2018–2019学年第一学期期末试题

一、单项选择题（共 5 题, 每题 2 分, 共计 10 分）

1. 下列 $n(n>2)$ 阶行列式的值可能不是零的有（　）.
   (A) 行列式中的非零元素少于 n 个
   (B) 行列式中的每行元素之和均为零
   (C) 行列式主对角线上元素均为零
   (D) 行列式中有一行元素的余子式均为零

2. 设 A,B 为同阶方阵，且 $|A|=|B|$, 则必有（　）.
   (A) $A=B$　(B) $A^*=B^*$　(C) $A+A^*=B+B^*$　(D) $AA^*=BB^*$

3. 设 A,B,C 为同阶方阵，且 $ABC=E$, 则 $B^{-1}=$（　）.
   (A) AC　(B) CA　(C) $(AC)^{-1}$　(D) $(CA)^{-1}$

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以相互线性表示，并且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r_1$, $r\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_2$, $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)=r_3$, 则（　）.
   (A) $r_1=r_2=r_3$　(B) $r_1=r_2<r_3$　(C) $r_1+r_2=r_3$　(D) $r_1+r_2<r_3$

5. 设 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解为 $\xi=(1,0,2)^T,\eta=(1,-1,3)^T$, 且系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$, 则对于任意常数 k,k_1,k_2, 方程组的通解可表示为（　）.
   (A) $k_1(1,0,2)^T+k_2(1,-1,3)^T$　(B) $(1,0,2)^T+k(1,-1,3)^T$
   (C) $(1,0,2)^T+k(0,1,-1)^T$　(D) $(1,0,2)^T+k(2,-1,5)^T$

二、填空题（共 9 题, 每题 5 分，共计 45 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的代数余子式 $A_{23}=$________.

2. 计算行列式的值: $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=________.

3. 设 A 为 3 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$, 则行列式 $\left|3A^*-(2A)^{-1}\right|$ 的值是________.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB^T=$________.

5. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$________.

6. 已知 $A^2-2A-8E=0$, 则 $(A+E)^{-1}=$________.

7. 设向量 $\alpha=(2,-1)$, 则 $\left(\alpha^T\alpha\right)^{101}=$________.

8. 设 4 维向量 $\alpha=(3,-1,0,2)$, $\beta=(3,1,-1,4)$, 若向量 γ 满足 $2\alpha+\gamma=3\beta$, 则 $\gamma=$________.

9. 若 A、B 为 5阶方阵，线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解，且 $r(B)=3$, 则 $r(AB)=$________.

三、计算题（共 3 题，每题 12 分，共计 36 分. 解答应写出推理，演算步骤）

1. 已知矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X.

2. 设向量组 A: $\alpha_1=(1,2,3,-2)^T, \alpha_2=(1,1,-2,2)^T, \alpha_3=(-2,-3,-1,0)^T, \alpha_4=(0,1,2,1)^T, \alpha_5=(7,8,0,-5)^T$

(1)求向量组的秩;

(2) 求一个最大无关组;

(3)将向量组中的其余向量用所求出的最大无关组线性表示。

3. 已知非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ 5x_1+4x_2-3x_3+3x_4-x_5=12 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=a \end{cases}$，

(1) 求当 a 为何值时，方程组无解、有解;

(2) 当方程组有解时，求出一个特解和对应齐次线性方程组的基础解系，并求出通解。

四、证明题（本题 9 分. 解答应写出推理，演算步骤）

1. 设 A 是 3 阶方阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量组, $\alpha_1\neq 0$, 满足 $A\alpha_1=2\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$ 。证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。