第一章　集合与函数

一、单项选择题

1. 用区间表示满足不等式 $|x|>|x-4|$ 的所有 x 的集合是（ B ）.

(A) $(-2,2)$　(B) $(2,+\infty)$　(C) $(-\infty,-2)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的定义域是（ C ）.

(A) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$　(B) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$　(D) $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

3. 函数 $f(x)=\begin{cases} x-3, & -4\le x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 3 \end{cases}$ 的定义域是（ C ）.

(A) $-4\le x\le 0$　(B) $0\le x\le 3$

(C) $[-4,3]$　(D) $\{\ x|-4\le x\le 0\}\cap\{\ x|0<x\le 3\}$

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$, 则 $f\left(x^2\right)$ 的定义域是（ D ）.

(A) $[0,4]$　(B) $[0,2]$　(C) $[-2,2]$　(D) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

5. 下列各组中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数的是（ C ）.

(A) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$　(B) $f(x)=x+1, g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

(C) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln|x|$　(D) $f(x)=\begin{cases} 1, x\ge 0 \\ -1, x<0 \end{cases}, g(x)=\frac{|x|}{x}$

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\le -2 \\ x+9, -2<x<2 \\ 2^x, x\ge 2 \end{cases}$, 则下列等式中不成立的是（ B ）.

(A) $f(-2)=f(2)$　(B) $f(1)=f(4)$　(C) $f(-1)=f(3)$　(D) $f(0)=f(-3)$

7. 设 $y=f(x)$ 为单调增加函数, 则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性为（ A ）.

(A) 单调增加　(B) 单调减少　(C) 有增有减　(D) 不能确定

8. 函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 在其定义域上是（ A ）.

(A) 有界奇函数　(B) 有界偶函数　(C) 无界奇函数　(D) 无界偶函数

9. 设 $f(x)=x^2-2, g(x)=2x+1$, 则复合函数 $f\left[g(x)\right]=$ (B) .

(A) $4x^2+4x+3$ (B) $4x^2+4x-1$ (C) $2x^2-3$ (D) x^2+2x+1

10. 下列函数必定是奇函数的是 (C) .

(A) $y=f\left(x^2\right)$ (B) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

(C) $y=f(x)-f(-x)$ (D) $y=5$

11. 函数 $y=10^{x-1}-2$ 的反函数是 (A) .

(A) $y=1+\lg(x+2)$ (B) $y=1+\lg(x-2)$ (C) $y=1+\ln(x+2)$ (D) $y=1-\lg(x+2)$

12. 已知 $f(x)$ 是线性函数, 且 $f(-1)=2, f(1)=-2$, 则 $f(x)=$ (A) .

(A) $-2x$ (B) $2x$ (C) $x-3$ (D) $x+3$

13. $f(x)=x(e^x-e^{-x})$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是 (C) .

(A) 有界函数 (B) 单调增加函数 (C) 偶函数 (D) 奇函数

14. 设 $f(x)=p\sin x+2qx\cos x+x^2$, 其中 p,q 为常数, 已知 $f(2)=3$, 则 $f(-2)=$ (B)

(A) 3 (B) 5

(C) $p\sin 2-4q\cos 2+4$ (D) $8q\cos 2+5$

15. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}, g(x)=1-x$, 则 $f\left[g(x+1)\right]=$ (A) .

(A) $\dfrac{-x}{1+x}$ (B) $\dfrac{x}{1+x}$ (C) $\dfrac{2x}{1-x}$ (D) $\dfrac{1+x}{x}$

16. 下列函数中为奇函数的是 (D) .

(A) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|>1 \\ 1, & 0\le x\le 1 \\ 1, & -1<x<0 \end{cases}$; (B) $\psi(x)=\begin{cases} -1, & -1<x<0 \\ 1, & 0\le x<1 \\ x, & |x|\ge 1 \end{cases}$;

(C) $g(x)=\begin{cases} e^x, & x\ge 0 \\ -\frac{1}{e^x}, & x<0 \end{cases}$; (D) $h(x)=\begin{cases} e^x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -\frac{1}{e^x}, & x<0 \end{cases}$.

17. $f(x)=(\sin 3x)^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上为 (B) .

(A) 周期是 3π 的周期函数 (B) 周期是 $\dfrac{\pi}{3}$ 的周期函数

(C) 周期是 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的周期函数 (D) 不是周期函数

18. 函数 $f(x)=\ln\dfrac{a-x}{a+x}(a>0)$ 是 (A) .

(A) 奇函数 (B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数 (D) 奇偶性决定于 a 的值

19. 设 $f(x)=\begin{cases}-x^3,-3\le x\le 0\\ x^3,0<x\le 2\end{cases}$，则此函数是 (C) .

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 有界函数 (D) 周期函数

20. 下列函数中一定没有反函数的是 (B) .

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 单调函数 (D) 有界函数

21. 设 $f(x)=x|x|, x\in(-\infty,+\infty)$, 则 $f(x)$ (B) .

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调减;

(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增;

(C) 在 $(-\infty,0)$ 内单调增, 而在 $(0,+\infty)$ 内单调减;

(D) 在 $(-\infty,0)$ 内单调减, 而在 $(0,+\infty)$ 内单调增.

22. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则函数 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 (D) .

(A) $[0,1]$ (B) $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ (D) $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

23. 函数 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ 在其定义域上是 (A) .

(A) 有界奇函数 (B) 有界偶函数 (C) 无界奇函数 (D) 无界偶函数

二、填空题

1. 函数 $f(x)=\arcsin\left(x^2-x-1\right)$ 的定义域 $D=$ __$[-1,0]\cup[1,2]$__ .

2. 函数 $y=\ln\ln x$ 的定义域 $D=$ __$(1,+\infty)$__ .

3. 函数 $f(x)=\arcsin\left(x^2-x-1\right)$ 的定义域 $D=$ __$[-1,0]\cup[1,2]$__ .

4. 函数 $y=\ln\ln x$ 的定义域 $D=$ __$(1,+\infty)$__ .

5. 函数 $y=\ln\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}$ 的定义域 $D=$ __$(0,1)$__ .

6. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0\ , & |x|\ge 1\end{cases}$，则 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$ __$\frac{\sqrt{2}}{2}$__ .

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x+3, & 1\le x\le 3\\ \cos 2, & 3<x\le 5\end{cases}$，则 $f(x+2)$ 的定义域为 __$[-1,3]$__ .

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$, 则复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 __$(-\infty,+\infty)$__ .

9. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ $\underline{\dfrac{x}{1-x}}$.

10. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}, g(x)=\sin x$, 则 $f[g(x)]=$ $\underline{\mathrm{e}^{\sin x}}$.

11. 设 $f(x)=\cos 2x, f[g(x)]=1-x^{2}$, 则 $g(x)=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\arccos\left(1-x^{2}\right)}$, $g(x)$ 的定义域为 $\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$.

12. $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2\\ x^{2}-1, & x\geq 2\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ $\underline{\begin{cases}x-1, & x<3\\ \sqrt{x+1}, & x\geq 3\end{cases}}$.

13. 已知 $f(x)=\sin x, f[\phi(x)]=1-x^{2}$, 则 $\phi(x)=\arcsin\left(1-x^{2}\right)$ 的定义域为 $\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$.

14. 设 $f(x+1)=\begin{cases}1-x, & x\leq 0\\ 1\ , & x>0\end{cases}$, 则 $f[f(x)]=$ $\underline{1}$.

15. 若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^{2}+\dfrac{1}{x^{2}}+3$, 则 $f(x)=$ $\underline{x^{2}+1}$.

16. 函数 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$ 的定义域为 $\underline{[-1,3]}$.

17. 设 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{5}{t}+2t^{2}$, 则 $f\left(t^{2}+1\right)=$ $\underline{5\left(t^{2}+1\right)+\dfrac{2}{\left(t^{2}+1\right)^{2}}}$.

18. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $\underline{\begin{cases}[a,1-a], & 0\leq a\leq \frac{1}{2};\\ [-a,1+a], & -\frac{1}{2}\leq a\leq 0\end{cases}}$.

19. 已知 $f(x)=\arcsin x, g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$, 则 $f[g(x)]$ 的定义域为 $\underline{[\sqrt{2},+\infty)\cup(-\infty,\ -\sqrt{2}]}$.

20. 若 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 则 $f\{f[f(x)]\}=$ $\underline{x}$.

21. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$, 则 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ 的定义域为 $\underline{\left[-\dfrac{1}{2},0\right]}$.

22. $f(x)=\log_{2}\left(\log_{2} x\right)$ 的定义域为 $\underline{(1,+\infty)}$.

三、计算题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2}-x+1, & x\leq 1\\ 2x-x^{2}, & x>1\end{cases}$ ，求 $f(1+a)+f(1-a)$，其中 $a>0$.

解. 因为 $a>0$，所以 $1+a>1$，$1-a<1$，故

$$f(1+a)=2(1+a)-(1+a)^2=1-a^2,$$

$$f(1-a)=(1-a)^2-(1-a)+1=a^2-a+1$$

故 $f(1+a)+f(1-a)=2-a$.

2. 设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x+2)$.

解. 令 $u=x-2$，$x=u+2$，代入得

$$f(u)=(u+2)^2-2(u+2)+3=u^2+2u+3$$

所以

$$f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11.$$

3. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}\,(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

解. 由条件

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}=\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x^2}+3}=\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}$$

所以

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

4. 设 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{5}+\sqrt{\sin\pi x}$，求 $f(x)$ 的定义域.

解. 由 $\arcsin\dfrac{2x-1}{5}$ 有 $\left|\dfrac{2x-1}{5}\right|\leq 1$，故 $-2\leq x\leq 3$，又由 $\sqrt{\sin\pi x}$ 有 $\sin\pi x\geq 0$ 得

$$2k\leq x\leq 2k+1\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

故函数的定义域为 $[-2,-1]\cup[0,1]\cup[2,3]$.

5. 设 $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域.

解. 由

$$\ln\frac{2-x}{2+x},$$

有

$$\frac{2-x}{2+x}>0,$$

得

$$-2<x<2;$$

当 $x\neq 0$ 时，对 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 有 $x>\dfrac{1}{2}$ 或 $x<-\dfrac{1}{2}$，故函数 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为

$$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$$

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}x, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

解. $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$，$\therefore\quad f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$.

7. 求函数 $y=\ln\dfrac{a-x}{a+x}\,(a>0)$ 的反函数的形式.

解. 由

$$\frac{a-x}{a+x}=\mathrm{e}^y$$

得

$$x=\frac{a(1-\mathrm{e}^y)}{1+\mathrm{e}^y},$$

所求反函数为

$$y=\frac{a(1-\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}.$$

8. $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解. 因为 $f[\varphi(x)]=1-x^2=\sin\varphi(x)$，所以

$$\varphi(x)=\arcsin\left(1-x^2\right)$$

故 $\left|1-x^2\right|\leq 1\Rightarrow$ 定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}-\mathrm{e}^x,\ x\leq 0\\ x,\ x>0\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}0, x\leq 0\\ -x^2, x>0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 及 $f[\varphi(x)]$.

解. $f(x)$ 的反函数

$$g(x)=\begin{cases}\ln(-x), -1\leq x<0\\ x\quad, x>0\end{cases},$$

从而

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-1, x\leq 0\\ -\mathrm{e}^{-x^2}, x>0\end{cases}.$$

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, -\infty<x<0\\ \sqrt{x}+1,\ 0\leq x\leq 4\\ x-1,\ 4<x<+\infty\end{cases}$，求 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$.

解. 由条件知

1. 当 $-\infty<x<0$ 时，$y=\mathrm{e}^x$，即 $x=\ln y$，$0<y<1$;
2. 当 $0\leq x\leq 4$ 时，$y=\sqrt{x}+1$，即 $x=(y-1)^2$，$1\leq y\leq 3$;
3. 当 $4<x<+\infty$ 时，$y=x-1$，即 $x=y+1$，$y>3$;

故得反函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ (x-1)^2, & 1\le x\le 3\\ x+1, & 3<x<+\infty\end{cases}.$$

四、综合与应用题

1. 设 $y=1+a+f\left(\sqrt{x}-1\right)$ 满足条件 $y\big|_{a=0}=x$ 及 $y\big|_{x=1}=2$，求 $f(x)$ 及 y.

解. 由 $y\big|_{a=0}=x$ 得

$$f\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+2\left(\sqrt{x}-1\right)$$

故 $f(x)=x^2+2x$，此时

$$y=1+a+x-1=a+x$$

又由 $y\big|_{x=1}=2$ 得 $a=1$，故 $y=1+x$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}+\arcsin\dfrac{2x-1}{4}$，求 $f(x)$ 的定义域.

解. 由

$$9-x^2\ge 0$$

得

$$-3\le x\le 3;$$

由

$$x+2>0\text{ 且}x+2\ne 1,$$

得

$$x>-2\text{ 且}x\ne -1;$$

由

$$\left|\frac{2x-1}{4}\right|\le 1$$

得

$$-\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2};$$

故函数的定义域为

$$\left[-\frac{3}{2},-1\right)\cup\left(-1,\frac{5}{2}\right].$$

3. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f\left[\varphi(x)\right]=1-x$，且 $\varphi(x)\ge 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解. 易知

$$f\left[\varphi(x)\right]=e^{\left[\varphi(x)\right]^2},$$

由 $e^{\left[\varphi(x)\right]^2}=1-x$ 及 $\varphi(x)\ge 0$ 得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域为 $x\le 0$.

4. 求函数 $y=x|x|+4x$ 的反函数.

解. 由 $y=x(|x|+4)$ 得，y 与 x 同号.

(1) 当 $x\geq 0$ 时，$x^2+4x-y=0$，得 $x=-2\pm\sqrt{4+y}\quad(x\geq 0)$，故

$$x=-2+\sqrt{4+y},$$

(2) 当 $x<0$ 时，$x^2-4x+y=0$，得 $x=2\pm\sqrt{4-y}\quad(x<0)$，故 $x=2-\sqrt{4-y}$.

故反函数为

$$y=\begin{cases}2-\sqrt{4-x}, x<0\\ -2+\sqrt{4+x}, x\geq 0\end{cases}$$

5. 判定函数 $f(x)=\left(e^{x+|x|}-1\right)\cdot\ln(1+|x|-x)$ 的奇偶性.

解. 由条件知

1. 当 $x\geq 0$ 时，$|x|-x=0$，得 $\ln(1+|x|-x)=0$，从而 $f(x)=0$；

2. 当 $x<0$ 时，$|x|+x=0$，得 $e^{x+|x|}-1=0$，从而 $f(x)=0$；

综上述，对任意 x，$f(x)\equiv 0$，故 $f(-x)=0=f(x)$，$f(-x)=0=-f(x)$，即 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

6. 设 $f(x)$ 对一切实数 x_1，x_2 成立 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，且 $f(0)\neq 0$，$f(1)=a$，求 $f(0)$ 及 $f(n)$. (n 为正整数).

解. 取 $x_1=x_2=0$ 代入已知式，得

$$f(0+0)=f(0)\cdot f(0),\ f(0)\neq 0,$$

因此 $f(0)=1$. 又

$$f(1)=a,\ f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=a^2,$$

设 $f(k)=a^k$, 则

$$f(k+1)=f(k)\cdot f(1)=a^k\cdot a=a^{k+1}$$

故对一切 n，有 $f(n)=a^n$.

7. 某厂按年度计划消耗某种零件 48000 件，若每个零件每月库存费 0.02 元，采购费每次 160 元，为节省库存费，分批采购. 试将全年总的采购费和库存费这两部分的和 $f(x)$ 表示为批量 x 的函数.

解. 易知

$$\begin{aligned}f(x)&=\text{库存费}+\text{采购费}\\&=0.02\times 12\times\frac{x}{2}+\frac{48000}{x}\times 160=0.12x+\frac{7.68\times 10^6}{x}\end{aligned}$$

8. 市场中某种商品的需求函数为 $q_d=25-p$，而该种商品的供给函数为 $q_s=\dfrac{20}{3}p-\dfrac{40}{3}$, 试求市场均衡价格和市场均衡数量.

解. 由均衡条件 $q_d = q_s$ 得

$$25 - p = \frac{20}{3}p - \frac{40}{3},$$

移项整理得

$$23p = 115 \quad \Rightarrow \quad p_0 = 5,$$

$$q_0 = \frac{20}{3}p_0 - \frac{40}{3} \quad \Rightarrow \quad q_0 = 20,$$

即市场均衡价格为 5，市场均衡数量为 20.

9. 某商品的成本函数 (单位：元) 为 $C = 81 + 3q$, 其中 q 为该商品的数量. 试问：

(1) 如果商品的售价为 12 元/件，该商品的保本点是多少？

(2) 售价为 12 元/件时，售出 10 件商品时的利润为多少？

(3) 该商品的售价为什么不应定为 2 元/件？

解. (1) 依题意，$C(q) = 81 + 3q = 12q = R(q) \Rightarrow \quad q = 9$ (件)；

(2) $L(10) = R(10) - C(10) = 12 \times 10 - 81 - 3 \times 10 = 9$ (元)；

(3) 若商品的售价实为 2 元/件，则

$$L(q) = R(q) - C(q) = 2q - (81 + 3q) = -81 - q < 0 \text{ (元)}$$

从而无法盈利.

10. 某商品的需求量 Q 是价格 P 的线性函数 $Q = a + bP$，已知该商品的最大需求量为 40000 件 (价格为零时的需求量)，最高价格为 40 元/件 (需求量为零时的价格). 求该商品的需求函数与收益函数.

解. 因为 $Q = a + bP$

当 $P = 0$ 时，将 $Q = 40000$ 代入上式得 $a = 40000$；

当 $Q = 0$ 时，将 $P = 40$ 代入得 $a + 40b = 0$，故 $b = -1000$；

需求函数：$Q = 40000 - 1000P$

收益函数：$R(Q) = P \cdot Q = Q\left(\dfrac{40000 - Q}{1000}\right) = 40Q - \dfrac{Q^2}{1000}$.

11. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 l 表示为订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少？

解. (1) 依题意，得 $p = \begin{cases} 90, & x \le 100 \\ 90 - 0.01(x - 100), & 100 < x \le 1600 \\ 75, & x > 1600 \end{cases}$；

(2) 由 (1) 及已知条件，得 $l=\begin{cases} 30x, & x\le 100 \\ (31-0.01x)x, & 100<x\le 1600 \\ 15x, & x>1600 \end{cases}$；

(3) 当 $x=1000$ 时，$l=(31-0.01\times 1000)\times 1000=21000$ (元).

五、分析与证明题

1. 证明 $f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^x-\left(2-\sqrt{3}\right)^x$ 是奇函数.

解. 因 $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$，即 $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，于是

$$f(-x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}-\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=-\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^x-\left(2-\sqrt{3}\right)^x\right]=-f(x)$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

2. 设函数 $y=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$，$x=b$ 均对称 $(a\neq b)$，试证：$y=f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

解. 依题设 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$，于是，

$$\begin{aligned} f(x)&=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)] \\ &=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)] \\ &=f[b-(2a-x-b)] \\ &=f[x+2(b-a)] \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数，其周期 $T=2(b-a)$.