高等数学–微积分(一)

第四章·中值定理及导数的应用

2020 年 12 月 23 日

■ 统计与数学学院 ■ 王官杰

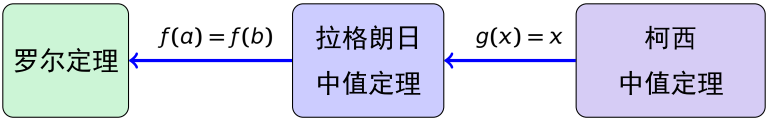
第一节 微分中值定理

微分中值定理

本节主要内容:

1. 罗尔定理
2. 拉格朗日中值定理
3. 柯西中值定理

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系:



费马引理 设$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，且$\forall x \in U(x_0)$有$f($
$f(x_0)$（或$f(x) \geq f(x_0)$）. 如果$f(x)$在x_0处可导. 则有$f'(x_0) = 0$.

证明: 不妨设$f(x_0)$为极大值，则

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

于是，我们有

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0.$$

定理 (罗尔定理) 如果函数$f(x)$满足条件:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续,

(2) 在开区间(a,b)上可导,

(3) 在端点处$f(a)=f(b)$,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=0$.

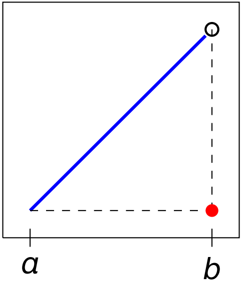
导数为零的点称为函数的驻点或稳定点。

证明：因为$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，所以$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值，分别记为M、m.

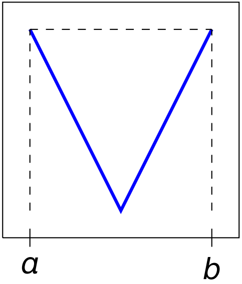
(1) 若$M=m$，则$f(x)$在$[a,b]$上为常数，显然结论成立.

(2) 若$M>m$, 因为$f(a)=f(b)$，所以M或m至少有一个在(a,b)内的一点$x=\xi$处取得，因此ξ是f的一个极值点. 又$f(x)$在(a,b)内可导，由费马引理可得 $f'(\xi)=0$

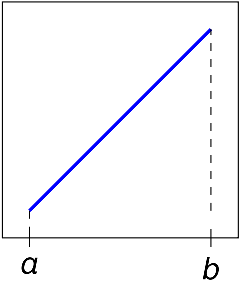
如果定理的三个条件有一个不满足，则结论可能不成立.



(a) 缺条件1



(b) 缺条件2



(c) 缺条件3

如果定理的三个条件有一个不满足，则结论可能不成立.

例 1　证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1的正实根.

证明.

设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在$[0,1]$连续, 且 $f(0)=1$, $f(1)=-3$. 由介值定理存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$. 即x_0为方程在$(0,1)$上的根。

设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$.

易知$f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件, 因此在x_0和x_1之间至少存在一个 ξ 使得 $f'(\xi)=0$.但

$$f'(x)=5\left(x^4-1\right)<0,(x\in(0,1))$$

矛盾, 故x_0为$(0,1)$上的唯一实根.

练习　设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，而且$f(0)=0$，$f(1)=$
1．证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2\xi$.

定理 (拉格朗日中值定理) 如果函数$f(x)$满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续，

(2) 在开区间(a,b)内可导，

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理

证明： 令$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 则 $f(x)$满足：

1. $F(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,
2. $F(x)$在开区间(a,b)内可导,
3. $F(a)=F(b)=0$.

由罗尔定理可得，$\exists\ \xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

几点说明:

1. 当$f(a)=f(b)$时, 拉格朗日中值定理即为罗尔定理.
2. 拉格朗日中值定理的两个条件是使结论成立的充分不必要条件.
3. 拉格朗日中值定理的结论可以改写为:$\exists\ \xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \qquad \text{(拉格朗日中值公式)}$$

> 拉格朗日中值公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

例 2 对函数$f(x)=x^3$在区间$[0,1]$上验证拉格朗日定理.

练习 1 对$f(x)=x^3+x$在区间$[-1,1]$上验证拉格朗日定理.

例 3　证明当$x_2 > x_1$时不等式成立：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \le x_2 - x_1.$$

练习 2　证明：当$x_2 > x_1$时有

$$\sin x_2 - \sin x_1 \le x_2 - x_1.$$

推论 4 如果函数$f(x)$在区间I上的导数恒为0，那么$f(x)$在区间I上是一个常数.

证明.

设 x_1, x_2 为 I 内任意两点 $(x_1 < x_2)$. 在 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理,有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

因为 $f'(x) = 0$, 所以 $f'(\xi) = 0$, 从而

$$f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad 即\ f(x_2) = f(x_1)$$

由于任意两点的函数值相等,必有

$$f(x) = C$$

定理 (柯西中值定理) 如果函数$f(x)$和$g(x)$满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a, b]$上都连续，

(2) 在开区间(a, b)内都可导，

(3) 在开区间(a, b)内$g'(x) \neq 0$，

则至少存在一点$\xi \in (a, b)$使得$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

注： 拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情况。

第一节	微分中值定理
1.1	罗尔定理
1.2	拉格朗日定理
1.3	柯西中值定理
1.4	小结

证明.

作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)],$$

易知$\varphi(x)$ 满足罗尔定理的条件, 所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\varphi'(\xi)=0.$

所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\varphi'(\xi)=0.$ 即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)=0,$$

所以

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例 5　对函数$f(x) = x^3$和$g(x) = x^2 + 1$在区间$[1, 2]$上验证柯西定理.

例 6 设函数 $f(x)$ 在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

解 分析: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}.$$

设 $g(x) = x^2$, 则 $f(x), g(x)$ 在[0,1]上满足柯西中值定理的条件,所以在(0,1)内至少存在一点,有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} \quad \text{即} \quad f'(\xi) = 2\xi[f(1)-f(0)].$$

本节主要内容:

1. 罗尔定理
2. 拉格朗日中值定理
3. 柯西中值定理

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系: