第一节	微分中值定理
第二节	洛必达法则
第三节	导数的应用
第四节	函数的最大值和最小值及其在经济中的应用
第五节	泰勒公式

第一节	微分中值定理
第二节	洛必达法则
第三节	导数的应用
第四节	**函数的最大值和最小值及其在经济中的应用**
第五节	泰勒公式

近似估计

假设$f'(x_0)$存在。已经知道当$x \to x_0$时有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\big(x - x_0\big)$$

是否存在二次多项式$g(x)$使得当$x \to x_0$时有

$$f(x) \overset{?}{=} g(x) + o\left((x - x_0)^2\right)$$

令$g(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2$，则有

$$A = f(x_0), \qquad B = f'(x_0), \qquad C = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

$$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

令$x\to x_0$，得到$A=f(x_0)$，从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0).$$

再令$x\to x_0$，得到$B=f'(x_0)$。因此

$$C=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} \qquad \boxed{\text{洛必达法则}}$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0) \qquad \boxed{\text{导数的定义}}$$

定理 1 (带佩亚诺余项的泰勒公式)

设$f(x)$在x_0点存在n阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big)$$

解 2 连续用$n-1$次洛必达法则，再用导数的定义.

定理 3 (带拉格朗日余项的泰勒公式)

设$f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内存在$n+1$阶导数，则$\forall x\in U(x_0)$有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中余项$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$， ξ介于x_0和x之间。

证：对$R_n(x)$和$(x-x_0)^{n+1}$连续用$n+1$次柯西中值定理.

当$x_0=0$时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中$R_n(x)=o(x^n)$ ························· 佩亚诺余项

或者$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ························ 拉格朗日余项

ξ介于0和x之间。

令$\xi=\theta x$，则$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$。

例 4 设函数 (x) 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0, x_1, x_2$ 为 $[a,b]$ 上任意两点. 证明: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

证明.

设 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点的一阶泰勒展式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

ξ 介于 x 与 x_0 之间, 代入特殊点 x_1 与 x_2, 得

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\tfrac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2,$$
$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\tfrac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2,$$

其中 ξ_1 介于 x_1 与 x_0 之间, ξ_2 介于 x_2 与 x_0 之间. 两式相加得,

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{(x_1-x_2)^2}{2}\left(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right),$$

$\because f''(x)<0, x\in(a,b) \quad \therefore f(x_1)+f(x_2)<2f(x_0)$ 即

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

利用泰勒公式证明不等式

利用泰勒公式证明题目

1. 依题意选定 n, x_0 和 x.
2. 写出相应的泰勒展开式
3. 由展开式推出要证明的结论

若已知一系列点的函数值或导数值，或涉及到二阶或三阶以上的高阶导数，可以考虑用泰勒公式。

例 5 求$f(x)$的带拉格朗日余项的麦克劳林公式. 小结

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = \sin x$ ······························ 图形

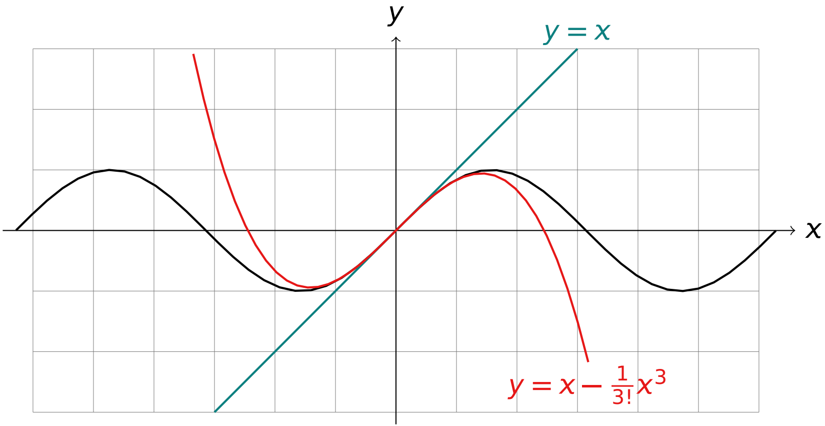
(3) $f(x) = \cos x$

(4) $f(x) = \ln(1+x)$ ······························ 应用

(5) $f(x) = (1+x)^\alpha$ ······························ 应用

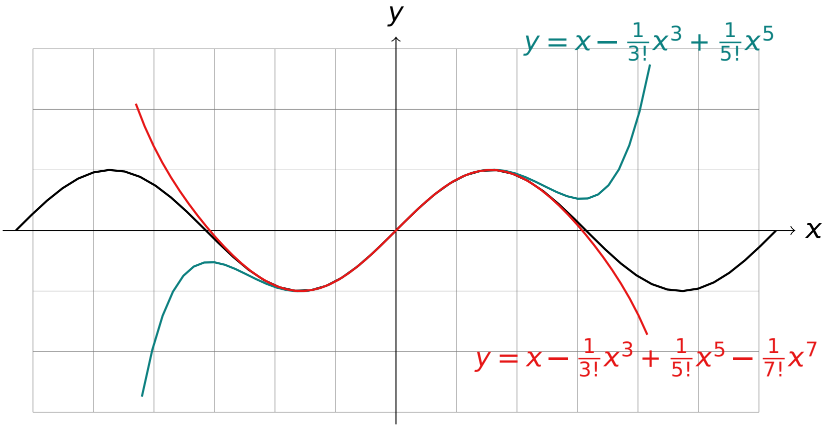
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



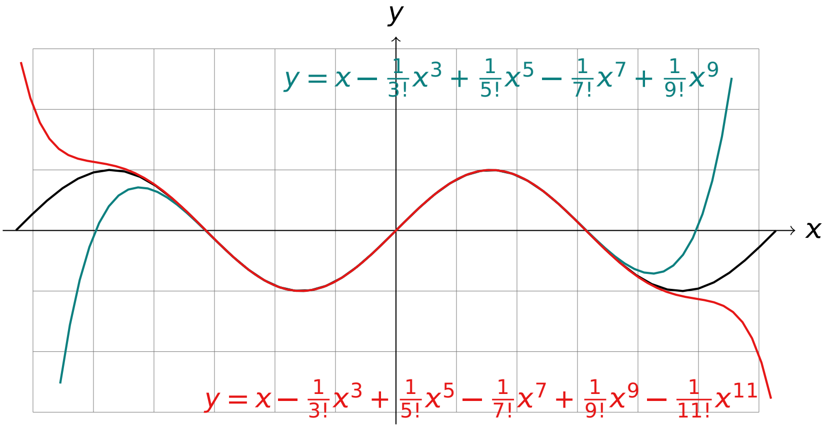
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



返回

例 6　证明：当$x > 0$时，有$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$。

解　利用$\ln(1+x)$的1阶麦克劳林公式.

返回

例 7　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$。

解　利用$\sqrt{1+x}$的2阶麦克劳林公式，求得极限等于$-\dfrac{9}{32}$.

返回

例 8　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解　泰勒公式求极限 由泰勒公式可得

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o\left(x^4\right),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right),$$

于是

$$e^{x^2}+2\cos x-3=\left(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!}\right)x^4+o\left(x^4\right),$$

所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}=\frac{7}{12}.$$

初等函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + C_\alpha^3 x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + R_n(x)$$

返回