 $y = x$, 显然通过原点.

隐函数求导

例子. 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求 y'' 在点$(0, 1)$ 处的值 .

解答. 方程两边对x求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3 y' = 0 \qquad (1)$$

代入 $x=0, y=1$ 得 $y'|_{(0,1)} = \frac{1}{4}$. 将方程*(1)*两边再对$x$求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2 (y')^2 + 4y^3 y'' = 0$$

代入 $x=0, y=1, y'|_{(0,1)} = \frac{1}{4}$ 得

$$y''|_{(0,1)} = -\frac{1}{16}.$$

隐函数求导

练习 1. 求由方程确定的隐函数的导数y'_x:

(1) $\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x - 3x + 4y^2 = 0$;

(2) $x^3 y + 2x^2 y^2 + 4 = 0$。

对数求导法✻

对于多个函数相乘除或者幂指数函数$(u(x))^{v(x)}$的情形，可以先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例子. 设 $y = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$, 求 y'

对数求导法

解答. 等式两边取对数得

$$\ln y = \ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-1) - 2\ln(x+4) - x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1,$$

因此

$$y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right].$$

对数求导法

例子. 设 $y=x^{\sin x}(x>0)$, 求 y'.

解答. 从而等式两边取对数得 $\ln y=\sin x\cdot\ln x$. 上式两边对 x 求导得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

从而

$$\begin{aligned}y'&=y\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)\\&=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)\end{aligned}$$

对数求导法

一般地, 对于函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0)$, 因为

$$\ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x),$$

并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

所以

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x),$$

从而

$$f'(x)=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right].$$

4.2 由参数方程所确定的函数的导数

由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与x间的函数关系，称此为由参数方程所确定的函数.

例子. 参数方程$\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2, \end{cases}$ 消去参数 t 可得

$$y=t^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}.$$

显然， $y'=\frac{1}{2}x$

由参数方程所确定的函数的导数

问题. 消参困难或无法消参如何求导?

在方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 设函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 则

$$y=\psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$$

再设函数 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi(t)\neq 0$, 由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

由参数方程所确定的函数的导数

若函数 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 二阶可导，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

由参数方程所确定的函数的导数

例子. 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程 .

解答. 由条件可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{a\sin t}{a-a\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1.$$

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时, $x=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, $y=a$, 故所求切线方程为

$$y-a=x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),\quad 即\quad y=x+a\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$$

由参数方程所确定的函数的导数

例子. 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解答. 由条件可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$
$$= \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

4.3 小结 思考

小结

- 隐函数求导法则: 直接对方程两边求导;
- 对数求导法: 对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;
- 参数方程求导: 实质上是利用复合函数求导法则;

思考

思考. 设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, 由 $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ $(\varphi'(t) \neq 0)$ 可知 $y''_x = \dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$, 对吗?

解答. 不对.

$$y''_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'_x\right) = \frac{\mathrm{d}y'_x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

5 函数的微分

5.1 微分的定义

函数的改变量

例子. 一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$. 求此薄片面积的改变量 Δy.

解答. 正方形面积为 $y=f(x)=x^2$. 则面积改变量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

比如，当 $x_0=1$, $\Delta x=0.1$ 时，

$$\Delta y=2\cdot 1\cdot 0.1+0.1^2=0.2+0.01.$$

注记. 若 Δx 很小，则 $2x_0\Delta x$ 远比 $(\Delta x)^2$ 大。因此

$$\boxed{\Delta y\approx 2x_0\Delta x} \quad \text{即} \quad \boxed{\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x}$$

微分的定义

定义. 对于自变量在点x_0处的改变量Δx，如果函数$y=f(x)$的相应改变量Δy可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x) \qquad (\Delta x\to 0)$$

其中A与Δx无关，则称$y=f(x)$在点x_0处可微，并称$A\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x_0处(相应于自变量增量Δx)的微分，记为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \text{ 或 } \mathrm{d}f(x_0),$$

即

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

注记. 微分dy叫做函数增量Δy的线性主部.

微分的定义

由定义知：

(1) dy 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;

(2) $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶无穷小;

(3) 当 $A \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0),$$

即dy 与 Δy 是等价无穷小;

(4) A 是与 Δx 无关的常数,但与 $f(x)$ 和 x_0 有关;

(5) 当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ (线性主部).

可微的条件

定理. $y = f(x)$在点x_0处可微 $\Longleftrightarrow$ $y = f(x)$在点x_0处可导，且$A = f'(x_0)$.

证明. (1) 必要性: 由$f(x)$ 在点 x_0 可微可得

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

于是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$$

即函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且$A = f'(x_0)$.

可微的条件

续. (2) 充分性：因为函数$f(x)$ 在点 x_0 可导，因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

其中$\alpha\to 0\quad(\Delta x\to 0)$, 从而

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot(\Delta x)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x).$$

由可微的定义可知函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，且 $A=f'(x_0)$.

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$, 即 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$.

导数与微分的区别

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数是一个定数 $f'(x_0)$, 而微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)(x-x_0)$ 是 $x-x_0$ 的线性函数,它的定义域是R. 注意到

$$\lim_{x\to x_0}\mathrm{d}y=\lim_{x\to x_0}f'(x_0)(x-x_0)=0,$$

因此, $\mathrm{d}y$是当$x\to x_0$时的无穷小.

2. 从几何意义上来看, $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率,而微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)(x-x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量.

微分的计算

例子. 求$y=x^2$当$x=2$，$\Delta x=0.01$时的微分.

解答. $\mathrm{d}y = (x^2)'\,\Delta x = 2x\Delta x$，所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}} = 2\times 2\times 0.01 = 0.04.$$

通常把自变量x的增量 Δx 称为自变量的微分记作 $\mathrm{d}x$, 即 $\mathrm{d}x = \Delta x$. 于是我们有

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

即函数的微分$\mathrm{d}y$与自变量的微分$\mathrm{d}x$之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".

微分的计算

练习 **1.** 求微分：*(1)* $y = x\mathrm{e}^x$；*(2)* $y = \sin(3x+2)$.

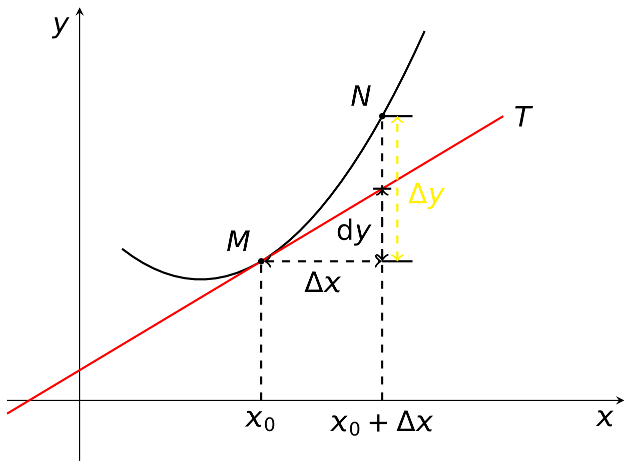
解答. *(1)* $\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x = (x\mathrm{e}^x)'_x\,\mathrm{d}x = (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

(2) $\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x = \big(\sin(3x+2)\big)'_x\,\mathrm{d}x$.

$$= 3\cos(3x+2)\,\mathrm{d}x$$

5.2 微分的几何意义

微分的几何意义



当Δx很小时，切线纵坐标对应的增量dy可以近似替代曲线纵坐标对应的增量Δy.

5.3 基本初等函数的微分公式与微分运算法则

基本初等函数的微分公式与微分运算法则

由$dy=f'(x)dx$可知，要计算函数的微分，只需计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1.基本初等函数的微分公式

$d(C)=0$	$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx$
$d(\sin x)=\cos x dx$	$d(\cos x)=-\sin x dx$
$d(\tan x)=\sec^2 x dx$	$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$
$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$	$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$

基本初等函数的微分公式

$$\begin{array}{ll}
d(a^x)=a^x\ln a dx & d(e^x)=e^x dx \\
d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx & d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx \\
d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx & d(\mathrm{arccot}\, x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx
\end{array}$$

微分运算法则

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$\begin{array}{ll}
d(u\pm v)=du\pm dv & d(Cu)=Cdu \\
d(uv)=vdu+udv & d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}
\end{array}$$

微分的形式不变性

- 若$y=f(u)$，则有$dy=f'(u)\,du$；
- 若$y=f(u), u=g(x)$，则仍有$dy=f'(u)\,du$。

例子. $[\sin x]'=\cos x$，但是 $[\sin 2x]'\neq\cos 2x$.

$$d(\sin x)=\cos x\,dx\Longrightarrow d(\sin 2x)=\cos 2x\,d(2x).$$

求微分举例

例子. 设 $y=\ln\left(x+e^{x^2}\right)$, 求 dy.

解答. $\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$, $\quad\therefore \mathrm{d}y=\dfrac{1+2x\mathrm{e}^{x^2}}{x+\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x$

例子. 设 $y=\mathrm{e}^{1-3x}\cos x$, 求 $\mathrm{d}y$.

解答. 易知$\mathrm{d}y=\cos x\cdot\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{1-3x}\right)+\mathrm{e}^{1-3x}\cdot\mathrm{d}(\cos x)$. 因为

$$\left(\mathrm{e}^{1-3x}\right)'=-3\mathrm{e}^{1-3x},\ (\cos x)'=-\sin x$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\cos x\cdot\left(-3\mathrm{e}^{1-3x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{1-3x}\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{1-3x}(3\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

求微分举例

例子. 设 $y=\sin(2x+1)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解答. $\because y=\sin u, u=2x+1.$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{d}y&=\cos u\,\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\,\mathrm{d}(2x+1)\\&=\cos(2x+1)\cdot 2\,\mathrm{d}x=2\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例子. 设 $y=\mathrm{e}^{-ax}\sin bx$, 求 $\mathrm{d}y$.

解答.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos bx\,\mathrm{d}(bx)+\sin bx\cdot\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}(-ax)\\&=\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos bx\cdot b\,\mathrm{d}x+\sin bx\cdot\mathrm{e}^{-ax}\cdot(-a)\,\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

求微分举例

例子. 在下列等式左端的括号中填入适当的函数,使等式成立. (1) $\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t$ $\quad$ (2) $\mathrm{d}\left(\sin x^2\right)=(\quad)\,\mathrm{d}(\sqrt{x})$

解答. *(1)* 因为$\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\,\mathrm{d}t$, 所以

$$\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

从而 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t$ *(2)* $\because \dfrac{\mathrm{d}\left(\sin x^2\right)}{\mathrm{d}(\sqrt{x})}=\dfrac{2x\cos x^2\,\mathrm{d}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x}=4x\sqrt{x}\cos x^2$ $\therefore \mathrm{d}\left(\sin x^2\right)=\left(4x\sqrt{x}\cos x^2\right)\mathrm{d}(\sqrt{x})$

5.4 微分在近似计算中的应用

微分在近似计算中的应用

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小时,

$$\Delta y\big|_{x=x_0}\approx \mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

1. 求 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 附近的近似值　由$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$ 得:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

2.求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 附近的近似值

令 $x_0=0, \Delta x=x.$　$\because f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

$$\therefore f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$$

微分在近似计算中的应用

例子. 计算$\cos 60°30'$ 的近似值 .

解答. 设 $f(x)=\cos x$, 则 $f'(x)=-\sin x$, *(x 为弧度).*

$$\cos 60°30'=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360}\right)\approx\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.4924$$

微分在近似计算中的应用

例子. 半径10厘米的金属圆片加热后,半径伸长了 0.05厘米,问面积增大了多少？

解答. 设 $A=\pi r^2, r=10$ 厘米, $\Delta r=0.05$ 厘米. 则

$$\Delta A \approx dA = 2\pi r \cdot \Delta r = 2\pi \times 10 \times 0.05 = \pi(\text{厘米}^2).$$

常用近似公式

当 $|x|$ 很小时, 有

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\dfrac{1}{n}x$;
(2) $\sin x \approx x$ (x 为弧度);
(3) $\tan x \approx x$ (x 为弧度);
(4) $e^x \approx 1+x$
(5) $\ln(1+x) \approx x$

微分在近似计算中的应用

例子. 计算下列各数的近似值, (1) $\sqrt[3]{998.5}$ (2) $e^{-0.03}$.

解答. *(1)* $\sqrt[3]{998.5} = \sqrt[3]{1000-1.5}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{1000\left(1-\tfrac{1.5}{1000}\right)} = 10\sqrt[3]{1-0.0015} \\ &\approx 10\left(1-\tfrac{1}{3}\times 0.0015\right) = 9.995 \end{aligned}$$

(2) $e^{-0.03} \approx 1-0.03 = 0.97.$

5.5 小结 思考题

小结

微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \Longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \Longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

求导数与微分的方法,叫做微分法. 研究微分法与导数理论及其应用的科学,叫做微分学.

导数与微分的联系:可导$\Longleftrightarrow$可微.

小结

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小时,

$$\Delta y|_{x=x_0} \approx \mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

1. $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 附近的近似值为:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

2.$f(x)$ 在点 $x=0$ 附近的近似值为:

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$$

思考题

思考. *某家有一机械挂钟, 钟摆的周期为1秒. 在冬季, 摆长缩短了0.01厘米, 这只钟每天大约快多少?*

(单摆的周期公式为: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l为摆长, 单位: cm, g 取 980 cm/s^2.)

解答. 由 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 可得 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l} = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}$. 当 $|\Delta l| << l$ 时,

$$\Delta T \approx \mathrm{d}T = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l.$$

思考题

解答 (续). 据题设, 摆的周期是1秒, 由此可知摆的原长为 $\frac{g}{(2\pi)^2}$ (cm). 现摆长的改变量 $\Delta l = -0.01$ cm, 于是周期的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta T \approx \mathrm{d}T &= \frac{\pi}{\sqrt{g \cdot \frac{g}{(2\pi)^2}}} \times (-0.01) \\ &= \frac{2\pi^2}{g} \times (-0.01) \approx -0.0002(s)\end{aligned}$$

也就是说, 由于摆长缩短了0.01cm, 钟摆的周期便相应缩短了大约0.0002秒, 即每秒约快0.0002 秒, 从而每天约快 $0.0002 \times 24 \times 60 \times 60 = 17.289(s)$.

6 边际与弹性

6.1 边际的概念

边际的概念

定义. 设函数 $y = f(x)$ 在 x 处可导, 则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数. $f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为边际函数值.

当 $x = x_0$ 时， x 改变一个单位， y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

例子. 设函数 $y = 2x^2$, 试求 y 在 $x = 5$ 时的边际函数值.

解答. 因为 $y' = 4x$, 所以 $y'|_{x=5} = 20$.

该值表明: 当 $x = 5$ 时， x 改变 *1* 个单位 *(*增加或减少 *1* 个单位*)*， y 改变 *20* 个单位（增加或减少 *20* 个单位*)*.

6.2 经济学中常见的边际函数

经济学中常见的边际函数

1. 边际成本
2. 边际收益
3. 边际利润

边际成本

1. 边际成本：总成本函数 $C(Q)$的导数，记为$MC(Q) = C'(Q)$。

边际成本的含义：假定已经生产了Q件产品, 再生产一件产品所增加的成本.

注记. 当边际成本小于平均成本$\frac{C(Q)}{Q}$时，应增加产量，反之，应减小产量。

边际成本

例子. 设某产品生产 Q 单位的总成本为

$$C(Q)=1100+\frac{Q^2}{1200}$$

求：

(1) 生产 900 个单位的总成本和平均成本;

(2) 生产 900 个单位到 1000 个单位时的总成本的平均变化率；

(3) 生产 900 个单位的边际成本，并解释其给济意义.

解答. *(1)生产900个单位时的总成本为*

$$C(Q)|_{Q=900}=1100+\frac{900^2}{1200}=1775$$

边际成本

解答 (续)**.** 平均成本为

$$\overline{C}(Q)\Big|_{Q=900}=\frac{1775}{900}=1.99.$$

(2) 生产900个单位到1000个单位时总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}=\frac{C(1000)-C(900)}{1000-900}=\frac{1993-1775}{100}=1.58.$$

(3)边际成本函数

$$C'(Q)=\frac{2Q}{1200}=\frac{Q}{600},$$

当 $Q=900$ 时的边际成本为 $C'(Q)|_{Q=900}=1.5.$

边际收益

2. 边际收益：总收益函数$R(Q)$的导数, 记为$MR(Q)=R'(Q)$。

假定已经销售了Q件产品, 再销售一个件产品所增加的总收益.

注记. 若价格P为Q的函数，则

$$R(Q)=P(Q)Q \Longrightarrow R'(Q)=P(Q)+QP'(Q).$$

边际收益

例子. 设某产品的需求函数为 $P=20-\dfrac{Q}{5}$, 其中 P 为价格， Q 为销售量，求销售量为15个单位时的总收益，平均收益与边际收益。并求销售量从15个单位增加到20个单位时收益的平均变化率。

解答. 总收益为

$$R=QP(Q)=20Q-\frac{Q^2}{5}.$$

销售15个单位时总收益为

$$R|_{Q=15}=\left(20Q-\frac{Q^2}{5}\right)\bigg|_{Q=15}=255.$$

边际收益

解答 (续). 平均收益为

$$R\ |_{Q=15}=\left.\frac{R(Q)}{Q}\right|_{o=15}=\frac{255}{15}=17.$$

边际收益为

$$R(Q)|_{Q-15}=\left(20-\frac{2}{5}Q\right)\bigg|_{Q=15}=14.$$

当销售量从15个单位增加到20个单位时收益的平均变化率为

$$\frac{\Delta R}{\Delta Q}=\frac{R(20)-R(15)}{20-15}=\frac{320-255}{5}=13.$$

边际利润

3. 边际利润：总利润函数$L(Q)$的导数.

若已生产了Q件产品, 再生产一件产品增加的总利润.

注记. $L(Q)=R(Q)-C(Q)\Longrightarrow L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$.

$$R'(Q)\begin{cases}>C'(Q)\\=C'(Q)\\<C'(Q)\end{cases}\quad \text{时，}\quad L'(Q)\begin{cases}>0\\=0\\<0\end{cases}$$

边际收益大于边际成本时，边际利润增加；反之，边际利润减小.

边际利润

例子. 某工厂对其产品的销售情况进行大量统计后分析后，得出总利润$L(Q)$ (元) 与每月产量 Q (吨)的关系为 $L=L(Q)=250Q-5Q^2$, 试确定每月生产 20 吨，25 吨，35 吨的边际利润，并做出经济解释.

解答. 边际利润为 $L'(Q)=250-10Q$, 则

$$\begin{aligned}L'(Q)|_{Q=20}&=L'(20)=50,\\L'(Q)|_{Q=25}&=L'(25)=0,\\L'(Q)|_{Q=35}&=L'(35)=-100.\end{aligned}$$

上述结果表明当生产量为每月20吨时，再增加一吨，利润将增加50元，当产量为每月25吨时，再增加一吨，利润不变；当产量为35吨时，再增加一吨，利润将减少100. 此处说明，对厂家来说，并非生产的产品越多，利润越高.

6.3 弹性的概念

弹性概念

例子. 函数 $y=x^2$, 当x 从8到10时, 相应的y从64 增加到100，即自变量x的绝对增量 $\Delta x=2$, 函数 y 绝对增量 $\Delta y=36$ 又

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{2}{8}=25\%, \quad \frac{\Delta y}{y}=\frac{36}{64}=56.25$$

即当 $x=8$ 增加到 $x=1$ 时， x 增加了 25%时, y 也相应的增加了56.25%。这里 $\frac{\Delta x}{x}$, $\frac{\Delta y}{y}$为自变量和函数的相对改变量(或相对增量).

弹性概念

在本例中，再引入以下公式

$$\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}=\frac{56.25\%}{25\%}=2.25.$$

该式表示在开区间 $(8,10)$ 内, 从 $x=8$ 时起, x 每增加1%, 则相应的 y 便平均改变2.25%, 这里称之为 $x=8$ 增加到 $x=10$ 时，函数 $y=x^2$ 的平均相对变化率.

于是又有以下定义 .

弹性概念

定义. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $x_0\neq 0$, 称函数的相对改变量

$$\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$$

与自变量的相对改变量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 为函数从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 两点间的平均相对变化率，或称为 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 两点间的弹性或弧弹性.

点弹性

当 $\Delta x \to 0$ 时, 若$\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 的极限存在，则该极限称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的相对变化率，也就是相对导数，或称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的点弹性. 记作 $\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{E}{Ex}f(x_0)$ 即

$$\begin{aligned}\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x_0}{y_0}\\ &= f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}\end{aligned}$$

点弹性

当 x_0 为定值时, $\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 为定值，且当 $|\Delta x|$ 很小时,

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0} \approx \frac{\Delta y}{y_0}\Big/\frac{\Delta x}{x_0} \ (=\text{弧弹性}).$$

定义 (弹性函数的定义)**.** 一般地，若函数 $y=f(x)$ 在区间内 (a,b) 可导，且 $f(x)\neq 0$, 则称

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} = y'\cdot\frac{x}{y}$$

为函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的点弹性函数，简称弹性函数.

弹性的性质

函数的弹性 (点弹性或弧弹性) 与量纲无关, 函数 $f(x)$ 在点 x 处的弹性 $\frac{E}{Ex}f(x)$ 反映了 x 的变化幅度 $\dfrac{\Delta x}{x}$ 对 $f(x)$ 变化幅度 $\frac{\Delta y}{y}$ 的大小影响，也

就是 $f(x)$ 对 x 变化反应的强烈程度或灵敏度. 由弹性的定义可知:

$$\frac{Ey}{Ex} = y' \cdot \frac{x}{y} = \frac{y'}{\frac{y}{x}} = \left(\frac{\text{边际函数}}{\text{平均函数}}\right)$$

这样，弹性在经济学上又可理解为边际函数与平均函数之比.

弹性

例子. 求函数 $y = x^{\alpha}(\alpha$ 为常数 $)$ 的弹性函数.

解答. 直接计算得到所求的弹性函数为

$$\frac{Ex}{Ey} = \frac{y}{x}y' = \frac{x}{x^{\alpha}}(x^{\alpha})' = \frac{x}{x^{\alpha}}\alpha x^{\alpha-1} = \alpha$$

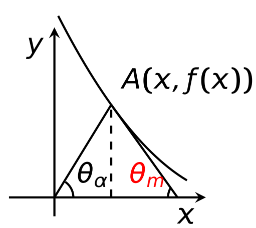
由此例知，幂函数的弹性函数为常数，因此称为不变弹性函数。

函数弹性的图解方法

边际函数 $y = f(x)$ 的几何意义为所示曲线上各点的切线斜率，即

$$\tan(\pi - \theta_m) = -\tan\theta_m.$$

又平均函数为 $\dfrac{f(x)}{x} = \tan\theta_\alpha$



因而 $\frac{Ey}{Ex}=-\frac{\tan\theta_m}{\tan\theta_\alpha}$. 若考虑弹性的绝对值, 则 $\left|\frac{Ey}{Ex}\right|=\frac{\tan\theta_m}{\tan\theta_\alpha}$. 如果我们知道了一条函数 $y=f(x)$ 所示的曲线，则在曲线上任一点 A 处对应的弹性，通过 A 作曲线 AB 的切线和线段 OA, 就可得夹角 θ_m 和 θ_α, 进而就可得 $\left|\frac{Ey}{Ex}\right|$.

6.4 经济学中常见的弹性函数

需求的价格弹性

当弹性定义中的 y 被定义为需求量时就是需求弹性. 所谓需求的价格弹性是指当价格变化一定的百分比以后引起的需求量的反应程度. 设需求函数 $Q_d=Q(P)$ 可导，则需求的价格弹性可用公式表示为

$$E_d=\frac{EQ}{EP}=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\cdot\frac{P}{Q}$$

而$\frac{\Delta Q}{Q}\Big/\frac{\Delta P}{P}$称为该商品在$P$与$P+\Delta P$ 两点间的需求价格弹性或弧弹性.

需求的价格弹性

例子. 某需求曲线为: $Q=-100P+3000$ ，求当 $P=20$ 时的弹性.

解答. $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-100$ 当 $P=20$ 时, $Q=1000$ 所以

$$E_d=-100\times\frac{20}{1000}=-2.$$

需求的价格弹性

一般来说，需求函数是价格的单调减函数，故需求函数的弧弹性为负值，从而当 $\Delta x \to 0$ 时，其极限值 E_d 总是小于或等于零，并且实际中一般取负值. 有时为讨论方便，将其取绝对值，也称之为需求的价格弹性，并记为 η, 即

$$\eta = \eta(P) = |E_d| = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

需求的价格弹性

$$\eta = \eta(P) = |E_d| = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

1. 若 $\eta = |E_d| = 1$ ，此时商品需求量变动的百分比与价格变动的百分比相等，称为单位弹性或单一弹性.
2. 若 $\eta = |E_d| < 1$ 即, 此时商品需求量变动的百分比低于价格变动的百分比，价格的变动对需求量的影响不大，称为缺之弹性或低弹性.
3. 若 $\eta = |E_d| > 1$, 此时商品需求量的变动的百分比高于价格变动的百分比，价格的变动对需求量的影响较大，称之为富于弹性或高弹性.

需求的价格弹性

例子. 设某产品的需求函数为 $Q = 100 - 2P, 0 \le P \le 50$ ，其中 P 为价格，Q为需求量.

(1) 当 $P = 10$ ，且价格上涨 1%时，需求量Q 是增加还是减少，变化百分之几?

(2) 讨论商品价格变化时，需求量变化的情况.

解答. *(1)* 由条件知

$$\eta(P) = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} = -\frac{P}{100-2P} \cdot (-2) = \frac{P}{50-P},$$

故 $\eta(10) = 0.25$. 由于 P 和 Q 是按相反方向变化的，在 $P = 10$ ，且价格上涨 *1%*时，需求量Q 减少 $\eta\% = 0.25\%$ *(*注意*:* 价格上涨*1%*，需求量减少 $\eta\%$ ，因此不能误认为减少 $0.25 = 25\%$ *).*

需求的价格弹性

解答 (续). *1.* 当 $0 < \eta < 1$, 即 $0 < \frac{P}{50-P} < 1$时, 即 $0 < P < 25$时, 价格上涨 *(*下降*) 1%*时，需求量减少 *(*增加 *)* $\eta\%$，小于价格上涨（下降）的百分比（因 $\eta < 1$ *);*

2. 当 $\eta = 1$, 即 $\frac{P}{50-P} = 1$, 得 $P = 25$, 这表明当 $P = 25$ 时, 需求量的变动与价格变动按相同的百分比进行*;*

3. 当 $\eta > 1$, 即 $\frac{P}{50-P} > 1$时，得 $P > 25$, 于是当 $25 < P < 50$ 且价格 P 上涨 *(*下降*)* 1% 时，需求量减少 *(* 增加*)* $\eta\%$ ，大于价格上涨（下降）的百分比（因 $\eta > 1$ *).*

需求弹性与总收益（市场销售总额）的关系

在市场经济中，商品经营者关心的是提价 $(\Delta P > 0)$ 或降价 $(\Delta P < 0)$ 对总收益的影响. 利用需求弹性的概念, 可以分析价格变动是如何影响销售收益的.

总收益 R 是商品价格 P 与销售量 Q的乘积 , 即

$$R = P \cdot Q = PQ(P)$$

边际总收益

$$R' = PQ'(P) + Q(P) = Q(P)\left[1 + Q'(P)\cdot\frac{P}{Q(P)}\right]$$
$$= Q(P)\left[1 - |E_d|\right] = Q(P)(1-\eta)$$

1. 若 $\eta < 1$ ，表示需求变动的幅度小于价格变动的幅度. 此时 $R' > 0$,即边际收益大于 0, 价格上涨，总收益增加; 价格下跌，总收益减少. 商品的价格和厂商的销售收入呈同方向变动.
2. 若 $\eta > 1$ ，表示需求变动的幅度大小于价格变动的枯度. 此时 $R' < 0$,即价格上涨，总收益减少; 价格下跌，总收益增加. 商品的价格和厂商的销售收入呈反方向变动.
3. 若 $\eta = 1$ ，表示需求变动的幅度等于价格变动的幅度。降低价格或提高价格对厂商销售收益都没有影响.

综上所述，总收益的变化受需求弹性的制约，随商品需求弹性的变化而变化.

供给弹性

定义. 供给弹性，通常指的是供给的价格弹性. 设供给函数 $Q_s = Q(P)$ 可导，则供给弹性

$$E_s = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \times \frac{P}{Q}$$

式中 E_s 为供给的价格弹性.

供给弹性

例子. 设某产品的供给函数为 $Q = 2e^P$, 求供给的价格弹性函数及当 $P = 1$ 时的供给的价格弹性.

解答. 供给的价格弹性函数为

$$E_s(P) = \frac{P}{2e^P}\left(2e^P\right)' = \frac{P}{2e^P}2e^P = P,$$

由此有当 $P = 1$ 时

$$E_s(P) = 1.$$

这表明当 $P = 1$ 时价格如果上涨 1%, 供给量也相应增加 1%.

供给弹性

例子. 某商品的供给函数 $Q = 2 + 3P$ 求供给弹性函数及当 $P = 3$ 时供给弹性。

解答. $\frac{dQ}{dP} = 3$, 故

$$E_s = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q} = \frac{3P}{2 + 3P}$$

当 $P = 3$时,

$$E_s = \frac{3 \times 3}{2 + 3 \times 3} = \frac{9}{11}$$

供给弹性

例子. 观察下列供纳函数: (a) $P = 3Q$, (b) $P = -2 + 5Q$; (c) $P = 3 + 4Q$ 试判断其供给弹性 E_s 大于，等于或小于 1.

收益弹性

$$\frac{ER}{EP} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} \times \frac{P}{R}, \quad \frac{ER}{EQ} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} \times \frac{Q}{R}$$

式中:

$\frac{ER}{EP}$ – 收益的价格弹性；

$\frac{ER}{EQ}$ – 收益的销售弹性.

收益弹性

例子. 设 P 、 Q 、 R 分别为商品价格，销售量，销售总收益，

(1) 试分别找出收益的价格弹性 $\frac{ER}{EP}$, 收益的销售弹性 $\frac{ER}{EQ}$ 与需求的价格弹性 η 的关系.

(2) 试分别解出关于价格 P 的边际收益 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$, 关于需求 Q 的边际收益 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$ 与需求价格弹性η的关系.

收益弹性

解答. *(1)* 设 $Q = f(P), \quad R = PQ$, 故

$$\begin{aligned}
\frac{ER}{EP} &= \frac{E(PQ)}{EP} = \frac{P}{PQ} \cdot \frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}P} = \frac{1}{Q}\left(Q + P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right) \\
&= 1 + \frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = 1 - \left(-\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right) = 1 - \eta, \\
\frac{ER}{EQ} &= \frac{E(PQ)}{EQ} = \frac{Q}{PQ} \cdot \frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}Q} = \frac{1}{P} \cdot \frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}Q} \\
&= \frac{1}{P}\left(P + Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}\right) = 1 - \left(\frac{1}{-\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}}\right) = 1 - \frac{1}{\eta}.
\end{aligned}$$

收益弹性

解答. *(2)*由*(1)*知 $\frac{ER}{EP}=1-\eta$, 故

$$\frac{ER}{EP}=\frac{P}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=\frac{P}{PQ}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=1-\eta,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-\eta)=f(P)(1-\eta).$$

又由*(1)* $\frac{ER}{EQ}=1-\frac{1}{\eta}$, 故

$$\frac{ER}{EQ}=\frac{Q}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\frac{Q}{PQ}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=1-\frac{1}{\eta},$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=P\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

收益弹性

例子. 假设某产品的需求函数 $P=100\sqrt{X}$ ，其中 X 为产量(假定等于需求量)，P为价格，求收益的价格弹性.

解答.

6.5 小结 思考

小结

- 边际的基本概念 边际函数的计算
    1. 边际成本
    2. 边际收益

3. 边际利润

4. 边际需求

- 弹性的基本概念　弹性函数的计算

1. 需求弹性

2. 供给弹性

3. 收益弹性

思考题

思考. 设某产品的需求函数为 $Q = Q(P)$, 收益函数为 $R = PQ, Q(P)$ 为单调减少函数. 如果当价格 P_0 时产量为 Q_0, 边际收益 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0} = a > 0$, 收益对价格的边际效应为 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0} = c < 0$, 需求对价格的弹性 $\eta = b > 1$, 求 P_0 与 Q_0

思考题

解答. 按照需求对价格的弹性定义，分别将 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}, \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$ 表示为

$$\eta = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$$

的函数得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}(PQ) = P + Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q} &= P - \left[\frac{P}{-\frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}}\right] \\ &= P\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = P\left(1 - \frac{1}{b}\right),\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0} = \left.P\left(1 - \frac{1}{b}\right)\right|_{Q=Q_0} = p_0\left(1 - \frac{1}{b}\right) = a.$$

思考题

解答 (续). 故 $P_0=\dfrac{ab}{b-1}$, 又

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q-\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(-Q)=Q(1-\eta)$$
$$=Q(1-b),$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0}=Q(1-b)|_{p=p_0}=Q_0(1-b)=c.$$

故 $Q_0=\frac{c}{1-b}$.

Part IV

第四章

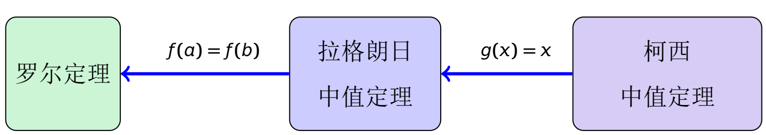
1 微分中值定理

微分中值定理

本节主要内容:

1. 罗尔定理
2. 拉格朗日中值定理
3. 柯西中值定理

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系:



1.1 罗尔定理

费马引理

费马引理　设$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，且$\forall x \in U(x_0)$有$f(x) \le f(x_0)$（或$f(x) \ge f(x_0)$）．如果$f(x)$在x_0处可导．则有$f'(x_0)=0$.

证明：　不妨设$f(x_0)$为极大值，则

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0,$$

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

于是，我们有

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0.$$

罗尔定理

定理 (罗尔定理)**.** 如果函数$f(x)$满足条件：

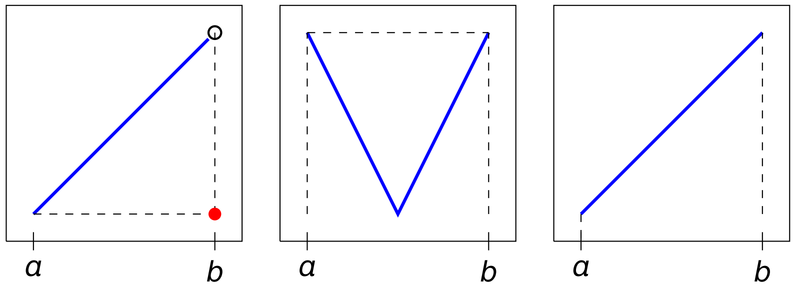
(1) 在闭区间$[a,b]$上连续，

(2) 在开区间(a,b)上可导，

(3) 在端点处$f(a)=f(b)$，

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

导数为零的点称为函数的驻点或稳定点。



(a) 缺条件1 (b) 缺条件2 (c) 缺条件3

罗尔定理

证明：因为$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，所以$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值，分别记为M、m. (1) 若$M=m$，则$f(x)$在$[a,b]$上为常数，显然结论成立. (2) 若$M>m$, 因为$f(a)=f(b)$，所以M或m至少有一个在(a,b)内的一点$x=\xi$处取得，因此ξ是f的一个极值点. 又$f(x)$在(a,b)内可导，由费马引理可得 $f'(\xi)=0$

如果定理的三个条件有一个不满足，则结论可能不成立.

罗尔定理

如果定理的三个条件有一个不满足，则结论可能不成立.

罗尔定理

例子. 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1的正实根.

证明. 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在$[0,1]$连续, 且 $f(0)=1, f(1)=-3$. 由介值定理存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$. 即x_0为方程在$(0,1)$上的根。

设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$.

易知$f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件, 因此在x_0和x_1之间至少存在一个 ξ 使得 $f'(\xi)=0$.但

$$f'(x)=5\left(x^4-1\right)<0,(x\in(0,1))$$

矛盾, 故x_0为$(0,1)$上的唯一实根.

罗尔定理

练习. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，而且$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2\xi$.

1.2 拉格朗日定理

拉格朗日中值定理

定理 (拉格朗日中值定理)**.** 如果函数$f(x)$满足下列条件:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续,

(2) 在开区间(a,b)内可导,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理

证明： 令$F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 则 $f(x)$满足：

1. $F(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,
2. $F(x)$在开区间(a,b)内可导,
3. $F(a)=F(b)=0$.

由罗尔定理可得，$\exists\ \xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

拉格朗日中值定理

几点说明：

1. 当$f(a)=f(b)$时, 拉格朗日中值定理即为罗尔定理.
2. 拉格朗日中值定理的两个条件是使结论成立的充分不必要条件.
3. 拉格朗日中值定理的结论可以改写为:$\exists\ \xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\qquad \text{(拉格朗日中值公式)}$$

拉格朗日中值公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

拉格朗日中值定理

例子. 对函数$f(x)=x^3$在区间$[0,1]$上验证拉格朗日定理.

练习 **1.** 对$f(x)=x^3+x$在区间$[-1,1]$上验证拉格朗日定理.

拉格朗日中值定理

例子. 证明当$x_2 > x_1$时不等式成立：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

练习 2. 证明：当$x_2 > x_1$时有

$$\sin x_2 - \sin x_1 \le x_2 - x_1.$$

拉格朗日中值定理

Corollary 1. *如果函数$f(x)$在区间I上的导数恒为0，那么$f(x)$在区间I上是一个常数.*

证明. 设 x_1, x_2 为 I 内任意两点 $(x_1 < x_2)$. 在 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理,有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

因为 $f'(x) = 0$, 所以 $f'(\xi) = 0$, 从而

$$f(x_2) - f(x_1) = 0, \qquad \text{即 } f(x_2) = f(x_1)$$

由于任意两点的函数值相等,必有

$$f(x) = C$$

柯西中值定理

定理 (柯西中值定理)**.** *如果函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：*

(1) 在闭区间$[a, b]$上都连续，

(2) 在开区间(a,b)内都可导,

(3) 在开区间(a,b)内$g'(x)\neq 0$,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

注：拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情况。

1.3 柯西中值定理

柯西中值定理

证明. 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)],$$

易知$\varphi(x)$ 满足罗尔定理的条件, 所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\varphi'(\xi)=0$.

所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\varphi'(\xi)=0$. 即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)=0,$$

所以

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例子. 对函数$f(x)=x^3$和$g(x)=x^2+1$在区间$[1,2]$上验证柯西定理.

柯西中值定理

例子. 设函数 $f(x)$ 在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

解答. 分析: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}.$$

设 $g(x)=x^2$, 则 $f(x), g(x)$ 在[0,1]上满足柯西中值定理的条件, 所以在(0,1)内至少存在一点,有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}\quad \text{即}\quad f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

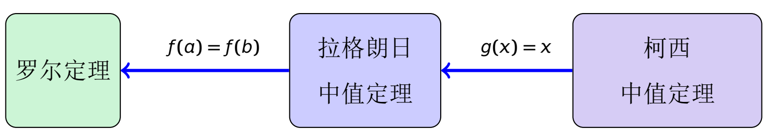
1.4 小结

小结

本节主要内容:

1. 罗尔定理
2. 拉格朗日中值定理
3. 柯西中值定理

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系:



2 洛必达法则

洛必达法则

在一定条件下，我们有下面的洛必达法则：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

未定式

未定式是指如果当$x \to x_0$(或者$\to \infty$)时，两个函数$f(x)$与$g(x)$都趋于零或者趋于无穷大，那么极限$\lim[f(x)/g(x)]$ ($x \to x_0$或者$x \to \infty$) 可能存在，也可能不存在，通常把这种极限称为未定式，也称未定型。

1. $\frac{0}{0}$型
2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型
3. $0 \cdot \infty$和 $\infty - \infty$ 型
4. 0^0、1^∞和∞^0型

2.1 $\frac{0}{0}$型的洛必达法则

$\frac{0}{0}$型的洛必达法则

定理. 如果

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0;$

(2) $f(x)$,$g(x)$在点a的某去心邻域可导, 且$g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A($ 或为 $\infty)$.

那么 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A($ 或 $\infty)$.

这种用导数商的极限计算函数商的极限的方法称为洛必达法则.

$\frac{0}{0}$型的洛必达法则

几点注意事项：

1. $x\to a$ 改为$x\to\infty$ 仍然成立。
2. 只能对未定式使用洛必达法则，否则讲会出现错误。
3. 如$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍为未定式，在满足条件的前提下，可以继续对 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$使用洛必达法则。

$\frac{0}{0}$型的洛必达法则

证明. 补充定义$f(a)=g(a)=0$不会影响极限，从而$f(x)$,$g(x)$在以a和x为端点的闭区间上满足柯西中值定理的条件,因此有

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f(x)}{g(x)}\quad(\xi\text{在}a\text{与}x\text{之间})$$

显然当 $x\to a$ 时 , $\xi\to a$, 对上式取极限,有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

从而定理得证.

$\frac{0}{0}$型的洛必达法则

例子. 求极限$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$. **例子.** 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}$. **例子.** 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2-x}$. **例子.** 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. **例子.** 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}$.

练习 1. 用洛必达法则求函数极限.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

(2) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

两种方法比较

注记 1. 对于$x\to 0$时的$\frac{0}{0}$型极限，现在我们有两种方法可以使用：

(1) 等价无穷小量代换

(2) 洛必达法则

一般地，方法*(1)*应该优先使用，因为方法*(2)*可能变得复杂.

两种方法比较

例子. 求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin(x^3)}$

两种方法比较

练习 **2.** 求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$

2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型的洛必达法则

$\frac{\infty}{\infty}$型的洛必达法则

定理. 如果

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

(2) $f(x), g(x)$ 在点 a 的某去心邻域内可导,且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A($ 或 $\infty)$。

那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

在上述定理中， $x\to a$改为$x\to\infty$ 仍然成立.

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+4}$. **例子.** 求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$（$n>0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

练习 3. 求函数极限： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$

思考. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

注记 2. 洛必达法则未必总是有效．例如：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ *(2)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

2.3 $0\cdot\infty$型和$\infty-\infty$型的未定式

$0\cdot\infty$型和$\infty-\infty$型的未定式

对于$0\cdot\infty$型和$\infty-\infty$型的未定式，我们可以将它们变换为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式，然后使用洛必达法则．**例子.** 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

练习 4. 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x$ *(2)* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

2.4 1^∞型，0^0型和∞^0型的未定式

1^∞型，0^0型和∞^0型的未定式

对于1^∞型，0^0型和∞^0型的未定式，我们可以将它们变换为$0\cdot\infty$型未定式，进而化为$\frac{0}{0}$ 型或$\frac{\infty}{\infty}$型，然后使用洛必达法则.

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

例子. 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$

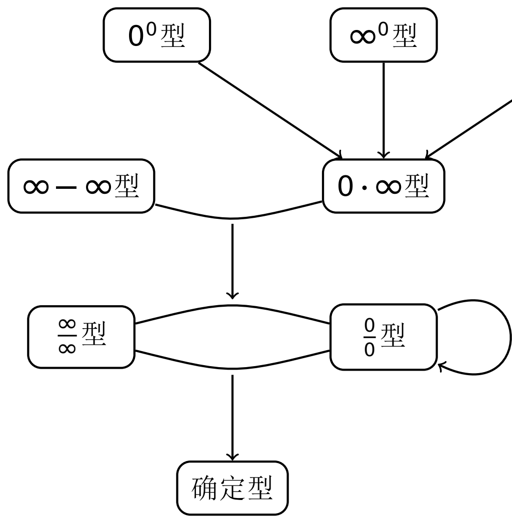
练习 5. 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

小结



3 导数的应用

3.1 函数的单调性

函数的单调性

定理. 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，那么

(1) 如果在(a,b)上恒有$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

(2) 如果在(a,b)上恒有$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

证明：由拉格朗日中值定理易证。

若$f'(x)\geq 0(\leq 0)$ 在(a,b)上成立，且等号仅在仅在个别点成立，则$f(x)$在$[a,b]$上单调增加(减少)

单调区间及其求法

定义. 若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

单调区间的求法

利用导数等于零的点和不可导点，划分出区间，然后判断各区间内导数的符号.

单调区间

例子. 确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x)=x^3-3x$　　　(2) $f(x)=x^3$

练习 1. 确定下列函数的单调增减区间.

(1) $y=3x^2+6x+5$　　　*(2)* $y=x-e^x$

函数的单调性

例子. 证明函数$y=x-\ln(1+x^2)$单调增加.

练习 2. 证明函数$y=\sin x-x$单调减少.

利用单调性证明不等式

思路：构造函数，使$f(x)>(\geq)f(a)$,或者 $f(x)<(\leq)f(a)$.

例子. 证明当$x>0$时有不等式$e^x>1+x$.

练习 3. 证明当$x>1$时有$3-\dfrac{1}{x}<2\sqrt{x}$.

函数的单调性

选择. 设在$[0,1]$上$f''(x)>0$, 则$f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或$f(0)-f(1)$的大小顺序是 .... ( )

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

答案 B

提示：利用$f''(x)>0$得到$f'(x)$单调增加.

再用中值定理得到$f(1)-f(0)=f'(\xi)$，$0<\xi<1$.

3.2 函数的极值

函数极值的定义

定义. 设$f(x)$在点x_0的某个邻域有定义.

(1) 若对x_0某个去心邻域的任何x，总有$f(x)<f(x_0)$，则称x_0为$f(x)$的一个极大值点，$f(x_0)$为$f(x)$ 的一个极大值.

(2) 若对x_0某个去心邻域的任何x，总有$f(x)>f(x_0)$，则称x_0为$f(x)$的一个极小值点，$f(x_0)$为$f(x)$ 的一个极小值.

极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

极值的必要条件

定理 (极值的必要条件)**.** 设$f(x)$在x_0点可导，而且在x_0处取得极值，则$f'(x_0) = 0$.

注记. 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如$y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如$y = |x|$.
- 可导函数的极值点一定是驻点。

判别极值的第一充分条件

定理 (极值的第一充分条件)**.** 设$f(x)$在x_0点连续,而且在它的某个去心邻域内可导.

(1) 若在x_0的左邻域内$f'(x) > 0$，在右邻域内$f'(x) < 0$，则x_0为极大值点.

(2) 若在x_0的左邻域内$f'(x) < 0$，在右邻域内$f'(x) > 0$，则x_0为极小值点.

(3) 若在x_0的左邻域内和右邻域内$f'(x)$的符号不变，则x_0不是极值点.

证明： 由单调性易得。

判别极值的第一充分条件

例子. 求出函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的极值.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,\infty)$
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗	极大值	↘	极小值	↗

解答. 易知:

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3),$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3.$

列表讨论

故极大值 $f(-1)=10$, 极小值 $f(3)=-22.$

判别极值的第一充分条件

练习 4. 求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$

注意：函数的不可导点也可能是极值点，如$y=1-(x-2)^{2/3}$在$x=2$处取得极大值.

判别极值的第二充分条件

定理.判别极值的第二充分条件 设$f'(x_0)=0$而且$f''(x_0)$存在。

(1) 若$f''(x_0)>0$，则x_0为$f(x)$的极小值点。

(2) 若$f''(x_0)<0$，则x_0为$f(x)$的极大值点。

证明：由二阶导数的定义，易推出极值的第一充分条件。

注记 1. 当$f''(x_0)=0$时，上面的定理无法判定。例如$f(x)=x^3$和$f(x)=x^4$。

判别极值的第二充分条件

例子. 求出函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解答. 易知,

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2),$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-4, x_2=2$.

又$f(x)$的二阶导数为$f''(x)=6x+6$,

1. 因为 $f''(-4)=-18<0$, 所以极大值为 $f(-4)=60$.
2. 因为 $f''(2)=18>0$, 所以极小值 $f(2)=-48$.

判别极值的第二充分条件

练习 5. 用判别极值的第二充分条件求求函数的极值:

$$y=x^3-3x^2-9x-5$$

函数的极值

求函数极值的一般步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 找出驻点（即方程 $f'(x)=0$ 的根）和不可导点;

(3) 判断:

- 驻点 $\left\langle \begin{array}{ll} f''(x_0)\neq 0 & \text{第一或第二充分条件} \\ f''(x_0)=0 & \text{第一充分条件} \end{array} \right.$

- 不可导点：第一充分条件；

(4) 结论.

注意格式: 极大(小)值为$f(x_0)=a$ 或极大(小)值点为$x=x_0$.

函数的极值

选择. 设函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点$a$处*()*

(A) $f(x)$的导数存在，且$f'(a)\neq 0$

(B) $f(x)$的导数不存在

(C) $f(x)$取得极大值

(D) $f(x)$取得极小值

答案 C

3.3 曲线的凹凸性与拐点

曲线的凹凸性

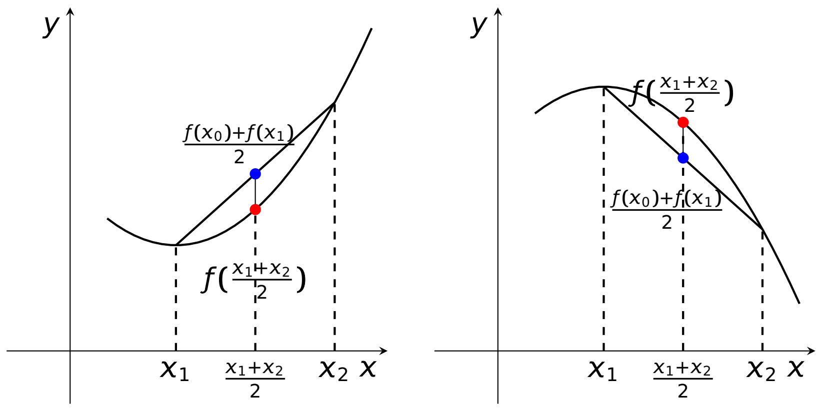
定义. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续,如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 *(* 或凹弧*)*; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 *(* 或凸弧 *)*.



(a) 凹函数 (b) 凸函数

曲线的凹凸性

凹凸性的判别法

定理. 假设函数$f(x)$在(a, b)上有二阶导数，那么

(1) 如果$x \in (a, b)$时，恒有$f''(x) > 0$，则函数的曲线在(a, b)上是凹的。

(2) 如果$x \in (a, b)$时，恒有$f''(x) < 0$，则函数的曲线在(a, b)上是凸的。

证明：略去

函数的凹凸性

例子. 判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解答. 易知

$$y' = 3x^2, \quad y'' = 6x,$$

(1) 当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在$(-\infty, 0]$为凸的;

(2) 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在$[0, +\infty)$为凹的.

注意到, 点(0,0)是曲线由凸变凹的分界点.

拐点

定义. 曲线凹和凸的分界点(x_0, y_0)称为拐点。

性质. 在拐点(x_0, y_0)处，要么$f''(x_0) = 0$，要么$f''(x_0)$不存在。

性质. 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

. . . .

例子. 求曲线$y = \sqrt[3]{x}$的凹凸区间和拐点。

注记 2. (x_0, y_0)为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$。*(二阶导数不存在)*

例子. 求曲线$y = x^4$的凹凸区间和拐点。

注记 3. $f''(x_0) = 0$ $\not\Rightarrow$ (x_0, y_0)为拐点。*(二阶导数除在$x = 0$处均大于零)*

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2/3)$	$2/3$	$(2/3,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	拐点	凸的	拐点	凹的

函数拐点的求法

$f(x)$ 在x_0的邻域内二阶可导，且$f''(x_0)=0$，

1. 若x_0两边$f''(x)$变号，则$(x_0,f(x_0))$为拐点。
2. 若$f'''(x_0)\neq 0$, 则$(x_0,f(x_0))$为拐点。

曲线的凹凸性和拐点

例子. 求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间和拐点。

解答. 易知:

$$y'=12x^3-12x^2,\ y''=36x(x-2/3).$$

令$y''=0$ 得$x_1=0$, $x_2=2/3$. 于是

拐点为$(0,1)$和$(2/3,11/27)$.

曲线的凹凸性和拐点

练习 6. 求下列曲线的凹凸区间和拐点。

(1) $y=x^2-x^3$ *(2)* $y=\mathrm{e}^{-x}$

解答. *(1)* 凹区间为 $(-\infty,1/3)$, 凸区间为 $(1/3,+\infty)$, 拐点为 $(1/3,2/27)$。

(2) 凹区间为$(-\infty,+\infty)$.

3.4 函数图形的描绘

函数图形的描绘

如果在函数 $f(x)$ 的定义域上的某个小区间中，

(1) 曲线是上升(或下降) 的; $\Longleftarrow$ 一阶导数

(2) 曲线是凹的(或凸的) ; $\Longleftarrow$ 二阶导数

(3) 区间端点的位置已知或变化趋势已知; $\Longleftarrow$ 渐近线

那么,我们很容易画出函数在这个区间内的图形.

曲线的渐近线

定义. 给定曲线$y = f(x)$, 如果曲线上的一动点沿着曲线趋于无穷远时,该点与某直线的距离趋于 0, 则称此直线为该曲线$f(x)$的渐近线.

1. 水平渐近线
2. 垂直渐近线
3. 斜渐近线

水平和垂直渐近线

定义. *(1)* 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，称$y = b$为其水平渐近线。

(2) 若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，称$x = a$为其铅垂渐近线。

注记. (1) $x\to\infty$可以改为$x\to+\infty$或$x\to-\infty$。

(2) $x\to a$可以改为$x\to a^+$或$x\to a^-$。

例子. 求曲线$y=\dfrac{1}{x-1}$的水平和铅垂渐近线.

练习 **7.** 求曲线$y=\dfrac{-x^2+x+1}{x^2}$的水平和铅垂渐近线.

斜渐近线

定义.[斜渐近线] 若直线$y=kx+b$（$k\neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

则称它是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线。 **定理.** 直线$y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad 而且 \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b.$$

注记. $x\to\infty$可以改为$x\to+\infty$或$x\to-\infty$。

例子. 求曲线$y=\dfrac{x^2}{x+1}$的斜渐近线.

解答. $y=x-1$.

练习 **8.** 求曲线$y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$的斜渐近线.

解答. $y=x+2$.

函数图形描绘的步骤

函数图形描绘的一般步骤：

1. 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域,观察函数的奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态,求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;
2. 求出方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在函数定义域内的全部实根，用这些根以及函数的间断点或阶导、二阶导数不存在的点把函数的定义域划分成若干个区间.
3. 确定在各个区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的形态；
4. 确定函数的水平、铅值渐近线、斜渐近线以及其他变化趋势;
5. 描出与方程 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，绘出渐近线，再结合第三步讨论的结果画出函数的图形.

函数作图举例

例子. 作函数 $y=x^3-3x^2+6$ 的图形.

解答. *(1)* 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 而

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2),$$

$$y''=6x-6=6(x-1)$$

(2) 令 $y'=0$ 得 $x_1=0, x_2=2$; 令 $y''=0$ 得 $x_3=1$.

(3) 单调性、凹凸性、极值和拋点列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	(0,1)	1	(1,2)	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	凸增	极大	凸减	拐点	凹减	极小	凹增

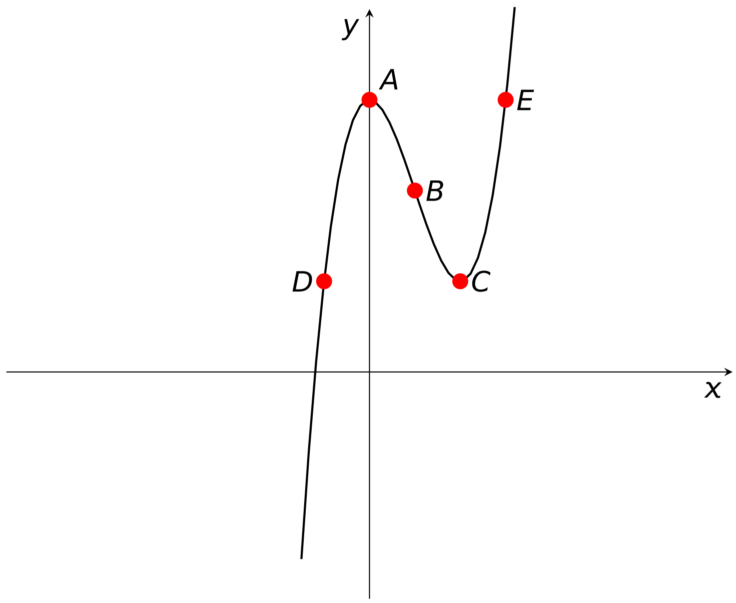
函数作图举例

解答 (续). *(4)* 变化趋势为：

当 $x\to-\infty$ 时, $y\to-\infty$; 当 $x\to+\infty$ 时 , $y\to+\infty$;

(5) 描点 ：$A(0,6), B(1,4), C(2,2)$, 为了确定函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上的图形,增加辅助作图点 $D(-1,2)$, $E(3,6)$, 作出函数的图形。

函数作图举例



解答 (续)**.**

函数作图举例

例子. 作函数$f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$的图形。

解答. 易知$f(x)$的定义域为 $D=\{x|x\neq 0\}$, ，其为非奇非偶函数,且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\ f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=-2$, 令 $f''(x)=0$, 得特殊点 $x=-3$. 又因为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2,$$

得水平渐近线 $y=-2$;

函数作图举例

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	凸	拐	凹	极	凹	间断	凹

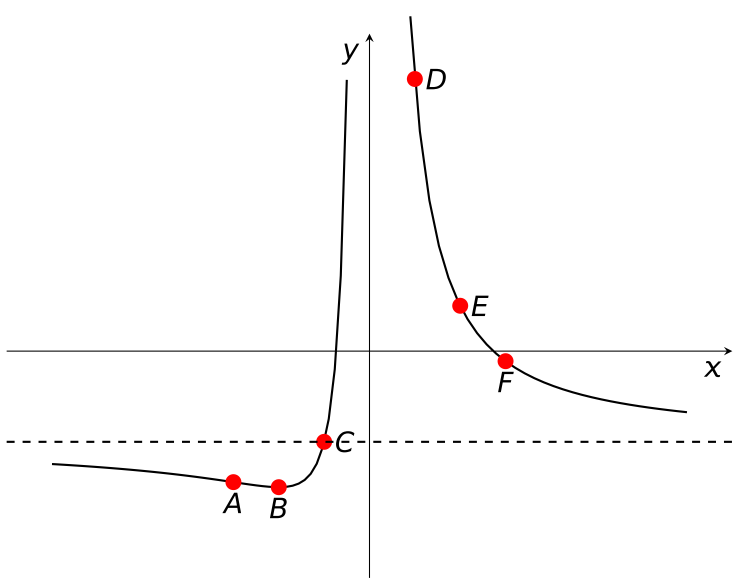
解答 (续)**.** 由

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right] = +\infty$$

得铅直渐近线 $x=0$. 列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点和拐点:

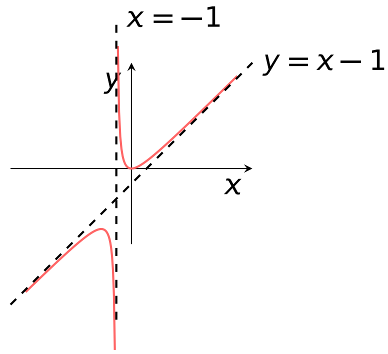
描点作图: $A(-3,-26/9)$, $B(-2,-3)$, $C(-1,-2)$, $D(1,6)$, $E(2,1)$, $F(3,-2/9)$.

函数作图举例



函数图形的描绘

练习 **9.** 描绘函数$y=\dfrac{x^2}{x+1}$的曲线。



解答.

4　函数的最大值和最小值及其在经济中的应用

4.1　函数的最大值与最小值

函数最值的定义

定义.[函数的最值] 设函数$f(x)$在区间I上有定义。如果有$x_0\in I$，使得对所有$x\in I$都有$f(x)\le f(x_0)$（或$f(x)\ge f(x_0)$），则称$f(x_0)$是函数$f(x)$ 在区间I上的最大值（或最小值）。

函数的最大值与最小值

经济问题中，经常有这样的问题，怎样才能使“产品最多”、“用料最少”、“成本最低”、“效益最高”等等．这样的问题在数学中有时可归结为求某一函数(称为目标函数)的最大值或最小值问题．

根据自变量的取值范围，可以分以下两种情况讨论：

1. 目标函数在闭区间连续

2. 目标函数在开区间连续

函数最值的求法：目标函数在闭区间连续

设目标函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，而且在除有限个点外都可导．则可按照下面步骤求出函数的最值：

(1) 求出函数所有的驻点，不可导点，和区间端点一起列出来作为最值可疑点．

(2) 求出函数在这些点的取值并比较，最大（小）者就为函数的最大（小）值．

函数最值的求法：目标函数在闭区间连续

例子. 求以下函数在指定区间上的最值。

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$在区间$[-2, 3]$上.

练习 1. 求以下函数在指定区间上的最值。

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$在区间$[-2, 3]$上.

函数最值的求法：目标函数在开区间连续

开区间的连续函数不一定有最大、最小值．即使有最大值、最小值，也不能用上述方法求出．若函数满足下列两个条件：

1. $f(x)$ 在开区间有且仅有最大（小）值;

2. $f(x)$ 在开区间只有一个可能取得极值的点

则可以断定这个极值点一定是函数的最大（小）值点.

例子. 将边长为a的一块正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒。问截掉的小正方形的长为多少时，所得方盒的容积最大？

练习 2. 一房地产公司有50套公寓要出租. 当月租定为2000元时，公寓会全部租出去. 当月租每增加100 元，就会多剩一套公寓租不出去. 而租出去的每套公寓每月需要花费200 元的维修费用. 问房租定为多少时可获得最大收入？

4.2 经济应用问题举例

最大利润问题

在经济学中，总收入和总成本都可以表示为产量 Q 的函数，分别记为 $R(Q)$ 和 $C(Q)$, 则总利润 $L(Q)$ 可表示为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$ 为使总利润最大，须令其一阶导数等于零, 即

$$\frac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}[R(Q)-C(Q)]}{\mathrm{d}Q}=0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}R(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}Q},$$

即取得最大利润的必要条件为：

$$\text{边际收益}=\text{际成本}.$$

最大利润问题

显然，为使总利润达到最大，还应有

$$\frac{d^2[R(Q)-C(Q)]}{dQ^2} < 0,$$

即

$$R''(Q) < C''(Q),$$

也即

$$\text{边际收益的变化率} < \text{边际成本的变化率}.$$

最大利润问题

例子. 某厂每批生产 A 商品 X 台的费用为 $C(X) = 5X + 200$ (万元)，得到的收入为 $R(X) = 10X - 0.01X^2$ (万元)，问每批生产多少台，才能使利润最大?

解答. 设利润为 $L(X)$, 则

$$L(X) = R(X) - C(X) = 5X - 0.01X^2 - 200$$

$$L'(X) = 5 - 0.02X$$

令 $L'(X) = 0$, 解得 $X = 250$(台)，由于

$$L''(X) = -0.02 < 0$$

所以$L(250) = 425$(万元)为极大值，也就是最大值.

最大利润问题

练习 3. 设某厂的成本函数为 $C(Q) = aQ^2 + bQ + c$, 需求函数为 $Q = (d - P)/\mathrm{e}$, 其中 $C(Q)$ 为成本, Q 为需求量产量, P 为价格, a, b, c, d, e 均为正常数, 且 $d > b$, 求利润最大时的产量及最大利润.

解答. 由 $Q = (d - p)/\mathrm{e}$, 得 $P = d - \mathrm{e}Q$, 故得收益函数

$$R(Q) = Q \cdot P = Q(d - \mathrm{e}Q)$$

利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q) &= R(Q) - C(Q) \\ &= (d - b)Q - (\mathrm{e} + a)Q^2 - c \end{aligned}$$

最大利润问题

于是

$$L'(Q) = (d - b) - 2(\mathrm{e} + a)Q.$$

令$L'(Q) = 0$ 得唯一驻点 $Q_0 = (d - b)/2(\mathrm{e} + a)$.

又 $L'' = -2(\mathrm{e} + a) < 0$, 故

$$Q = Q_0 = (d - b)/2(\mathrm{e} + a)$$

时利润最大,最大值为

$$\begin{aligned} L(Q_0) &= L[(a - b)/2(\mathrm{e} + a)] \\ &= \left[(d - b)^2/4(\mathrm{e} + a)\right] - c \end{aligned}$$

最大收益问题

例子. 最大收益问题某商品的需求函数为 $Q = Q(P) = 75 - P^2$, 问 P 为多少时，总收益最大?

解答. 总收益为

$$R(P) = QP = \left(75 - P^2\right)P$$

令

$$R'(P) = 75 - 3P^2 = 0$$

得唯一驻点 $P = 5$, 又

$$R''(P)|_{P=5} = -30 < 0,$$

故 $P = 5$时收益最大.

经济批量问题

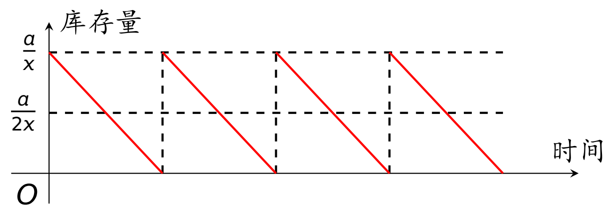
所谓经济批量问题就是确定合理的采购进货的批量，使库存费用和采购费用之和最小.

例子. 某商场每年销售某商品 a 件,分为 x 批采购进货. 已知每批采购费用为 b 元, 而未售商品的库存费用为 c 元/(年·件). 设销售商品是均匀的,问分多少批进货时,才能使以上两种费用的总和为最省? (a, b, c 为常数且 $a, b, c > 0$.)

经济批量问题

解答. 显然,采购进货的费用

$$W_1(x) = bx$$



因为销售均匀,所以平均库存的商品数应为每批进货的商品数 $\frac{a}{x}$ 的一半 $\frac{a}{2x}$, 因而商品的库存费用

$$W_2(x) = \frac{ac}{2x}$$

经济批量问题

解答 (续)**.** 总费用 $W(x) = W_1(x) + W_2(x) = bx + \frac{ac}{2x}$ $(x > 0)$. 令

$$W'(x) = b - \frac{ac}{2x^2} = 0$$

得 $x = \sqrt{\frac{ac}{2b}}$. 又

$$W''(x) = \frac{ac}{x^3} > 0$$

所以 $W\left(\sqrt{\frac{ac}{2b}}\right)$ 为 $W(x)$ 的一个最小值. 从而当批数 x 取一个最接近于 $\sqrt{\frac{ac}{2b}}$ 的自然数时,才能使采购与库存费用之和最省.

经济批量问题

例子. 某厂生产某种产品，其年销售量为100万件，每批生产需要增加准备费1000元，而每件的一年库存费为0.05元.如果年销售率为平均的，且上批售完后立即生产出下批(此时商品的库存数为批量的一半)，问应分为几批生产，能使采购费用及库存费之和最小？

经济批量问题

解答. 设批数为N, 则每批产量为 $x = a/N = \dfrac{10^6}{N}$, 一年生产准备费为 $bN = 1000N$. 库存量为 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1000000}{2N}$, 库存费为 $\dfrac{10^6}{2N} \cdot 0.05$ 于是总费用为

$$\begin{aligned} E(N) &= 1000N + \frac{10^6}{2N} \cdot 0.05 \\ &= 1000N + \frac{25000}{N}, N \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

令$E'(N) = 1000 - \dfrac{25000}{N^2} = 0$ 得$N = 5$或$N = -5$(舍去). 又 $E''(N) = \dfrac{50000}{N^3} > 0$, 故 $N = 5$ 时总费用最小. 即分5批生产，能使总费用最小.

最大税收问题

设企业某件商品的产量为x，征税后的总成本为 $C_t(x)$, 每件商品征税为 t, 则

$$C_t(x) = C(x) + tx$$

征税后的利润为

$$L_t(x) = R(x) - C_t(x) = R(x) - C_t(x) - tx$$

当 $L_t'(x) = 0$ 且 $L_t''(x)_<0$ 时，有最大值，此时可解出对应的产量 $x = x(t)$。

此时，政府得到的总税收为$T = tx = t \cdot x(t)$.

最大税收问题仍为一元函数的最值问题.

最大税收问题

例子. 某种商品的平均成本 $\overline{C}(x)=2$, 价格函数为 $P(x)=20-4x$ (x 为商品数量)，国家向企业每件商品征税为 t.

(1) 生产多少商品时,利润最大?

(2) 在企业取得最大利润的情况下, t 为何值时才能使总税收最大?

解答. (1) 总成本为： $C(x)=x\overline{C}(x)=2x$,

总收益为：$R(x)=xP(x)=20x-4x^2$,

总税收为：$T(x)=tx$,

故总利润为： $L(x)=R(x)-C(x)-T(x)=(18-t)x-4x^2$.

解答 (续). 令 $L'(x)=18-t-8x=0$, 得 $x=\dfrac{18-t}{8}$. 又

$$L''(x)=-8<0$$

所以 $L\left(\dfrac{18-t}{8}\right)=\dfrac{(18-t)^2}{16}$ 为最大利润.

(2) 取得最大利润时的税收为:

$$T=tx=\frac{t(18-t)}{8}=\frac{18t-t^2}{8}\quad (x>0)$$

令

$$T'=\frac{9-t}{4}=0$$

得 $t=9$.

解答 (续). 又
$$T'' = -\frac{1}{4} < 0,$$
所以当 $t = 9$ 时,总税收取得最大值
$$T(9) = \frac{9(18-9)}{8} = \frac{81}{8},$$
此时的总利润为
$$L = \frac{(18-9)^2}{16} = \frac{81}{16}.$$

小结

本节基本概念: 函数的极大值与极小值

1. 当目标函数在闭区间连续时
2. 当目标函数在开区间连续时

极值的经济应用:

1. 最大利润问题
2. 最大收益问题
3. 经济批量问题
4. 最大税收问题

思考题

某工厂要在一年内以相等批量分批生产2400件产品，产品的单位成本为6元，但每生产一批产品需要调整机器费用为160元.在生产过程中，在制品占用资金的银行年利率为10%.若全年所需费用等于全年所需机器调整费用与在制品占用资金利息的总和，问批量多大时才能使全年所需费用最小？

思考题

解答. 设全年所需费用为 $P(x)$, 批量为 x, 则全年批生产的批数为 $\dfrac{2400}{x}$ 所需调整机器费用为 $160\cdot\dfrac{2400}{x}$ 元. 因为批量相同，所以全年商品所占资金的利息为 $6x\times 10\%$ 元，因此

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 6x\times 10\% + 160\times\frac{2400}{x} \\
&= 0.6x + \frac{16\times 24\times 10^3}{x} \\
P' &= 0.6 - \frac{16\times 24\times 10^3}{x^2}
\end{aligned}
$$

令 $P'(x)=0$, 则 $x^2=640000 \therefore P(x)$ 有最小值. 即全年分 *3*批生产，每批批量 *800*件.

5 泰勒公式

近似估计

假设$f'(x_0)$存在。已经知道当$x\to x_0$时有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o\big(x-x_0\big)$$

是否存在二次多项式$g(x)$使得当$x\to x_0$时有

$$f(x)\overset{?}{=}g(x)+o\big((x-x_0)^2\big)$$

令$g(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2$，则有

$$A=f(x_0),\qquad B=f'(x_0),\qquad C=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

$$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o\big((x-x_0)^2\big)$$

. . . . 令$x \to x_0$，得到$A = f(x_0)$，从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = B + C(x-x_0) + o(x-x_0).$$

再令$x \to x_0$，得到$B = f'(x_0)$。因此

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} \quad \boxed{\text{洛必达法则}} \\ &= \frac{1}{2}f''(x_0) \quad \boxed{\text{导数的定义}} \end{aligned}$$

定理.[带佩亚诺余项的泰勒公式]

设$f(x)$在x_0点存在n阶导数，则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big)$$

Solution 2. 连续用$n-1$次洛必达法则，再用导数的定义.

定理.[带拉格朗日余项的泰勒公式]

设$f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内存在$n+1$阶导数，则$\forall x \in U(x_0)$有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中余项$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$， ξ介于x_0和x之间。

证：对$R_n(x)$和$(x-x_0)^{n+1}$连续用$n+1$次柯西中值定理.

当$x_0 = 0$时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中$R_n(x)=o(x^n)$······································佩亚诺余项

或者$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$·························拉格朗日余项

ξ介于0和x之间。

令$\xi=\theta x$，则$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$。

利用泰勒公式证明不等式

例子. 设函数 (x) 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0, x_1, x_2$ 为 $[a,b]$ 上任意两点. 证明: $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

利用泰勒公式证明不等式

证明. 设 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点的一阶泰勒展式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

ξ 介于 x 与 x_0 之间, 代入特殊点 x_1 与 x_2, 得

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2,$$
$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2,$$

其中 ξ_1 介于 x_1 与 x_0 之间, ξ_2 介于 x_2 与 x_0 之间. 两式相加得,

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{(x_1-x_2)^2}{2}\left(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right),$$

$\because f''(x)<0, x\in(a,b)$ $\quad\therefore f(x_1)+f(x_2)<2f(x_0)$ 即

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

利用泰勒公式证明不等式

利用泰勒公式证明题目

1. 依题意选定 n, x_0 和 x.
2. 与出相应的泰勒展开式
3. 由展开式推出要证明的结论

若已知一系列点的函数值或导数值，或涉及到二阶或三阶以上的高阶导数，可以考虑用泰勒公式。

例子. 求$f(x)$的带拉格朗日余项的麦克劳林公式. 小结

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = \sin x$ .... 图形

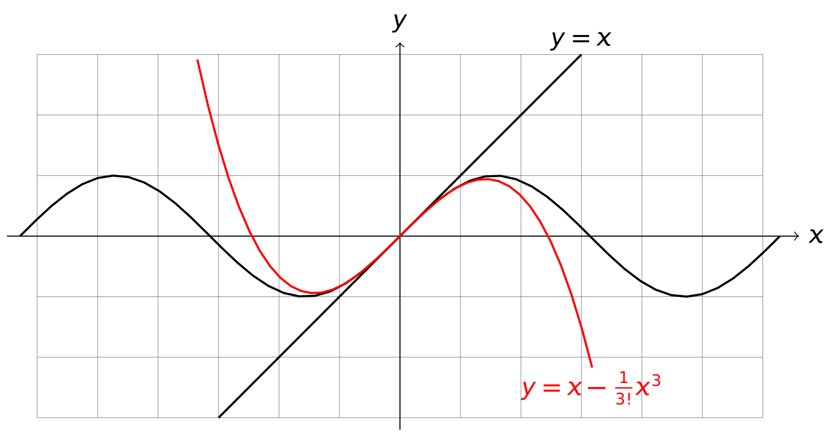
(3) $f(x) = \cos x$

(4) $f(x) = \ln(1+x)$ .... 应用

(5) $f(x) = (1+x)^\alpha$ .... 应用

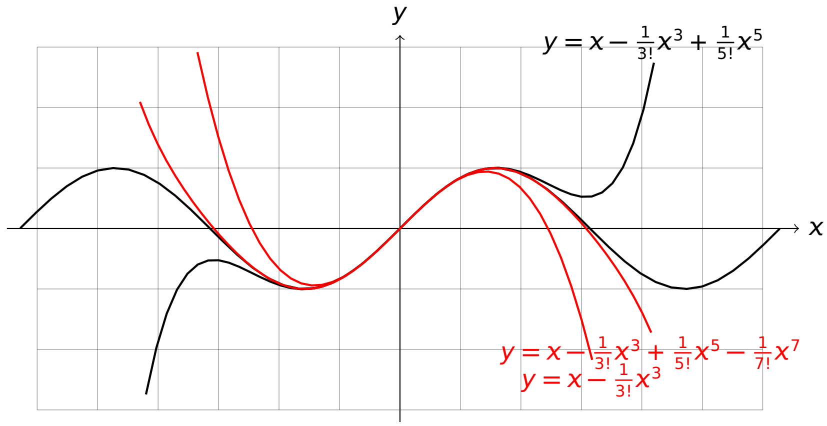
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



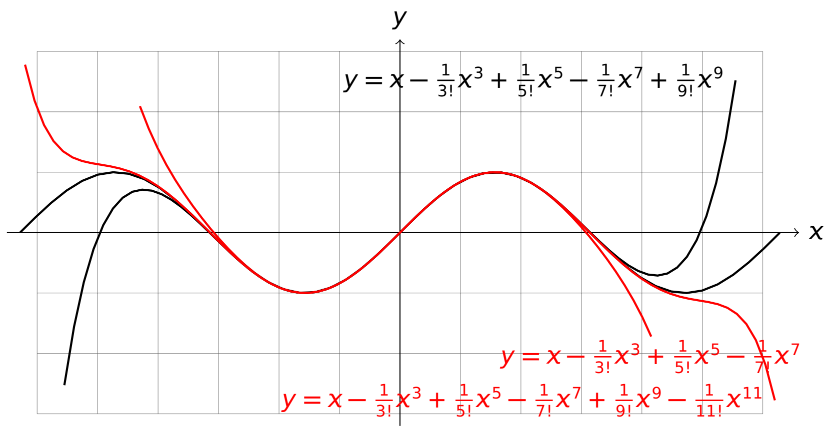
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



返回

利用泰勒公式证明不等式

例子. 证明：当$x > 0$时，有$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$。

解答. 利用$\ln(1+x)$的1阶麦克劳林公式. 返回

利用泰勒公式求极限

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$。

解答. 利用$\sqrt{1+x}$的2阶麦克劳林公式，求得极限等于$-\frac{9}{32}$. 返回

泰勒公式求极限

例子. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解答. 泰勒公式求极限 由泰勒公式可得

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + o\left(x^4\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right),$$

于是

$$e^{x^2} + 2\cos x - 3 = \left(\frac{1}{2!} + 2\cdot\frac{1}{4!}\right)x^4 + o\left(x^4\right),$$

所以

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4} = \frac{7}{12}.$$

初等函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + C_\alpha^3 x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + R_n(x)$$

返回

Part V

第五章

1 不定积分的概念与性质

1.1 原函数与不定积分的概念

一般地，已知函数$y = f(x)$, 容易求出$y' = f'(x)$。

反过来，如果已知 $y' = f'(x)$, 如何找出 $y = f(x)$？

- $(?)' = 2x$
- $(?)' = e^x$
- $(?)' = \sin x$
- $(?)' = \ln x$

定义. *若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 及可导函数 $F(x)$ 满足关系：对任一*

$x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例子. 因 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例子. $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

(1) 原函数不止一个

(2) 同一个函数的任意两个原函数之间最多相差一个常数C.

原函数存在定理

定理 (原函数存在定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,则在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x)$$

简单地说,连续函数一定有原函数.

注记. 初等函数的原函数不一定还是初等函数。

定义. 函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数,称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

在上面定义中, 我们称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x)=f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C}$$

例子. 求函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分. **例子.** 求函数 $f(x)=\sin x$ 的不定积分.

练习 1. *求不定积分.*

(1) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

例子. 求函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的不定积分. **例子.** 求过点$(1,3)$, 且其切线斜率为$2x$ 的曲线方程.

1.2 不定积分的几何意义

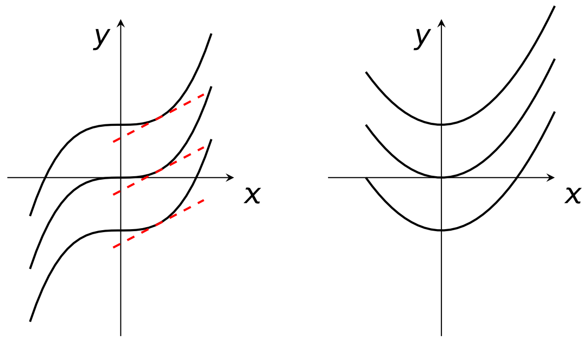
不定积分的几何意义

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线. 显然，求不定积分得到一积分曲线族,在同一横坐标$x=x_0$处,任一曲线的切线有相同的斜率.

1.3 不定积分的性质

性质 1. *导数运算与不定积分运算互为逆运算:*

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x)$



(a) $y = x^3 + C$ (b) $y = x^2 + C$

2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x) + C$

性质 2. 非零的常数因子,可以移到积分号前面.即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3. 两个函数的和/差的积分，等于函数积分的和/差．即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

注：　上述法则可以推广至有限多个函数的线性组合。

1.4 基本积分表

基本积分公式

积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式。

例如，由

$$(x^{a+1})' = (a+1)x^{a}$$

可得

$$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C.$$

类似地，我们有如下基本积分公式。

基本积分公式I

1. $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

例子. 求不定积分

(1) $\int (2x + 5x^{2} + 7x^{3})\,\mathrm{d}x$

(2) $\int (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int (2x+1)^{2}\,\mathrm{d}x$

练习 2. 求不定积分

(1) $\int (1 - 2x^{2})\,\mathrm{d}x$

(2) $\int (\frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$

练习 **3.** 求不定积分

(1) $\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

基本积分公式**II**

4. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$

5. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

例子**.** 求不定积分：

(1) $\int (4\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}})\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$

练习 **4.** 求不定积分：

(1) $\int (x^2 + 2^x)\,\mathrm{d}x$

基本积分公式**III**

6. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

7. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$

8. $\displaystyle\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$

9. $\displaystyle\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$

例子**.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int (\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x$

练习 **5.** 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \cot^2 x \,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$

基本积分公式**IV**

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

例子. 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$

练习 **6.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

基本积分公式**V**

12. $\displaystyle\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

13. $\displaystyle\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

1.5 小结与复习

小结

1. 原函数的概念：$F'(X) = f(x)$;
2. 不定积分的概念：$\int f(x)\,dx = F(x) + C$;
3. 求微分与求不定积分的互逆关系
4. 基本积分公式

复习

复习 **1.** 求不定积分

(1) $\int (\sin x - 2e^x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

2 换元积分法

2.1 第一类换元法

第一类换元法引例

例子. 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解决方法：设置中间变量，并利用复合函数求导法则。

解答. 令 $u = 2x+1$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$, 于是

$$\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x = \int u^{10}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{22}u^{11} + C = \frac{1}{22}(2x+1)^{11} + C.$$

第一类换元法

一般地，设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u) = f(u),\ \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C.$$

如果 $u=\phi(x)$ 可微, 则由链式法则，有

$$\mathrm{d}F(\phi(x))=F'(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x=f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x=F(\phi(x))+C=\left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}.$$

第一类换元法

定理 (第一类换元法)**.** 设$f(u)$具有原函数, $\phi(x)$可导，则有

$$\begin{aligned}\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x&=\int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))\\&=\left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}\end{aligned}$$

注记. 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 化为 } \int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

第一类换元法也称为凑微分法。

常用的积分换元I

1. $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b)$
2. $x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}\,\mathrm{d}\,(x^n)$

3. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln|x|) = \ln a \, d\left(\log_a |x|\right) (a > 0$ 且 $a \neq 1)$

4. $e^x \, dx = d(e^x)$

5. $a^x \, dx = \dfrac{1}{\ln a} d(a^x) (a > 0$ 且 $a \neq 1)$;

6. $\cos x \, dx = d(\sin x)$

7. $\sin x \, dx = -d(\cos x)$

常用的积分换元**II**

8. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x \, dx = d(\tan x)$

9. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = \csc^2 x \, dx = -d(\cot x)$

10. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$

11. $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x) = -d(\operatorname{arccot} x)$

第一类换元法

例子. 求不定积分 $\int \sin 2x \, dx$.

解答 (解法1). $\int \sin 2x dx = \dfrac{1}{2} \int \sin 2x \, d(2x)$

令 $u = 2x$,则上式等于

$$\frac{1}{2} \int \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

解答 (解法2). $\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = 2\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = 2\int \sin x \,\mathrm{d}\sin x$

令$u = \sin x$, 则上式等于

$$2\int u\,\mathrm{d}u = u^2 + C = (\sin x)^2 + C.$$

第一类换元法

解答 (解法3). $\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = 2\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = -2\int \cos x \,\mathrm{d}\cos x$

令 $u = \cos x$, 则上式等于

$$-2\int u\,\mathrm{d}u = -u^2 + C = -(\cos x)^2 + C$$

注记. 观察点不同，所得结论不同.

第一类换元法

例子. 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$

第一类换元法

练习 1. 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$

(2) $\int e^{-3x+2}\,dx$

(3) $\int \sqrt{3x-1}\,dx$

例子. 求不定积分

(1) $\int x e^{x^2}\,dx$

(2) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

(3) $\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$

练习 **2.** 求不定积分

(1) $\int x^2(x^3+1)^9\,dx$

(2) $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$

例子. 求不定积分（其中$a>0$）：

(1) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ .... $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(2) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx$ .... $\frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$

(3) $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx$ .... $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

练习 **3.** 求不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$（$a>0$） .... $\arcsin\frac{x}{a}+C$

(2) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$ .... $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

例子. 求不定积分

(1) $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$ .... $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$

(2) $\int \sin^3 x\,dx$ .... $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

> 形如$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$的解题思路：$m,n$有一个位奇数时，将单个的提出来凑微分。

练习 4. 求不定积分

(1) $\int \cos^6 x\sin x\,dx$ .... $-\frac{1}{7}\cos^7 x+C$

(2) $\int \cos^5 x\,dx$ .... $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

例子. 求不定积分

(1) $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,dx$ .... $\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

(2) $\int \tan x\,dx$ .... $-\ln|\cos x|+C$

(3) $\int \csc x\,dx$ .... $\ln|\csc x-\cot x|+C$

练习 5. 求不定积分

(1) $\int \cot x\,dx$ .... $\ln|\sin x|+C$

(2) $\int \sec x\,dx$ .... $\ln|\sec x+\tan x|+C$

例子. 求不定积分 $\int \sin^2 x \, dx$。

形如$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$的解题思路：$m, n$都是偶数时，使用$\cos^2 x$ $\dfrac{1+\cos 2x}{2}$或$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$降幂。

练习 6. 求不定积分 $\int \cos^2 2x \, dx$。

例子. 求 $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

解答. 易知$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x)$ 于是

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx \\ &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C\end{aligned}$$

形如$\int \cos mx \cos nx \, dx$的求解思路：使用积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

例子. 求 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

解答. 由条件可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x + \cos x - (\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx\right) \\ &= \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + C\end{aligned}$$

形如 $\int \dfrac{a\sin x + b\cos x}{A\sin x + B\cos x} dx$ 的解题思路:
令 $a\sin x + b\cos x = m(A\sin x + B\cos x) + n(A\sin x + B\cos x)'$
拆项.

2.2 第二类换元法

第二类换元法

问题. $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =?$

解决方法: 改变中间变量的设置方法.

过程: 令 $x = \sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$, 于是

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \sin^5 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \cdots\cdots$$

(应用“凑微分”即可求出结果)

第二类换元法

定理 (第二类换元法)**.** 若$x = \phi(t)$是单调、可导的函数, 而且$\phi'(t) \neq 0$, 则有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t))$$
$$= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

例子. 求不定积分$\int \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ .... $x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C$

练习 7. 求不定积分$\int \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$ .... $\arctan(\mathrm{e}^x) + C$

常用变量代换

常用的变量代换

1. 三角代换
2. 倒代换
3. 简单无理函数代换

三角代换

三角代换的目的是化掉根式, 当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 令$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2} \Longrightarrow a\cos t$

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 令$x=a\tan t$, $\sqrt{a^2+x^2} \Longrightarrow a\sec t$

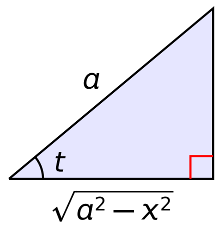
(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 令$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2} \Longrightarrow a\tan t$

三角代换

例子. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解答. 令$x=a\sin t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int 1\,\mathrm{d}t = t+C \\ &= \arcsin\frac{x}{a}+C\end{aligned}$$



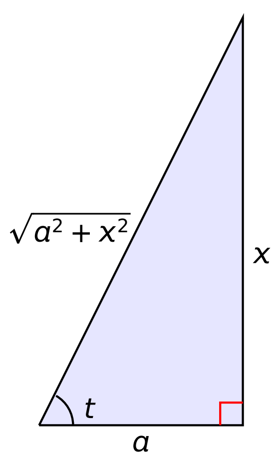
三角代换

例子. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$

解答. 设 $x = a\tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t, \quad \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a + C_1 \\
&= \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C
\end{aligned}$$



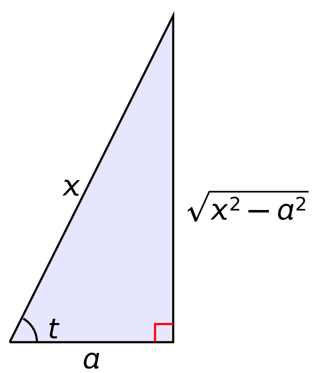
三角代换

例子. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$

解答. 当 $x>0$ 时,设 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\quad \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}&=\int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t}=\int \sec t\,\mathrm{d}t\\&=\ln|\sec t+\tan t|+C_1\\&=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_2\end{aligned}$$



解答 (续). 当 $x<0$ 时,设 $x=-u$, 那么 $u>0$, 利用上段结果,

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}&=-\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}}\\&=-\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)+C_2\\&=-\ln\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2\\&=\ln\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+C_2\\&=\ln\left(-x-\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_2-\ln a^2\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\end{aligned}$$

从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

三角代换

练习 8. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ .... $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

练习 9. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ .... $\displaystyle\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

三角代换

注记. 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换不是绝对的,需要根据被积函数的情况决定。

例子. 求 $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ (三角代换很繁琐)

解答. 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ 则$x^2=t^2-1,\ x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t,$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int\left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C\\&=\frac{1}{15}\left(8-4x^2+3x^4\right)\sqrt{1+x^2}+C\end{aligned}$$

倒代换

当分母的阶较高时，可以采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

例子. 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x$

解答. 令 $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t,$则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\left(x^7+2\right)}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{t^6}{1+2t^7}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right|+C\\&=-\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right|+\frac{1}{2}\ln|x|+C\end{aligned}$$

倒代换

例子. 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$ (分母的阶较高)

解答. 令 $x=\dfrac{1}{t},$ 则$\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t,$ 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t^2 \\
&\xlongequal{u=t^2} -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1-(1+u)}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u) \\
&= -\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3 + \sqrt{1+u} + C \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C
\end{aligned}
$$

注记. 当被积函数含有两种或两种以上的根式时$\sqrt[k]{x},\dots,\sqrt[l]{x}$时，可令$x = t^n$（$n$为各根指数的最小公倍数）

例子. 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$

解答. 令 $x = t^6$则 $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 6\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 6(t-\arctan t) + C \\
&= 6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan(\sqrt[6]{x})\right) + C
\end{aligned}
$$

例子. 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

解答. 令 $t^6 = x+1$，则$6t^5\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + C$$
$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1}$$
$$+ 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C$$

练习 10. 求不定积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

解答. $6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + C$

简单无理函数代换

注记. 当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ..., 可将无法处理的部分设为 t

例子. 求积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解答. 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $\frac{1+x}{x} = t^2$, $x = \frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x = -\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$. 于是

简单无理函数代换

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x &= -\int \left(t^2-1\right) t \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} \\
&= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = -2t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\
&= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left| x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right| + C
\end{aligned}
$$

简单无理函数代换

例子. 求$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$.

解答. 令$t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$, 则 $\mathrm{e}^x = t^2-1$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1\right) - x + C
\end{aligned}
$$

注记. 当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$,可以使用根号内配方法

例子. 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

解答. 易知
$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$
令 $x+1=\tan t$, 则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{1+\sec t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t(1+\cos t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t+\tan t| - \tan\frac{t}{2} + c \\
&= \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} + C.
\end{aligned}$$

练习 11. 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ .... $2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{2\sqrt{x-3}(x+6)}{3}+C$

2.3 小结

小结

两类积分换元法:

1. 第一类换元（凑微分）
$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

2. 第二类换元

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t)) = \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

(a) 三角代换

(b) 倒代换

(c) 根式代换

积分公式大全

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C \tag{19}$$

$$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \tag{20}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \tag{21}$$

$$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \tag{22}$$

$$\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C \tag{23}$$

积分公式大全

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{24}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \tag{25}$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \tag{26}$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C \tag{27}$$

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{28}$$

$$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{29}$$

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C \tag{30}$$

$$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C \tag{31}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \tag{32}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \tag{33}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \tag{34}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \tag{35}$$

3 有理分式的积分

定义. 如果$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数(分式)。

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式；

- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq Q(x)$ 次数，则称它为假分式。

定理. 假分式 = 多项式 + 真分式

有理分式分解

理论上，任何一个有理分式(真分式)都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} \qquad = \ln|x+a|+C$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} \qquad = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}}+C$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \qquad = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

有理分式分解

理论上，任何一个有有理分式(真分式)的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \qquad = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$
5. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad = \frac{1}{2(1-n)\,(x^2+a^2)^{n-1}}+C(n\geq 2)$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}(n\geq 2)$ 可以用递推法求出

有理分式的分解

定理. 设多项式$Q(x)$不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个$Q_i(x)$是一次多项式或二次不可约多项式。 **定理.** 假定上面任何两个$Q_i(x)$都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式。

有理分式的分解

1. 分母中若有因式$(x-a)^k$时，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x+a)^k} + \frac{A_2}{(x+a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x+a}$$

   其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

   特别地: $k=1$,时，分解后为 $\dfrac{A}{x+a}$.

2. 分母中若有因式 $\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中$p^2-4q<0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

   其中 M_i, N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

   特别地: $k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

有理分式的分解

于是，将有理函数转化为部分分式之和后，只会出现三种情况：

(1) 多项式

(2) $\dfrac{A}{(x+a)^n}$

(3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

(1)和(2)两种情况的不定积分都比较容易求出，因此只讨论情况(3)。

讨论不定积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

....

易知 $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$，令 $x+\frac{p}{2}=t$，

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4},\ b=N-\dfrac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记. 有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合。

待定系数法

例子. 求 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

解答. 令 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=3, \end{cases} \implies \begin{cases} A=-5, \\ b=6, \end{cases} \quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x \\ &= -5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C. \end{aligned}$$

例子. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$.

解答. 令 $\displaystyle\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$.右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2A-B+C=0, \\ A=1, \end{cases} \implies \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=1 \end{cases} \quad \text{故}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C. \end{aligned}$$

例子. 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$

解答. 令$\displaystyle\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+(A+C)}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{5}, \\ B=-\frac{2}{5}, \\ C=\frac{1}{5}, \end{cases}$$ 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+2x} - \frac{2}{5}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5}\arctan x + C. \end{aligned}$$

有理分式的积分

练习 1. *求不定积分*

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

初等函数的不定积分

注记. *初等函数的原函数未必都是初等函数。可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如*

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

4 分部积分法

分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

分部积分

设$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续导数，则

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int vu'\,\mathrm{d}x = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

证明. 由$(uv)'=u'v+uv'$可得

$$uv' = (uv)' - u'v$$

故结论成立.

分部积分

例子. 求不定积分$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ ...... $x\sin x+\cos x+C$. **例子.** 求不定积分$\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ .... $x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+C$.

注记. *若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就考虑设幂函数为u, 使其降幂一次(假定幂指数是正整数)*

分部积分

练习 **1.** 求不定积分：

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ .... $(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$

(2) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{4}+C.$

例子. 求不定积分$\int \ln x\,\mathrm{d}x$ .... $x\ln x-x+C.$ **例子.** 求不定积分$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

.... $\dfrac{x^2}{2}\arctan x-\dfrac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$

注记. 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为u.

分部积分

练习 **2.** 求不定积分：

(1) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$ .... $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

(2) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$ .... $x\arcsin x+\sqrt{(1-x^2)}+C$

例子. 求积分 $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x.$

解答. 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x\, dx &= \int \sin x\, d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x\, d(\sin x)\\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx\\ &= e^x \sin x - \int \cos x\, d(e^x)\\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x\, d\cos x\right)\\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\, dx\end{aligned}$$

$\therefore \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

分部积分

例子. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}, 求 $\int x f'(x) dx$.

解答. 由分部积分得

$$\int x f'(x) dx = \int x\, d[f(x)] = x f(x) - \int f(x) dx.$$

因为 $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$, 因此

$$\int f(x) dx = e^{-x^2} + C$$

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2x e^{-x^2}$, 所以

$$\int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx = -2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

递推法

例子. 求不定积分 $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$.

解答. 由分部积分得

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}
\end{aligned}
$$

于是 $I_{n+1} = \dfrac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2na^2}I_n$，即

$$
I_n = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}I_{n-1}.
$$

小结

分部积分的关键在于选择合适的u和$\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\left(\sin x\right)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

5 有理分式的积分

定义. 如果$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理函数(分式)。

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geq$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式。

定理. 假分式 = 多项式 + 真分式

有理分式分解

理论上，任何一个有理分式(真分式)都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} \qquad = \ln|x+a|+C$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} \qquad = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}}+C$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \qquad = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

有理分式分解

理论上，任何一个有有理分式(真分式)的积分都可分为以下六个类型的基本积分的代数和:

4. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \qquad = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$

5. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \qquad = \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + C(n \geq 2)$

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}(n \geq 2)$ 可以用递推法求出

有理分式的分解

定理. 设多项式$Q(x)$不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个$Q_i(x)$是一次多项式或二次不可约多项式。 **定理.** 假定上面任何两个$Q_i(x)$都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式。

有理分式的分解

1. 分母中若有因式$(x-a)^k$时，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x+a)^k} + \frac{A_2}{(x+a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x+a}$$

   其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

   特别地: $k=1$,时，分解后为 $\dfrac{A}{x+a}$.

2. 分母中若有因式 $\left(x^2+px+q\right)^k$, 其中$p^2-4q<0$, 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

   其中 M_i, N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

   特别地: $k=1$, 分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

有理分式的分解

于是，将有理函数转化为部分分式之和后，只会出现三种情况：

(1) 多项式

(2) $\dfrac{A}{(x+a)^n}$

(3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

(1)和(2)两种情况的不定积分都比较容易求出，因此只讨论情况(3)。

讨论不定积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

....

易知 $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$, 令 $x+\frac{p}{2}=t$,

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\ Mx+N=Mt+b,$$

其中 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4},\ b=N-\dfrac{Mp}{2}$.

于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x=\int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

注记. 有理函数都可积，且积分结果可能的形式为有理函数、反正切函数、对数函数及它们之间的组合。

待定系数法

例子. 求 $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

解答. 令 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$. 而

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases}A+B=1,\\-3A-2B=3,\end{cases}\implies\begin{cases}A=-5,\\b=6,\end{cases}\quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x\\&=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.\end{aligned}$$

例子. 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$.

解答. 令 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$.右端通分得

$$\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}.$$

比较分子系数可得

$$\begin{cases}A+B=0,\\-2A-B+C=0,\\A=1,\end{cases}\implies\begin{cases}A=1,\\B=-1,\\C=1\end{cases}\quad \text{故}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}&=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.\end{aligned}$$

例子. 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$

解答. 令$\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+2x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}$. 右边通分得

$$\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+(A+C)}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

比较分子系数得

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{4}{5}, \\ B=-\frac{2}{5}, \\ C=\frac{1}{5}, \end{cases} \quad 故$$

$$\begin{aligned} 原式 &= \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+2x} - \frac{2}{5}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{5}\arctan x + C. \end{aligned}$$

有理分式的积分

练习 1. 求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

初等函数的不定积分

注记. 初等函数的原函数未必都是初等函数。可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Part VI

复习

1 集合与函数

函数的定义域

例子. 求下列函数的定义域：

$$f(x) = \sqrt{x-2} \tag{36}$$

$$f(x) = \ln(x^2-1) \tag{37}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} \tag{38}$$

求函数的定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；
3. 分母要求不能等于零。

复合函数的分解

例子. 将函数$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$分解为简单函数的复合。

- 简单函数指的是由基本初等函数的四则运算得到的函数。
- 基本初等函数指的是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六种。

2　极限与连续

数列极限

对于数列极限，我们有如下基本公式：

$$\lim_{n\to\infty} c = c \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0) \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0 \quad (k > 0) \tag{3}$$

函数极限I

对于$x \to \infty$的函数极限，我们有如下基本公式：

$$\lim_{x\to\infty} c = c \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{为正整数}) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{3}$$

函数极限II

对于$x \to x_0$的函数极限，如果$f(x)$是初等函数，x_0在$f(x)$的定义区间中，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

左极限和右极限

例子. 设

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le 0\\ x^2+1 & 0<x\le 1\\ \frac{2}{x} & x>1\end{cases}$$

判断该函数在$x\to 0$及$x\to 1$时的极限是否存在。

定理. *极限存在当且仅当左右极限都存在而且相等。*

极限的四则运算

各种极限都有四则运算法则：

$$\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x) \tag{1}$$

$$\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x) \tag{2}$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \tag{3}$$

等价无穷小代换

例子.求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x} \tag{2}$$

事实. *等价无穷小代换有如下特点：*

- *我们只有对$x\to 0$的代换公式；*
- *只能对乘除因子代换，不能对加减项代换。*

洛必达法则

例子. 求下列极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x} \tag{1}$$

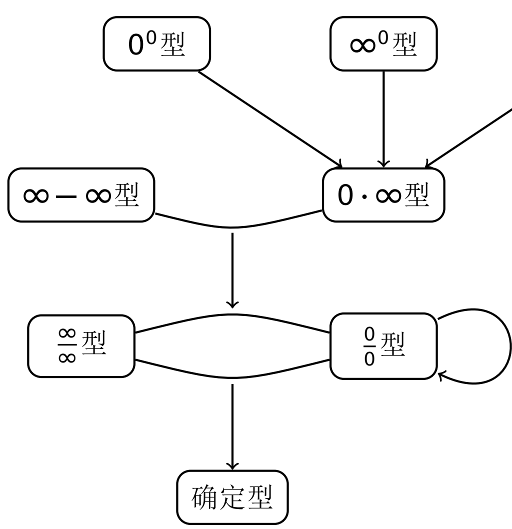
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x} \tag{2}$$

事实. 洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限。

小结

函数极限



关于1^∞型极限

例子. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$. **定理.** 若$x\to\square$时，$\alpha(x)\to 0$，$b(x)\to\infty$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to\square}\left(1+\alpha(x)\right)^{b(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)b(x)}}$$

连续与间断

例子. 求函数$f(x)$的间断点，并判断其类型。其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\le 1, x\neq 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$$

注记. 函数的间断点通常在这两种点中出现：

1. 使得分母为零的点；
2. 分段函数的交界点.

3 导数与微分

导数公式

- $(C)'=0$
- $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

复合函数求导

例子. 求下列函数的导数：

（1）$f(x) = e^{x^2}$；

（2）$f(x) = \sqrt{x^2+1}$；

（3）$f(x) = \cos(\ln x)$。

定理. 设$y = f(u)$, $u = g(x)$，则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

隐函数求导

例子. 对下面的方程求导数y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$；
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$。

4 导数的应用

罗尔定理

定理. *如果函数$f(x)$满足下列条件:*

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续,

(2) 在开区间(a,b)内可导,

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi)=0$.

拉格朗日定理

定理. *如果函数$f(x)$满足下列条件:*

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续,

(2) 在开区间(a,b)内可导,

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$使$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西定理

定理. 如果函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件:

(1) 在闭区间$[a,b]$上都连续,

(2) 在开区间(a,b)内都可导,

(3) 在开区间(a,b)内$g'(x)\neq 0$,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

单调区间与极值

例子. 求下列函数的单调区间与极值:

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$;

(2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

事实. 对于单调区间与极值,有如下基本结果:

- $f'(x)>0$ 的区间为单调增加区间;
- $f'(x)<0$ 的区间为单调减少区间;
- $f'(x)=0$或者不存在的点很可能为极值点。

函数的最值

事实. 一般地,对于函数在闭区间$[a,b]$上的最值,我们只需考虑下述这些可疑点:

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点。

事实. 特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值。

凹向与拐点

例子. 求下列曲线的凹向与拐点：

(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$;

(2) $f(x) = (x-2)^{\frac{5}{3}}$.

事实. 对于凹向与拐点，有如下基本结果：

- $f''(x) > 0$ 的区间为凹（上凹）区间；
- $f''(x) < 0$ 的区间为凸（下凹）区间；
- $f''(x) = 0$或者不存在的点很可能为拐点。

曲线的渐近线

例子. 求曲线$f(x) = \frac{1}{x-1}$的渐近线：

事实. 对于曲线的渐近线，我们有如下定义：

- 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，则$y = b$为水平渐近线；
- 若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则$x = a$为铅垂渐近线。

边际与弹性

若$y=f(x)$可导，则变化率$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为$f(x)$的边际函数。

- 总成本函数$C(Q)\Longrightarrow$ 边际成本$C'(Q)$
- 总收益函数$R(Q)\Longrightarrow$ 边际收益$R'(Q)$

若$y=f(x)$可导，则相对变化律

$$\frac{\mathrm{E}y}{\mathrm{E}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=y'\frac{x}{y}$$

称为$f(x)$的弹性函数。

5　不定积分

积分公式大全

$$\int 1\,\mathrm{d}x=x+C \tag{39}$$

$$\int x^{a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C \tag{40}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C \tag{41}$$

$$\int a^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C \tag{42}$$

$$\int e^{x}\,\mathrm{d}x=e^{x}+C \tag{43}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{44}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{45}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \tag{46}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \tag{47}$$

积分公式大全

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{48}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{49}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \tag{50}$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \tag{51}$$

积分公式大全

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{52}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \tag{53}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \tag{54}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C \tag{55}$$

第一类换元法

$$\begin{aligned} \int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x)) \\ &= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)} \end{aligned}$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到。**例子.** 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$.

正弦和余弦换元

例子. 求不定积分$\int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x$.

分部积分公式：$\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例子. 求不定积分$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例子. 求不定积分$\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

第二类换元法

例子. 求不定积分$\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

例子. 求不定积分$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

例子. 求不定积分$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}t\Big]_{t=\psi^{-1}(x)}$

指数函数换元

例子. 求不定积分$\int \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.

根号换元

例子. 求不定积分$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$.

三角函数换元总结

1. $\displaystyle\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$，令$x = a\sin t$
2. $\displaystyle\int f(\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$，令$x = a\tan t$
3. $\displaystyle\int f(\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$，令$x = a\sec t$