1 定积分

定积分的性质

性质 1. 设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2. （函数可加性）

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3. （区间可加性）设 $a<c<b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 1. 即使 c 不在 a 和 b 之间，上述性质依然是成立的.

性质 4.

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

性质 5. 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

推论. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

性质 6. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

性质 7 (积分中值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

积分上限的函数及其导数

定义 1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为积分上限的函数或变上限积分.

定理 1.

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

定理 2. 对于更一般的变限积分，我们有下面求导公式： *(必考点)*

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

原函数存在定理

定理 3 (原函存在定理)**.** 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

微积分基本公式

定理 4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

它称为微积分基本公式或牛顿－莱布尼茨公式.