第三节	无穷小与无穷大
第四节	极限运算法则
第五节	极限存在准则、两个重要极限
第六节	无穷小的比较
第七节	**函数的连续性**

第七节	函数的连续性
7.1	函数的连续性的概念
7.2	函数的间断点
7.3	初等函数的连续性
7.4	小结　思考

例子　自然界中有很多现象都是连续地变化着的。

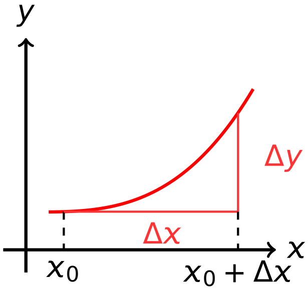
1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小。
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小。

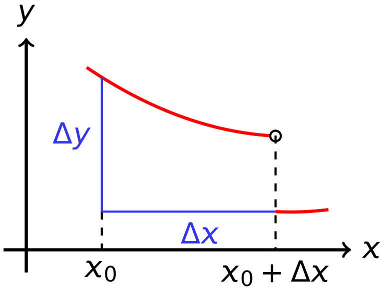
对于$y = f(x)$定义域中的一点x_0，如果x从x_0作微小改变Δx后，y的相应改变量Δy也很微小，则称$f(x)$在点x_0 连续。

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义, 当 x 在 $U(x_0,\delta)$ 内由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时,称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 的增量; 相应地, 函数 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.





定义　设$y=f(x)$在x_0的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称$f(x)$在点x_0 连续。

$$\Updownarrow$$

定义　设$y=f(x)$在x_0的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称$f(x)$在点x_0 连续。

ε–δ 定义 : $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

从定义我们可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足以下三个条件:

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义
2. 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在某点连续等价于函数在该点的极限存在且等于该点的函数值.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$（极限存在）：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$（连续）：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$$

例子　试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解　$\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$$\text{又 } f(0)=0, \quad \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

由定义知, 函数$f(x)$在$x=0$处连续。

例子　证明函数 $y = \sin x$ 在区间$(-\infty, +\infty)$ 内连续 .

证明.

任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, 故

$$|\Delta y| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的 α, 当 $\alpha \neq 0$ 时,　有 $\sin\alpha \,|< \alpha$, 故

$|\Delta y| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|$,　$\therefore$ 当 $\Delta x \to 0$ 时 , $\Delta y \to 0$. 即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

定义 若函数 $f(x)$ 在 $(a, x_0]$ 内有定义,且 $f(x_0^-) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续。

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, b)$ 内有定义,且 $f\left(x_0^+\right) = f(x_0)$ 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right) = f(x_0)}$$

例子 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ x-2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

解 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+2) = 2 = f(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-2) = -2 \neq f(0)$

函数右连续但不左连续，故函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续.

定义　如果$f(x)$在区间 I 的每一点都连续，则称$f(x)$在区间 I 上连续，或称$f(x)$是区间 I 上的连续函数。

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续:

- 函数在开区间 (a,b) 内连续;
- 在左端点 $x=a$ 处右连续;
- 在右端点 $x=b$ 处左连续.

注记　连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线。

性质 $f(x)$在x_0点连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$。

例子 判断函数$f(x)$在$x=0$点的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x-1, & x\geq 0 \end{cases}$；

(2) $f(x)=\begin{cases} \frac{2\sin x}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0 \end{cases}$。

练习 1　已知函数$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$，判断它在 $x = 0$ 处的连续性。

解　$f(x)$在$x = 0$处是连续的.

定义　设$f(x)$在点x_0的某个去心邻域有定义，如果$f(x)$在点x_0不连续，则称它在点x_0 **间断**，或者称点x_0是$f(x)$的**间断点**。

x_0 为 $f(x)$ 的间断点,有以下三种情形：

1. $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;
3. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

可去间断点

定义 1 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例子 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在$x = 0$处有可去间断点。

例子 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ .... 可去间断点

> 可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左，右极限都存在,但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例子 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ ....跳跃间断点

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点：函数在该点左、右极限都存在.

1. 左右极限相等，则为可去间断点;
2. 左右极限不相等，则为跳跃间断点.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数$f(x)$的第二类间断点。

例子 $f(x) = \frac{1}{x}$ .... 无穷间断点

例子 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .... 振荡间断点

注记 间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点。

例子 求函数$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$的间断点，并判断类型。

例子 求$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \le 1, x \neq 0 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x > 1, x \neq 2 \end{cases}$ 的间断点，并判断其类型。

函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例子　狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ 当 } x \text{ 是有理数时}, \\ 0, \text{ 当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

在定义域R内每一点处都间断,且都是第二类间断点.

例子　$f(x)=\begin{cases}x, \text{ 当 } x \text{ 是有理数时}, \\ -x, \text{ 当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$　仅在$x=0$处连续, 其余各点处处间断.

定理 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

例子 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 在其定义域内连续.

反函数的连续性

定理 严格单调递增（递减）的连续函数必有严格单调递增（递减）的连续反函数．

例子 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续故

$$y = \arcsin x$$

在$[-1, 1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在$[-1, 1]$上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

例子 因为$u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续,

$y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,

故$y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续

定理　初等函数在其定义区间内都是连续函数。

1. 定义区间是指包含在定义域内的区间.
2. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例子　$y=\sqrt{\cos x-1}$,　$D: x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ 这些孤立点的去心邻域内没有定义.

初等函数在连续点求极限可用代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{ 定义区间 })$$

例子　求 $\lim\limits_{x\to 1} \sin\sqrt{e^x - 1}$

解　原式 $= \sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e-1}$.

小结

1. 函数在一点连续需要满足的三个条件。
2. 区间上的连续函数
3. 间断点的分类
   - 第一类间断点：$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$均存在
     - 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$
     - 跳跃间断点：$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$
   - 第二类间断点：$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$至少一个不存在
     - 无穷间断点：$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$至少一个为无穷大
     - 振荡间断点：$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$均不为无穷大
4. 初等函数的连续性

思考 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 是否连续?
又若 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 连续， $f(x)$ 在 x_0 是否连续?

解 因为$f(x)$ 在 x_0 连续, $\therefore \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 且

$$0 \le \left| |f(x)| - |f(x_0)| \right| \le |f(x) - f(x_0)|$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|.$$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

思考

但反之不成立. 例 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x_0 = 0$ 不连续,
但 $|f(x)|, f^2(x)$ 在 $x_0 = 0$ 连续。