注意：文件只列出了部分要点，没有提到的内容不代表不会考察.

4 随机变量的数字特征

数字特征

主要内容：期望的定义：离散型、连续型，随机变量的函数的期望，期望、方差、协方差的性质，相关系数，常见分布的数字特征，大数定律

4.1 数学期望

离散型随机变量的期望

定义：设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

若级数

$$\sum_k x_k p_k$$

绝对收敛，则称其和为随机变量X的数学期望，记为$E(X)$.

连续型随机变量的期望

定义：设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛，则称此积分为随机变量X的数学期望，记为$E(X)$.

随机变量函数的数学期望

定理：设X为随机变量, $Y=g(X)$, 则

1. 若X为离散型随机变量, 分布律为
$$P\{X=x_k\}=p_k, \qquad k=1,2,\cdots.$$
则
$$E(Y)=\sum_k g(x_k)p_k.$$

随机变量函数的数学期望

定理（续）：

2. 若X为连续型随机变量, 概率密度为$f(x)$, 则
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

数学期望的性质

设$X, X_1, X_2, \cdots, X_n$为随机变量, c, k为常数, 则有

1. $E(c)=c$；
2. $E(kX)=kE(X)$；
3. $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$； 推论：$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

4. 若X_1, X_2相互独立, 则有
$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2).$$

推论：若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则有

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

注：如果没有相互独立这一条件，上式一般不成立！

4.2 方差与标准差

方差

定义：设X是一随机变量，若$X - E(X)$平方的期望存在，则称该期望为X的方差，记为$D(X)$（或$\mathrm{Var}(X)$），即

$$\mathrm{Var}(X) := E[(X - E(X))^2].$$

称$\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$为X的标准差. 方差的常用计算公式：

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [EX]^2.$$

方差的性质

设$X, X_1, X_2, \cdots, X_n$为随机变量，c, k为常数，则有

1. $\mathrm{Var}(c) = 0$，$\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$；
2. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$，且等式成立当且仅当X几乎必然为常数；
3. $\mathrm{Var}(kX) = k^2 \mathrm{Var}(X)$；

注：若事件A的概率为1，则称该事件几乎必然成立.

4. 若X_1, X_2相互独立，则有

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2).$$

推

论：若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立, 则有

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k)$$

注：如果没有相互独立这一条件, 上式一般不成立.

4.3 协方差与相关系数

协方差

定义. *定义：对于二维随机向量(X, Y), 称*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

为X与Y的协方差(Covariance).

由定义直接可得：任意随机变量与其自身的协方差就是该随机变量的方差, 即

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X).$$

协方差的性质

设X, Y, Z为随机变量, a, b, c, d为常数, 则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$；
3. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$；
4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$；
5. $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

推论. *两随机变量相互独立, 则协方差等于零；反之未必成立.*

相关系数

定义. 对于二维随机变量(X,Y), 如果两个变量的方差都不为零, 称

$$\rho_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \mathrm{Cov}(X^*,Y^*)$$

为X与Y的相关系数*(Correlation)*, 也可以记为$\rho(X,Y)$.

性质. 相关系数表示随机变量之间的线性相关程度:

1. $|\rho_{X,Y}| \le 1$.
2. $\rho_{X,Y} = -1$ 当且仅当 $Y = aX + b,\ a < 0$.
3. $\rho_{X,Y} = 1$ 当且仅当 $Y = aX + b,\ a > 0$.

定义. 若随机变量X与Y的相关系数$\rho_{X,Y} = 0$, 则称X与Y 线性互不相关, 简称不相关.

- $\rho_{X,Y} = -1$当且仅当$Y = aX + b,\ a < 0$;
- $\rho_{X,Y} = 1$当且仅当$Y = aX + b,\ a > 0$.

性质. 相互独立 $\Longrightarrow$ 不相关; 反之未必成立.

4.4 矩协方差矩阵

设 X 和 Y 是随机变量,若

$$\mu_k = E\left(X^k\right), k = 1, 2, \cdots$$

存在,称它为 X 的 k 阶原点矩,简称 k 阶矩.若

$$\nu_k = E\left\{[X - E(X)]^k\ |, k = 2, 3, \cdots\right.$$

存在,称它为 X 的 k 阶中心矩.若

$$E\left(X^k Y^l\right), k, l = 1, 2, \cdots$$

存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩.若

$$E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\}, k, l=1,2,\cdots$$

存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

4.5 n维正态分布

n 维正态随机变量具有以下四条重要性质:

1. n 维正态变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的每一个分量 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 都是正态变量;反之,若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态变量,且相互独立,则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态变量.

2. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意线性组合 $l_1X_1+l_2X_2+\cdots+l_nX_n$ 服从一维正态分布(其中 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为零).

3. 若 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布,设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 是 $X_j(j=1,2,\cdots,, n$)的线性函数,则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ 也服从多维的正态分布. 这一性质称为正态变量的线性变换不变性.

4. 设 $(X_i, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布,则 "$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立"与"$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关"是等价的.