

第一节

集合

第二节

映射与函数

第三节

复合函数与反函数 初等函数

第四节

函数关系的建立

第一节

集合

第二节

映射与函数

第三节

复合函数与反函数 初等函数

第四节

函数关系的建立

第一节

集合

第二节

映射与函数

第三节

复合函数与反函数 初等函数

第四节

函数关系的建立

第一节

集合

第二节

映射与函数

第三节

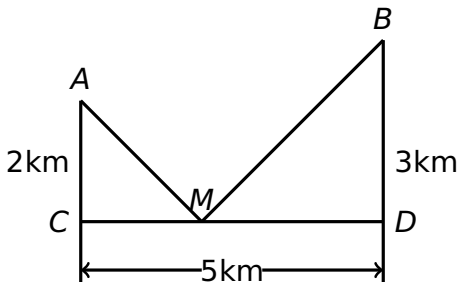
复合函数与反函数 初等函数

第四节

函数关系的建立

函数关系的建立

例 1 在一条直线公路的一侧有A、B两村，其位置如图所示，公共汽车公司欲在公路上建立汽车站M. A、B两村各修一条直线大道通往汽车站，设 $CM = x(\text{km})$ ，试把A、B两村通往M的大道总长 $y(\text{km})$ 表示为 x 的函数.



函数关系的建立

解 根据题意和图示知

$$CM = x, DM = 5 - x.$$

在直角三角形 ACM 中,

$$AM = \sqrt{x^2 + 4},$$

在直角三角形 BDM 中,

$$BM = \sqrt{(5 - x)^2 + 9}.$$

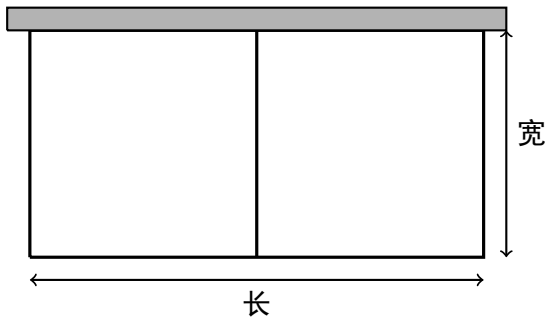
所以

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(5 - x)^2 + 9},$$

此函数的定义域为 $D = [0, 5]$.

函数关系的建立

例2 如图，以墙为一边用篱笆围成长方形的场地，并用平行于宽的篱笆隔开。已知篱笆总长为60米。把场地面积 $S(\text{m}^2)$ 表示为场地宽 $x(\text{m})$ 的函数，并指出函数的定义域。



解 设篱笆的宽为 x , 则

$$\text{长} = 60 - 3x$$

因此

$$S = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x,$$

其定义域为 $\{x|0 < x < 20\}$.

例 3 某工厂每年需某种原料 a 吨，拟分若干批购进，每批进货的费用为 b 元．设该厂使用这种原料是均匀的，即平均库存量为批量的一半．每吨原料的库存费用每年为 c 元．试求出一年中库存费用与进货费用之和与进货批量的函数关系．

解 设进货批量为 x 吨, 进货费用与库存费用之和为 $p(x)$. 因年进货量为 a , 故每年进货批数为 $\frac{a}{x}$, 则进货费用为

$$b \frac{a}{x}.$$

因为使用这种原料是均匀的, 即平均库存为 $\frac{x}{2}$, 故每年的库存费为 $c \cdot \frac{x}{2}$, 所以

$$p(x) = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2} \cdot x,$$

其定义域为 $(0, a]$

例 4 某人从美国到加拿大去度假，已知把美元兑换成加拿大元时，币面数值增加 12%，而把加拿大元兑换成美元时，币面数值减少 12%。请证明经过这样一来一回的兑换后，他亏损了多少钱。

解 设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数, $f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑成的美元数, 则

$$f_1(x) = x + x \cdot 12\% = 1.12x, x \geq 0$$

$$f_2(x) = x - x \cdot 12\% = 0.88x, x \geq 0$$

$$f_2(f_1(x)) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x$$

故 $f_1(x), f_2(x)$ 不互为反函数, 经过一来一回的兑换后, x 美元变成 $0.9856x$ 美元, 即发生了亏损.

例如: 1000 美元经过这样的来回兑换, 将亏损 14.4 美元.

(1) 设生产与销售某种商品的总收入函数 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知当产量分别为0,2,4时，总收入 R 为0,6,8，试确定 R 关于 x 的函数式。

(2) 某商店年销售某种产品800件，均匀销售，分批进货。若每批订货费为60元，每件每月库存费0.2元。试列出库存费与进货费之和 P 与批量 x 之间的函数关系。

(3) 某企业对某产品制定如下销售策略：购买20公斤以下（包括20公斤）部分，每公斤价10元；购买量小于等于200公斤时，其中超出20公斤的部分，每公斤7元；购买超过200公斤的部分，每公斤价5元，试写出购买量 x 公斤的费用函数 $C(x)$ 。

(4) 某车间设计最大生产能力为每月100台机床，至少要完成40台方可保本,当生产 x 台时的总成本函数为 $C(x) = x^2 + 10x$ (百元)。按市场规律，价格为 $P = 250 - 5x$ (x 为需求量)，可以销售完，试写出月利润函数。

练习题答案

$$(1) R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x;$$

$$(2) P = 1.2x + \frac{48000}{x};$$

$$(3) C(x) = \begin{cases} 10x, 0 \leq x \leq 20 \\ 60 + 7x, 20 < x \leq 200 ; \\ 5x + 460, x > 200 \end{cases}$$

$$(4) L(X) = 240x - 6x^2 (40 \leq x \leq 100).$$