从麦克斯韦方程组到电磁场波动方程

在导波系统中，磁场和电场分布在（广义）正交坐标系中，可以用横向分量和纵向分量表示。

$$\mathbf{E}(u_1,u_2,z)=\mathbf{E}_T+\mathbf{E}_z$$
$$\mathbf{H}(u_1,u_2,z)=\mathbf{H}_T+\mathbf{H}_z$$

其中下标带T的是横向分量，下标带z的是纵向分量。

考虑一个典型的正交坐标系如直角坐标系和柱坐标系。他们都有一个z坐标，与z坐标垂直的平面即 $x-y$平面和 $r-\theta$ 平面便都是这儿所说的横向分量所在的平面。也就是说，纵向分量只能沿着一个坐标方向，而横向分量可以沿着在横截面上的任意方向。

这儿说“横截面”，是因为z坐标正方向就是导波系统延伸的方向。如同轴线伸长的方向。

导波系统中的电磁波可以分为三种，他们的区别在于纵向场的有无及性质。

1. 横磁波(TM波)：$H_z=0,E_z\neq 0$
2. 横电波(TE波)：$E_z=0,H_z\neq 0$
3. 横电磁波(TEM波)：$E_z=H_z=0$

TM波

考虑:

1. 麦克斯韦方程组中的两个旋度方程（在无源区域）：

$$\nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{H}$$
$$\nabla\times\mathbf{H}=j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

2. TM波场量$\mathbf{E}=\mathbf{E}_T+\mathbf{E}_z,H=H_T$
3. $\nabla=a_{u_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+a_{u_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+a_z\frac{\partial}{\partial z}=\nabla_T+a_z\frac{\partial}{\partial z}$

联立有:

$$(\nabla_T+a_z\frac{\partial}{\partial z})\times(\mathbf{E}_T+\mathbf{E}_z)=-j\omega\mu\mathbf{H}_T \tag{1}$$

$$(\nabla_T+a_z\frac{\partial}{\partial z})\times\mathbf{H}_T=j\omega\varepsilon(\mathbf{E}_T+\mathbf{E}_z) \tag{2}$$

展开这个式子。展开时应考虑:

$$\nabla_T \times \mathbf{E}_T = (a_{u_1} \times \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial u_1} + a_{u_2} \times \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial u_2})$$

由右手定则，叉乘方向应该是z方向，考虑到(1)式右侧没有在z 上的分量，所以有:

$$\nabla_T \times \mathbf{E}_T = 0$$

类似的，有:

$$a_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla_T \times \mathbf{E}_z + a_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial z} = -j\omega\mu \mathbf{H}_T$$

对于(2)式，有:

$$\nabla_T \times \mathbf{H}_T = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_z$$

$$a_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial z} = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_T$$