概率论与数理统计

第三章·多维随机变量及其分布

2021 年 2 月 24 日

■ 统计与数学学院　■ 王官杰

随机向量

很多随机现象只用一个随机变量来描述是不够的，需要用几个随机变量同时来描述。如：

- 平面上一点的位置需要用两个坐标来表示；
- 天气通常由最高、最低气温，相对湿度，风力，降水量等因素决定；
- 钢材的质量有含碳量、含硫量和硬度等基本指标。

定义 设Ω是某随机试验的样本空间，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是该空间上的随机变量，称

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为Ω上的 n维随机向量或 n维随机变量，称n元函数

$$F(\vec{x}) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为$\vec{X}$的联合分布函数，其中

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

定义 1 设(X, Y)为定义在样本空间Ω上的两个随机变量，则称(X, Y)为二维随机向量或者二维随机变量，称二元函数

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

为(X, Y)的联合分布函数。

定义 1 设(X,Y)为定义在样本空间Ω上的两个随机变量，则称(X,Y)为二维随机向量或者二维随机变量，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

为(X,Y)的联合分布函数。

注记 联合分布函数$F(x,y)$表示事件$\{X\le x\}$和事件$\{Y\le y\}$同时发生的概率。

二维随机变量的分布函数

分布函数的性质：

1. $F(x,y)$对每个自变量都是广义单增的；
2. $0 \le F(x,y) \le 1$；
3. $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$；
4. 随机变量(X,Y)落在矩形区域$(x_1,x_2]\times(y_1,y_2]$内的概率为

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1).$$

二维离散型随机变量

定义 2 如果二维随机变量(X,Y)的所有可能取值

$$(x_i, y_j)$$

只有有限对或者可列无限对，则称(X,Y)为离散型二维随机变量，称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},$$

$$i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$$

为二维离散型随机变量(X,Y)的分布律，或随机变量X和Y的联合分布律。

二维离散型随机变量的联合分布也可以用表格表示：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

二维离散型随机变量

常用性质：

1. $p_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$
2. $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$；
3. $F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

定义 3　如果存在一个非负函数$f(x,y)$，使得二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$可以写成

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s,$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量。函数$f(x,y)$称为(X,Y)的联合概率密度。

联合概率密度函数的基本性质：

1. $f(x,y) \geq 0, \forall x,y$；
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$；
3. 若函数f在点(x,y)处连续，则有
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

联合概率密度函数的基本性质:

4 对任意的平面区域D,

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

特别地,

$$P\{a<X\leq b, c<Y\leq d\} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

例 4　设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Cx^2y^2, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中C是常数。

(1) 求常数C；

(2) 计算$P\left\{X<\frac{1}{3}, Y<\frac{1}{3}\right\}$。

例 4　设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx^2y^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中C是常数。

(1) 求常数C；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 9$

(2) 计算$P\left\{X < \frac{1}{3}, Y < \frac{1}{3}\right\}$。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{1}{729}$

边缘分布

二维随机变量(X, Y)作为一个整体，有联合分布函数$F(x, y)$，其分量X与Y都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成$F_X(x)$和称为X和Y的边缘分布函数。

边缘分布

二维随机变量(X, Y)作为一个整体，有联合分布函数$F(x, y)$，其分量X与Y都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成$F_X(x)$和

称为X和Y的边缘分布函数。

边缘分布由联合分布完全确定：

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \qquad F_Y(y) = F(+\infty, y).$$

二维离散型随机变量的边缘分布

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},$$

$$i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$$

二维离散型随机变量的边缘分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},$$

$$i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

则随机变量X的边缘分布律为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij},\qquad i=1,2,\cdots$$

二维离散型随机变量的边缘分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},$$

$$i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

则随机变量X的边缘分布律为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}, \qquad i=1,2,\cdots$$

而随机变量Y的边缘分布律为

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}, \qquad j=1,2,\cdots$$

二维离散型随机变量的边缘分布

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},$$

$$i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$$

则随机变量X的边缘分布律为

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij}, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

而随机变量Y的边缘分布律为

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}, \qquad j = 1, 2, \cdots$$

通常将这两个分布分别写在联合分布表右边和下边。

二维连续型随机变量的边缘分布

设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为$f(x, y)$，则X，Y的边缘概率密度分别定义为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，则X，Y的边缘概率密度分别定义为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

此时X，Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,\mathrm{d}s,\quad F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,\mathrm{d}t.$$

二维连续型随机变量的边缘分布

若 (X, Y) 服从矩形区域

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

上的均匀分布，则边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & y \in [c, d] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

二维连续型随机变量的边缘分布

若 (X, Y) 服从矩形区域

$$D = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

上的均匀分布，则边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & y \in [c, d] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

这表明：X与Y 都服从均匀分布。该结论对其他非矩形区域上的均匀分布一般不成立。

离散型随机变量的条件分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},$$

$$i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

则X与Y的边缘分布分别为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}, \qquad i=1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}, \qquad j=1,2,\cdots$$

离散型随机变量的条件分布

定义 5　当$p_{\cdot j} > 0$时，称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_i\}}{P\{Y = y_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \; i = 1, 2, \cdots$$

为$Y = y_j$时X的条件概率分布。

离散型随机变量的条件分布

定义 5　当$p_{\cdot j} > 0$时，称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_i\}}{P\{Y = y_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \ i = 1, 2, \cdots$$

为$Y = y_j$时X的条件概率分布。

当$p_{i\cdot} > 0$时，称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_i\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \ j = 1, 2, \cdots$$

为$X = x_i$时Y的条件概率分布。

二维连续型随机变量的条件分布

对于二维连续型随机变量(X, Y)，其联合概率密度为$f(x, y)$，X，Y的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。

对于二维连续型随机变量(X, Y)，其联合概率密度为$f(x, y)$，X，Y的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。

定义 6　若$f_Y(y) > 0$，在$Y = y$条件下，X的条件概率密度定义为

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

二维连续型随机变量的条件分布

对于二维连续型随机变量(X, Y)，其联合概率密度为$f(x, y)$，X，Y的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。

定义 6　若$f_Y(y) > 0$，在$Y = y$条件下，X的条件概率密度定义为

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

同样地，若$f_X(x) > 0$时，在$X = x$条件下，Y的条件概率密度定义为

$$f_{Y|X}(y|x) := \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

二维连续型随机变量的条件分布

定义 7 在$Y = y$条件下，X的**条件分布函数**定义为

$$
\begin{aligned}
F_{X|Y}(x|y) &= P\{X \le x | Y = y\} \\
&= \lim_{h \to 0} P\{X \le x | y \le Y \le y + h\}
\end{aligned}
$$

二维连续型随机变量的条件分布

定义 7 在$Y=y$条件下，X的条件分布函数定义为

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}$$

$$=\lim_{h\to 0}P\{X\le x|y\le Y\le y+h\}$$

定理 8 若$f(\cdot,\cdot)$在点(x,y)处连续，$f_Y(\cdot)$在点y处连续，且$f_Y(y)>0$，则

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(s|y)\,\mathrm{d}s.$$

二维连续型随机变量的条件分布

定义　在$X=x$条件下Y的条件分布函数定义为

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\le y|X=x\}$$

$$=\lim_{h\to 0}P\{Y\le y|x\le X\le x+h\}$$

二维连续型随机变量的条件分布

定义　在$X=x$条件下Y的条件分布函数定义为

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\le y|X=x\}$$

$$=\lim_{h\to 0}P\{Y\le y|x\le X\le x+h\}$$

定理　若$f(\cdot,\cdot)$在点(x,y)处连续，$f_X(\cdot)$在点x处连续，且$f_X(x)>0$，则

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(t|x)\,\mathrm{d}t.$$

练习 1　设(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求$Y=y$时X的条件概率密度，及$P\left\{X\le \frac{1}{2}\middle| Y=\frac{1}{2}\right\}$.

解: 边缘概率密度$f_Y(y)=\begin{cases} y+\frac{1}{2}, & 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$. 当$0\le y\le 1$，条件概率密度存在，而且等于

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

因此所求的条件概率为

$$P\left\{X\le\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_{X|Y}\left(x\middle|\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}.$$

定义 设随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，边缘分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，若对任意实数x，y有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

则称X,Y 相互独立。

定义 设随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，边缘分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，若对任意实数x，y有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

则称X,Y 相互独立。

X,Y相互独立即是指对任意实数x,y，事件$\{X\le x\}$与$\{Y\le y\}$相互独立。

离散型随机变量的独立性

设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

则X与Y的边缘分布分别为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij},\qquad i=1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij},\qquad j=1,2,\cdots$$

则X,Y相互独立的充要条件为

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j},\quad i,j=1,2,\cdots$$

例 9　设二维随机变量(X, Y)的联合分布及边缘分布为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{10}$
1	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	

判断X, Y的独立性。

随机变量的独立性

定义　设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，边缘分布分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，若对任意实数x,y有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

则称X,Y **相互独立**。

定义　设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，边缘分布分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，若对任意实数x,y有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

则称X,Y 相互独立。

X,Y相互独立即是指对任意实数x,y，事件$\{X\le x\}$与$\{Y\le y\}$相互独立。

连续型随机变量的独立性

X, Y相互独立的充要条件是$f(x, y)$可分离变量，即

$$f(x, y) = g(x)h(y).$$

此时

$$f_X(x) = C_1 g(x), \quad f_Y(y) = C_2 h(y),$$

其中

$$C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,\mathrm{d}y, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

例 10　设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 9x^2y^2, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

判断X与Y是否相互独立。

定理 11　设X和Y是相互独立的随机变量，$h(x)$和$g(y)$是$(-\infty, \infty$
的连续函数，则$h(X)$和$g(Y)$也是相互独立的随机变量。

定义　若对所有的$x_1,\ldots,x_m;y_1,\ldots,y_n$有

$$F(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$$

$$=F_1(x_1,\ldots,x_m)F_2(Y_1,\ldots,Y_n)$$

其中F_1,F_2,F分别为$(X_1,\ldots,X_m),(Y_1,\ldots,Y_n)$和$(X_1,\ldots,X_m,Y$
分布函数，则称随机变量$(X_1,\ldots,X_m)$和$(Y_1,\ldots,Y_n)$是相互独立的。

定义 若对所有的$x_1,\ldots,x_m;y_1,\ldots,y_n$有

$$F(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$$

$$=F_1(x_1,\ldots,x_m)F_2(Y_1,\ldots,Y_n)$$

其中F_1,F_2,F分别为$(X_1,\ldots,X_m),(Y_1,\ldots,Y_n)$和$(X_1,\ldots,X_m,Y$
分布函数，则称随机变量$(X_1,\ldots,X_m)$和$(Y_1,\ldots,Y_n)$是相互独立的。

定理 12 设$(X_1,\ldots,X_m)$和$(Y_1,\ldots,Y_n)$相互独立，则$X_i(i=1,2,\ldots,m)$和$Y_j(j=1,2,\ldots,n)$相互独立，又若h,g是连续函数，则$h(X_1,\ldots,X_m)$与$g(Y_1,\ldots,Y_n)$相互独立。

离散型随机变量的函数的分布

设离散型随机变量(X,Y)的联合分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

令$Z=g(X,Y)$，则Z也是一个离散型随机变量，其分布可按如下步骤求得

1. 根据函数关系列出Z的所有可能值；
2. 对Z的每个可能值z，$P\{Z=z\}$等于所有满足$g(x_i,y_j)=z$的p_{ij}之和。

例 13　设二维随机变量(X, Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.3	0.1	0.2

求$Z = X + Y$的分布律.

解: Z 的取值范围为$-1, 0, 1, 2$, 并且

$$P\{Z=-1\}=P\{X=0, Y=-1\}=0.1$$

$$P\{Z=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=1, Y=-1\}$$

$$=0.2+0.3=0.5$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=1, Y=0\}$$

$$=0.1+0.1=0.2$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1, Y=1\}=0.2$$

故Z的分布律为

Z	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.5	0.2	0.2

对连续型随机变量(X, Y)，求$Z = g(X, Y)$的密度函数的基本方法是

1. 根据函数关系先求Z的分布函数
$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\}$$
2. 然后对$F_Z(z)$求导可得Z的概率密度。

$Z=X+Y$的分布

设连续型随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$，则$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

$Z = X + Y$的分布

如果X与Y相互独立，概率密度分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则$Z = X + Y$的概率密度为

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

上述公式称为卷积公式。

例 14　设某种商品在一周内的需要量是一个随机变量，其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

如果各周的需要量相互独立，求两周需要量的概率密度函数。

例 14　设某种商品在一周内的需要量是一个随机变量，其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

如果各周的需要量相互独立，求两周需要量的概率密度函数。

解: $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{6}e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$ 。

正态分布的和

- 若$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且$X$与$Y$ 相互独立，则

$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

- 若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)(i = 1, 2, \ldots, n)$,且它们相互独立，则$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$服从正态分布且

$$Z \sim N(\mu_1 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2).$$

$\max\{X,Y\}$和$\min\{X,Y\}$的分布

设随机变量X与Y相互独立，其分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$。

$\max\{X,Y\}$和$\min\{X,Y\}$的分布

设随机变量X与Y相互独立，其分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$。

设$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为$F_{\max}(z)$，则有

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\,F_Y(z).$$

$\max\{X,Y\}$和$\min\{X,Y\}$的分布

设随机变量X与Y相互独立，其分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$。

设$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为$F_{\max}(z)$，则有

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z).$$

设$Z=\min\{X,Y\}$的分布函数为$F_{\min}(z)$，则有

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\\&=F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z).\end{aligned}$$

$\max(X,Y)$和$\min(X,Y)$的分布

一般地，设连续型随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，则$U=\max\{X,Y\}$的分布为

$$F_U(u)=F(u,u).$$

$\max(X,Y)$和$\min(X,Y)$的分布

一般地，设连续型随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，则$U=\max\{X,Y\}$的分布为

$$F_U(u)=F(u,u).$$

设其边缘分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，则$V=\min\{X,Y\}$的分布为

$$F_V(v)=F_X(v)+F_Y(v)-F(v,v).$$

$\max(X, Y)$和$\min(X, Y)$的分布

一般地，设连续型随机变量(X, Y)的联合分布函数为$F(x, y)$，则$U = \max\{X, Y\}$的分布为

$$F_U(u) = F(u, u).$$

设其边缘分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，则$V = \min\{X, Y\}$的分布为

$$F_V(v) = F_X(v) + F_Y(v) - F(v, v).$$

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P\{\min\{X, Y\} \le v\} = P\{X \le v \text{ 或 } Y \le v\} \\ &= P\{X \le v\} + P\{Y \le v\} - P\{X \le v, Y \le v\} \\ &= F_X(v) + F_Y(v) - F(v, v) \end{aligned}$$