第一节	数列的极限
第二节	函数的极限
第三节	无穷小与无穷大

第一节	数列的极限
第二节	函数的极限
第三节	无穷小与无穷大

第三节	无穷小与无穷大
3.1	无穷小
3.2	无穷大
3.3	小结　思考

定义　如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，就称$f(x)$为当$x \to x_0$时的无穷小.

小注：$f(x)$为当$x \to x_0$时的无穷小 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| < \epsilon$

小注：类似地，可以定义$x \to \infty$、$x \to -\infty$、$x \to +\infty$ 时的无穷小。

例子　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x \to 0$时的无穷小。

例子　函数$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x \to \infty$时的无穷小。

小注：　无穷小是变量，不能与很小的数混淆。

小注：　零是可以作为无穷小的唯一的数

无穷小与函数极限的关系

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

定理的意义:

1. 将一般极限问题转化为特殊极限问题 (无穷小);
2. 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

证明.

必要性: 因 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 所以对$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有

$$|f(x)-A|<\epsilon.$$

令 $\alpha(x)=f(x)-A$, 则有 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x)=A+\alpha(x)$.

充分性: 设 $f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小, 则对$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\alpha(x)|<\epsilon,\ \text{即}\ |f(x)-A|<\epsilon,$$

也即$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$.

定理 两个(有限个)无穷小的和差还是无穷小.

证明.

设α及β是当 $x \to \infty$ 时的两个无穷小, 则对$\forall \epsilon > 0$,
$\exists\ X_1 > 0, X_2 > 0$, 使得 当 $|x| > X_1$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{2};$$

当 $|x| > X_2$ 时恒有

$$|\beta| < \frac{\epsilon}{2};$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 当 $|x| > X$ 时,恒有

$$|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

故 $\alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty)$。

无穷小的运算

问题 无穷多个无穷小的和是不是无穷小？

答案 不是，例如

$$
\begin{array}{cccccccl}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n \to \infty) \\
0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n \to \infty) \\
0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0(n \to \infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \to 0(n \to \infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \to 1(n \to \infty)
\end{array}
$$

定理 1 无穷小和有界量的乘积还是无穷小.

证明.

设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 则 $\exists\ M > 0, \delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时恒有 $|u| \leq M$.

又设 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小, 则对$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时恒有

$$|\alpha| < \frac{\epsilon}{M}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|u \cdot \alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \epsilon.$$

所以当 $x \to x_0$ 时, $u \cdot \alpha$ 为无穷小.

无穷小的运算

推论 常数与无穷小的积是无穷小。

推论 有限个无穷小的积是无穷小。

注意：两个无穷小的商不一定是无穷小。

无穷小的运算

问题 无穷多个无穷小的积是不是无穷小?

答案 不是, 例如:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0 (n \to \infty) \\
1 & 2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0 (n \to \infty) \\
1 & 1 & 3^2 & 1/4 & 1/5 & \ldots & \to 0 (n \to \infty) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \to 0 (n \to \infty) \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \to 1 (n \to \infty)
\end{array}
$$

例子 求函数极限$\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$。

练习 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$; $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0$

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义　设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域有定义。如果对任何给定的$M>0$，总存在$\delta>0$，使得只要$0<|x-x_0|<\delta$，就有$|f(x)|>M$，则称$f(x)$当$x\to x_0$ 时为无穷大，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$。

小注：类似地，可以定义$x\to\infty$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷大。

小注：特殊情况：正无穷大，负无穷大

无穷大

1. 无穷大是变量,不能与很大的数混淆;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 是极限不存在的一种特殊情形。
3. 无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大 (例: $\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$).

例子 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$

证: $\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$,只需要 $|x-1|<\frac{1}{M}$. 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义 2 如果 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 则直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

无穷大

练习 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是$x \to 0$时的无穷大。

练习 $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是$x \to 1$时的无穷大。

定理 3 无穷大的倒数为无穷小，而非零无穷小的倒数为无穷大.

证明.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则对 $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)|>\dfrac{1}{\epsilon}$, 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\epsilon$. 所以当 $x\to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小

续.

反之,设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$.则 $\forall M > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时恒有 $|f(x)| < \dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > M$. 所以当 $x \to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

小注: 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

例 4 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{2x^2+1} = 0 \implies \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{3x+1} = \infty$。

小结

主要内容: 两个定义;四个定理;三个推论.

几点注意:

1. 无穷小（大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;
2. 无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;
3. 无界变量未必是无穷大.

思考

在自变量的同一过程中，无穷大的倒数为无穷小：反之，无穷小的倒数是否一定为无穷大?

答案　不一定。

0 是无穷小，但其倒数不存在.

所以课本上表示为“非零的无穷小的倒数是无穷大”　.