高等数学 B--微积分 (一)

第六章 · 定积分

2021 年 3 月 20 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

第一节　定积分的概念

第二节　定积分的性质

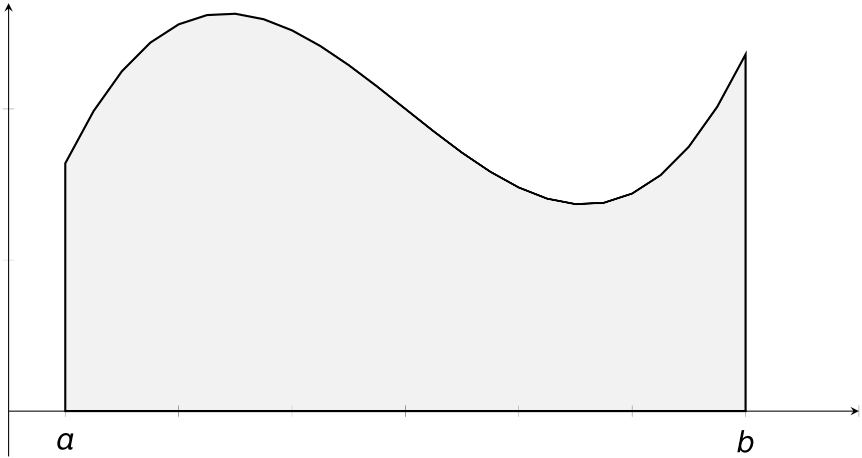
第三节　微积分基本公式

第四节　定积分的换元积分法

第五节　定积分的分部积分法

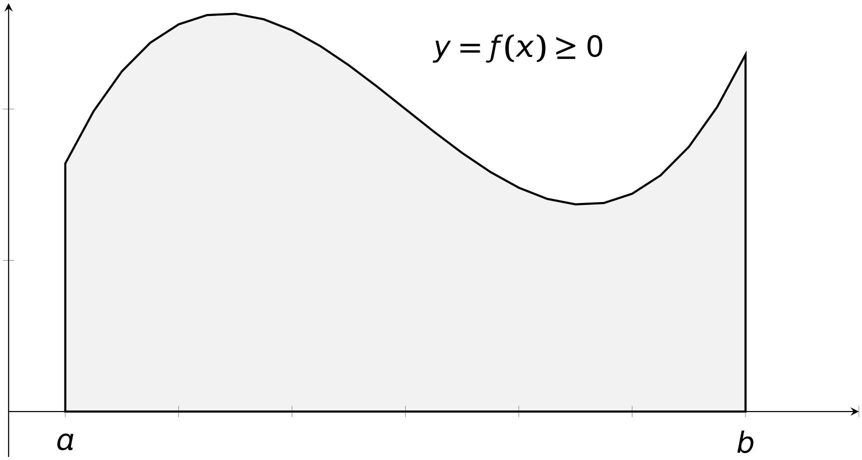
例 1　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

曲边梯形的面积



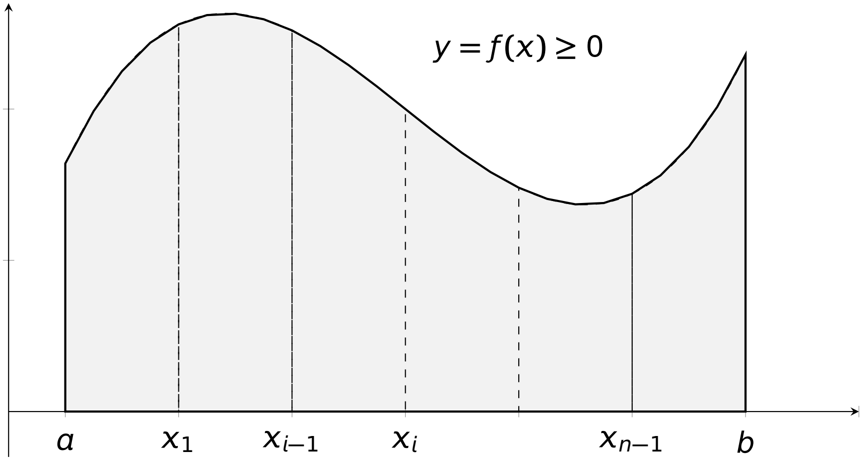
$S =$

曲边梯形的面积



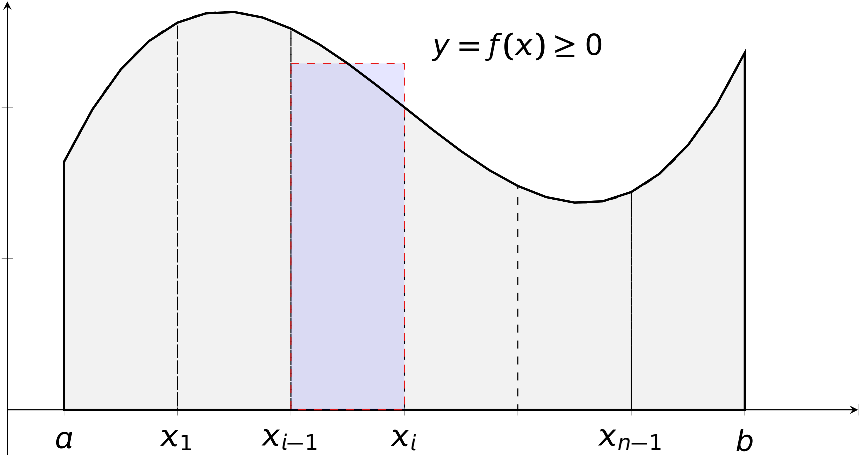
$S =$

曲边梯形的面积



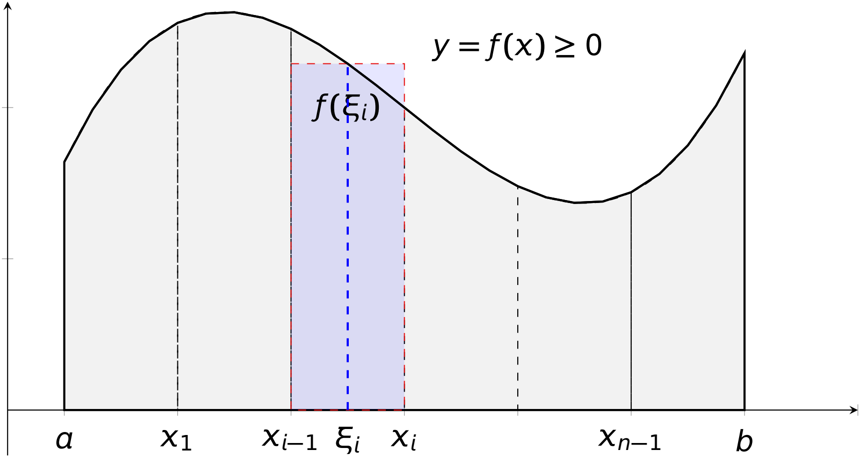
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



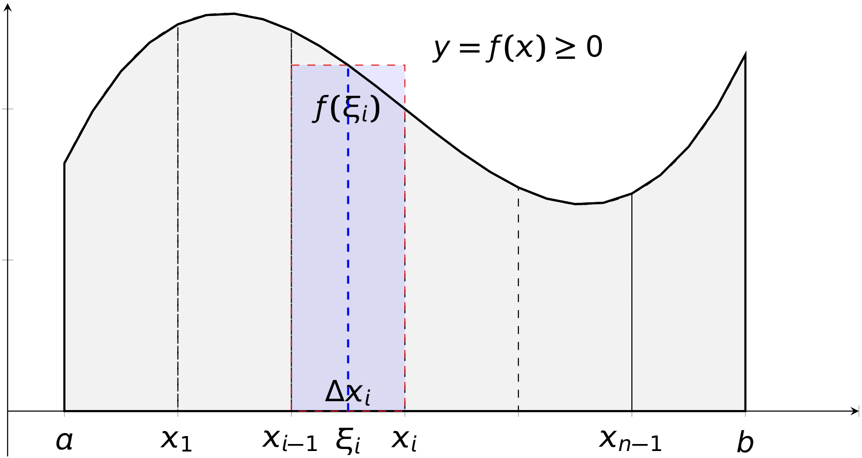
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



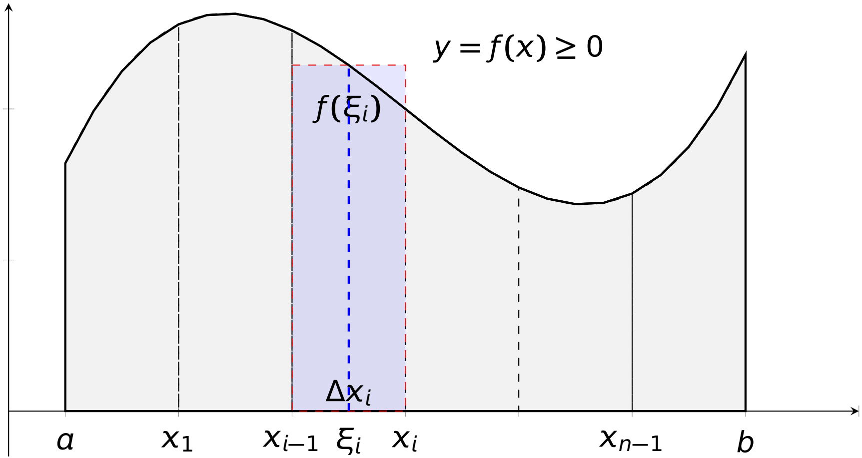
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



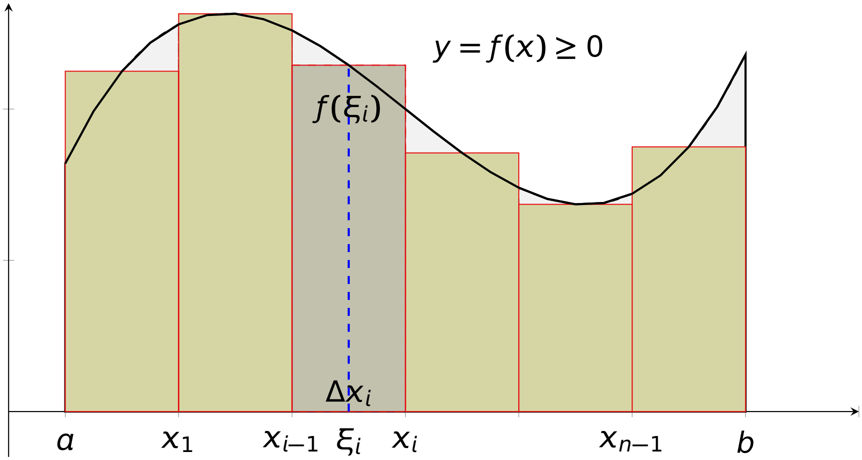
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



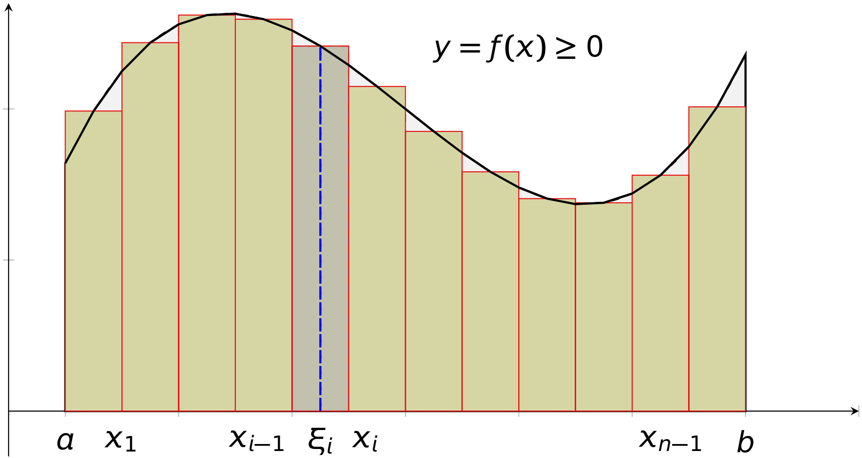
$$S = \sum_i \Delta S_i \qquad f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



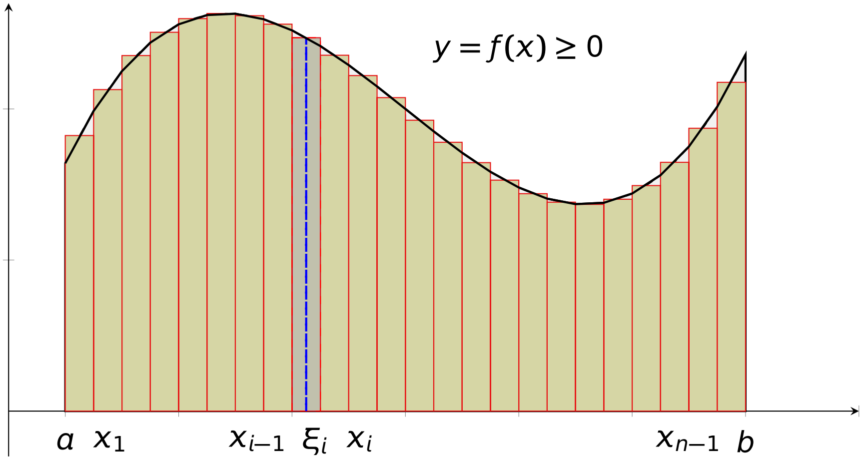
$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



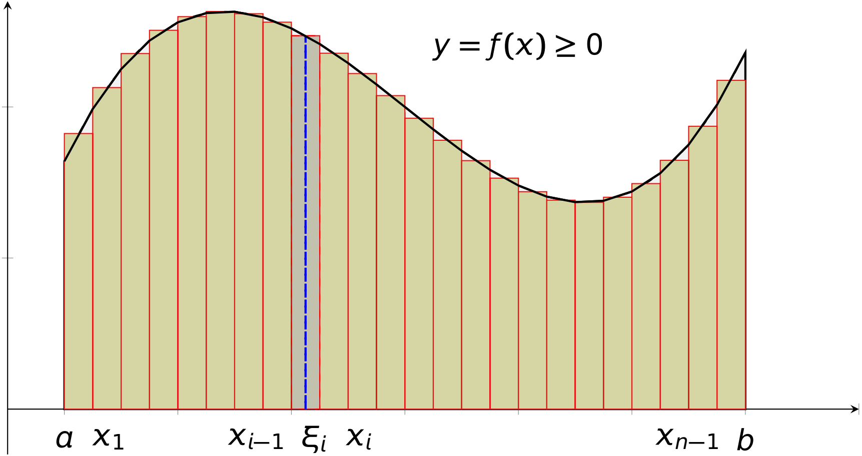
$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积

例子　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

例子　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1. 将区间 $[a, b]$ 分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

曲边梯形的面积

例子　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1. 将区间 $[a, b]$ 分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.
2. 在每小段区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到面积的近似值为 $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

曲边梯形的面积

例子　计算由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1. 将区间 $[a,b]$ 分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.
2. 在每小段区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到面积的近似值为 $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
3. 令 $\Delta x = \max\limits_{i}\{\Delta x_i\}$, 则当 $\Delta x \to 0$ 时就得到面积的实际值为 $S = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \leq t \leq b$ 内的位移 s.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1. 将时间段 $[a, b]$ 分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1. 将时间段 $[a, b]$ 分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.
2. 在每小段区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到位移的近似值为 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1. 将时间段 $[a, b]$ 分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.
2. 在每小段区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到位移的近似值为 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.
3. 令 $\Delta t = \max_i\{\Delta t_i\}$, 则当 $\Delta t \to 0$ 时就得到位移的实际值为 $s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 用点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 用点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x=\max\limits_{i}\{\Delta x_i\}$，如果对 $[a,b]$ 的任意分法，对在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 ξ_i 的任意取法，当 $\Delta x\to 0$ 时，近似和的极限总趋于同一个数 I，

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x=\max\limits_i\{\Delta x_i\}$，如果对 $[a,b]$ 的任意分法，对在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 ξ_i 的任意取法，当 $\Delta x\to 0$ 时，近似和的极限总趋于同一个数 I，我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是**可积的**，并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$．在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x=\max\limits_{i}\{\Delta x_i\}$，如果对 $[a,b]$ 的任意分法，对在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 ξ_i 的任意取法，当 $\Delta x\to 0$ 时，近似和的极限总趋于同一个数 I，我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是**可积的**，并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记为

$$I=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式
- a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a, b]$ 称为积分区间

注记 1　定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关．即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注记 1 定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a, b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关．即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注记 2 (存在定理) 如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续函数（或者是只有有限个间断点的有界函数），则它在 $[a, b]$ 上是可积的.

注记 3 如果 $a > b$，我们规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 3　如果 $a > b$，我们规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

特别地，如果 $a = b$，我们可以得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

注记 4 (几何意义) 设由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

- 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

注记 4 (几何意义) 设由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则定积分
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$
- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x) \leq 0$，则定积分
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -S.$$

注记 4 (几何意义)　设由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

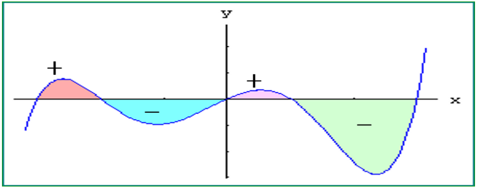
- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

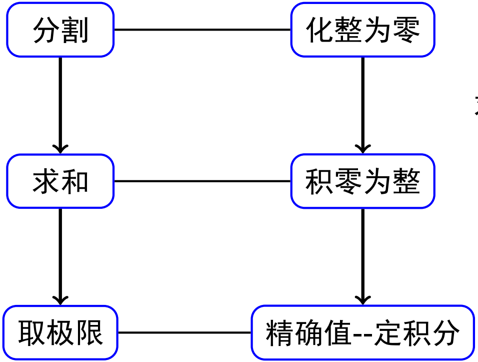
- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -S.$$

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负，则定积分为各部分面积的代数和.



1. 定积分的实质：特殊和式的极限.
2. 定积分的思想方法



求近似，以直代曲

第一节 定积分的概念
第二节 定积分的性质
第三节 微积分基本公式
第四节 定积分的换元积分法
第五节 定积分的分部积分法

性质 1　设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

定积分的性质

性质 1　设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2　（函数可加性）

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3 （区间可加性）设 $a < c < b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3 （区间可加性）设 $a < c < b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 1 即使 c 不在 a 和 b 之间，上述性质依然是成立的.

性质 4

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

推论　$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

例 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

例 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

练习 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_1^2 x\,dx$ 和 $\int_1^2 x^2\,dx$

例 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

练习 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_1^2 x\,dx$ 和 $\int_1^2 x^2\,dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

性质 6 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

性质 6　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

例 2　估计下面的积分值：

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

性质 7 （积分中值定理）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

性质 7 （积分中值定理）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

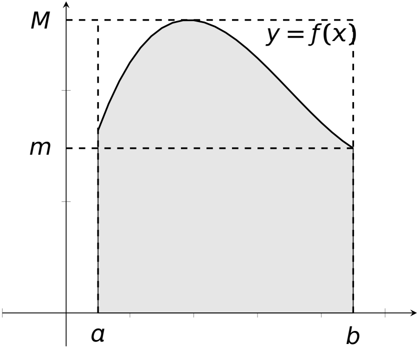
注记 2 上述性质也是说，存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

说明连续函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值是可以取到的.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

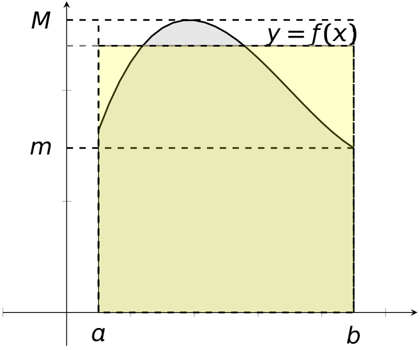
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$



积分中值定理

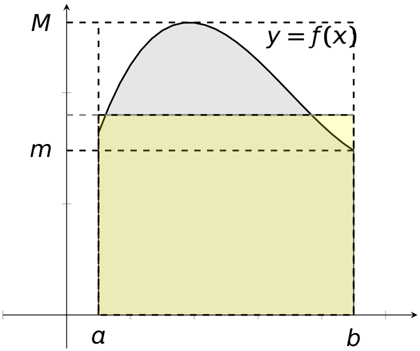
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$



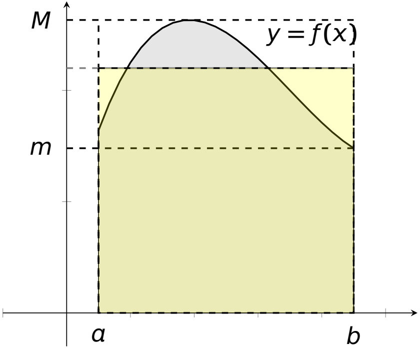
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$



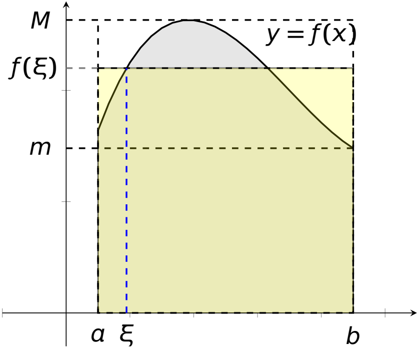
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$



设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$



定积分的保号性

题 1　设在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续，$f(x)\geq 0$，且 $f(x)$ 不恒为零，证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

解　设 $f(c)>0$，则由极限的保号性，存在 $\delta>0$，使得当 $c-\delta<x<c+\delta$ 时，总有 $f(x)>f(c)/2$．从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(c)/2\,\mathrm{d}x = \delta \cdot f(c) > 0$$

第一节	定积分的概念
第二节	定积分的性质
第三节	微积分基本公式
第四节	定积分的换元积分法
第五节	定积分的分部积分法

例子　设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时 $v(t) \geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$.

另一方面这段路程可表示为

$$s(T_2) - s(T_1) \Longrightarrow \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1).$$

其中 $s'(t) = v(t)$

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为积分上限的函数或变上限积分.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为积分上限的函数或变上限积分.

定理 1

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为积分上限的函数或变上限积分.

定理 1

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

注记 1 上述定理说明，对于闭区间上的连续函数，它的原函数总是存在的.

定理 2 对于更一般的变限积分，我们有下面求导公式：

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

特别地，我们有

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$$

$$\left(\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$

例 1 求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t}{x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x} (\mathrm{e}^t - 1) \, \mathrm{d}t}{x^2}$$

例 1 求函数极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x} (\mathrm{e}^t-1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$

练习 1 求函数极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x} \cos^2 t\,\mathrm{d}t}{x}$

例 1 求函数极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} e^t \, dt}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x} (e^t-1) \, dt}{x^2}$

练习 1 求函数极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x} \cos^2 t \, dt}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{0} \arctan t \, dt}{x^2}$

定理 3 (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

注记 (原函数存在定理的意义)

1. 肯定了连续函数的原函数是存在的.
2. 初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

定理 4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

若记 $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$，则上式又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

定理 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

若记 $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$，则上式又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

它称为微积分基本公式或牛顿一莱布尼茨公式.

当 $a > b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 仍成立.

微积分基本公式表明:

一个连续函数在区间 $[a, b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间 $[a, b]$ 上的增量.

微积分基本公式表明:

一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量.

牛顿--莱布尼茨公式架起了微分学与积分学之间的桥梁，将求定积分问题转化为求原函数的问题.

例 2　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 x^2 \, dx$.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ 5, 1 < x \le 2 \end{cases}$ ，求 $\int_0^2 f(x) \, dx$.

例 2 求下列定积分.

(1) $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ 5, 1 < x \le 2 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x) \, \mathrm{d}x$.

答案：(1) $\frac{1}{3}$, (2) 6.

练习 2 求下列定积分.

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$

(3) $\int_{-1}^2 |2x| \,\mathrm{d}x$

本节主要内容

1. 积分上限函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
2. 积分上限函数的导数 $\Phi'(x) = f(x)$
3. 微积分基本公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

本节主要内容

1. 积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
2. 积分上限函数的导数 $\Phi'(x)=f(x)$
3. 微积分基本公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

牛顿--莱布尼茨公式架起了微分学与积分学之间的桥梁.

第一节 定积分的概念

第二节 定积分的性质

第三节 微积分基本公式

第四节 定积分的换元积分法

第五节 定积分的分部积分法

定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

(1) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上具有连续导数且值域为 $[a,b]$, 则有

$$(*)\qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

公式 (*) 被称为定积分的换元公式.

注：换元公式对 $a>b$ 也适用.

证明 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

则

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)] + C,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= F(b) - F(a) \\ &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] \\ &= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例 1　计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$

例 1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $x=a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且当 $x=0$ 时, $t=0$, 当 $x=a$ 时 ,$t=\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$

例 1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $x = a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且当 $x = 0$ 时, $t = 0$, 当 $x = a$ 时 ,$t = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t$$

例 1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $x = a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且当 $x = 0$ 时, $t = 0$, 当 $x = a$ 时 ,$t = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}a^2.\end{aligned}$$

例 2　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx$.

例 2　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx$.

解　令 $t = \cos x$, 则 $dt = -\sin x \, dx$,

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0, \quad x = 0 \Rightarrow t = 1,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx = -\int_1^0 t^5 dt = \left. \frac{t^6}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

例 2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx$.

解 令 $t=\cos x$, 则 $dt=-\sin x \, dx$,

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0, \quad x=0 \Rightarrow t=1,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx = -\int_1^0 t^5 dt = \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, d(\cos x) = \left[-\frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$$

应用换元公式时应注意:

(1) 用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量时，积分限也相应的改变.

应用换元公式时应注意:

(1) 用 $x = \varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量时，积分限也相应的改变.

(2) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必象计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只要把新变量的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 然后相减就行了.

换元公数注意事项 (一)

应用换元公式时应注意:

(1) 用 $x = \varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量时，积分限也相应的改变.

(2) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必象计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只要把新变量的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 然后相减就行了.

(3) 用第一类换元法即奏微分法解定积分时可以不换元，当然也就不存在换上下限的问题了.

例 3　计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\, dx$

例 3 计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}x$

解 由条件可得:

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}} x\,\mathrm{d}(\sin x)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}} x\,\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

例 4 计算 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

例 4 计算 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

解 由条件知:

$$原式 = \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}} = \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{(1-\ln x)}}$$

$$= 2\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$= 2[\arcsin(\sqrt{\ln x})]_{\sqrt{e}}^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6}$$

例 5　计算 $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x.\quad (a>0)$

解　令 $x=a\sin t, \mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\ x=0\Rightarrow t=0.$$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t}{a\sin t+\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left[\ln|\sin t+\cos t|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

换元公数注意事项 (二)

应用换元公式时应注意:

(1) 用换元法解题时，要注意看换元积分公式的内容;

考察 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 令 $x = \frac{1}{t}$.

换元公数注意事项 (二)

应用换元公式时应注意:

(1) 用换元法解题时，要注意看换元积分公式的内容;

考察 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 令 $x = \frac{1}{t}$ ....(×)

(2) 对分段函数和含绝对值号的积分，计算时必须分区间进行;

(3) 对被积函数进行适当变形时, 要注意符号问题.

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

....

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

定理　(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

....

证明　(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而　$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t = -x$）

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t = -x$）

$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

....

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t = -x$）

$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

....

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

…………………………………………………………

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

例 6 求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x$

(2) $\int_{-1}^{1} (x+1)^3 \, \mathrm{d}x$

例 6　求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x$

(2) $\int_{-1}^{1} (x+1)^3 \,\mathrm{d}x$

例 7　证明 $\int_0^{2\pi} \sin^3 x \,\mathrm{d}x = 0$.

例 8　计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

例 8 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解 易知

$$原式 = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

例 8　计算 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解　易知

$$\text{原式} = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{1} \frac{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{1-\left(1-x^2\right)}\,\mathrm{d}x$$

例 8　计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

解　易知

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= 4\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx = 4\int_{0}^{1} \frac{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{1-(1-x^2)}\,dx \\
&= 4\int_{0}^{1} \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)dx \\
&= 4 - 4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

例 8　计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

解　易知

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= 4\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx = 4\int_{0}^{1} \frac{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{1-\left(1-x^2\right)}\,dx \\
&= 4\int_{0}^{1} \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)dx \\
&= 4-4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\ (\text{圆的面积})
\end{aligned}
$$

例 8 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 易知

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{1} \frac{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{1-\left(1-x^2\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{0}^{1} \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= 4-4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \ (\text{圆的面积}) \\
&= 4-\pi
\end{aligned}
$$

例 9 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，以 T 为周期则

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.\ (a\ 为任意实数)$$

例 9 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，以 T 为周期则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.\ (a\ \text{为任意实数})$$

解 由条件易知

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(T+t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t$$

$$\therefore \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

例 10　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

证明　(1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2} - t))(-\mathrm{d}t)$$

例 10　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

证明　(1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2} - t))(-\mathrm{d}t)$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

我们立即可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

续　(2) 令 $x=\pi-t$, 则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-\mathrm{d}t)$$

续　(2) 令 $x=\pi-t$, 则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-\mathrm{d}t)$$

$$= -\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)(-\mathrm{d}t)$$

续　(2) 令 $x=\pi-t$, 则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-\mathrm{d}t)$$

$$= -\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)(-\mathrm{d}t)$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)\mathrm{d}x$$

续 (2) 令 $x=\pi-t$, 则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} (\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-\mathrm{d}t)$$

$$= -\int_0^{\pi} (\pi-t)f(\sin t)(-\mathrm{d}t)$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi-x)f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

从而

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

利用上述结论, 我们有

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\arctan(-1) - \arctan 1] = \frac{\pi^2}{4}.$$

小结

定积分的换元法

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

奇偶函数、周期函数的几个等式.

第一节	定积分的概念
第二节	定积分的性质
第三节	微积分基本公式
第四节	定积分的换元积分法
第五节	定积分的分部积分法

定积分的分部积分公式

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

定积分的分部积分公式

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

证明　易知 $(uv)' = u'v + uv'$, 于是

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

证明　易知 $(uv)' = u'v + uv'$, 于是

$$\int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b$$

即

定积分的分部积分公式

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

证明 易知 $(uv)' = u'v + uv'$, 于是

$$\int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b$$

即

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv'\,\mathrm{d}x$$

从而

定积分的分部积分公式

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

证明 易知 $(uv)' = u'v + uv'$, 于是

$$\int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b$$

即

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv'\,\mathrm{d}x$$

从而

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_1^5 \ln x \, \mathrm{d}x$

(2) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_1^5 \ln x \, \mathrm{d}x$

(2) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

解　(1) $5\ln 5 - 4$, (2) 1

练习 1 求下列定积分.

(1) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

练习 1 求下列定积分.

(1) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

解 (1) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$, (2) 1

练习 2 求定积分 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} \, dx$.

练习 1　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

解　(1) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$, (2) 1

练习 2　求定积分 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} \, dx$.

解　$2e^2 + 2$

例 2 证明定积分公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1 的正奇数} \end{cases}$$

例 2　证明定积分公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1 的正奇数} \end{cases}$$

证明　递推公式.

例 3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$.

例 3　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{1+\cos 2x}$.

解　因为 $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$，故

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}(\tan x)$$

例 3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$.

解 因为 $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$，故

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$$

例 3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{1+\cos 2x}$.

解 因为 $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$，故

$$\begin{aligned}
\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{1+\cos 2x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2}\,d(\tan x) \\
&= \frac{1}{2}[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\ln\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}
\end{aligned}$$

例 4　计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}\,dx$.

例 4 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}\,dx$.

解 由分部积分可得:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}\,dx &= -\int_0^1 \ln(1+x)\,d\left(\frac{1}{2+x}\right) \\
&= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\,d\left(\ln(1+x)\right) \\
&= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}\,dx \\
&= -\frac{\ln 2}{3} + \left[\ln(1+x)-\ln(2+x)\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.
\end{aligned}$$

例 5　设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

例 5　设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

解　由分部积分可得

$$原式=\frac{1}{2}(\cos 1-1)$$

小结

设函数 $u(x)$ 、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有.

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

复习 1　求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$.

复习 1 求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x e^{-x}\,dx$;

(2) $\int_1^2 x \ln x\,dx$.

复习 2 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$.

复习 3 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，而且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$．求 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x$．