注意：文件只列出了部分要点，没有提到的内容不代表不会考察.

1 随机事件的概率

随机事件

主要内容：随机事件的关系与运算，概率的加法公式，古典概率模型，条件概率的定义，乘法公式，全概率公式，贝叶斯公式，随机事件的独立性.

1.1 随机事件

随机事件的关系

关系	记号	概率论含义
包含	$A \subset B$	A发生则B一定发生
相等	$A = B$	A与B必定同时发生
互斥	$A \cap B = \varnothing$	A与B不会同时发生
对立	$A = \overline{B}$	A与B有且仅有一个发生

随机事件的运算

运算	记号	概率论含义
并	$A \cup B$	A与B至少一个发生
积	AB	A与B都发生
差	$A - B$	A发生但B不发生
补	$\overline{A}$	A不发生

1.2　随机事件的概率

古典概率模型

定义：如果一个随机试验具有以下特点：

1. 样本空间只含有限多个样本点；
2. 各样本点出现的可能性相等，

则称此随机试验是古典型的. 此时对每个事件$A \subset \Omega$, 其概率

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{的样本点数}}{\text{样本点总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件A的古典概率.

几何概型

古典概型是关于试验的结果为有限个, 且每个结果出现的可能性相同的概率模型. 一个直接的推广是：保留等可能性, 而允许试验具有无限多个结果的.

定义： 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度 (面积或体积或度数) 成比例, 则称这样的概率模型为几何概率模型.

几何概型中, 事件 A 的概率：

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

概率的公理化定义

定义 1. 设 Ω 是样本空间, 对每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应. 若函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件:

1. 非负性: 对任意事件 A, 均有 $P(A) \geq 0$;
2. 规范性: $P(\Omega) = 1$;
3. 可列加性: 若事件序列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 两两互斥, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_n(A_i)$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率*(probability)*.

概率的可加性

概率可加性的常用公式:

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. 若n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互斥, 则
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$
特别地, 若两个事件A, B互斥, 则
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

概率的可加性

概率可加性的常用公式:

3. 对任意事件A, 有
$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right).$$
4. 若事件$A\subset B$, 则
$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$
特别地, $A\subset B\Longrightarrow P(A)\leq P(B)$.
5. 对任意两个事件A,B, 有
   - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.
   - $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

1.3 条件概率

条件概率

定义：设$P(B)>0$, 称
$$P(A|B):=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生条件下, 事件A的条件概率. 在古典概率模型中,
$$P(A|B)=\frac{\text{事件}AB\text{包含的样本点数}}{\text{事件}B\text{包含的样本点数}}=\frac{n(AB)}{n(B)}.$$

乘法公式

由条件概率的定义, 如果$P(B)>0$, 则
$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$
类似地, 如果$P(A)>0$, 则有
$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$
以上等式称为乘法公式.

全概率公式

定义：设Ω为某试验的样本空间, $B_1, B_2, \cdots$为一组事件. 如果以下条件成立：

1. $B_1, B_2, \cdots$两两互斥；
2. $\cup_i B_i = \Omega$,

则称$B_1, B_2, \cdots$为样本空间Ω的一个划分（分割）, 或称$B_1, B_2, \cdots$为一个完备事件组. 对任意满足$0 < P(B) < 1$的事件B, B与$\overline{B}$构成一个完备事件组.

全概率公式

全概率公式：如果$B_1, B_2, \cdots$ 构成一个完备事件组, 且都有正概率, 则对任意事件A有

$$\boxed{P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i).}$$

特殊情况：如果事件B满足$0 < P(B) < 1$, 则对事件A, 有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

贝叶斯公式

贝叶斯定理：如果$B_1, B_2, \cdots$ 构成一个完备事件组, 且都有正概率, 则对任意正概率的事件A有

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots}$$

1.4 事件的独立性

两个事件的独立性

定义：若两事件A、B满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件A、B相互独立. 实际意义：若$P(B)>0$, 则上式等价于

$$P(A|B)=P(A),$$

即事件A的概率不受事件B发生与否的影响.

两个事件的独立性

性质：若事件A与B相互独立, 则

$$\overline{A}\text{与}B\text{、}A\text{与}\overline{B}\text{、}\overline{A}\text{与}\overline{B}$$

也是相互独立的.

小注: 若 A 与 B 相互独立, 且 B 与 C 相互独立, 则 A 与 C 未必相互独立.

多个事件的独立性

定义. 称 $n(n\geq 2)$ 个事件 $A_1,A_2,...,A_n$ 相互独立, 如果对任意一组指标

$$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n \quad (k\geq 2)$$

都有

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

性质. 设 $n(n \geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立, 则

1. 其中任意 $k(k \geq 2)$ 个事件也是相互独立的.
2. 将若干个 A_i 用 $\overline{A}_i$ 替换后, 得到的新事件集也相互独立.
3. 特别地, 我们有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdots P\left(\overline{A}_n\right) \\ &= 1 - \prod_1^n [1 - P(A_i)] \end{aligned}$$