第一章习题

一、单选题

1. 用区间表示满足不等式 $|x| > |x-4|$ 的所有 x 的集合是(B).

(A) $(-2,2)$

(B) $(2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)$

(D) $(-\infty,+\infty)$

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的定义域是(C).

(A) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

(B) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$

(D) $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

3. $f(x)=\begin{cases} x-3, & -4\le x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 3 \end{cases}$ 的定义域是(C).

(A) $-4\le x\le 0$

(B) $0\le x\le 3$

(C) $[-4,3]$

(D) $\{x|-4\le x\le 0\}\cap\{x|0<x\le 3\}$

4. 设$f(x)$的定义域是$[0,2]$，则$f\left(x^2\right)$的定义域是(D).

(A) $[0,4]$

(B) $[0,2]$

(C) $[-2,2]$

(D) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

5. 下列各组中$f(x)$与$g(x)$是相同函数的是(C).

(A) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$

(B) $f(x)=x+1, g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(C) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln|x|$

(D) $f(x)=\begin{cases} 1, x\geq 0 \\ -1, x<0 \end{cases}, g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

6. 设$f(x)=\begin{cases} x^2, x\leq -2 \\ x+9, -2<x<2 \\ 2^x, x\geq 2 \end{cases}$，则下列等式中不成立的是(B).

(A) $f(-2)=f(2)$

(B) $f(1)=f(4)$

(C) $f(-1)=f(3)$

(D) $f(0)=f(-3)$

7. 设 $y=f(x)$ 为单调增加函数，则其反函数$y=f^{-1}(x)$的单调性为(A).

(A) 单调增加

(B) 单调减少

(C) 有增有减

(D) 不能确定

8. 函数$f(x)=\arctan\frac{1}{x}$在其定义域上是(A).

(A) 有界奇函数

(B) 有界偶函数

(C) 无界奇函数

(D) 无界偶函数

9. 设 $f(x)=x^2-2$，$g(x)=2x+1$，则复合函数 $f[g(x)]=$(B).

(A) $4x^2+4x+3$

(B) $4x^2+4x-1$

(C) $2x^2-3$

(D) x^2+2x+1

10. 下列函数必定是奇函数的是(C).

(A) $y=f\left(x^2\right)$

(B) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

(C) $y=f(x)-f(-x)$

(D) $y=5$

11. 函数$y=10^{x-1}-2$的反函数是(A).

(A) $y=1+\lg(x+2)$

(B) $y=1+\lg(x-2)$

(C) $y=1+\ln(x+2)$

(D) $y=1-\lg(x+2)$

12. 已知$f(x)$是线性函数，且$f(-1)=2$，$f(1)=-2$，则$f(x)=$(A).

(A) $-2x$

(B) $2x$

(C) $x-3$

(D) $x+3$

13. 在其定义域$(-\infty，+\infty)$内是(C)

(A) 有界函数

(B) 单调增加函数

(C) 偶函数

(D) 奇函数

14. 设$f(x)=\mathrm{p}\sin x+2qx\cos x+x^2$，其中$p$，$q$为常数，已知$f(2)=3$，则$f(-2)=$(B).

(A) 3

(B) 5

(C) $p\sin 2-4q\cos 2+4$

(D) $8q\cos 2+5$

15. 设$f\left(x\right)=\dfrac{x}{1-x}$，$g\left(x\right)=1-x$，则$f\left[g\left(x+1\right)\right]=$(A).

(A) $\dfrac{-x}{1+x}$

(B) $\dfrac{x}{1+x}$

(C) $\dfrac{2x}{1-x}$

(D) $\dfrac{1+x}{x}$

16. 下列函数中为奇函数的是(D).

(A) $f\left(x\right)=\begin{cases} x, & |x|>1 \\ 1, & 0\le x\le 1 \\ 1, & -1<x<0 \end{cases}$;

(B) $\psi\left(x\right)=\begin{cases} -1, & -1<x<0 \\ 1, & 0\le x<1 \\ x, & |x|\ge 1 \end{cases}$;

(C) $g\left(x\right)=\begin{cases} e^{x}, & x\ge 0 \\ -\frac{1}{e^{x}}, & x<0 \end{cases}$;

(D) $h\left(x\right)=\begin{cases} e^{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -\frac{1}{e^{x}}, & x<0 \end{cases}$.

17. $f\left(x\right)=\left(\sin 3x\right)^{2}$在定义域$(-\infty,+\infty)$上为(B).

(A) 周期是3π的周期函数

(B) 周期是$\dfrac{\pi}{3}$的周期函数

(C) 周期是$\dfrac{2\pi}{3}$的周期函数

(D) 不是周期函数

18. 函数$f\left(x\right)=\ln\dfrac{a-x}{a+x}(a>0)$是(A).

(A) 奇函数

(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数

(D) 奇偶性决定于a的值

19. 设$f(x)=\begin{cases}-x^3,-3\leq x\leq 0\\ x^3,0<x\leq 2\end{cases}$，则此函数是(C).

(A) 奇函数

(B) 偶函数

(C) 有界函数

(D) 周期函数

20. 下列函数中一定没有反函数的是(B).

(A) 奇函数

(B) 偶函数

(C) 单调函数

(D) 有界函数

21. 设$f(x)=x|x|,x\in(-\infty,+\infty)$，则$f(x)$ (B).

(A) 在$(-\infty,+\infty)$单调减；

(B) 在$(-\infty,+\infty)$单调增；

(C) 在$(-\infty,0)$内单调增，而在$(0,+\infty)$内单调减；

(D) 在$(-\infty,0)$内单调减，而在$(0,+\infty)$内单调增.

22. 设$f(x)$的定义域为$[0,1]$，则函数$f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$的定义域为(D).

(A) $[0,1]$

(B) $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$

(C) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

23. 函数$f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$在其定义域上是(A).

(A) 有界奇函数

(B) 有界偶函数

(C) 无界奇函数

(D) 无界偶函数

二、填空题.

1. 函数$f(x)=\arcsin(x^2-x-1)$的定义域$D=\underline{[-1，0]\cup[1，2]}$.
2. 函数$y=\ln\ln x$的定义域$D=\underline{(1,+\infty)}$.
3. 函数$y=\ln\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}$的定义域$D=\underline{(0,1)}$.
4. 设$f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$，则$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

5．设$f(x)=\begin{cases}x+3, & 1\leq x\leq 3\\ \cos 2, & 3<x\leq 5\end{cases}$，则$f(x+2)$的定义域为$\underline{[-1，3]}$.

6．设函数$f(x)$的定义域为$[-1,1]$，则复合函数$f(\sin x)$的定义域为$\underline{(-\infty,+\infty)}$.

7．函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$的反函数$f^{-1}(x)=\underline{\dfrac{x}{1-x}}$.

8．设函数$f(x)=e^x$，$g(x)=\sin x$，则$f[g(x)]=\underline{e^{\sin x}}$.

9．设$f(x)=\cos 2x$，$f[g(x)]=1-x^2$，则$g(x)=\underline{\dfrac{1}{2}\arccos(1-x^2)}$, $g(x)$的定义域为$\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$.

10. $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2\\ x^2-1, & x\geq 2\end{cases}$ 的反函数$f^{-1}(x)=\underline{\begin{cases}x-1, & x<3\\ \sqrt{x+1}, & x\geq 3\end{cases}}$.

11.已知$f(x)=\sin x$，$f[\phi(x)]=1-x^2$，则$\phi(x)=\arcsin(1-x^2)$的定义域为$\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$.

12.设$f(x+1)=\begin{cases}1-x, & x\leq 0\\ 1, & x>0\end{cases}$，则$f[f(x)]=\underline{1}$.

13.若$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$，则$f(x)=\underline{x^2+1}$.

14. 函数$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$的定义域为$\underline{[-1,3]}$.

15. 设$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{5}{t}+2t^2$，则$f(t^2+1)=\underline{5(t^2+1)+\dfrac{2}{(t^2+1)^2}}$.

16.设$f(x)$的定义域为$[0,1]$，则$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为

$\underline{[a,1-a],0\le a\le\frac{1}{2};\quad[-a,1+a],-\frac{1}{2}\le a\le 0.}$

17. 已知$f(x)=\arcsin x$，$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，则$f[g(x)]$的定义域为

$\underline{[\sqrt{2},\ +\infty)\cup(-\infty,\ -\sqrt{2}]}$.

18. 若$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则$f\{f[f(x)]\}=\underline{x}$.

19. 设$f(x)$的定义域为$[1,2]$，则$f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$的定义域为$\underline{\left[-\frac{1}{2},0\right]}$.

20. $f(x)=\log_2(\log_2 x)$的定义域为$\underline{(1,+\infty)}$.

三、计算题

1. 设$f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\le 1\\ 2x-x^2, & x>1\end{cases}$，求$f(1+a)+f(1-a)$，其中$a>0$.

解$\because a>0$，$\therefore 1+a>1$，$1-a<1$，

$f(1+a)=2(1+a)-(1+a)^2=1-a^2$，

$f(1-a)=(1-a)^2-(1-a)+1=a^2-a+1$

故$f(1+a)+f(1-a)=2-\mathrm{a}$.

2. 设$f(x-2)=x^2-2x+3$，求$f(x+2)$.

解：令$u=x-2$，$x=u+2$，代入得$f(u)=(u+2)^2-2(u+2)+3=u^2+2u+3$

所以$f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11$.

3. 设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}(x\neq 0)$，求$f(x)$.

解：$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x^2}+3}=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

4. 设$f(x)=\arcsin\frac{2x-1}{5}+\sqrt{\sin\pi x}$，求$f(x)$的定义域.

解：由$\arcsin\frac{2x-1}{5}$有$\left|\frac{2x-1}{5}\right|\le 1$，故$-2\le x\le 3$，

又由$\sqrt{\sin\pi x}$有$\sin\pi x\ge 0$得

$2k\le x\le 2k+1 \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

故函数的定义域为$[-2,-1]\cup[0,1]\cup[2,3]$.

5. 设$f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$，求$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$的定义域.

解：由$\ln\frac{2-x}{2+x}$，有$\frac{2-x}{2+x}>0$，解得$-2<x<2$；

当$x\ne 0$时，对$f\left(\frac{1}{x}\right)$有$x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{1}{2}$，

故函数$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$的定义域为

$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$

6. 设$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}x, x<0\\ x^2, x\ge 0\end{cases}$，求$f[\varphi(x)]$.

解：$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x, x\ge 0\end{cases}$，$\therefore \quad f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, x<0\\ x^2, x\ge 0\end{cases}$.

7. 求函数$y=\ln\frac{a-x}{a+x}(a>0)$的反函数的形式.

解：由$\frac{a-x}{a+x}=e^y$ 得$x=\frac{a(1-e^y)}{1+e^y}$，

所求反函数为 $y=\dfrac{a\left(1-e^{x}\right)}{1+e^{x}}$.

8. $f\left(x\right)=\sin x$，$f\left[\varphi\left(x\right)\right]=1-x^{2}$，求$\varphi\left(x\right)$及其定义域.

解：因为$f\left[\varphi\left(x\right)\right]=1-x^{2}$=sin$\varphi\left(x\right)$，所以

$\varphi\left(x\right)=$=arcsin$\left(1-x^{2}\right)$

故$\left|1-x^{2}\right|\leq 1\Longrightarrow$ 定义域为 $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

9. 设$f\left(x\right)=\begin{cases}-e^{x},x\leq 0\\ x,x>0\end{cases}$，$\varphi\left(x\right)=\begin{cases}0,x\leq 0\\ -x^{2},x>0\end{cases}$，求$f\left(x\right)$的反函数$g\left(x\right)$及$f\left[\varphi\left(x\right)\right]$.

解：$f\left(x\right)$的反函数为

$g\left(x\right)=\begin{cases}\ln(-x),-1\leq x<0\\ x\quad ,x>0\end{cases}$，

而 $f\left[\varphi\left(x\right)\right]=\begin{cases}-1,x\leq 0\\ -e^{-x^{2}},x>0\end{cases}$.

10. 设$f\left(x\right)=\begin{cases}e^{x}\quad ,-\infty<x<0\\ \sqrt{x}+1,0\leq x\leq 4\\ x-1,4<x<+\infty\end{cases}$，求$f\left(x\right)$的反函数$\varphi\left(x\right)$.

解：当$-\infty<x<0$时，$y=e^{x}$，即$x=\ln y$，$0<y<1$；

当$0\leq x\leq 4$时，$y=\sqrt{x}+1$，即$x=\left(y-1\right)^{2}$，$1\leq y\leq 3$；

当$4<x<+\infty$时，$y=x-1$，即$x=y+1$，$y>3$；

故得反函数 $\varphi\left(x\right)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ \left(x-1\right)^{2}, & 1\leq x\leq 3\\ x+1, & 3<x<+\infty\end{cases}$.

四．综合与应用题

1. 设$y=1+a+f\left(\sqrt{x}-1\right)$满足条件 $y|_{a=0}=x$及 $y|_{x=1}=2$，求$f\left(x\right)$及y.

> 解：由 $y|_{a=0}=x$得
>
> $f\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+2\left(\sqrt{x}-1\right)$
>
> 故$f(x)=x^2+2x$，此时
>
> $y=1+a+x-1=a+x$
>
> 又由 $y|_{x=1}=2$得$a=1$，故$y=1+x$.

2. 设$f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}+\arcsin\dfrac{2x-1}{4}$，求$f(x)$的定义域.

> 解：由$9-x^2\geq 0$得$-3\leq x\leq 3$;
>
> 由$x+2>0$且$x+2\neq 1$，得$x>-2$且$x\neq -1$;
>
> 由$\left|\dfrac{2x-1}{4}\right|\leq 1$得$-\dfrac{3}{2}\leq x\leq\dfrac{5}{2}$;
>
> 故函数的定义域为 $\left[-\dfrac{3}{2},-1\right)\cup\left(-1,\dfrac{5}{2}\right]$.

3. 已知$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且$\varphi(x)\geq 0$，求$\varphi(x)$并写出它的定义域.

> 解：$f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$，由$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$及$\varphi(x)\geq 0$得
>
> $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域为$x\leq 0$.

4. 求函数$y=x|x|+4x$的反函数.

> 解：由$y=x(|x|+4)$得，y与x同号.
>
> 当$x\geq 0$时，$x^2+4x-y=0$，得$x=-2\pm\sqrt{4+y}\quad(x\geq 0)$,
>
> 故 $x=-2+\sqrt{4+y}$;
>
> 当$x<0$时，$x^2-4x+y=0$，得$x=2\pm\sqrt{4-y}\quad(x<0)$,
>
> 故 $x=2-\sqrt{4-y}$;

> 求得反函数 $y=\begin{cases} 2-\sqrt{4-x}, x<0 \\ -2+\sqrt{4+x}, x\geq 0 \end{cases}$.

5. 判定函数$f(x)=\left(e^{x+|x|}-1\right)\cdot\ln(1+|x|-x)$的奇偶性.

> 解：当$x\geq 0$时，$|x|-x=0$，得$\ln(1+|x|-x)=0$，
>
> 从而 $f(x)=0$；
>
> 当$x<0$时，$|x|+x=0$，得$e^{x+|x|}-1=0$，
>
> 从而 $f(x)=0$；
>
> 综上述，对任意x，$f(x)\equiv 0$，
>
> 故 $f(-x)=0=f(x)$，$f(-x)=0=-f(x)$，
>
> $f(x)$既是奇函数又是偶函数.

6. 设$f(x)$对一切实数x_1，x_2成立$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且$f(0)\neq 0$，$f(1)=a$，求$f(0)$及$f(n)$. (n为正整数).

> 解：取$x_1=x_2=0$代入已知式，
>
> $f(0+0)=f(0)\cdot f(0)$，$f(0)\neq 0$，$\therefore f(0)=1$
>
> 又 $f(1)=a$，$f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=a^2$，
>
> 设 $f(k)=a^k$
>
> 则 $f(k+1)=f(k)\cdot f(1)=a^k\cdot a=a^{k+1}$
>
> 故对一切n，有$f(n)=a^n$.

7. 某厂按年度计划消耗某种零件48000件，若每个零件每月库存费0.02元，采购费每次160元，为节省库存费，分批采购. 试将全年总的采购费和库存费这两部分的和$f(x)$表示为批量x的函数.

> 解：$f(x)=$库存费+采购费

$= 0.02 \times 12 \times \frac{x}{2} + \frac{48000}{x} \times 160 = 0.12x + \frac{7.68 \times 10^6}{x}.$

8. 市场中某种商品的需求函数为$q_d = 25 - p$，而该种商品的供给函数为$q_s = \frac{20}{3}p - \frac{40}{3}$，试求市场均衡价格和市场均衡数量.

> 解：由均衡条件$q_d = q_s$得
>
> $25 - p = \frac{20}{3}p - \frac{40}{3},$
>
> 移项整理得 $23p = 115 \quad \Longrightarrow \quad p_0 = 5,$
>
> $\because \quad q_0 = \frac{20}{3}p_0 - \frac{40}{3} \quad \Longrightarrow \quad q_0 = 20,$
>
> 即市场均衡价格为5，市场均衡数量为20.

9. 某商品的成本函数(单位：元)为$C = 81 + 3q$, 其中q为该商品的数量. 试问：

(1) 如果商品的售价为12元/件，该商品的保本点是多少？

(2) 售价为12元/件时，售出10件商品时的利润为多少？

(3) 该商品的售价为什么不应定为2元/件？

> 解：(1)依题意，$C(q) = 81 + 3q = 12q = R(q) \Longrightarrow \quad q = 9$ (件)；
>
> (2) $L(10) = R(10) - C(10) = 12 \times 10 - 81 - 3 \times 10 = 9$ (元)；
>
> (3)若商品的售价实为2元/件，则
>
> $L(q) = R(q) - C(q) = 2q - (81 + 3q) = -81 - q < 0$ (元)，
>
> 从而无法盈利.

10. 某商品的需求量Q是价格P的线性函数$Q = a + bP$，已知该商品的最大需求量为40000件(价格为零时的需求量)，最高价格为40元/件(需求量为零时的价格). 求该商品的需求函数与收益函数.

> 解：因为$Q = a + bP$,

当$P=0$时，将$Q=40000$代入上式得$a=40000$；

当$Q=0$时，将$P=40$代入得$a+40b=0$，故$b=-1000$；

需求函数：$Q=40000-1000P$

收益函数：$R(Q)=P\cdot Q=Q\left(\frac{40000-Q}{1000}\right)=40Q-\frac{Q^2}{1000}$.

11. 收音机每台售价为90元，成本为60元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过100台以上的，每多订购1台，售价就降低1分，但最低价为每台75元.

(1) 将每台的实际售价p表示为订购量x的函数；

(2) 将厂方所获的利润l表示为订购量x的函数；

(3) 某一商行订购了1000台，厂方可获利润多少？

解：(1)依题意，得$p=\begin{cases}90, & x\le 100\\ 90-0.01(x-100), & 100<x\le 1600\\ 75, & x>1600\end{cases}$；

(2) 由(1)及已知条件，得$l=\begin{cases}30x, & x\le 100\\ (31-0.01x)x, & 100<x\le 1600\\ 15x, & x>1600\end{cases}$；

(3) 当$x=1000$时，$l=(31-0.01\times 1000)\times 1000=21000$ (元).

12. 设某商品的成本函数和收入函数分别为$C(q)=7+2q+q^2$，$R(q)=10q$，试求：

(1) 该商品的利润函数；

(2) 销量为4时的总利润及平均利润；

(3) 销量为10时是盈利还是亏损？[]

解：(1)利润函数$L(q)=R(q)-C(q)=8q-7-q^2$；

(2) $L(4)=8\times 4-7-4^2=9$，

$\overline{L}(4)=\frac{L(4)}{4}=\frac{9}{4}$；

(3) 因为$L(10)=8\times 10-7-10^2=-27<0$，

所以销量为10时亏损.

五、分析与证明题

1. 证明$f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}-\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}$是奇函数.

证：因$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$，即$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，

$f(-x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}-\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=-\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}-\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}\right]=-f(x)$

故$f(x)$是奇函数.

2. 设函数$y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$的图形关于$x=a$，$x=b$均对称$(a\neq b)$，试证：$y=f(x)$是周期函数，并求其周期.

证：依题设$f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$，于是，

$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a$

故$f(x)$是周期函数，其周期$T=2(b-a)$.