第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

第三节 导数的应用

第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

第三节 导数的应用

第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

第三节 导数的应用

第三节	导数的应用
3.1	函数的单调性
3.2	函数的极值
3.3	曲线的凹凸性与拐点
3.4	函数图形的描绘

定理 1 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，那么

(1) 如果在(a,b)上恒有$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

(2) 如果在(a,b)上恒有$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

证明: 由拉格朗日中值定理易证。

若$f'(x)\geq 0(\leq 0)$ 在(a,b)上成立，且等号仅在仅在个别点成立，则$f(x)$在$[a,b]$上单调增加(减少)

定义 若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的单调区间.

单调区间的求法

利用导数等于零的点和不可导点，划分出区间，然后判断各区间内导数的符号.

例 2　确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x) = x^3 - 3x$　　(2) $f(x) = x^3$

练习 1　确定下列函数的单调增减区间.

(1) $y = 3x^2 + 6x + 5$　　(2) $y = x - e^x$

例 3　证明函数$y=x-\ln(1+x^2)$单调增加.

练习 2　证明函数$y=\sin x-x$单调减少.

利用单调性证明不等式

思路：构造函数，使$f(x) > (\geq) f(a)$,或者 $f(x) < (\leq) f(a)$.

例 4　证明当$x > 0$时有不等式$e^x > 1 + x$.

练习 3　证明当$x > 1$时有$3 - \frac{1}{x} < 2\sqrt{x}$.

选择　设在$[0,1]$上$f''(x)>0$, 则$f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或$f(0)-f(1)$的大小顺序是……………………………（　　）

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

答案 B

提示：利用$f''(x)>0$得到$f'(x)$单调增加.

再用中值定理得到$f(1)-f(0)=f'(\xi)$，$0<\xi<1$.

第三节	导数的应用
3.1	函数的单调性
3.2	函数的极值
3.3	曲线的凹凸性与拐点
3.4	函数图形的描绘

定义 5 设$f(x)$在点x_0的某个邻域有定义.

(1) 若对x_0某个去心邻域的任何x，总有$f(x) < f(x_0)$，则称x_0为$f(x)$的一个**极大值点**， $f(x_0)$为$f(x)$ 的一个**极大值**.

(2) 若对x_0某个去心邻域的任何x，总有$f(x) > f(x_0)$，则称x_0为$f(x)$的一个**极小值点**， $f(x_0)$为$f(x)$ 的一个**极小值**.

极大值点和极小值点统称为**极值点**，极大值和极小值统称为**极值**.

极值的必要条件

定理 (极值的必要条件) 设$f(x)$在x_0点可导，而且在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如$y=x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如$y=|x|$.
- 可导函数的极值点一定是驻点。

定理 (极值的第一充分条件) 设$f(x)$在x_0点连续,而且在它的某个去心邻域内可导.

(1) 若在x_0的左邻域内$f'(x) > 0$，在右邻域内$f'(x) < 0$，则x_0为极大值点.

(2) 若在x_0的左邻域内$f'(x) < 0$，在右邻域内$f'(x) > 0$，则x_0为极小值点.

(3) 若在x_0的左邻域内和右邻域内$f'(x)$的符号不变，则x_0不是极值点.

证明: 由单调性易得。

例 6 求出函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的极值.

解 易知:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3),$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 3$.

列表讨论

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, \infty)$
f'(x)	$+$	0	$-$	0	$+$
f(x)	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

故极大值 $f(-1) = 10$, 极小值 $f(3) = -22$.

练习 4　求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

注意：函数的不可导点也可能是极值点，如$y = 1 - (x - 2)^{2/3}$在$x = 2$处取得极大值.

定理 7 判别极值的第二充分条件 设$f'(x_0)=0$而且$f''(x_0)$存在。

(1) 若$f''(x_0)>0$，则x_0为$f(x)$的极小值点。

(2) 若$f''(x_0)<0$，则x_0为$f(x)$的极大值点。

证明：由二阶导数的定义，易推出极值的第一充分条件。

注记 1 当$f''(x_0)=0$时，上面的定理无法判定。例如$f(x)=x^3$和$f(x)=x^4$。

例 8　求出函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$ 的极值.

解　易知,

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x + 4)(x - 2),$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -4, x_2 = 2$.

又$f(x)$的二阶导数为$f''(x) = 6x + 6$,

1. 因为 $f''(-4) = -18 < 0$, 所以极大值为 $f(-4) = 60$.
2. 因为 $f''(2) = 18 > 0$, 所以极小值 $f(2) = -48$.

练习 5　用判别极值的第二充分条件求求函数的极值：

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

求函数极值的一般步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 找出驻点（即方程 $f'(x) = 0$ 的根）和不可导点;

(3) 判断：

- 驻点 $\left\langle \begin{array}{ll} f''(x_0) \neq 0 & \text{第一或第二充分条件} \\ f''(x_0) = 0 & \text{第一充分条件} \end{array} \right.$
- 不可导点：第一充分条件；

(4) 结论.

注意格式: 极大(小)值为$f(x_0) = a$ 或极大(小)值点为$x = x_0$.

选择　设函数$f(x)$满足$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = -1$，则在点$a$处()

(A) $f(x)$的导数存在，且$f'(a) \neq 0$

(B) $f(x)$的导数不存在

(C) $f(x)$取得极大值

(D) $f(x)$取得极小值

答案 C

第三节	导数的应用
3.1	函数的单调性
3.2	函数的极值
3.3	曲线的凹凸性与拐点
3.4	函数图形的描绘

定义　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续,如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, 恒有

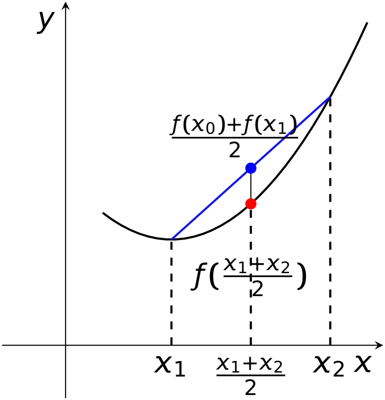
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (或凹弧) ; 如果恒有

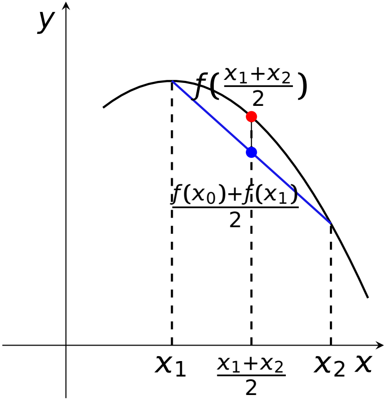
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的 (或凸弧).

曲线的凹凸性



(a) 凹函数



(b) 凸函数

凹凸性的判别法

定理 假设函数$f(x)$在(a,b)上有二阶导数，那么

(1) 如果$x\in(a,b)$时，恒有$f''(x)>0$，则函数的曲线在(a,b)上是凹的。

(2) 如果$x\in(a,b)$时，恒有$f''(x)<0$，则函数的曲线在(a,b)上是凸的。

证明：略去

例 9　判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解　易知

$$y' = 3x^2, \quad y'' = 6x,$$

(1) 当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在$(-\infty, 0]$为凸的;

(2) 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在$[0, +\infty)$为凹的.

注意到, 点(0,0)是曲线由凸变凹的分界点.

拐点

定义 曲线凹和凸的分界点(x_0, y_0)称为**拐点**。

性质 在拐点(x_0, y_0)处，要么$f''(x_0) = 0$，要么$f''(x_0)$不存在。

性质 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

....

例 10 求曲线$y = \sqrt[3]{x}$的凹凸区间和拐点。

注记 2 (x_0, y_0)为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$。(二阶导数不存在)

例 11 求曲线$y = x^4$的凹凸区间和拐点。

注记 3 $f''(x_0) = 0$ $\not\Leftarrow$ (x_0, y_0)为拐点。(二阶导数除在$x = 0$处均大于零)

$f(x)$ 在x_0的邻域内二阶可导，且$f''(x_0) = 0$,

1. 若x_0两边$f''(x)$变号，则$(x_0, f(x_0))$为拐点。
2. 若$f'''(x_0) \neq 0$, 则$(x_0, f(x_0))$为拐点。

例 12 求曲线$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$的凹凸区间和拐点。

解 易知:

$$y' = 12x^3 - 12x^2, \ y'' = 36x(x - 2/3).$$

令$y'' = 0$ 得$x_1 = 0$, $x_2 = 2/3$. 于是

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2/3)$	$2/3$	$(2/3, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	拐点	凸的	拐点	凹的

拐点为$(0, 1)$和$(2/3, 11/27)$.

练习 6　求下列曲线的凹凸区间和拐点。

(1) $y = x^2 - x^3$　　　　(2) $y = \mathrm{e}^{-x}$

解　(1) 凹区间为 $(-\infty, 1/3)$，凸区间为 $(1/3, +\infty)$，拐点为 $(1/3, 2/27)$。

(2) 凹区间为$(-\infty, +\infty)$.

第三节	导数的应用
3.1	函数的单调性
3.2	函数的极值
3.3	曲线的凹凸性与拐点
3.4	函数图形的描绘

如果在函数 $f(x)$ 的定义域上的某个小区间中,

(1) 曲线是上升(或下降) 的; $\Longleftarrow$ 一阶导数

(2) 曲线是凹的(或凸的) ; $\Longleftarrow$ 二阶导数

(3) 区间端点的位置已知或变化趋势已知; $\Longleftarrow$ 渐近线

那么,我们很容易画出函数在这个区间内的图形.

定义 给定曲线$y = f(x)$, 如果曲线上的一动点沿着曲线趋于无穷远时,该点与某直线的距离趋于 0, 则称此直线为该曲线$f(x)$的渐近线.

1. 水平渐近线
2. 垂直渐近线
3. 斜渐近线

定义

(1) 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，称$y = b$为其水平渐近线。

(2) 若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，称$x = a$为其铅垂渐近线。

注记 (1) $x \to \infty$可以改为$x \to +\infty$或$x \to -\infty$。

(2) $x \to a$可以改为$x \to a^+$或$x \to a^-$。

例 13 求曲线$y=\dfrac{1}{x-1}$的水平和铅垂渐近线.

练习 7 求曲线$y=\dfrac{-x^2+x+1}{x^2}$的水平和铅垂渐近线.

定义 14 (斜渐近线)　若直线$y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线$y = f(x)$的一条斜渐近线。

定理 15　直线$y = kx + b$是曲线$y = f(x)$的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad 而且 \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b.$$

注记　$x \to \infty$可以改为$x \to +\infty$或$x \to -\infty$。

例 16 求曲线$y=\dfrac{x^2}{x+1}$的斜渐近线.

解 $y=x-1$.

练习 8 求曲线$y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$的斜渐近线.

解 $y=x+2$.

函数图形描绘的一般步骤:

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域,观察函数的奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态,求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;
2. 求出方程 $f'(x) = 0$ 和 $f''(x) = 0$ 在函数定义域内的全部实根，用这些根以及函数的间断点或阶导、二阶导数不存在的点把函数的定义域划分成若干个区间.
3. 确定在各个区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的形态;
4. 确定函数的水平、铅值渐近线、斜渐近线以及其他变化趋势;
5. 描出与方程 $f'(x) = 0$ 和 $f''(x) = 0$ 的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，绘出渐近线，再结合第三步讨论的结果画出函数的图形.

例 17 作函数 $y = x^3 - 3x^2 + 6$ 的图形.

解 （1）函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),$$

$$y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$$

(2) 令 $y' = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 2$; 令 $y'' = 0$ 得 $x_3 = 1$.

(3) 单调性、凹凸性、极值和拋点列表如下：

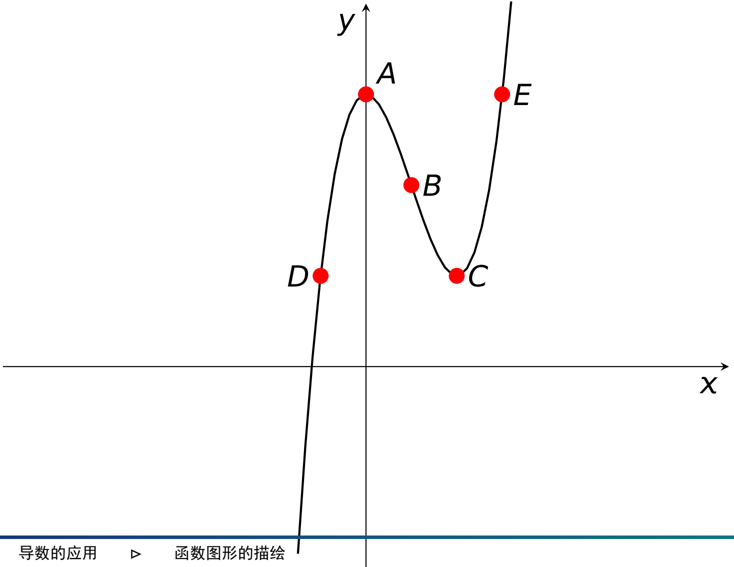
x	$(-\infty, 0)$	0	(0,1)	1	(1,2)	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	凸增	极大	凸减	拐点	凹减	极小	凹增

解 (续)　(4) 变化趋势为：

当 $x \to -\infty$ 时, $y \to -\infty$; 当 $x \to +\infty$ 时, $y \to +\infty$;

(5) 描点：$A(0,6), B(1,4), C(2,2)$, 为了确定函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上的图形,增加辅助作图点 $D(-1,2)$, $E(3,6)$, 作出函数的图形。

解 (续)



例 18 作函数$f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$的图形。

解 易知$f(x)$的定义域为 $D=\{x|x\neq 0\},$，其为非奇非偶函数,且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\ f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0,$ 得驻点 $x=-2,$ 令 $f''(x)=0,$ 得特殊点 $x=-3.$
又因为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2,$$

得水平渐近线 $y=-2;$

解 (续) 由

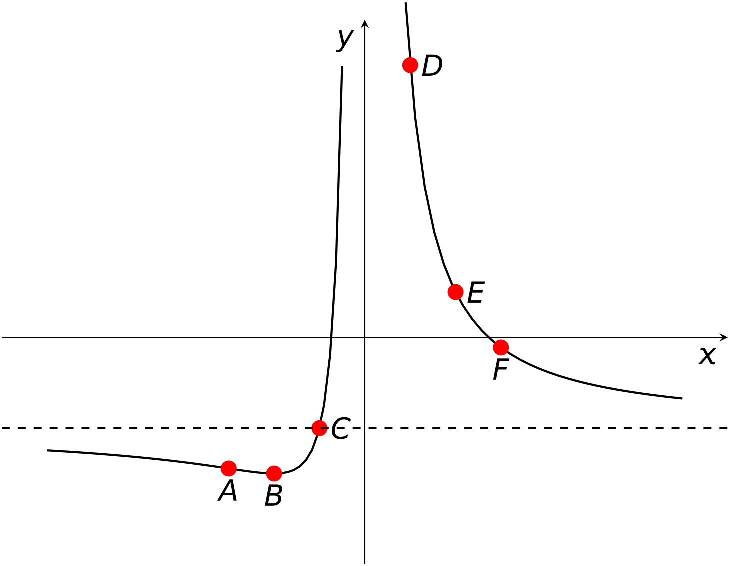
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2\right] = +\infty$$

得铅直渐近线 $x = 0$. 列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点和拐点:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	凸	拐	凹	极	凹	间断	凹

描点作图: $A(-3,-26/9)$, $B(-2,-3)$, $C(-1,-2)$, $D(1,6)$, $E(2,1)$, $F(3,-2/9)$.

函数作图举例



练习 9　描绘函数$y=\dfrac{x^2}{x+1}$的曲线。

解