第一节 数列的极限

第二节 函数的极限

第一节　数列的极限

第二节　函数的极限

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么这个确定的数叫做自变量在这一变化过程中函数的极限。我们主要研究以下两种情形:

1. 自变量 x 任意接近于有限值 $x_0(x \to x_0)$时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;
2. 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x \to \infty)$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的过程中,对应函的数值 $f(x)$ 无限接近于确定值 A.

问题　如何用数学的语言刻画"无限接近"?

- 用$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用 $0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.

定义 1 设$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义，如果存在常数A，对于任何$\epsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当$x \to x_0$时$f(x)$以A为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \text{ 或 } f(x) \to A(\text{当 } x \to x_0)$$

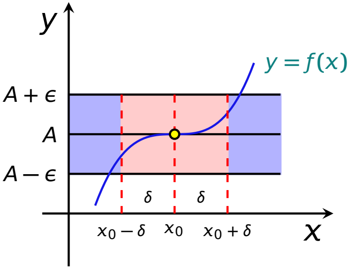
"$\epsilon - \delta$" 定义： $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时,函数 $y=f(x)$ 图形完全落在以直线

$$y=A$$

为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区域内.



小注: 一般情况下, δ 与ϵ有关。

小注: 函数极限是否存在与$f(x)$在x_0点是否有定义无关.

函数极限的例子

1. $y = C$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to C$
2. $y = x$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$
3. $y = 2x + 1$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$
4. $y = \sqrt{x}$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

例子 证明 $\lim_{x \to x_0} C = C, (C$ 为常数).

证明.

任给 $\epsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| <$ 时, 有

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \epsilon,$$

因此

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

函数极限的例子

例子　证明$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$。

证明.

$\forall \epsilon > 0$，取$\delta = \epsilon$，则当$0 < |x - x_0| < \delta$时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$$

所以$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$。

例子　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$（$x_0>0$）。

证明.

$\forall\epsilon>0$，取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\,\epsilon\}$，则当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right| &= \left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right| \\ &\le \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\sqrt{x_0}\,\epsilon}{\sqrt{x_0}}=\epsilon\end{aligned}$$

注记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$与$f(x_0)$未必总是相等。

例 2 设$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$。

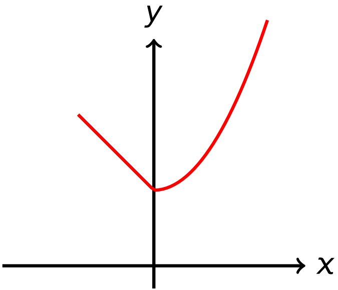
注记 即使$f(x)$在x_0处无定义，极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$仍可能存在。

例 3 函数极限$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$。

设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0; \\ x^2+1, & x \geq 0; \end{cases}$$

证明$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.



分 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情况分别讨论:

1. x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x \to x_0^-$;
2. x 从右侧无限趋近 x_0, 记作 $x \to x_0^+$;

左极限和右极限

定义　设$f(x)$在点x_0 左邻域有定义，如果对任何$\epsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得当$x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当$x \to x_0$时$f(x)$以A为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

定义　设$f(x)$在点x_0 右邻域有定义，如果对任何$\epsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得当$x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当$x \to x_0$时$f(x)$以A为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A.$$

注意到

$$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$$

$$=\{x|0<x-x_0<\delta\}\cup\{x|-\delta<x-x_0<0\}$$

于是我们有

定理 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

例子 设$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。

例子 设$f(x)=|x|$，研究函数极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

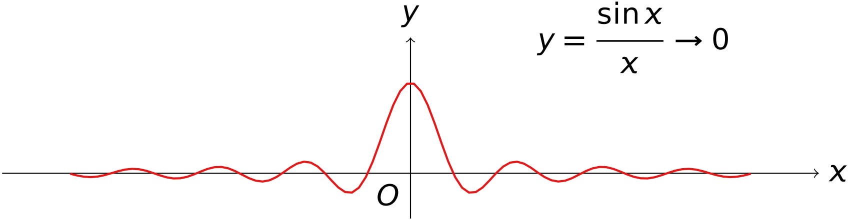
例子 设$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-x+2, & x>1 \end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

注记 研究当$x\to x_0$时函数$f(x)$的左右极限，不必要求$f(x)$在x_0处有定义。

练习 已知函数$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ e^x, & 0<x<1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$；判断极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在，若存在求出该极限。

解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在。

观察函数$\dfrac{\sin x}{x}$当$x \to \infty$时的变化趋势.



函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察: 当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于0.

问题　如何用数学语言刻划函数 “无限接近” .

- 用$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;
- 用$|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

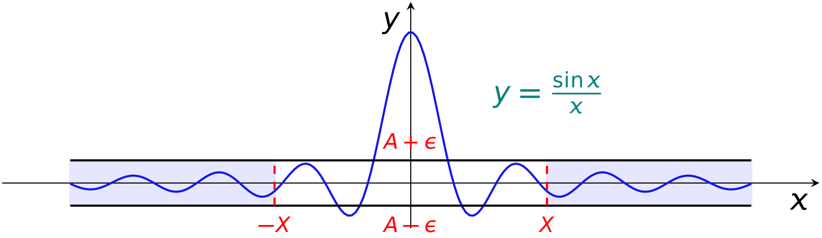
定义 4 设$f(x)$在$|x|$足够大时有定义，如果存在常数A，对任何$\epsilon > 0$，总存在$X > 0$，使得当$|x| > X$时，总有$|f(x) - A| < \epsilon$，则称当$x \to \infty$时$f(x)$以A为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

思考 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$的$\epsilon$语言定义。

注记 $x \to \infty$有两种方向，即$x \to -\infty$和$x \to +\infty$。类似地可以定义$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$和$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$。

定理 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$。



当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时，函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线，宽为2ϵ的带形区域内.

例子 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

证明.

由条件可知:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{x} = \epsilon,$$

故对$\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \epsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

例子 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$。

证明.

$\forall \epsilon > 0$，由数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ 知道，存在正整数 $N_1 > 0$ 使得当 $n > N_1$ 时有 $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$. 取 $X = N_1 + 1$，则当 $x > X$ 时有 $[x] > N_1$，从而

$$\left|\frac{1}{2^x} - 0\right| = \frac{1}{2^x} \le \frac{1}{2^{[x]}} < \frac{1}{2^{N_1}} < \epsilon.$$

函数极限的基本公式I

$$\lim_{x\to\infty} C = C \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{为正整数}) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b > 1) \tag{4}$$

第二节	函数的极限
2.1	函数极限的定义
2.2	函数极限的性质

性质 1 (唯一性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则这个极限唯一.

证明.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 由定义可知:
$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta_1, \delta_2$, 使得:
当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;
当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$;
取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并令 $\epsilon = \frac{|A-B|}{2}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时有

$$\begin{aligned} |A - B| &= |(f(x) - A) - (f(x) - B)| \\ &\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |B - A|. \end{aligned}$$

这是不可能的，故收敛数列不可能有两个极限.

性质 2 (局部有界性) 如果$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在$\delta > 0$和$M > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|f(x)| \le M$。

证明.

取$\epsilon = 1$，则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|f(x) - A| < \epsilon = 1$。此时

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - A) + A| \\ &\le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| \end{aligned}$$

取$M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性。

例子 设$f(x) = 1/x$，则$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$，此时当$0 < |x - 1| < 1/2$时有$|f(x)| \le 2$。

性质 3（局部保号性） 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，且$A > 0$（或$A < 0$），则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或$f(x) < \frac{A}{2} < 0$）。

证明.

取$\epsilon = A/2$，则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|f(x) - A| < \epsilon = A/2$。此时$f(x) > A/2 > 0$。

例子 设$f(x) = 2x - 1$，则$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，此时当$0 < |x - 1| < 1/4$时，有$f(x) > 1/2 > 0$。

定理（保号性） 设$f(x) \geq 0$（或$f(x) \leq 0$），且$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则$A \geq 0$（或$A \leq 0$）。

推论 如果函数$g(x) \geq h(x)$，而且$\lim_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} h(x) = B$，则有$A \geq B$。

极限的性质，对于其它形式的极限也成立。

小结

- 极限的定义：定义、几何意义；
- 极限的性质：唯一性、局部保号性、局部有界性.