第四节	隐函数及由参数方程所确定的函数的导数
4.1	隐函数的导数
4.2	由参数方程所确定的函数的导数
4.3	小结　思考

- 显函数：由$y=f(x)$直接确定的函数关系。
- 隐函数：由$F(x,y)=0$所确定的函数$y=y(x)$称为隐函数。

$$F(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x)$$ 隐函数的显化

问题　隐函数不易显化或不能显化如何求导?

解法　将y看成x的函数，方程两边同时对x求导。

例 1　求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$

解　方程两边对x求导,

$$y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - e^x + e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x - y}{x + e^y},$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{y=0} = 1.$$

例 2　设曲线C的方程为 $x^3 + y^3 = 3xy$, 求过 C 上点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 的切线方程, 并证明曲线C在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导得

$$3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$$

故

$$y'\big|_{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\bigg|_{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}=-1$$

所求切线方程为

$$y-\frac{3}{2}=-\left(x-\frac{3}{2}\right),$$

即 $x+y-3=0$. 法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$, 即 $y=x$，显然通过原点.

例 3 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求 y'' 在点$(0,1)$ 处的值 .

解 方程两边对x求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0 \qquad (1)$$

代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'|_{(0,1)} = \frac{1}{4}$. 将方程(1)两边再对$x$求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2\left(y'\right)^2 + 4y^3y'' = 0$$

代入 $x = 0, y = 1, y'|_{(0,1)} = \frac{1}{4}$ 得

$$y''|_{(0,1)} = -\frac{1}{16}.$$

练习 1　求由方程确定的隐函数的导数y'_x：

(1) $e^y + e^x - 3x + 4y^2 = 0$；

(2) $x^3y + 2x^2y^2 + 4 = 0$。

对于多个函数相乘除或者幂指数函数$(u(x))^{v(x)}$的情形，可以先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例 4　设 $y = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$，求 y'

解 等式两边取对数得

$$\ln y = \ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-1) - 2\ln(x+4) - x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1,$$

因此

$$y' = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1\right].$$

例 5　设 $y = x^{\sin x}(x > 0)$, 求 y'.

解　从而等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. 上式两边对 x 求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

从而

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

对数求导法

一般地, 对于函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0)$, 因为

$$\ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x),$$

并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

所以

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x),$$

从而

$$f'(x)=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right].$$

第四节	隐函数及由参数方程所确定的函数的导数
4.1	隐函数的导数
4.2	由参数方程所确定的函数的导数
4.3	小结　思考

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与x间的函数关系，称此为由参数方程所确定的函数.

例 6　参数方程$\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases}$　消去参数 t 可得

$$y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}.$$

显然，$y' = \frac{1}{2}x$

由参数方程所确定的函数的导数

问题　消参困难或无法消参如何求导?

在方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 设函数 $x = \varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 则

$$y = \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$$

再设函数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi(t) \neq 0$, 由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

若函数 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 二阶可导，则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

例 7 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程 .

解 由条件可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

于是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \frac{\pi}{2}} = 1.$$

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$, $y = a$, 故所求切线方程为

$$y - a = x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), \quad \text{即} \quad y = x + a\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

例 8　求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解　由条件可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$

$$= \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

小结

- 隐函数求导法则: 直接对方程两边求导;
- 对数求导法: 对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;
- 参数方程求导: 实质上是利用复合函数求导法则;

思考 设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, 由 $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ $(\varphi'(t) \neq 0)$ 可知 $y''_x = \dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$, 对吗?

解 不对.

$$y''_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'_x\right) = \frac{\mathrm{d}y'_x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$