第二章　极限与连续

一、单项选择

1. 设 $x_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (B) .

(A) >0　　(B) ≥ 0　　(C) $=0$　　(D) <0

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} =$ (C) .

(A) ∞　　(B) 1　　(C) 不存在　　(D) 0

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}} + \lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} =$ (D)

(A) e　　(B) e^{-1}　　(C) $\mathrm{e}+1$　　(D) $\mathrm{e}^{-1}+1$

4. 下列运算过程正确的是 (C)

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+n} = 0+0+\cdots+0=0$

(B) 当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$

(C) 当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

(D) 当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})x}=1$

5. 设 $0<a<b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n} =$ (D)

(A) 1　　(B) 0　　(C) a　　(D) b

6. 设 $f(x)$ 在 $(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$ 定义. 如果极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在, 则下列结论正确的是 (B)

(A) $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 有界;

(B) 存在正数 δ, $f(x)$ 在 $(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 有界;

(C) $f(x)$ 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 有界;

(D) 存在正数 δ, $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 有界.

7. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{f(3x)} =$ (C)

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

8. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在, 则 (D) .

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 一定都不存在;

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 一定都存在;

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 恰有一个存在, 而另一个不存在;

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 都不一定存在.

9. 当 $x\to 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个是比另三个更高阶的无穷小量 (D) .

(A) x^2 (B) $1-\cos x$ (C) $\sqrt{1-x^2}-1$ (D) $x-\tan x$

10. 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos 2x$ 与 x^2 相比是 (B) .

(A) 高阶无穷小量 (B) 同阶但不等价的无穷小量

(C) 低阶无穷小量 (D) 等价无穷小量

11. 当 $x\to 0$ 时, $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是 (D)

(A) 无穷小量 (B) 无穷大量

(C) 有界量非无穷小量 (D) 无界但非无穷大量

12. 当 $x\to 0$ 时, 下列函数中比 x 高阶的无穷小量是 (B) .

(A) $x+\sin x$ (B) $x-\sin x$ (C) $\ln(1+x)$ (D) $\ln(1-x)$

13. 设在某个极限过程中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是无穷大量, 则下列函数中哪一个也必是无穷大量 (C) .

(A) $f(x)+g(x)$ (B) $f(x)-g(x)$ (C) $f(x)\cdot g(x)$ (D) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

14. $x\to 0$ 时, $1-\cos 3x$ 是 x^2 的 (B) .

(A) 高阶无穷小 (B) 同阶无穷小, 但不等价

(C) 等价无穷小 (D) 低阶无穷小

15. $x=1$ 是 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ 的 (D)

(A) 连续点 (B) 跳跃间断点 (C) 可去间断点 (D) 无穷间断点

16. $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{(x+1)(x+2)}$ 的连续区间是 (B)

(A) $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$　　(B) $[3,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

17. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x-x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 则 $f(x)$ 的间断点个数为 (C).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

18. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$ 为连续函数, 则 $k=$ (B)

(A) 1　　(B) -3　　(C) 0　　(D) 3

19. 函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\leq 0\\ e^{\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否连续? (C)

(A) 连续　　(B) 不连续, 因为无定义

(C) 不连续, 因为极限不存在　　(D) 前面都不对

20. 要使 $f(x)=(1+x^2)^{-\frac{2}{x^2}}$ 在 $x=0$ 处连续, 应补充定义 $f(0)$ 的值为 (B).

(A) 0　　(B) e^{-2}　　(C) e^{-4}　　(D) e^{-1}

二、填空题

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(4x-1)^{\alpha}}=\beta$, 则 α,β 的值是 $\underline{\alpha=4,\beta=\dfrac{1}{4^4}}$.

2. 若 $a>0$, $b>0$ 均为常数, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\underline{(ab)^{\frac{3}{2}}}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\underline{\dfrac{2}{\pi}}$

4. 设 $P(x)$ 是 x 的多项式, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)-6x^3}{x^2}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)}{x}=3$, 则 $P(x)=\underline{6x^3+2x^2+3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=\underline{e^{-\frac{2}{3}}}$.

6. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax-x+4}{x-1}=A$, 则有 $a=\underline{4}$, $A=\underline{-2}$.

7. 设 $f(x)=x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\underline{2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin^3 x\cdot\sin\frac{1}{x}}{3x^2}=\underline{\dfrac{1}{3}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x))=$ $\underline{\frac{\pi}{6}}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{1+x^2}=$ $\underline{2}$.

12. 当 $x\to0$ 时, $2x^2+3x^{\frac{5}{2}}$ 是关于 x 的 $\underline{\text{高或 }2}$ 阶无穷小.

13. 当 $x\to0$ 时, $\sqrt{1-3x}=1+ax+bx^2+o(x^2)$, 则 a 和 b 的值分别为 $\underline{a=-\frac{3}{2}, b=-\frac{9}{8}}$.

14. 当 $x\to0$ 时, $2\sin x-\sin2x$ 与 x^k 是等价无穷小量, 则 $k=$ $\underline{3}$.

15. 函数 $y=\frac{\sqrt{1+x}}{(x-1)(x+2)}$ 的间断点是 $\underline{x=1}$.

16. 设函数 $y=\begin{cases}(1-x)^{\frac{3}{x}} & x\neq0\\ K & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则参数 $K=$ $\underline{e^{-3}}$.

17. 函数 $f(x)=\begin{cases}x+a & x\leq0\\ e^x+1 & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ $\underline{2}$

18. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2\sin2x}{x} & x<0\\ a & x=0\\ \frac{\ln(1+4x)}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处间断, 则 a $\underline{\neq4}$.

19. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的连续区间是 $\underline{(-\infty,-2],(2,+\infty)}$.

20. $x=1$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{1-x}$ 的 $\underline{\text{跳跃间断点}}$.

三、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}$.

解. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x}=e$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

解. e^{-4}

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

解. $\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})$

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=2$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\arctan x\cdot\arcsin\frac{1}{x}\right)$

解. 0

6. $x_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解. $\because x_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})$

解. 记 $x_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$, 因为

$$\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le x_n\le\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2},$$

即

$$\frac{n}{n+1}\le x_n\le 1$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

所以由夹逼定理, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

8. 若 $x_1=a>0$, $y_1=b>0(a<b)$, $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$

解. 由不等式 $\sqrt{x\cdot y}\le\dfrac{x+y}{2}$, 知 $x_n\le y_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 于是,

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\ge\sqrt{x_n\cdot x_n}=x_n,\ y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\le\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,$$

即, $\{x_n\}$ 为递增数列, $\{y_n\}$ 为递减数列, 又 $a=x_1\le x_n\le y_n\le y_1=b$, 则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均为有界数列. 故它们均存在极限. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$, 对 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 的两边取极限, 得 $\alpha=\beta$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

9. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在, 且 $f(x)=x^2(e^{-\frac{1}{x^2}}-1)+\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^4}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

解. 1.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} & x>0\\ a & x=0\\ \dfrac{\sin kx}{x} & x<0\end{cases}$ （其中 $k\neq 0$），

（1）求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右极限；

（2）当 a 和 k 取何值时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 连续？

解. （1）e^{-2}, k（2）$a=k=e^{-2}$.

四、综合与应用题

1. 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

解. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=-1$，故原极限不存在.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必等于 0, 为什么？

解. 因 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=A\cdot 0=0$

3. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\tan\frac{x}{2}}$, 问: 当 x 趋于何值时,$f(x)$ 为无穷小.

解. 当 $x_k=(2k-1)\pi(k\in Z)$ 时，$\lim\limits_{x\to x_k}\dfrac{x}{\tan\frac{x}{2}}=0$. 故当 $x\to x_k$ 时, $f(x)$ 为无穷小.

4. 确定 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x-1)}$ 的间断点, 并判定其类型.

解. $x=0$ 及 $x=1$ 是可去间断点

5. 求 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点, 并判别间断点的类型.

解. 因为 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, 而

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2,\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty.$$

因此有间断点：$x=1$ 为可去间断点,$x=2$ 为无穷间断点.

6. 求函数 $y=6x+\dfrac{1}{x}$ 的连续区间, 若有间断点, 试指出间断点的类型.

解. 函数的连续区间为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$, 点 $x=0$ 为函数的第二类无穷间断点.

7. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$ 的连续性.

解. 因为

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}\overset{y=\frac{x-t}{t-1}}{=}\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{x+y}{y(x-1)}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$$

其在点 $x=1$ 处没有定义, 是间断点, 故 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, 点 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\geq 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解. 因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1,$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

9. 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & x<0\\ \dfrac{\cos x}{x+2} & x\geq 0\end{cases}$ $(a>0)$

(1) 当 a 取何值时, 点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点? 是何种间断点?

(2) 当 a 取何值时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty+\infty)$ 上连续? 为什么?

解. (1) 在点 $x=0$ 处,

$$f(0)=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

故当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, 所以点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) 当 $a=1$ 时, 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 又因为在 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 为初等函数, 所以连续. 故当 $a=1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty+\infty)$ 上连续.

10. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}$ 的解析式, 并判断它的间断点及其类型.

解. $f(x)=\begin{cases}x & x<-1\\ 0 & x=-1\\ x & -1<x<1\\ 0 & x=1\\ x & x>1\end{cases}$, $x=-1,x=1$ 都是跳跃间断点.

五、分析与证明题

1. 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

解. $\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

成立, 只需 $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则当 $0<\left|x-(-\dfrac{1}{2})\right|<\delta$ 时, 都有

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2.$$

2. 设 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 且 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)=A$. 证明 $\lim_{x\to x_0}\beta(x)f(x)=A$.

解. 由条件可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\beta(x)f(x)&=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)\cdot f(x)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot f(x)\\&=1\cdot A\\&=A\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$, $g(x)$ 为连续函数, 试证明 $M(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}$ 也是连续函数.

解. 易知

$$M(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)]+\frac{1}{2}\left|f(x)-g(x)\right|$$

$f(x)$, $g(x)$ 为连续函数, 故 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ 均为连续函数, 从而 $\left|f(x)-g(x)\right|$ 是连续函数.

所以有

$$M(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)]+\frac{1}{2}\left|f(x)-g(x)\right|$$

是连续函数.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 且在点 $x=0$ 处连续, 又对任意的 x_1 和 x_2, 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. 证明:$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解. 令 $x_1=0$, $x_2=0$, 得 $f(0)=0$; 又令 $x_1=x$, $x_2=\Delta x$, 则 $f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x)$, 即

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(\Delta x),$$

而 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,
所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0,$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

5. 证明方程 $x=a\sin x+2\ (a>0)$ 至少有一个正根, 并且不超过 $a+2$.
解. 设 $f(x)=x-a\sin x-2$, 下面分两种情形来讨论:
情形 1：若 $\sin(a+2)=1$, 则因为 $a>0$, 故 $a+2$ 是方程 $x=a\sin x+2\ (a>0)$ 的正根, 并且不超过 $a+2$.
情形 2：若 $\sin(a+2)\neq 1$, 则因为 $a>0$, 故

$$f(a+2)=a[1-\sin(a+2)]>0,\ f(0)=-2<0.$$

又因 $f(x)$ 在 $[0,a+2]$ 上连续, 故由零点定理知，$\exists\xi\in(0,a+2)$, 使得 $f(\xi)=0$, 因此 ξ 是方程 $x=a\sin x+2\ (a>0)$ 的正根, 并且不超过 $a+2$.