从麦克斯韦方程组到电磁场波动方程

在导波系统中,磁场和电场分布在(广义)正交坐标系中,可以用横向分量和纵向分量表示。

$$\mathbf{E}(u_1,u_2,z) = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_z \ \mathbf{H}(u_1,u_2,z) = \mathbf{H}_T + \mathbf{H}_z$$

其中下标带T的是横向分量,下标带z的是纵向分量。

考虑一个典型的正交坐标系如直角坐标系和柱坐标系。他们都有一个z坐标,与z坐标垂直的平面即 x-y平面和 $r-\theta$ 平面便都是这儿所说的横向分量所在的平面。也就是说,纵向分量只能沿着一个坐标方向,而横向分量可以沿着在横截面上的任意方向。

这儿说"横截面",是因为2坐标正方向就是导波系统延伸的方向。如同轴线伸长的方向。

导波系统中的电磁波可以分为三种,他们的区别在于纵向场的有无及性质。

1. 横磁波(TM波): $H_z = 0, E_z \neq 0$ 2. 横电波(TE波): $E_z = 0, H_z \neq 0$ 3. 横电磁波(TEM波): $E_z = H_z = 0$

TM波

考虑:

1. 麦克斯韦方程组中的两个旋度方程(在无源区域):

$$abla extbf{X} extbf{E} = -j\omega \mu extbf{H}
onumber
o$$

2. TM波场量 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_z, H = H_T$

3.
$$\nabla = a_{u_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + a_{u_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + a_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_T + a_z \frac{\partial}{\partial z}$$

联立有:

$$(\nabla_T + a_z \frac{\partial}{\partial z}) \times (\mathbf{E}_T + \mathbf{E}_z) = -j\omega\mu \mathbf{H}_T \tag{1}$$

$$(\nabla_T + a_z \frac{\partial}{\partial z}) \times \mathbf{H}_T = j\omega \varepsilon (\mathbf{E}_T + \mathbf{E}_z)$$
 (2)

展开这个式子。展开时应考虑:

$$abla_T imes \mathbf{E}_T = (a_{u_1} imes rac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial u_1} + a_{u_2} imes rac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial u_2})$$

由右手定则, 叉乘方向应该是z方向, 考虑到(1)式右侧没有在z 上的分量, 所以有:

$$abla_T imes \mathbf{E}_T = 0$$

类似的,有:

$$egin{aligned} a_z imes rac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} &= 0 \ \
abla_T imes \mathbf{E}_z + a_z imes rac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial z} &= -j\omega \mu \mathbf{H}_T \end{aligned}$$

对于(2)式,有:

$$egin{aligned}
abla_T imes \mathbf{H}_T &= j\omega arepsilon \mathbf{E}_z \ \\ a_z imes rac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial z} &= j\omega arepsilon \mathbf{E}_T \end{aligned}$$