

概率论与数理统计

第一章 · 随机事件的概率

上海立信会计金融学院

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

- 1 确定性现象：在一定条件下必然发生的现象；
- 2 不确定性现象：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。

1 个别现象 不能重复试验

2 随机现象：可以重复试验，并且结果呈现某种规律

- 太阳东升西落 (确定)
- 明天是否是晴天 (不确定)
- 抛一枚均匀的硬币，正面是否向上 (不确定)

概率论与数理统计就是研究随机现象量的规律性的数学学科。

第一节 随机事件

第二节 随机事件的概率

第三节 条件概率

第四节 事件的独立性

第一节

随机事件

1.1 随机试验与样本空间

1.2 随机事件

1.3 事件的关系与运算

试验

产生观测结果的行为或过程称为试验.

- E1 掷一颗骰子，观察所掷的点数是几；
- E2 将一枚硬币抛两次，观察正面 H 出现的次数；
- E3 将一枚硬币抛两次，观察正面 H，反面 T 出现的情况；
- E4 观察某产品的使用寿命；
- E5 观察某地明天的天气是雨天还是非雨天.

随机试验

一个试验被称为**随机试验**，如果它满足条件：

- 1 可能结果不止一个，结果明确；
- 2 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

小注：可以在相同的条件下重复进行的**随机试验**称为**可重复的随机试验** (E1-E4)，否则称为**不可重复的随机试验** (E5).

在不引起混淆的情况下，我们将用**随机试验**或**试验**指代**可重复的随机试验**.

样本空间

随机试验的每个可能结果称为一个样本点，全体样本点组成的集合称为样本空间.

习惯上分别用 ω 和 Ω 表示样本点与样本空间.

样本空间

例：求以下随机试验的样本空间

(1) 掷两枚硬币，观察正、反面出现的情况；

$$\{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$$

(2) 记录某地的最低与最高气温.

$$\{(x, y) | a \leq x \leq y \leq b\}$$

其中 a, b 分别为该地气温的下界和上界.

第一节

随机事件

1.1 随机试验与样本空间

1.2 随机事件

1.3 事件的关系与运算

随机事件

样本空间 Ω 的任意一个子集称为一个随机事件，简称事件.

事件常用大写字母 A, B, C 等表示.

设 A 是一个事件，当试验中出现的样本点 $\omega \in A$ 时，称事件 A 发生.

随机事件

随机事件的分类：

- 1 只含一个样本点的事件称为基本事件
- 2 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
- 3 Ω ：必然事件
- 4 \emptyset ：不可能事件

第一节

随机事件

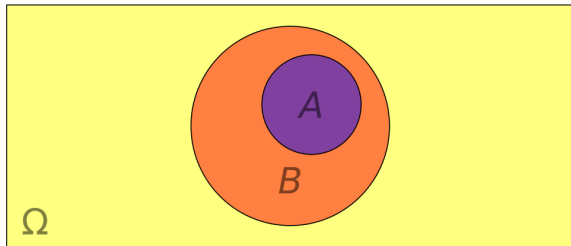
1.1 随机试验与样本空间

1.2 随机事件

1.3 事件的关系与运算

事件的关系

若 $A \subset B$ (或 $B \supset A$), 则称事件 A 是事件 B 的子事件 (或事件 B 包含事件 A).



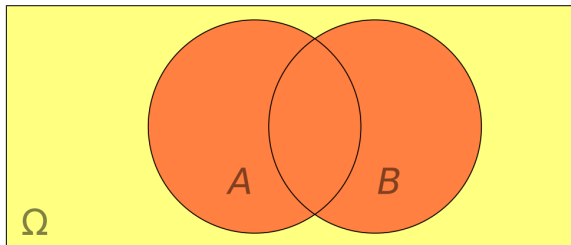
含义: 若事件 A 发生时, 事件 B 一定发生.

小注: 对任意事件 A , 有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 则称事件 A 与 B 相等.

事件的运算

称事件 $A \cup B$ 为事件 A 与 B 的**和事件**，其中
 $A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$.



含义： 事件 A 、 B 至少有一个发生.

事件的运算

事件的和可以推广到多个的情形：如 n 个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \text{“事件 } A_1, \dots, A_n \text{ 至少有一个发生”}$$

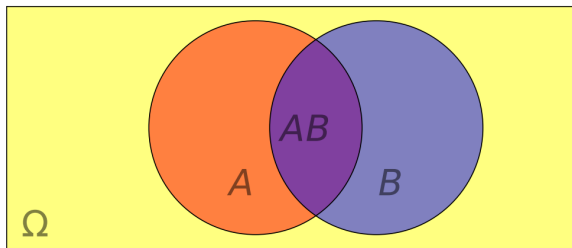
可数个事件的和事件

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \dots, \text{ 至少有一个发生”}$$

事件的运算

称事件 $A \cap B$ (简记为 AB) 为事件 A 与 B 的积事件, 其中

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$



含义: 事件 A 和 B 同时发生.

事件的运算

事件的积可以推广到多个的情形：如 n 个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \text{“事件 } A_1, \dots, A_n \text{ 全都发生”}$$

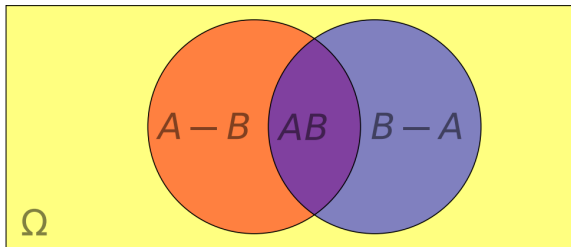
可数个事件的积事件

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \dots, \text{ 全都发生”}$$

事件的运算

称事件 $A-B$ 为事件 A 与 B 的差事件, 其中

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.$$

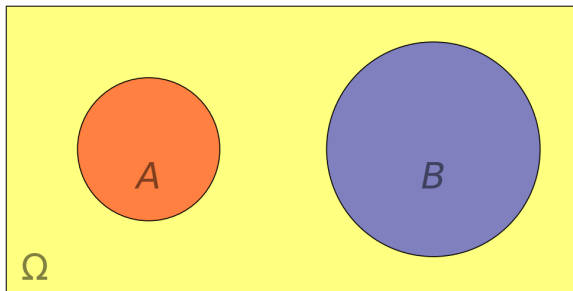


含义: 事件 A 发生, 但 B 不发生.

性质: 对任意两个事件 A 和 B , 总有 $A-B = A-A \cap B$.

事件的关系

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).

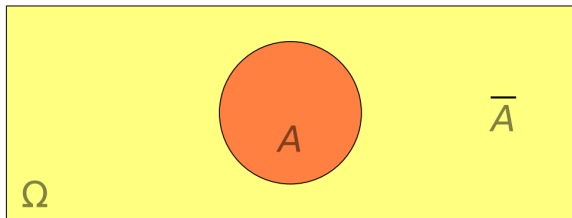


含义: 事件 A 与 B 不可能同时发生.

事件的运算

称 $\Omega - A$ 为事件 A 的**对立事件**(或**逆事件**), 记为 \bar{A} .

含义: 事件 A 不发生.



性质:

- 1 由差事件与对立事件的定义, 显然 $A - B = A \cap B$.
- 2 事件 A 、 B 对立当且仅当 A 、 B 互斥且 $A \cup B = \Omega$.

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1 交换律: $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$

2 结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4 对偶律: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

例 1 一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标 ($i = 1, 2, 3$). 试用事件的运算符号表示下列事件：

- (1) 三次射击至少有一次击中目标；
- (2) 三次射击恰有两次击中目标；
- (3) 三次射击至多有一次击中目标.

解： 有条件可得

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(2) $A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3$.

(3) $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$.

第一节

随机事件

第二节

随机事件的概率

第三节

条件概率

第四节

事件的独立性

随机事件的概率

事件的**概率**：刻画试验中随机事件发生的**可能性大小**的度量。

在概率论的发展历史上，曾有过多种概率定义方法：

- 1 概率的古典定义
- 2 概率的统计定义
- 3 概率的公理化定义

第二节

随机事件的概率

2.1 事件的频率

2.2 概率的性质

2.3 等可能概型 (古典概型)

2.4 几何概型

事件的频率

定义 1 设在 n 次试验中, 事件 A 发生了 m 次, 则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的频率 (frequency).

事件的频率

历史上的掷硬币试验：

试验者	投掷次数	正面次数	频率
德摩根	2048	1061	0.5181
浦丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

事件的频率

频率的性质:

- 1 $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
- 2 $f_n(\Omega) = 1, f_n(\emptyset) = 0$;
- 3 若事件 A_1, A_2, \dots, A_k 两两互斥, 则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

概率的公理化定义

定义 2 设 Ω 是样本空间, 对每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应. 若函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件:

- 1 非负性: 对任意事件 A , 均有 $P(A) \geq 0$;
- 2 规范性: $P(\Omega) = 1$;
- 3 可列加性: 若事件序列 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ 两两互斥, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_n(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率 (probability).

概率的性质

由概率的定义，不难得出概率的一些性质：

性质 1 $P(\emptyset) = 0$.

证明: 因为 $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \dots$, 且 $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$,

由规范性及可列可加性得

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \dots) = P(\Omega) + P(\emptyset) + \dots$$

由概率的**非负性**可得 $P(\emptyset) = 0$.

性质 2(有限可加性) 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

概率的性质

性质 3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A).$$

证明: 证明: 易知 $B = A \cup (B - A)$, 且 $A \cap (B - A) = \emptyset$.

由概率的可列可加性可知

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A),$$

移项可得

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

由概率的**非负性**可得 $P(B - A) \geq 0$, 即

$$P(B) \geq P(A).$$

推论: 对任意事件 A, B , 有 $P(B-A) = P(B) - P(AB)$.

概率的性质

性质 4 对任一事件 A , $P(A) \leq 1$.

证明: 因为 $A \subset \Omega$, 由性质 3 可得.

性质 5 对任一事件 A , 有 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

证明: 因为 $A \cup A = \Omega$, 且 $A \cap A = \emptyset$, 由有限可加性可得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A) = P(A) + P(A),$$

也即

$$P(A) = 1 - P(A).$$

概率的性质

性质 6: (加法公式) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明： 因为

$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$

$$A(B - AB) = \emptyset, \quad AB \subset B,$$

由性质 2 和性质 3 可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

概率的性质

推论 1 对任意三个事件 A_1, A_2, A_3 , 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) \\ + P(A_1 A_2 A_3)$$

推论 2 对任意 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n).$$

概率的性质

例 1 设 A, B 为两事件, $P(A) = 0.3, P(A \cup B) = 0.6$, 求 $P(AB)$.

解： 易知

$$AB = A(\Omega - B) = A - AB,$$

故

$$P(AB) = P(A - AB) = P(A) - P(AB).$$

又因为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

所以

$$P(A) - P(AB) = P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3.$$

概率的性质

例 2 设 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 求证 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$

证明: 由对偶率易知 $\overline{A \overline{B}} = \overline{A \cup B}$, 故

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(AB) \right] \\ &= P(AB). \end{aligned}$$

古典概型

定义 3 如果一个随机试验具有以下特点:

- 1 样本空间只含有限多个元素 (样本点);
- 2 基本事件发生的可能性相同,

则称此随机试验是等可能概型或古典概型. 此时对每个事件 $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件 A 的古典概率.

古典概型

例 3 将一枚硬币抛两次,

- (1) 设事件 A_1 为"恰好出现一次正面", 求 $P(A_1)$;
- (2) 设事件 A_2 为"至少出现一次正面", 求 $P(A_2)$.

解: 易知试验的样本空间为

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

故

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = 0.5, \quad P(A_2) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

计数原理

加法原理： 设完成一件事有 k 类方式，每类方式分别有 n_1, \dots, n_k 种方法，则完成这件事一共有

$$n_1 + \cdots + n_k$$

种方法.

特点：一步完成.

乘法原理： 设完成一件事有 k 个步骤，每一步需要 n_1, \dots, n_k 种方法，则完成这件事一共有

$$n_1 n_2 \cdots n_k$$

种方法.

特点：多步完成。

计数原理

排列数：从 n 个元素中取 k 个不同元素排成一列的所有个数，记为 A_n^k .

排列数公式:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

组合数：从 n 个不同元素中，取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，记为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$.

组合数公式:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

解: 记 $A = \{\text{取到到的两只球都是白球}\}$
 $B = \{\text{取到到的两只球都是黑球}\}$
 $C = \{\text{取到到的两只球至少有一白球}\}$
 $D = \{\text{取到到的两只球颜色相同}\}$

(1) 由古典概率模型:

$$P(A) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{15}.$$

(2) 因为 $D = AB$ 且 $AB = \emptyset$, 故由概率有限可加性,

$$P(D) = P(AB) = P(A) + P(B) = \frac{7}{15}$$

因为 $C = \bar{B}$, 故 $P(C) = P(B) = 1 - P(B) = \frac{14}{15}$

古典概型

例 6 (抽签的公平性) 袋中有 a 个红球和 b 个白球, 每次从袋中任取一个球且不放回. 用事件 A_n 表示第 n 次取到红球, $1 \leq n \leq a+b$, 试证明

$$P(A_n) = \frac{a}{a+b},$$

即 A_n 发生的概率与 n 无关.

几何概型

古典概型是关于试验的结果为有限个, 且每个结果出现的可能性相同的概率模型. 一个直接的推广是: 保留等可能性, 而允许试验具有无限多个结果的.

定义： 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积或度数）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型.

几何概型中，事件 A 的概率：

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

几何概型

例 8 (会面问题) 甲乙两人相约在早上 8 点到 9 点在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时则离开. 假设两人可以在指定时间内任意时刻到达，试计算两人会面的概率.

解: 记 8 点为计算时刻的 0 时刻, 以分钟为时间单位, 以 x, y 分别表示甲、乙到达的时刻, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}.$$

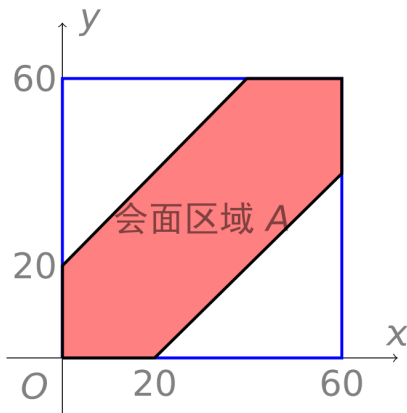
甲、乙能够会面的充要条件为

$$|x - y| \leq 20, (x, y) \in \Omega.$$

古典概型

样本空间及事件的几何表示如图所示，由几何概型的计算公式得

$$p = S(A)/S(\Omega) = \frac{5}{9}.$$



第一节 随机事件

第二节 随机事件的概率

第三节 条件概率

第四节 事件的独立性

第三节

条件概率

3.1 条件概率

3.2 乘法公式

3.3 全概率公式与贝叶斯公式

条件概率

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率, 称为条件概率, 记为 $P(B|A)$.

有时为了强调区别, 也称 $P(B)$ 为无条件概率.

例 1 一个家庭中有两个小孩, 已知其中一个是女孩, 问另一个也是女孩的概率是多少? (假定生男生女是等可能的)

条件概率

解：由题意，样本空间为

$$\Omega = \{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}.$$

A 表示事件“至少有一个是女孩”， B 表示事件“两个都是女孩”，则有

$$A = \{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男})\},$$

$$B = \{(\text{女}, \text{女})\}.$$

由于事件已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件包含的基本事件只占其中的一种，所以有

$$P(B|A) = \frac{1}{3}$$

条件概率

在这个例子中，若不知道事件已经发生的信息，那么事件发生的概率为

$$P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B|A).$$

原因：事件 A 的发生改变了样本空间.

注意到

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(AB) = \frac{1}{4}$$

于是

$$P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

条件概率

定义 1 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下, 事件 B 的条件概率.

小注: 条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率 (满足三个条件).

计算: 根据具体的情况, 可选用下列两种方法之一来计算条件概率 $P(B|A)$

- 1 在缩减后的样本空间 Ω_A 中计算;
- 2 在原来的样本空间 Ω 中, 直接由定义计算.

条件概率

例 2 一袋中有 10 个球，其中 3 个黑球，7 个白球，依次从袋中不放回取两球.

- (1) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；
- (2) 已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率.

条件概率

解: 记 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到黑球}\} (i = 1, 2)$.

(1) 第一次取到黑球, 则第二次取到黑球的方法有两种, 所有可取的球有 9 个. 故

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$$

(2) 因为

$$P(A_1A_2) = \frac{3 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{15}, \quad P(A_2) = \frac{3}{10},$$

所以

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{2}{9}.$$

条件概率

例 3 保险公司按年向车主收取保险费，并承担交通事故的赔偿费用。假设车主一年内发生事故的的概率为 0.2，连续两年发生事故的的概率是 0.08。试解释保险公司的车险浮动费率规则的合理性：

- (1) 若第一年内发生了事故，则上调第二年的保险费；
- (2) 若第一年内未发生事故，则下调第二年的保险费。

条件概率

解： 用事件 A 表示第一年发生了事故，事件 B 表示第二年发生了事故，则有

$$P(A) = P(B) = 0.2, P(AB) = 0.08.$$

若第一年内发生了事故，则第二年发生事故的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4 > P(A)$$

若第一年内未发生事故，则第二年发生事故的概率为

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = 0.15 < P(A)$$

第三节

条件概率

3.1 条件概率

3.2 乘法公式

3.3 全概率公式与贝叶斯公式

乘法公式

定理 1 (乘法公式) 由条件概率的定义, 得到

1 如果 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

2 如果 $P(B) > 0$, 则有 $P(AB) = P(A|B)P(B)$.

推论: 如果 $P(A_1A_2) > 0$, 则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

更一般地, 若 $P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有乘法公式

$$\begin{aligned} & P(A_1A_2 \cdots A_n) \\ &= P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}) \cdots P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1) \end{aligned}$$

乘法公式

例 4 一袋中有 a 个白球和 b 个红球. 现依次不放回地从袋中取两球. 试求两次均取到白球的概率.

解: 记

$$A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到白球}\} (i = 1, 2),$$

要求 $P(A_1A_2)$. 显然

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{a-1}{a+b-1},$$

因此

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

乘法公式

例 5 某厂产品的废品率为 4%, 而合格品在中 有 75% 是一等品, 求一等品率.

解: 记 A : 合格品; B : 一等品, 由题意知

$$P(A) = 1 - 4\% = 96\%, \quad P(B|A) = 75\%$$

因为 $B \subset A$, 故 $B = BA$, 所以

$$P(B) = P(BA) = P(B|A)P(A) = 0.96 \times 0.75 = 0.72.$$

第三节	条件概率
3.1	条件概率
3.2	乘法公式
3.3	全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式与贝叶斯公式

定义 2 设 Ω 为某试验的样本空间, B_1, B_2, \dots, B_n 为一组事件. 如果以下条件成立:

1 B_1, B_2, \dots, B_n 两两互斥,

2 $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

则称 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 Ω 的一个划分.

例子: 对任意事件 A , A 与 \bar{A} 为样本空间的一个划分.

全概率公式

定理 2 (全概率公式) 设试验 E 的样本空间为 Ω , A 为 E 的事件, 如果 B_1, B_2, \dots, B_n 是 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0, (i = 1, \dots, n)$, 则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

应用: 利用全概率公式, 可以把复杂事件概率的计算问题, 化为若干互不相容的简单情形, 分别求概率然后求和.

全概率公式

证明： 因为 B_1, B_2, \dots, B_n 是 Ω 的一个划分, 所以

$$A = A \cap \Omega = AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n$$

$$(AB_i)(AB_j) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, n$$

由概率的可加性及乘法公式, 有

$$P(A) = (AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n)$$

$$= P(AB_1) + \dots + P(AB_n)$$

$$= P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

全概率公式

例 6 两个车间生产同型号的家电. 第 1 车间的次品率为 0.15, 第 2 车间的次品率为 0.12. 两个车间生产的成品混放在一起, 假设第 1, 2 车间生产的成品比例为 2 : 3. 在仓库中随机地取一件成品, 求它是次品的概率;

解: 记 $A = \{\text{从仓库种取到的是次品}\},$

$B_i = \{\text{产品是第 } i \text{ 车间生产的}\};$

易知 B_1, B_2 是样本空间的一个划分, 由全概率公式得:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 0.15 \times \frac{2}{5} + 0.12 \times \frac{3}{5} = 0.132 \end{aligned}$$

例 7 假设在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率. 经分析, 该时期内利率下调的概率为 60%, 利率不变的概率为 40%. 根据经验, 在利率下调时某支股票上涨的概率为 80%, 在利率不变时, 这支股票上涨的概率为 40%. 求这支股票上涨的概率.

解: 设 B_1, B_2 表示事件“利率上调”和“利率不变”, A 表示事件“股票上涨”, 易知 $B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 B_2 = \emptyset$, 由全概率公式:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 80\% \times 60\% + 40\% \times 40\% \\ &= 64\% \end{aligned}$$

贝叶斯公式

定理 3 如果 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间 Ω 的一个划分, A 是一个事件, 且 $P(B_i) > 0, P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, i = 1, \dots, n.$$

证明: 由乘法公式可知

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(A B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

又由全概率公式可得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n).$$

故结论成立.

贝叶斯公式

贝叶斯公式于 1763 年由贝叶斯 (Bayes) 给出. 它是在观察到事件 A 已发生的条件下, 寻找导致 A 发生的每个原因 B_i 的概率.

在贝叶斯公式中, $P(B_i)$ 和 $P(B_i|A)$ 分别称为原因 B_i 的**先验概率**和**后验概率**.

先验概率常常根据等可能的假设或者以往的数据积累来确定. 是在没有进一步信息 (不知道事件 A 是否发生) 的情况下, 人们对诸事件发生可能性大小的认识.

而在得到进一步的信息之后 (知道事件 A 已经发生), 我们得以对各个可能原因发生的概率重新加以修正

例 8 由医学统计数据可知, 人群中患由某种病菌引起的疾病占总人数的 0.5%. 一种血液化验以 95% 的概率将患有此疾病的人检查出呈阳性, 但也以 1% 的概率误将不患此疾病的人检验出呈阳性. 现设某人检查出呈阳性反应, 问他确患有此疾病的概率是多少?

解: 记“检出阳性”为事件 A , “被检者患病”和“被检者不患病”分别为事件 B_1, B_2 , 则

$$P(B_1) = 0.005, P(B_2) = 0.995$$

$$P(A|B_1) = 0.95, P(A|B_2) = 0.01$$

由贝叶斯公式可得:

$$P(B_1|A) = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.01} \approx 0.323.$$

解: (1) 由全概率公式, 有:

$$\begin{aligned}\alpha = P(A) &= \sum_{i=0}^2 P(A|B_i)P(B_i) \\ &= 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} \approx 0.94\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式, 有:

$$\beta = P(B_0|A) = \frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)} \approx \frac{0.8}{0.94} \approx 0.85$$

第一节 随机事件

第二节 随机事件的概率

第三节 条件概率

第四节 事件的独立性

两个事件的独立性

设有两个事件 A, B , 一般来说, $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 是有差异的, 但有时事件 A 的发生与否并不影响事件 B 发生的概率, 即 $P(B|A) = P(B)$.

例 1 袋中有 6 个白球，2 个黑球，从中有放回地抽取两次，每次取一球，记 $A =$ 第一次取到白球， $B =$ 第二次取到白球，则有

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{8 \times 6}{8^2} = \frac{3}{4}$$

$$P(AB) = \frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}, \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{4}$$

因此 $P(B|A) = P(B)$. 同理可得 $P(B|A) = 3/4 = P(B)$.

小注：这就是说，已知事件 A 发生，并不影响事件 B 发生的概率，这时称事件 A, B **独立**.

两个事件的独立性

由乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A),$$

当事件 A, B 独立时, 有

$$(1) \quad P(AB) = P(A)P(B).$$

当 $P(A) = 0$ 时, 由

$$0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$$

可知 $P(AB) = 0$, (1) 式仍然成立.

注意: $P(A) = 0$ 时, $P(B|A)$ 没有意义.

两个事件的独立性

定义 1 若两事件 A, B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A, B 独立, 或称 A, B 相互独立.

小注: 用

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

刻画独立性, 比用

$$P(A|B) = P(A) \text{ 或 } P(B|A) = P(B)$$

更好, 它不受 $P(B) > 0$ 或 $P(A) > 0$ 的制约, 且体现对称性.

事件的独立性

在实际应用中，往往根据问题的实际情况去假设事件间的独立性。如

- 投掷硬币（或骰子），我们相信每次的结果都不受以前结果的影响；
- 在相同条件下做实验，一般假定每次的实验误差相互独立；
- 一般假定生产中不同的流程（机器、人）也是相互独立的。

两个事件的独立性

例 2 甲乙二人独立地对目标各射击一次，设甲射中目标的概率为 0.5，乙射中目标的概率为 0.6，求目标被击中的概率.

解： 假设 A, B 分别表示甲乙击中目标，则 $A \cup B$ 表示目标被击中，由于 A, B 独立，

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\&= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\&= 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.6 \\&= 0.8.\end{aligned}$$

两个事件的独立性

定理 1 若事件 A 与 B 独立, 则 A 与 \bar{B} 、 \bar{A} 与 B 、 \bar{A} 与 \bar{B} 也分别独立.

证明: 因为 $P(AB) = P(A)P(B)$, 所以

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}) &= P(A(\Omega - B)) = P(A - AB) \\&= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\&= P(A)[1 - P(B)] \\&= P(A)P(\bar{B})\end{aligned}$$

由对称性知, \bar{A} 与 B 相互独立. 利用第一条结论, 可得 \bar{A} 与 \bar{B} 相互独立.

互斥与独立的关系

“两个事件互斥”和“两个事件相互独立”是不同的概念：

- 互斥 $\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 独立 $\implies P(AB) = P(A)P(B)$.

但两者也有关系：如果 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$ ，则两者不可能既是互斥的又是独立的。

两个事件的独立性

小注: 若 A 与 B 相互独立, 且 B 与 C 相互独立, 则 A 与 C 未必相互独立.

例子 从全体有两个孩子的家庭中随机选择一个家庭, 并考虑下面三个事件:

- 1 A 为 “第一个孩子是男孩”,
- 2 B 为 “两个孩子不同性别”,
- 3 C 为 “第一个孩子是女孩”.

容易验证 A 与 B 相互独立, B 与 C 相互独立, 但是 A 与 C **不独立**.

三个事件的独立性

定义 2

设 A_1, A_2, A_3 是三个事件, 如果

$$\text{1 两两独立} \quad \left\{ \begin{array}{l} P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2) \\ P(A_2 A_3) = P(A_2) P(A_3) \\ P(A_1 A_3) = P(A_1) P(A_3) \end{array} \right.$$

$$\text{2 } P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立.

多个事件的独立性

定义 称 $n(n \geq 2)$ 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 如果对任意一组指标

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad (k \geq 2)$$

都有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

多个事件的独立性

性质 设 $n(n \geq 2)$ 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则

- 1 其中任意 $k(k \geq 2)$ 个事件也是相互独立的.
- 2 将若干个 A_i 用 \bar{A}_i 替换后, 得到的新事件集也相互独立.
- 3 特别地, 我们有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)] \end{aligned}$$

例 3 (保险赔付) 设有 n 个人向保险公司购买人身意外保险 (保险期为 1 年), 假定投保人在一年内发生意外的概率为 0.01. 求

- (1) 保险公司赔付的概率;
- (2) 当 n 为多大时, 使得以上赔付的概率超过 $1/2$.

小注:每个人是否发生意外可以看作是相互独立的.

解: 记 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个投保人出现意外}\} (i = 1, 2, \dots, n)$,

$$A = \{\text{保險公司賠付}\}$$

(1) 因为 A_1, \dots, A_n 相互独立, 且 $A = \cup_{i=1}^n A_i$, 我们有

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - (0.99)^n.$$

(2) 注意到 $P(A) \geq 0.5$ 等价于 $(0.99)^n \leq 0.5$, 我们有

$$n \geq \frac{\lg 2}{2 - \lg 99} \approx 68.416$$

即当投保人数大于等于 69 人时, 赔付的概率超过 $1/2$.

例 5 据以往记录的数据分析, 某船只运输某种物品损坏的情况共有三种: 损坏 2% (记这一事件为 A_1), 损坏 10% (记这一事件为 A_2), 损坏 90% (记这一事件为 A_3). 且 $P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.15, P(A_3) = 0.05$. 设物品件数很多, 取出一件后不影响后一件取的是否为好品的概率, 现从已被运输的物品中随机地取 3 件, 发现这三件都是好的 (记这一事件为 B), 试求 $P(A_1|B)$.

