第一节	数列的极限
第二节	函数的极限
第三节	无穷小与无穷大
第四节	极限运算法则
第五节	极限存在准则、两个重要极限

第一节	数列的极限
第二节	函数的极限
第三节	无穷小与无穷大
第四节	极限运算法则
第五节	极限存在准则、两个重要极限

第一节 数列的极限

第二节 函数的极限

第三节 无穷小与无穷大

第四节 极限运算法则

第五节 极限存在准则、两个重要极限

第二节 函数的极限
第三节 无穷小与无穷大
第四节 极限运算法则
第五节 极限存在准则、两个重要极限
第六节 无穷小的比较

第三节 无穷小与无穷大

第四节 极限运算法则

第五节 极限存在准则、两个重要极限

第六节 无穷小的比较

第七节 函数的连续性

第四节 极限运算法则

第五节 极限存在准则、两个重要极限

第六节 无穷小的比较

第七节 函数的连续性

第八节 闭区间上连续函数的性质

第四节	极限运算法则
第五节	极限存在准则、两个重要极限
第六节	无穷小的比较
第七节	**函数的连续性**
第八节	闭区间上连续函数的性质

第四节 极限运算法则

第五节 极限存在准则、两个重要极限

第六节 无穷小的比较

第七节 函数的连续性

第八节 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数

1. 最值定理
2. 零点定理
3. 介值定理

第八节 闭区间上连续函数的性质

8.1	最大值和最小值定理
8.2	零点定理与介值定理
8.3	均衡价格的存在性
8.4	小结　思考

最大值最小值

定义　对于在区间I上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

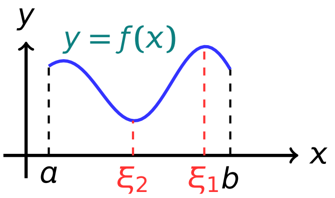
则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间I上的最大(小)值.

最值定理

定理 (最值定理)　设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在该区间上有界而且一定能取到最大值M和最小值m.

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\exists \xi_1,\xi_2\in[a,b]$, 使得 $\forall x\in[a,b]$时, 有

$$f(\xi_1)\ge f(x),\ f(\xi_2)\le f(x).$$



1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

例子　函数$y=\tan x$在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值。

例子　函数 $f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \\ -x+3, & 1<x\le 2 \end{cases}$

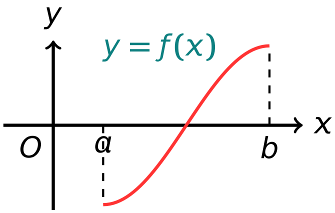
在区间$[0,2]$虽然有界，但既无最大值也无最小值。

第八节	闭区间上连续函数的性质
8.1	最大值和最小值定理
8.2	零点定理与介值定理
8.3	均衡价格的存在性
8.4	小结　思考

定义 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 (零点定理) 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$和$f(b)$异号，则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$.

几何解释: 连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于x轴的不同侧,则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



例子　证明方程$x^3-3x^2+1=0$在区间$(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$内各有一个实根。

例子　证明方程$2\sin x = x+1$有实数解。

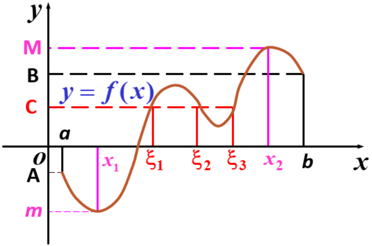
介值定理

定理 (介值定理) 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)=A$和$f(b)=B$不相等，则对于A与B之间的任何数C，在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=C$.

证明.

令$g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可以得到结论.

几何意义：在 $[a,b]$ 上的连续曲线$y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ (C介于$f(a)$和$f(b)$之间)至少相交一点.



推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M与最小值 m 之间的任何值.

证明.

设$f(x_1) = M, f(x_2) = m$,在区间$[x_1, x_2]$(或者$[x_2, x_1]$)上运用介值定理可得结论

例子　证明方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在开区间 (0,1) 内至少有一个实根.

证明.

令 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则 $f(x)$ 在[0,1]上连续，又 $f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0$, 由零点定理, $\exists \xi \in (a, b)$，使 $f(\xi) = 0$，即

$$\xi^5 - 3\xi + 1 = 0$$

$\therefore$ 方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 上至少有一根 ξ

例子 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $[a,b]$ 上的 n 个点，证明：在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

证明.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m, 显然有

$$m \le f(x_i) \le M, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

于是

$$nm \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le nM \Rightarrow m \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le M$$

证明续.

(i) 若 $f(a)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 或 $f(b)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$, 则可取 $\xi=a$ 或 $\xi=b$.

(ii) 若 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ 与 $f(a),f(b)$ 不同，由介值定理可知，在 (a,b) 至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

综合（i），（ii）可知，原命题得证.

例子 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x \in [a,b]$ 都有 $a \le f(x) \le b$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有不动点，即存在 $x^* \in [a,b]$，使 $f(x^*) = x^*$.

证明.

令$g(x) = f(x) - x$，则$g(x)$在$[a,b]$上连续，由于 $a \le f(x) \le b$，故

$$g(a) \ge 0,\ \ g(b) \le 0.$$

若 $g(a) = 0$，可取 $x^* = a$.

若 $g(b) = 0$，可取 $x^* = b$.

若 $g(a) > 0, g(b) < 0$，则由介值定理知，存在 $x^* \in (a,b)$，使 $g(x^*) = 0$，即有 $f(x^*) = x^*$

例子　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a, f(b)>b$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$

证明.

令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 而

$$F(a)=f(a)-a<0,\ F(b)=f(b)-b>0,$$

由零点定理, $\exists\xi\in(a,b)$, 使

$$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0,$$

即 $f(\xi)=\xi$

第八节	闭区间上连续函数的性质
8.1	最大值和最小值定理
8.2	零点定理与介值定理
8.3	均衡价格的存在性
8.4	小结　思考

均衡价格的存在性

假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数.如果生产某种商品的资源十分昂贵，则价格为零时供给必为零，即 $S(0) = 0$; 再假定 $D(0) > 0$, 即消费者有消费欲望。令

$$Z(P) = D(P) - S(P);\ \text{于是}\ \ Z(0) = D(0) - S(0) > 0.$$

另外，当价格涨到某个充分大的值 $P = P^*$ 时，公司会发现生产该产品利润丰厚，而顾客会感到价格过高，这样必然导致供过于求，即 $D(P^*) < S(P^*)$, 从而

$$Z(P^*) = D(P^\star) - S(P^*) < 0.$$

均衡价格的存在性

又$D=D(P)$和$S=S(P)$都是区间$[0,P^*]$上的连续函数，所以$Z(P)=D(P)-S(P)$也是区间$[0,P^*]$上的连续函数，于是由零点定理，存在 $P_e\in(0,P^*)$，使得

$$Z(P_e)=D(P_e)-S(P_e)=0,$$

即

$$D(P_e)=S(P_e)，且\ \ P_e>0.$$

均衡价格的存在性

定理 假设需求函数 $D = D(P)$ 和供给函数 $S = S(P)$ 都是连续函数，且满足:

1. 价格为零时，需求超过供给，即 $D(0) > S(0)$;
2. 存在某个价格 $P = P^* > 0$, 使得在此价格下，供给超过需求，即 $S(P^*) > D(P^*)$.

则市场上一定存在一个正的均衡价格，即存在 $P_e > 0$, 使得 $D(P_e) = S(P_e)$.

第八节	闭区间上连续函数的性质
8.1	最大值和最小值定理
8.2	零点定理与介值定理
8.3	均衡价格的存在性
8.4	小结　思考

小结

- 四个定理
  1. 最值定理
  2. 零点定理
  3. 介值定理
  4. 均衡价格的存在性定理

注意条件：1. 闭区间；2. 连续函数

- 解题思路
  1. 直接法:先利用最值定理,再利用介值定理;
  2. 辅助函数法:先作辅助函数$F(x)$, 再利用零点定理;

思考　假设有一个登山者头天上午8点从山脚开始上山，晚上6点到达山顶，第二天上午8点从山顶沿原路下山，下午6点到达山脚。问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什么？

解　会。

不妨设山高为h,登山者头天登山的高度函数 $f_1(x), f_2(x)$ 在$[8,18]$上连续，且

$$f_1(8)=0,\ f_1(18)=h;\ f_2(8)=h,\ f_2(18)=0$$

设

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),$$

则 $f(x)$ 在$[8,18]$上连续, 且

$$f(8)=-h<0,\ f(18)=h>0.$$

由零点定理知存在一点 $\xi\in(8,18)$, 使 $f(\xi)=0$.

练习题

问题　证明方程 $x = a\sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$.

问题　若 $f(x)$ 在 $[\,a, b\,]$ 上连续， $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n}$$